КВАНТ
ЖУРНАЛ

1980

1 - 12

НОМЕР
1

Основан в 1970 году

Квант

1
1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

На первой
странице обложки
показана
поверхность Штейнера,
нарисованная ЭВМ
Подробнее см с 45

В НОМЕРЕ:

2 *В. Лешковцев.* Физика в Московском государственном университете
10 *В Вышенский, Н. Перестюк, А Самойленко* Поговорим о дифференциальных уравнениях
15 *И Воробьев.* Гора и ветер
18 *С. Гиндикин.* История о том, как Галилей открыл законы движения

Лаборатория «Кванта»

26 *В. Майер.* Автоколебания в потоке воздуха

Математический кружок

27 *М. Мамикон.* Обобщенная задача о фальшивых монетах

Задачник «Кванта»

31 Задачи М601—М605; Ф613—Ф617
33 Решения задач М546—М550, Ф558—Ф562

«Квант» для младших школьников

41 Задачи
42 *Д. Изаак, Т. Уткина.* Кружочки Стены Мошкина

Практикум абитуриента

48 *Н. Виленкин.* Три точки, три точки, три точки.
51 *А. Александров, А. Забоев, Н. Шолохов.* Московский инженерно-физический институт

Искусство программирования

52 Заочная школа программирования Урок 5
56 *А. Салихова, Н. Соколова.* Графическая система Шпага

Информация

60 *В. Асланян, С. Коршунов, Т. Чугунова.* Заочная физико-техническая школа
63 **Шахматная страничка**
64 **Ответы, указания, решения**
Наша обложка *(45)*
Смесь *(9, 17, 25, 29, 40, 55, 62)*

Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант» 1980

В. Лешковцев

Физика в Московском государственном университете

Московский государственный университет (МГУ) недаром носит имя великого русского ученого Михаила Васильевича Ломоносова. Университет был создан 225 лет тому назад по его совету и проекту. «Главное мое основание — писал Ломоносов по поводу этого проекта — чтобы план служил во все будущие годы». Эта надежда сбылась — университет возник и вскоре стал одним из основных очагов русского просвещения и науки. Однако непосредственного участия в деятельности Московского университета Ломоносов не принимал. Учеников в области физики у него не было, поэтому он практически не мог оказать какое-либо влияние на развитие физики в МГУ.

Московский университет был создан по указу императрицы Елизаветы Петровны 12 января 1755 года. Сначала в нем было всего лишь три факультета: философский, юридический и медицинский; на последнем читался курс физики. Только в 1804 году был образован факультет физических и математических наук. Сама жизнь (развитие производства, потребности армии) начала предъявлять требования к подготовке специалистов в этих областях науки.

Еще Петр I, стремясь к развитию отечественной науки, указывал на необходимость не только обучать наукам, но и «производить оные». Но в то время, как в Академию наук приглашались из-за рубежа известные ученые (Эйлер, Бернулли, Ленц и другие), для Московского университета ничего подобного сде-

---

Вверху изображено здание физического факультета МГУ на Ленинских горах.

лано не было. К тому же научные труды по физике, публиковавшиеся преподавателями за первые полвека его существования, погибли во время пожара 1812 года.

Первым крупным физиком, работавшим в Московском университете, был Александр Григорьевич Столетов. Он отдал университету более 30 лет своей жизни. Столетов был воспитанником Московского университета, который он окончил с отличием в 1860 году. Вскоре его на три года направили за границу, где он продолжил свое образование в лабораториях Берлина, Гейдельберга, Геттингена, Парижа. В эти годы он учился у Гельмгольца, Кирхгофа, Вебера, Магнуса и других крупных ученых.

В 1865 году Столетов вернулся на родину и вскоре начал преподавать физику в университете — деятельность эта продолжалась до последних дней его жизни (он умер в 1896 году). Он первый начал читать курс математической физики. Ценою огромных усилий ему удалось в 1872 году создать первую физическую лабораторию, в которой можно было проводить самостоятельные научные исследования. До этого момента преподаватели университета, в том числе и сам Столетов, проводили научные исследования только в иностранных лабораториях. Столетов основал также первый постоянно действующий научный семинар по проблемам физики, из числа участников которого выросли такие крупные ученые, как Н. А. Умов, П. Н. Лебедев, Н. Е. Жуковский.

Работы Столетова заложили основы теоретической электротехники; они получили широкое международное признание. В 1871 году Столетов начал исследование магнитных свойств железа — основного материала электротехники.

Под действием магнитного поля железо приобретает магнитные свойства — оно становится магнитом. Намагничивание тела I и его магнитная проницаемость μ зависят от величины магнитной индукции намагничивающего поля. Кроме того, эти величины зависят также от формы тела, что весьма осложняет исследования. До Столетова величины I и μ измеряли только на длинных стержнях. Столетов создал новый метод измерения этих величин, позволяющий исключить влияние формы тела и получить закономерности, характеризующие материал, из которого оно сделано. Опираясь на эти закономерности, создатели электрических машин нашли ключ к решению многих практических задач.

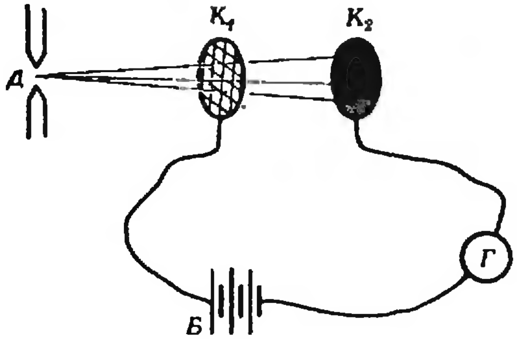
Памятник А. Г. Столетову у входа на физический факультет.

В 1887 году немецкий физик Герц обнаружил загадочную связь между электричеством и светом. Изучая электрический пробой в газах (проскакивание искры между включенными в электрическую цепь электродами), он обнаружил, что облучение электродов ультрафиолетовыми лучами облегчает пробой. Приступив к исследованию этого явления (впоследствии названного фотоэлектрическим эффектом, или сокращенно — фотоэффектом), Столетов создал оригинальную методику, позволившую раскрыть основные закономерности фотоэффекта.

На рисунке приведена схема его экспериментов. В электрическую цепь, состоящую из батареи *Б* и гальванометра *Г*, включены также две металлические пластинки K_1 и K_2, одна из которых сделана в виде сетки. Электрическая дуга *Д* является источником ультрафиолетовых лучей. Освещая ими металлические пластинки, Столетов наблюдал прохождение тока в «разомкнутой» электрической цепи. Теперь мы знаем, что носителями тока служат электроны, которые вырываются квантами ультрафиолетового излучения из металлического катода K_2 и устремляются к аноду K_1.

В результате своих экспериментов Столетов установил характер зависимости силы фототока, текущего по цепи, от напряжения, приложенного к пластинкам. Оказалось, что с увеличением напряжения фототок сначала растет до определенной величины (ее называют током насыщения), после чего остается практически постоянным. Это означает, что все электроны, покинувшие под влиянием света катод K_2, достигают анода K_1 и участвуют в прохождении тока по электрической цепи. Столетов показал также, что сила фототока насыщения пропорциональна световому потоку, падающему на катод, или по-современному — числу падающих на катод квантов света. Законы фотоэффекта, открытые Столетовым, сыграли важную роль в обосновании квантовой теории излучения и нашли много ценных практических применений.

После смерти Столетова созданная им кафедра экспериментальной физики перешла к другому крупному физику Николаю Алексеевичу Умову. Он тоже был воспитанником Московского университета, но, окончив его в 1867 году, более 20 лет преподавал в Одесском университете. В Москву Умов вернулся лишь в 1893 году и проработал в Университете вплоть до 1911 года. Лекции его пользовались необычайно широкой популярностью и собирали множество слушателей, часто даже с других факультетов. Умов был первым физиком-теоретиком в истории нашей страны. Прекрасно владея сложным математическим аппаратом и глубоко разбираясь в принципиальных физических проблемах, он выполнил ряд крупных научных работ в области физики твердого тела, теплофизики, электромагнетизма и земного магнетизма. Остановимся кратко лишь на двух его исследованиях.



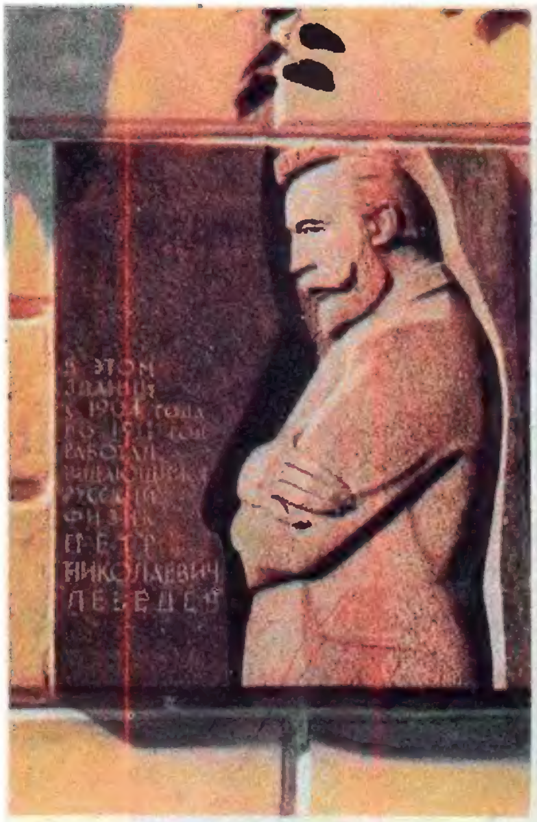
В начале 1874 года Умов опубликовал работу «Уравнения движения энергии в телах». В ней содержится идея о потоке различных видов энергии в разных средах. Умов показал, что многие физические процессы (например, распространение световых волн или упругие колебания в твердом теле) связаны с непрерывным потоком энергии. Он первый ввел понятия плотности энергии, скорости ее распространения, направления потока энергии, дав им строгие физические определения. Исходя из закона сохранения энергии, Умов получил общий закон распространения энергии. Физический смысл этого закона таков: изменение энергии в заданном объеме какой-либо среды за единицу времени равно потоку энергии через поверхность, ограничивающую этот объем. Сегодня эти идеи Умова стали общепринятыми. Но в то время Умов натолкнулся на глубокое непонимание со стороны большинства физиков. Лишь десятью годами позже, в 1884 году, английский физик Пойнтинг опубликовал получившую широкую известность статью о переносе электромагнитной энергии, основные выводы которой совпадали с выводами из более общей теории Умова.

Старое здание физического факультета МГУ на Моховой.

Вторая проблема, исследованная Умовым, о которой мы хотим здесь рассказать, это земной магнетизм. Известно, что Земля является громадным магнитом. Характер магнитного поля Земли весьма непрост, а о происхождении этого поля ученые спорят до сих пор. Формальную математическую теорию земного магнитного поля разработал великий немецкий математик Гаусс. Он вывел формулу, по которой можно вычислить величину магнитной индукции для любой точки на поверхности земного шара. Она представляет собою сумму из 24 слагаемых с постоянными коэффициентами, определяемыми из опыта. Умову впервые удалось раскрыть физический смысл отдельных слагаемых и коэффициентов в формуле Гаусса.

Последним выдающимся физиком, работавшим в Московском университете до Октябрьской революции, был Петр Николаевич Лебедев. Он не был питомцем Московского университета, так как высшее образование получил в Московском высшем техническом училище. Подобно Столетову и Умову, он также совершенствовал свое образование за рубежом — в Страсбурге и Берлине. В 1891 году Лебедев получил степень доктора наук Страсбургского университета. Представленная им к защите работа была посвящена теории диэлектриков и определению диэлектрической проницаемости паров некоторых веществ.

Теория электромагнитных явлений, созданная Максвеллом в середине XIX века, далеко не сразу получила научное признание. За утверждение этой теории активно боролся Столетов. (Он провел серию опытов по точному определению соотношения между коэффициентами, определяющими силу взаимодействия электрических зарядов и силу взаимодействия электрических токов. Согласно теории Максвелла отношение этих коэффициентов равно



Мемориальная доска на здании, где работал П. Н. Лебедев.

скорости света, что и подтвердилось в опытах Столетова.) В этой же борьбе принимал участие и Умов, чья работа о потоке энергии подтверждала и развивала некоторые выводы, вытекающие из теории Максвелла. Конечно, очень важную роль в признании теории Максвелла сыграли опыты Герца, доказавшие существование электромагнитных волн. Но и П. Н. Лебедеву также удалось сделать очень крупный вклад в обоснование этой теории.

Из теории Максвелла следует, что свет, падая на поверхность тела, оказывает на него давление. Однако попытки проверить этот вывод экспериментально, предпринятые несколькими учеными, закончились безуспешно. Они пришли к выводу, что если световое давление и существует, величина его очень мала и перекрывается другими, во много раз более заметными физическими эффектами, неизбежно присутствующими в таких экспериментах. Прежде всего это радиометрический эффект, связанный с тем, что нагреваемое светом тело отдает тепло по-разному с освещенной и неосвещенной сторон. Вторым побочным эффектом, осложняющим эксперимент, является конвекция — возникновение тепловых потоков в нагретом светом воздухе; теплый воздух поднимается вверх, холодный — опускается.

Лебедев первым преодолел все эти трудности. В построенном им приборе достигалась рекордная по тому времени степень разрежения воздуха. Платиновые крылышки, на которые свет поочередно падал то с одной, то с другой стороны, были очень тонкими, что практически исключало влияние радиометрического эффекта. А стеклянный баллон, внутри которого помещалось измерительное устройство, был достаточно больших размеров, что значительно ослабляло влияние конвекционных потоков воздуха. Измеренная Лебедевым величина давления света на легкие платиновые крылышки совпала со значением, вычисленным по теории Максвелла. Эта работа была доложена Лебедевым в Париже на Всемирном съезде физиков в 1900 году и сразу получила всеобщее признание. Выдающийся английский физик Вильям Томсон (лорд Кельвин, чьим именем названа абсолютная шкала температур), узнав о работах Лебедева, сказал знаменитому русскому биологу Клементу Аркадьевичу Тимирязеву: «Вы, может быть, знаете, что я всю жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового давления, и вот ваш Лебедев заставил меня сдаться перед его опытами».

В 1909 году Лебедев закончил трехлетние эксперименты по доказательству существования светового давления на газы, потребовавшие еще большей изобретательности. Оказалось, что свет оказывает давление на газы и именно этим объясняется форма кометных хвостов.

Не менее важным итогом деятельности П. Н. Лебедева является создание им первой научной школы физиков в России. Среди его учеников были такие известные впоследствии ученые, как академик П. П. Лазарев, член-корреспондент АН СССР Т. П. Кравец, профессора В. К. Аркадьев, А. Б. Млодзеевский, Н. А. Капцов, К. П. Яковлев. Петр Николаевич был также инициатором создания независимого от университета первого в России Физического института, который сейчас находится в системе Академии наук СССР и носит его имя. К сожалению, Лебедев не дожил до открытия института: сказалось тяжелое заболевание сердца, от которого он умер в 1912 году в возрасте 46 лет.

Первым директором Физического института, открывшегося 1 января 1917 года, был академик П. П. Лазарев. Следуя примеру своего учителя, он объединил вокруг себя большую группу молодых ученых, из числа которых вышли преподаватели МГУ академики С. И. Вавилов, Г. С. Ландсберг и В. В. Шулейкин, профессора Б. В. Ильин, С. Н. Ржевкин, Э. В. Шпольский.

После Октябрьской революции физический факультет МГУ непрерывно развивался и совершенствовался. Очень большую роль в его развитии сыграло создание кафедры теоретической физики, первым руководителем которой был талантливый молодой ученый С. А. Богуславский, приглашенный из Саратова. Проработав в МГУ два года, он умер от туберкулеза. Тогда на его место был приглашен из Одесского университета профессор (а впоследствии академик) Леонид Исаакович Мандельштам, который приехал вместе со своим сотрудником (впоследствии также академиком) Игорем Евгеньевичем Таммом. Оба они были выдающимися советскими учеными, оказавшими большое влияние на развитие всей советской физики. Постепенно уровень преподавания физики в МГУ сравнялся с лучшими зарубежными высшими учебными заведениями.

Недавно мы отмечали в нашем журнале *) 100-летие со дня рождения академика Л. И. Мандельштама. Он создал одну из крупнейших физических школ в нашей стране. Среди его учеников назовем лишь академиков А. А. Андронова, М. А. Леонтовича, И. М. Франка, А. М. Прохорова, членов-корреспондентов АН СССР С. М. Рытова, В. В. Мигулина, профессоров С. Э. Хайкина и Г. С. Горелика. Л. И. Мандельштам внес существенный вклад в целый ряд разделов современной физики — оптику, теорию колебаний, распространение радиволн, статистическую физику.

Наиболее крупным из числа сделанных им открытий является открытие комбинационного рассеяния света. Если осветить какое-либо тело светом строго определенной длины волны, то и рассеянный этим телом свет будет иметь ту же длину волны. Эта истина давно и надежно была установлена оптиками. Но Л. И. Мандельштам и Г. С. Ландсберг решили выяснить, а не возникает ли при рассеянии света в кристаллах каких-нибудь новых световых волн, которых нет в падающем на кристалл свете. Для этого они поставили следующий опыт.

Монохроматический свет, полученный от ртутной лампы с помощью фильтра, падал на кристалл максимально чистого и однородного кварца. Свет, рассеянный кристаллом, анализировался при помощи спектрографа. Одна из основных трудностей эксперимента состояла в том, что из общего количества световой энергии, падающей на кристалл, рассеивается лишь около одной десятимиллиардной доли, причем практически весь рассеянный свет по длине волны совпадает с падающим светом. Обнаружить какие-то новые длины волн в отраженном кристаллом свете необычайно трудно.

Тем не менее после чрезвычайно долгой экспозиции Мандельштам и Ландсберг нашли в отраженном свете две дополнительные спектральные линии, симметрично расположенные на равных расстояниях от первичной. Разности между частотами этих линий и частотой падающего света одинаковы и совпадают с частотой внутренних колебаний молекул рассеивающего вещества. Атомы, образующие молекулы, могут совершать колебатель-

---

*) См. «Квант», 1979, № 7.

Памятник П. Н. Лебедеву у входа на физический факультет.

ные движения. Им соответствуют определенные порции электромагнитной энергии (кванты), которые молекулы могут поглощать или излучать. Если квант падающего света взаимодействует с невозбужденной молекулой, он отдает ей часть своей энергии и она переходит в возбужденное состояние. Оставшаяся часть энергии падающего кванта излучается в виде света с меньшей частотой (большей длиной волны). Его спектральная линия смещена в «красную» сторону спектра. Если же квант падающего света взаимодействует с возбужденной молекулой, он может «отобрать» ее энергию возбуждения. При этом возникает свет с большей частотой (меньшей длиной волны), то есть соответствующая спектральная линия смещается в «синюю» сторону спектра.

В этом явлении физики впервые встретились с прямым взаимодействием света с отдельными молекулами вещества. Недаром Мандельштам называл спектры комбинационного рассеяния света «языком молекул». Изучение таких спектров позволяет обнаруживать присутствие различных молекул в веществе и исследовать взаимодействие атомов в молекулах.

Среди работ другого выдающегося физика-теоретика, преподававшего в МГУ,— Игоря Евгеньевича Тамма — мы остановимся лишь на исследовании природы ядерных сил, выполненном в 1934 году. Как известно, атомные ядра состоят из положительно заряженных протонов и лишенных электрического заряда нейтронов. По законам электростатики протоны должны отталкивать друг друга с огромной силой. Казалось бы, при этом все атомные ядра должны мгновенно разрушаться. В действительности же только очень тяжелые ядра, принадлежащие элементам конца периодической системы Менделеева, сравнительно неустойчивы и превращаются в более легкие ядра путем радиоактивного распада. Что же придает такую прочность атомным ядрам? Оказывается, это результат действия ядерных сил.

Основы современных представлений о природе ядерных сил были заложены И. Е. Таммом. Он первый среди физиков понял, что эти силы должны носить особый, квантовый характер. Взаимодействие электрически заряженных частиц осуществляется путем излучения и поглощения квантов электромагнитной энергии. Тамм предположил, что и ядерные силы реализуются путем обмена какими-то промежуточными частицами — квантами ядерного поля. Допустив, что такими частицами являются электроны, Тамм построил строгую математическую теорию ядерных сил, качественно объясняющую все их основные особенности. Однако оказалось, что эти силы на много порядков меньше их действительного значения. Впоследствии было показано, что квантами ядерного поля являются ранее неизвестные частицы — пи-мезоны, масса которых примерно в 300 раз больше, чем у электрона.

Еще одним выдающимся ученым, активно участвовавшим в работе физического факультета, был академик Сергей Иванович Вавилов. Он руководил кафедрой общей физики. При нем были существенно усовершенствованы общий и специальный физические практикумы, создано много новых лекционных демонстраций.

В середине сороковых годов при физическом факультете МГУ был образован Научно-исследовательский институт ядерной физики, где готовятся специалисты в области физики атомного ядра, элементарных частиц и космических лучей. В это же время возникла и кафедра физики низких температур, первым руководителем которой был А. И. Шальников (ныне академик).

В последние годы на физическом факультете успешно развивались работы по квантовой электронике и нелинейной оптике *). Их возглавлял безвременно скончавшийся талантливый молодой ученый ректор МГУ академик Рэм Викторович Хохлов. Он был представителем второго поколения «мандельштамовцев», получившим прекрасную подготовку в области теории колебаний. Среди выполненных им работ наибольшей известностью пользуется создание параметрических лазеров с плавно изменяющейся частотой излучения.

Обычные лазеры имеют строго фиксированную частоту, а значит, и длину волны излучаемого света. Например, лазер на неодимовом стекле излучает свет с длиной волны 1,06 мкм, а аргоновый газовый лазер — 0,48 мкм. Однако на практике требуются лазерные излучения самых различных частот. Задачу изменения частоты излучения лазерного луча Хохлов решил следующим образом. Он показал, что при высоких интенсивностях света в некоторых веществах происходит «распад» квантов падающего на них лазерного излучения. При этом вместо кванта с энергией $h\nu_0$ возникают два кванта с энергиями $h\nu_1$ и $h\nu_2$, причем $\nu_0=\nu_1+\nu_2$. Соблюдая это условие, можно варьировать частоты ν_1 и ν_2 в широких пределах. Такие генераторы света называются параметрическими.

В разные годы на физическом факультете МГУ работали такие известные советские физики, как академики Л. А. Арцимович, Н. Н. Боголюбов, И. К. Кикоин, Л. Д. Ландау.

Московский университет воспитал много талантливых физиков. Среди его воспитанников ректор МГУ, вице-президент АН СССР академик А. А. Логунов, академик-секретарь отделения ядерной физики М. А. Марков, директор Института кристаллографии АН СССР академик Б. К. Вайнштейн, заместитель директора Института физических проблем АН СССР академик А. С. Боровик-Романов и многие другие известные советские ученые. Нет сомнения, что университет будет успешно решать эту задачу и в будущем.

---

*) Нелинейная оптика изучает оптические явления, происходящие при очень высокой интенсивности света, создаваемой лазерами. В таких условиях оптические свойства среды (например, показатель преломления) зависят от интенсивности света.

Задачи наших читателей

Производную полезно применять для доказательства неравенств как с одной переменной («Квант», 1979, № 10), так и с несколькими переменными. Вот примеры таких задач, присланные нашими читателями:

Задача 1. Доказать неравенство

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} > \frac{\beta}{\alpha}$$

для чисел α, β, удовлетворяющих соотношениям

$$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

Л. Курляндчик

Задача 2. Доказать неравенство

$$\sin^2\alpha+\sin\beta\sin\gamma<\frac{25}{16},$$

в котором α, β, γ — углы треугольника.

С. Берколайко

В. Вышенский, Н. Перестюк, А. Самойленко

Поговорим о дифференциальных уравнениях

Если в обычных уравнениях, решаемых в школе, требуется найти численные значения некоторой переменной, то в дифференциальных уравнениях искомой является функция, причем в уравнение входит производная этой функции. С простейшими дифференциальными уравнениями вы знакомы по школьному учебнику. Это уравнение показательного роста (или убывания)

$$y' = ky, \qquad (1)$$

где $y = y(x)$ — неизвестная функция, $k \neq 0$ — заданная постоянная («Алгебра и начала анализа 10», п. 110), и уравнение гармонических колебаний

$$y'' = -\omega^2 y, \qquad (2)$$

где y — опять неизвестная функция, $\omega > 0$ — постоянная (там же, п. 80).

В различных областях человеческой деятельности возникают задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям. Характер этих задач и методику их решения можно описать примерно так. Изучается какой-нибудь процесс — физический, биологический и т. д. Нас интересует изменение во времени какой-то характеристики этого процесса, то есть некоторой величины (температуры, давления, массы и т. п.). Если у нас имеется достаточно много сведений о течении этого процесса, мы можем попытаться построить его математическую модель. Во многих случаях из экспериментальных данных или из физических и прочих законов удается получить информацию о скорости изменения величины $y = y(t)$ в зависимости от времени t, то есть о производной $y' = y'(t)$. Эта информация обычно может быть записана в виде дифференциального уравнения с неизвестной функцией $y = y(t)$. Получающееся уравнение как раз и описывает наш процесс с точки зрения его характеристики y. Отыскав все решения дифференциального уравнения — само по себе это уже чисто математическая задача, мы находим все возможные варианты изменения величины y.

Отметим, что при математическом описании (такое описание называют *моделью*) всегда приходится делать некоторые упрощающие предположения, пренебрегать теми или иными побочными явлениями, принимать «идеальные» условия — одним словом, абстрагироваться от конкретных деталей. Это приводит к известным ограничениям в применимости построенной модели.

Опыт развития различных наук показывает, что многие далекие друг от друга по содержанию задачи приводят к одинаковым или сходным дифференциальным уравнениям. Поэтому естественно разработать методы решения таких уравнений безотносительно к тем задачам, которые привели или могут привести к ним. Этим как раз занимается математическая *теория дифференциальных уравнений*.

Если какая-нибудь задача сводится к дифференциальному уравнению, методы решения которого уже известны, то эту задачу можно считать решенной. В этом случае творческая часть решения заканчивается составлением дифференциального уравнения, второй же этап — отыскание решений уравнения — будет представлять собой хотя и важную, но чисто техническую задачу. Тут имеется полная аналогия с задачами, сводящимися к обычным алгебраическим уравнениям.

В этой статье мы проиллюстрируем сказанное на примере задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям (1) и (2) из школьного курса. Начнем с некоторых напоминаний.

1. Линейные дифференциальные уравнения

Уравнение $y' = ky$ называется *линейным*, поскольку неизвестная функция y и ее производная y' входят в него линейным образом. Как известно из учебника, любое решение этого уравнения записывается в виде

$$y = Ae^{kx}, \qquad (3)$$

где A — произвольная постоянная.

Оказывается, если на координатной плоскости изобразить графики этих решений при всевозможных значениях A, то они покроют всю плоскость, причем через каждую точку плоскости пройдет в точности один из графиков. Плоскость оказывается как бы «сотканной» из графиков $y = Ae^{kx}$ (рис. 1).

Докажем это, для чего найдем среди функций вида (3) все те, графики которых проходят через данную точку $(x_0; y_0)$ координатной плоскости. Для определения постоянной A получаем уравнение

$$Ae^{kx_0} = y_0,$$

которое имеет единственное решение $A = y_0e^{-kx_0}$. Следовательно, через нашу точку проходит один и только один из графиков (3) — это

$$y = (y_0e^{-kx_0}) \cdot e^{kx} = y_0e^{k(x-x_0)}. \qquad (4)$$

Полученный нами факт часто формулируют следующим образом: дифференциальное уравнение $y' = ky$ имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$; это решение задается формулой (4).

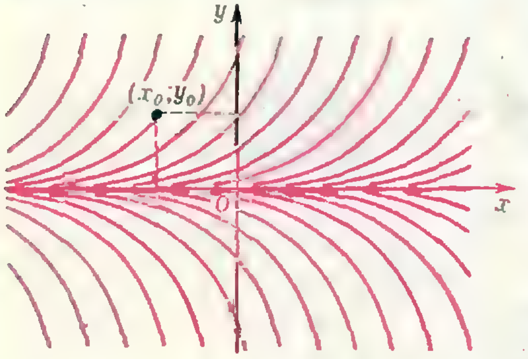


Рис. 1.

Более общее линейное дифференциальное уравнение записывается в виде

$$y' = ky + a, \qquad (5)$$

где a (как и k) — постоянная. Уравнение (5) легко сводится к уже исследованному уравнению (1): если правую часть записать в виде

$$ky + a = k\left(y + \frac{a}{k}\right)$$

(напомним, что мы считаем $k \neq 0$) и обозначить функцию $y + a/k$ через z, то

$$z' = \left(y + \frac{a}{k}\right)' = y' = ky + a = kz.$$

Таким образом, функция $z(x) = y(x) + a/k$ удовлетворяет уравнению $z' = kz$, поэтому $z = Ae^{kx}$, то есть $y + a/k = Ae^{kx}$, откуда

$$y(x) = -\frac{a}{k} + Ae^{kx}. \qquad (6)$$

Значение постоянной A опять-таки однозначно определяется, если задано начальное условие $y(x_0) = y_0$.

Вот, по существу, и вся математическая теория линейных дифференциальных уравнений первого порядка, то есть уравнений, включающих только первую производную от неизвестной функции.

2. Приложения линейных дифференциальных уравнений

В школьном учебнике рассмотрен ряд процессов, исследование которых сводится к линейным дифференциальным уравнениям, то есть к применению изложенной в п. 1 теории. Это процессы радиоактивного распада, роста народонаселения и теплообмена. Мы рассмотрим еще три примера из других областей науки. Напомним, что главное для нас — свести задачу к дифференциальному уравнению.

(А) Модель роста популяций бактерий. Пусть $N(t)$ — численность размножающейся популяции бактерий в момент времени t. При идеальных условиях приращение численности $\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$ за время от t до $t + \Delta t$ для многих видов бактерий можно считать примерно пропорциональным количеству имеющихся в момент времени t бактерий; кроме того, при малых Δt приращение $\Delta N(t)$ должно быть примерно пропорционально Δt. Таким образом, при сделанных допущениях можно записать

$$\Delta N(t) \approx kN(t)\Delta t,$$

где $k>0$ — коэффициент, зависящий от вида бактерий. Итак,

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx kN(t).$$

Отвлекаясь от того, что численность может измеряться только целыми числами, будем считать, что $N(t)$ изменяется во времени непрерывно. Учитывая, что последнее равенство должно быть тем точнее, чем меньше Δt (обдумайте), после перехода в нем к пределу при Δt, стремящемся к 0, получим дифференциальное уравнение вида (1):

$$N'(t) = kN(t).$$

Следовательно (см. п. 1),

$$N(t) = Ae^{kt},$$

так что численность популяции возрастает по показательному закону. Если при этом известна начальная численность популяции, то есть начальное условие $N(0) = N_0$, то, следуя формуле (4), можно записать

$$N(t) = N_0e^{kt}.$$

(Б) Свободное падение с трением (модель парашюта). Пусть тело массы m падает вертикально вниз с некоторой высоты, причем наряду с силой тяжести $F_т = mg$ на него действует направленная противоположно направлению скорости сила вязкого трения, пропорциональная величине скорости: $F_{тр} = -\alpha v$, где $\alpha > 0$ — коэффициент трения. Определим зависимость скорости от времени.

В данном случае дифференциальное уравнение получается сразу из второго закона Ньютона: $ma = F = F_т + F_{тр}$, то есть $mv' = mg - \alpha v$. Разделив обе части на m, опять приходим к линейному дифференциальному уравнению, но на этот раз вида (5):

$$v' = -\frac{\alpha}{m}v + g.$$

Из (6)

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} + Ae^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

В случае, когда $v(0) = 0$, находим $A = -\frac{mg}{\alpha}$ и

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right).$$

При свободном падении без трения ($v' = g$) величина скорости возрастает линейно: $v(t) = gt$. При наличии же вязкого трения скорость, возрастая, тем не менее стремится к постоянной: при возрастании t величина $e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ стремится к 0, поэтому $v(t)$ стремится к предельному значению $v_{пр} = mg/\alpha$ (график величины скорости изображен на рис. 2).

(В) Барометрическая формула. Хорошо известно, что чем выше, тем воздух разреженнее — атмосферное давление с высотой уменьшается. Попробуем определить зависимость $p = p(h)$ давления p от высоты над уровнем моря h.

Напомним, что за величину атмосферного давления принимается вес вертикального столба воздуха с пло-

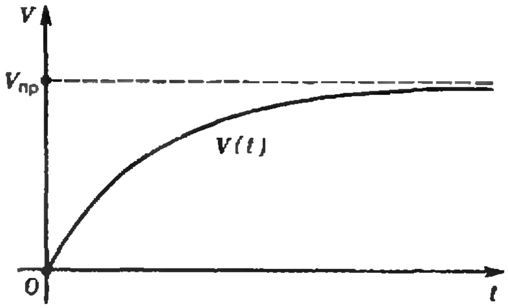


Рис. 2.

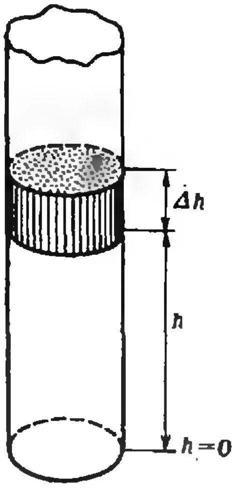


Рис. 3.

щадью сечения $S=1$ см². Следовательно, разность

$$p(h)-p(h+\Delta h)=-\Delta p(h)$$

численно равна весу столбика воздуха от высоты h до высоты $h+\Delta h$ (рис. 3), то есть

$$-\Delta p(h)=\Delta m g,$$

где Δm — масса этого столбика. Объем столбика равен $\Delta V=S\Delta h=\Delta h$, поэтому, если средняя плотность воздуха в столбике равна $\rho_{\text{ср}}$, то $\Delta m=\rho_{\text{ср}}\Delta h$, откуда $-\Delta p(h)=g\rho_{\text{ср}}\Delta h$ и, наконец,

$$\frac{\Delta p(h)}{\Delta h}=-g\rho_{\text{ср}}.$$

Обозначим плотность воздуха на высоте h через $\rho(h)$; тогда при Δh, стремящемся к 0, средняя плотность $\rho_{\text{ср}}$ стремится к $\rho(h)$, и из последнего соотношения мы получаем дифференциальное уравнение

$$p'(h)=-g\rho(h),$$

в котором, однако, функция $\rho(h)$ тоже неизвестна.

Предположим теперь, что температура воздуха одна и та же во всех слоях атмосферы. Тогда из закона Бойля — Мариотта или из уравнения газового состояния легко вывести, что давление пропорционально плотности*):

$$p(h)=b\rho(h).$$

Из этого и предыдущего равенств получаем окончательное дифференциальное уравнение

$$p'(h)=-\frac{g}{b}p(h)$$

— оно снова имеет вид (1)! Применяя теорию из п. 1, находим

$$p(h)=p_0e^{-\frac{g}{b}h},$$

где p_0 — атмосферное давление на уровне моря, то есть при $h=0$.

Итак, давление убывает с высотой по показательному закону, в соответствии с полученной так называемой *барометрической формулой*. Полученная нами формула «отказывает» при высотах, сравнимых по величине с радиусом Земли. И связано это не только с тем, что мы пренебрегли изменением температуры с высотой, но и с изменением ускорения свободного падения.

Отметим, что в данном случае дифференциальное уравнение описывает не физический процесс, а просто изменение одной физической величины (p) в зависимости от другой (h).

3. О гармонических колебаниях

Остановимся теперь на втором из изучаемых в школе дифференциальных уравнений — на уравнении гармонических колебаний

$$y''=-\omega^2y. \qquad (2)$$

Как известно из школьного курса, любое решение этого уравнения записывается в виде

$$y(t)=A\cos(\omega t+\varphi), \qquad (7)$$

где A и φ — произвольные постоянные, причем можно считать, что $A\geqslant 0$, $\varphi\in[0;\ 2\pi[$. При этих ограничениях постоянные A и φ однозначно определяются начальными условиями, которых в данном случае нужно уже два: $y(t_0)=y_0$ и $y'(t_0)=v_0$.

Заметим, что в данном случае через каждую точку $(t_0;\ y_0)$ координатной плоскости проходит бесконечно много графиков вида (7). Однако график определяется однозначно, если задать в данной точке еще и касательную к графику (объясните). Связано это с тем, что уравнение (2) второго порядка, то есть в него входит вторая производная искомой функции.

Про величину y, меняющуюся во времени по закону (7), говорят, что она совершает *гармонические колебания с частотой* ω. Важно отметить, что частота не зависит от начальных условий, а определяется только коэффициентом в исходном уравнении.

Уравнения вида (2) встречаются при описании многих колебательных

---

*) $pV=RT$, откуда $p=\frac{RT}{V}=\frac{RT}{M}\times\frac{M}{V}=b\rho$, где $b=\frac{RT}{M}$; R — универсальная газовая постоянная, M — молярная масса газа.

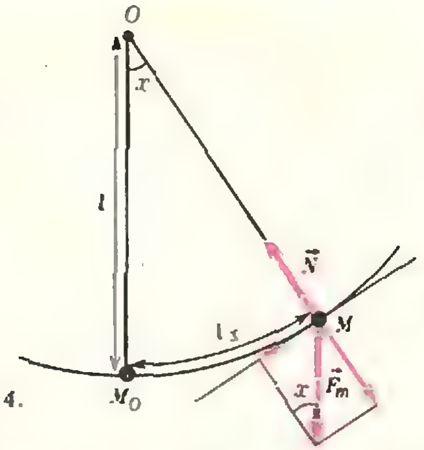


Рис. 4.

систем, причем не только механических. В учебнике рассмотрен пример колебаний шарика на пружинке: если масса шарика m, коэффициент жесткости пружинки k, смещение шарика от положения равновесия x, то по второму закону Ньютона $mx'' = -kx$, откуда $x'' = -\omega^2 x$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Разберем еще пример.

Малые колебания маятника. Пусть шарик массы m закреплен на конце M невесомого стержня OM, подвешенного шарнирно в точке O так, что получается качающийся в одной плоскости маятник (рис. 4). Отклонение маятника OM от положения равновесия OM_0 удобно измерять величиной x угла M_0OM, взятой в радианах.

На шарик действуют две силы: направленная вертикально вниз сила тяжести $F_т = -mg$ и направленная по радиусу MO сила реакции стержня N.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на касательную:

$$m(lx)'' = -mg\sin x, \text{ то есть}$$

$$x'' = -\frac{g}{l}\sin x$$

Будем рассматривать только малые колебания маятника, то есть считать величину x малой. Тогда $\sin x$ можно заменить на x (вспомните, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

— «Алгебра и начала анализа 10», п. 78) и от полученного дифференциального уравнения мы приходим к уравнению гармонических колебаний

$$x'' = -\frac{g}{l}x, \text{ или } x'' = -\omega^2 x,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Следовательно, при малых отклонениях от положения равновесия колебания маятника будут почти гармоническими, с частотой $\omega = \sqrt{g/l}$, не зависящей от массы m и от начальных условий, лишь бы x_0 и v_0 были достаточно малыми.

Конечно, все многообразие природных процессов и явлений не сводится только к уравнениям двух разнообразных типов. Мир дифференциальных уравнений богат почти настолько же, насколько богат реальный мир. Опыт науки показывает, что использование дифференциальных уравнений в качестве математических моделей очень плодотворно — конечно, если при этом не забывать об ограниченной области применения любого рода моделей.

Упражнения и задачи

1. Найдите решение дифференциального уравнения $y' = -2y+4$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 5$.

2. Имеется некоторое количество радиоактивного вещества. Известно, что через 30 дней распадается 50% этого вещества. Через сколько дней останется 1% от начального количества вещества?

3. В среду с постоянной температурой 20° поместили тело, нагретое до 100°. Через 10 минут температура тела понизилась до 60°. Через какое время температура тела станет равной 25°?

(Указание к задачам 2 и 3. Воспользуйтесь примерами 1 и 3 из п. 110 учебника.)

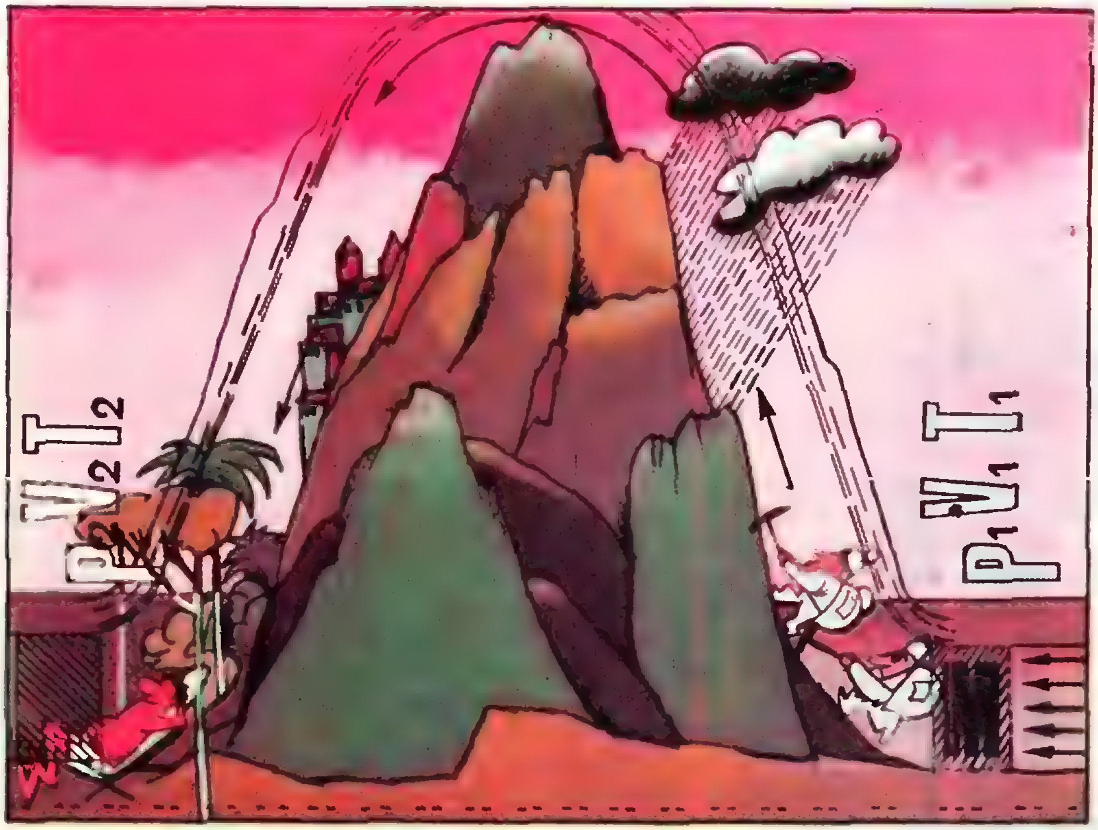
4. Через 12 часов после начала опыта численность некоторой популяции бактерий возросла в три раза. Во сколько раз увеличится число бактерий через трое суток?

5. Значение постоянной b в барометрической формуле для обычного воздуха равно $7{,}7 \cdot 10^4$ м²/с². На какую высоту нужно подняться для того, чтобы давление уменьшилось вдвое?

6. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 2 м/с, а ее скорость через 4 с равна 1 м/с. Через сколько секунд скорость лодки будет равна 0,25 м/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?

7. Девочка качается на качелях. Максимальное отклонение от положения равновесия равно 1 м, максимальное ускорение — 1 м/с². Считая колебания гармоническими, найдите их период. Определите высоту качелей.

8. Найдите общий вид решений дифференциального уравнения $y'' = -\omega^2 y + a$ ($\omega > 0$ и a — постоянные).



И. Воробьев

Гора и ветер

> — Завтра будет славная погода! — сказал я. Штабс-капитан не отвечал ни слова и указал мне пальцем на высокую гору, поднимающуюся прямо против нас.
> — Что ж это? — спросил я.
> — Гуд-гора.
> — Ну так что ж?
> — Посмотрите, как курится.
> И в самом деле, Гуд-гора курилась; по бокам ее ползали легкие струйки облаков, а на вершине лежала черная туча, такая черная, что на темном небе она казалась пятном.
>
> М. Ю. Лермонтов.
> *Герой нашего времени*

Путешественник, пересекающий горный хребет в направлении ветра — с подветренной стороны на наветренную, сразу заметит перемену погоды. Поднимаясь к вершине, он окажется в облачности, а то его еще и захватит ливень или снегопад; за перевалом же — безоблачно и ветер теплый и сухой. Такой ветер называют фёном. Почему происходит это резкое изменение погоды? Как осуществляется «подогрев» воздуха? Чтобы разобраться в этом вопросе, посмотрим, что произойдет, если на пути влажного ветра окажется высокий горный хребет.

«Столкнувшись» с горой, поток воздуха начинает «взбираться» по склону. При этом любая выделенная масса воздуха переходит в область более низкого давления. Происходит увеличение объема, занимаемого этой массой. В первом приближении можно пренебречь теплообменом между отдельными массами воздуха и считать процесс расширения адиабатным. В таком случае работа совершается за счет убыли внутренней энергии воздуха. А это означает, что температура воздуха понижается.

Посмотрим, что происходит с влажностью воздуха по мере подъема на гору. Как известно, давление, при котором происходит насыщение паров, уменьшается с понижением температуры. Так что чем выше в гору, тем бо́льшая часть влаги, содержащейся в воздухе, конденсируется. Образуется множество капелек, висящих в воздухе,— туман или облако.

Процесс конденсации происходит с выделением тепла парообразования. И тепло это не малое — на килограмм образовавшейся из пара воды выделяется около $2{,}5 \cdot 10^6$ Дж при температуре 18°C. За счет этого тепловыделения температура у влажного воздуха уменьшается при подъеме медленнее, чем у сухого. Если б облака вместе с воздухом перевалили через хребет, не потеряв ни капли воды, то в дальнейшем при спуске по наветренному склону и увеличении температуры воздуха вода снова бы испарилась, а на это затратилось бы как раз ранее выделившееся тепло. Воздух у подножья с наветренной стороны стал бы иметь ту же температуру и влажность, что и у подножья с подветренной стороны хребта.

Но если ветер влажный, а хребет достаточно высокий, то значительная доля воды оседает с туманом или выпадает с дождем и снегом. Опускается уже подсушенный воздух, у которого температура при спуске растет быстрее, чем она падала у влажного воздуха при подъеме. (Хребет должен быть высоким, чтобы понижение температуры воздуха с подъемом оказалось достаточным для конденсации.) Поэтому на одной и той же высоте температура воздуха с наветренной стороны выше, чем с подветренной.

Оценим теперь количественно разницу температур. Рассмотрим изогнутый слой воздуха, у которого боковая поверхность следует направлению скорости ветра, а торцы находятся по разные стороны хребта. Спустя небольшое время некоторая масса воздуха M этого слоя покинет объем V_1 с подветренной стороны у подножья горы, где температура T_1, и давление p_1. С подветренной же стороны воздух, опускаясь, займет новый объем V_2 при температуре T_2 и давлении p_2. (Мы будем считать, что в каждом фиксированном месте температура воздуха, давление, скорость ветра остаются со временем неизменными. В частности, это означает, что через любое сечение слоя за одно и то же время проходит одна и та же масса воздуха.)

Внутренняя энергия одного моля одноатомного газа с температурой T равна, как известно, $\frac{3}{2}RT$. Воздух состоит в основном из двухатомных молекул азота и кислорода. Для двухатомного газа внутренняя энергия одного моля равна $\frac{5}{2}RT$.

Изменение внутренней энергии выделенного нами слоя воздуха равно

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{M}{\mu}R(T_2 - T_1).$$

Рассчитаем теперь работу, совершенную против сил внешнего давления. Спустившийся на наветренной стороне воздух вытеснил из объема V_2 ранее здесь находившийся воздух с давлением p_2, совершив положительную работу p_2V_2; на подветренной же стороне воздух покинул объем V_1 при давлении p_1, совершив отрицательную работу $-p_1V_1$. Полная же работа равна

$$A = p_2V_2 - p_1V_1.$$

С помощью уравнения состояния для идеального газа $\left(pV = \frac{M}{\mu}RT\right)$ выразим работу через температуры T_2 и T_1:

$$A = \frac{M}{\mu}R(T_2 - T_1).$$

(Так как объемы V_1 и V_2 находятся на одной и той же высоте, потенциальная энергия воздуха в конечном счете не меняется.)

Будем считать, что гора настолько высока, что при подъеме воздуха на подветренной стороне почти вся влага конденсируется и выпадает в виде дождя. Если масса выпавших осадков Δm, то тепло Q, выделившееся при конденсации, равно $\lambda\Delta m$ (λ — удельная теплота парообразования).

В конечном счете именно это тепло Q и идет на изменение внутренней энергии ΔU воздуха и на совершение работы A:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (*)$$

Оценим величину Q. Удельная теплота парообразования слабо зависит от температуры, и мы будем считать ее постоянной. Пусть влажность воздуха с подветренной стороны такова, что при давлении воздуха p_1 давление водяных паров равно p. С массой M воздуха, занимающего объем V_1, приходит масса Δm водяных паров. Согласно уравнению состояния

$$pV_1=\frac{\Delta m}{\mu_0}RT_1,\quad p_1V_1=\frac{M}{\mu}RT_1$$

(μ_0 — молярная масса воды), откуда

$$\Delta m=M\frac{\mu_0 p}{\mu p_1}.$$

Таким образом, $Q=\lambda M\frac{\mu_0 p}{\mu p_1}$.

(В предыдущих наших рассуждениях мы считали, что вся масса M воздуха из объема V_1 переваливает через хребет, то есть игнорировали изменение массы за счет выпадающих осадков. Полученное выражение для Δm показывает, что такое упрощение допустимо: $\mu_0=18$ г/моль, $\mu=29$ г/моль, а $p\ll p_1$ (например, если влажность воздуха 50%, то при температуре 18°С и давлении $p_1=10^5$ Па давление водяных паров $p\approx 0{,}01\cdot 10^5$ Па), поэтому $\Delta m/M\ll 1$).

Запишем теперь в окончательном виде выражение (*):

$$\lambda M\frac{\mu_0 p}{\mu p_1}=$$

$$=\frac{5}{2}\,\frac{M}{\mu}R(T_2-T_1)+\frac{M}{\mu}R(T_2-T_1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda\mu_0\frac{p}{p_1}=\frac{7}{2}R(T_2-T_1).$$

Отсюда находим выражение для разности температур:

$$T_2-T_1=\frac{2}{7}\,\frac{\lambda\mu_0 p}{Rp_1}.$$

Подставляя $p_1=10^5$ Па, $p=0{,}01\times\times 10^5$ Па, $\lambda=2{,}5\cdot 10^6$ Дж/кг, $R=8{,}3\cdot 10^3$ Дж/(кмоль · град), $\mu_0=18$ кг/кмоль, получим $T_2-T_1\approx\approx 15$ град! Вот какова разница температур на подветренной и наветренной сторонах горы.

Жители горных мест и альпинисты подтверждают правильность этой оценки.

В чем дело?

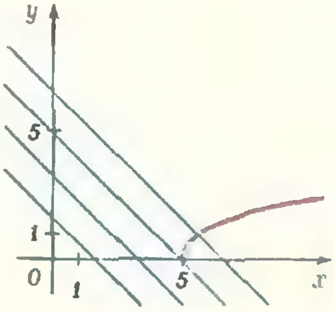
В некоторой школе, в некотором классе решали задачу: *найти все значения параметра a, при которых уравнение*

$$\sqrt{x-5}=a-x\qquad(1)$$

не имеет решений.

Сначала все хотели действовать, что называется, «в лоб»: решив уравнение (1), найти все значения параметра a, при которых оно имеет решения; тогда остальные действительные числа явились бы ответом задачи. Но это была бы длинная канитель, и все обрадовались, когда Федя Крестиков предложил графическое решение: «Функция $\sqrt{x-5}$ — это половина параболы. Выражение $a-x$ задает семейство линейных функций. Видно (см. рисунок), что прямые этого семейства пересекаются с параболой $\sqrt{x-5}$ тогда и только тогда, когда $a\geqslant 5$. Значит, ответ в задаче: $a<5$».

Все были довольны, но вдруг раздался голос Васи Нуликова: «А ведь задачка-то устная!». Его попросили объяснить, и сказал Вася вот что: «Из левой части уравнения (1) видно, что если оно имеет решение, то $x\geqslant 5$. Из правой части видно, что если (1) имеет решение, то $a-x\geqslant 0$ или $a\geqslant x$. Значит, если уравнение (1) имеет решение, то $a\geqslant 5$. На уроке математики нам говорили, что теорема „Если A, то B" равносильна теореме "Если не верно B, то не верно A"*). Значит, если $a<5$, то уравнение (1) не имеет решений. А это и есть ответ». И выдержав в почтительно наступившей тишине многозначительную паузу, он добавил: «Я думаю, что мой способ применим и тогда, когда графический не годится».



На следующий день к доске снова попросился Крестиков. И вот что он сказал: «Я попробовал решить Васиным способом аналогичную задачу для уравнения

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{x-4}=$$
$$=a-x.\qquad(2)$$

Здесь как раз график вряд ли поможет. И вот что получилось. Сначала все шло так же, как и во вчерашнем уравнении: $x\geqslant 5$, $a\geqslant x$, значит, $a\geqslant 5$; следовательно, при $a<5$ уравнение (2) решений не имеет. И только я обрадовался, как заметил, что при $a=5$ оно тоже решений не имеет*). Где же это значение параметра потерялось при Васином способе?». Сказал и сел на место.

А мы стали думать: если Вася прав, то как быть с примером Крестикова? А если неправ, то почему вчера у него получился верный ответ?»

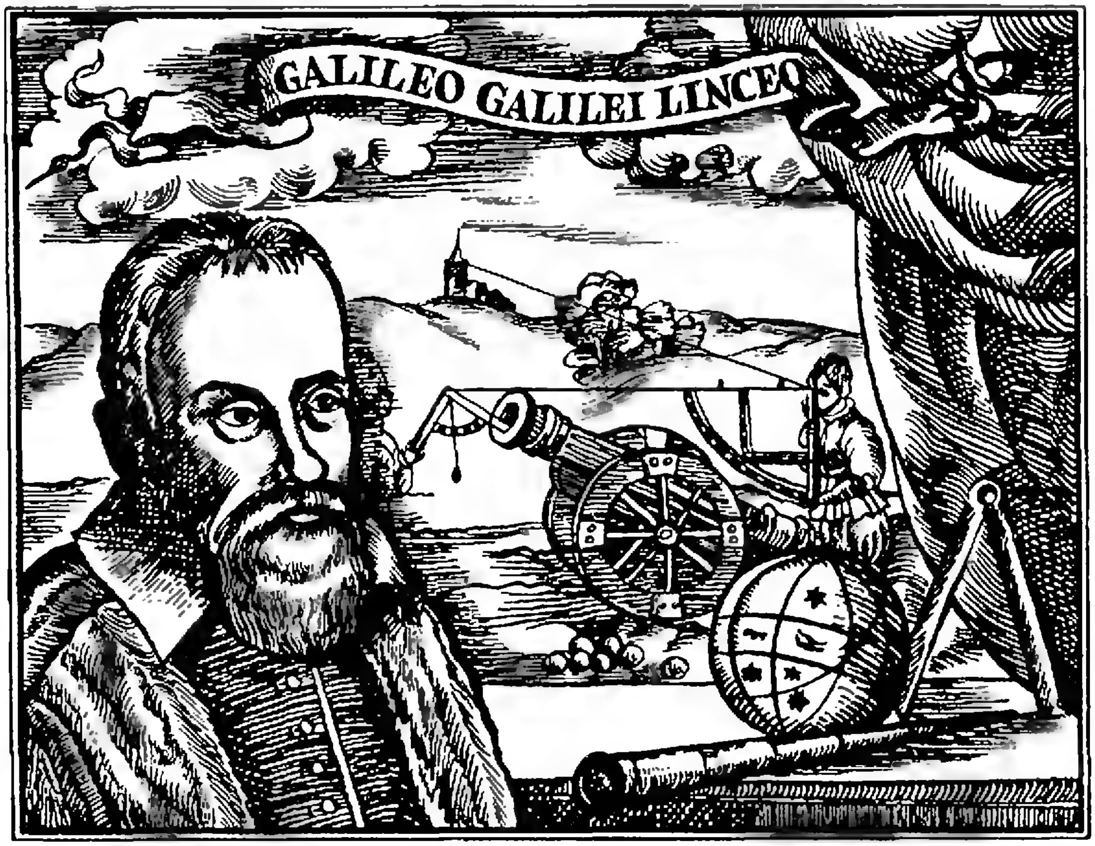
В чем дело?

В. Рыжик

---

*) Если вам этого не говорили, читатель, попробуйте доказать это сами. Можете также прочитать это в «Кванте», 1975, № 2, с. 25.

*) Сообразите, почему.



История о том, как Галилей открыл законы движения

С. Гиндикин

Первые основы динамики были заложены Галилеем. Действие сил до него рассматривали исключительно в случае их равновесия; и хотя ускоренное движение свободно падающих тел и криволинейное движение брошенных тел также приписывали постоянно действующей силе тяжести, но никому не удалось установить законов указанного обыденного явления, зависящего от столь простой причины. Галилей первый сделал этот шаг и открыл новую и безграничную область для развития механики. Это открытие... составляет теперь наиболее значительную и непререкаемую часть заслуг этого великого человека. В самом деле, чтобы открыть спутники Юпитера, фазы Венеры, солнечные пятна и т. д., требуется только телескоп и наблюдательность, но нужен исключительный гений, чтобы установить законы природы на явлениях, которые всегда были у всех перед глазами и тем не менее ускользали от внимания философов.

Лагранж

Пролог

Винченцо Галилей, известный во Флоренции музыкант, долго размышлял над тем, какое поприще выбрать для своего старшего сына Галилео. Сын, безусловно, был способен к музыке, но отец предпочитал что-нибудь более надежное. В 1581 году, когда Галилео исполнилось семнадцать лет, чаша весов склонилась в сторону медицины. Винченцо понимал, что расходы по обучению будут велики, зато будущее сына будет обеспечено. Местом обучения был выбран Пизанский университет, быть может, несколько провинциальный, но хорошо знакомый Винченцо. Он долго жил в Пизе, там же родился Галилео.

Путь к профессии врача был нелегок. Перед тем как приступить к изучению медицины, надо было выучить, а точнее — вызубрить, философию Аристотеля. В его учении говорится буквально обо всем. По мнению Галилея, «нет, кажется, ни одного достойного внимания явления, мимо которого он (Аристотель) прошел бы, не коснувшись его». Философия Аристотеля в то время преподавалась в чудовищной форме: в виде набора высказываний, считавшихся истинами в последней инстанции, лишенных мотивировок и доказательств. О несогласии с Аристотелем не могло быть и речи — за это грозила каторга.

Более всего интересует Галилея то, что пишет Аристотель о физике окружающего мира, но он не хочет слепо верить каждому слову великого философа: «Сам Аристотель научил меня удовлетворять свой разум только тем, в чем убеждают меня рассуждения, а не только авторитет учителя». Он читает и других авторов, среди которых наибольшее впечатление на него производят Архимед и Евклид.

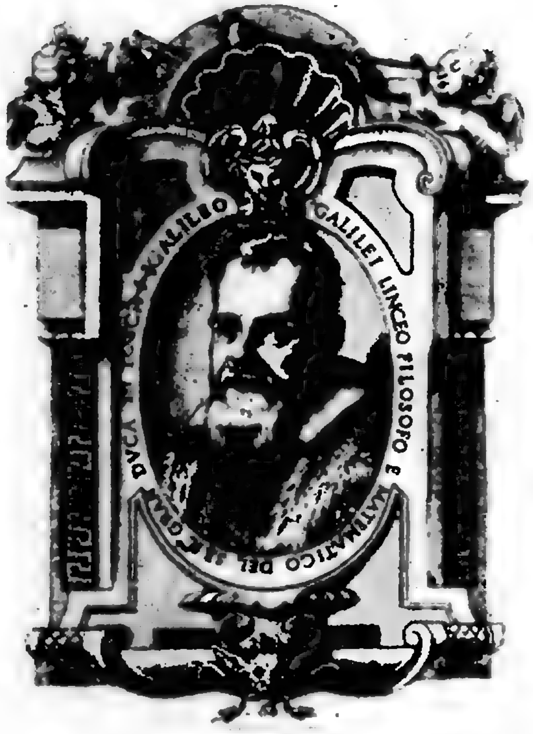
Тайны движения

Из всего, что происходит в окружающем мире, наибольший интерес Галилея вызывали разнообразные движения. Он по крупицам собирает все, что написано о движении у древних, но с сожалением констатирует: «В природе нет ничего древнее движения, но именно относительно него написано весьма мало значительного». А вопросы возникают у пытливого юноши на каждом шагу...

Однажды Галилей был в церкви, и его внимание привлекло раскачивающееся паникадило — большая церковная люстра. Он обратил внимание на то, что паникадило раскачивается неравномерно, по-разному проходя крутые и пологие участки. В какой-то момент Галилео показалось, что качания стали угасать, но время, уходящее на одно качание, при этом не уменьшалось. Он уже не может отвлечься от своих размышлений, он должен немедленно проверить свое предположение. Он, разумеется, не имеет возможности осуществить достоверную проверку, но «грубую прикидку» (он любил это выражение) должен сделать немедленно. Где нам, людям двадцатого века, когда даже многие читатели «Кванта для младших школьников» имеют наручные часы с секундной стрелкой, понять трудности, которые пришлось преодолеть Галилею. Для оценки времени ему пришлось пользоваться «биением собственного пульса (не зря он изучал медицину!) да темпом музыки, в которой он тогда уже был искушен с немалой для себя пользой».

Вернувшись домой, Галилей при помощи товарища провел эксперименты с шарами, подвешенными на нити, и окончательно убедился, что его предположение правильно. Так, судя по рассказу Вивиани, ученика и биографа Галилея, была открыта независимость периода колебания маятника от величины (амплитуды) размаха. Впрочем, мы должны предупредить читателя, что о молодости Галилея сведений немного и они не слишком достоверны; в частности, многими оспариваются рассказы Вивиани. Но одно несомненно: на основе сделанного юным Галилеем открытия были созданы маятниковые часы — первые часы, которые позволяли долго измерять время с хорошей точностью.

Занятия медициной шли не очень успешно, хотя Галилео стремился оправдать надежды и затраты отца. Все же в 1585 году он возвращается во Флоренцию, не получив диплома доктора. Во Флоренции Галилей продолжает заниматься математикой и физикой, вначале втайне от отца, а потом при его согласии. У Галилео появляются контакты с учеными, в том числе с маркизом Гвидо Убальдо дель Монте. Благодаря поддержке последнего тосканский герцог Фердинандо Медичи в 1589 году назначил Галилея профессором математики Пизанско-



Портрет Галилея. Гравюра XVII века.

го университета. В Пизе Галилей находился до переезда в 1592 году в Падую. Восемнадцать лет, прожитых в Падуе, Галилей считал самым счастливым периодом в своей жизни. С 1610 года и до конца жизни он — «философ и первый математик светлейшего великого герцога тосканского Козимо II Медичи». В апреле 1611 года Галилей стал членом Академии Линчиев (рысьеглазых), основанной незадолго до этого Федерико Чези, маркизом Монтичелли. С тех пор все свои труды Галилей подписывал «Галилео Галилей Линчео».

Свободное падение

Что касается научных интересов Галилея, то его по-прежнему интересуют движения и, прежде всего, свободное падение тел, одно из самых распространенных естественных движений. Как и полагалось в это время, начать нужно с того, что по этому поводу утверждал Аристотель. Мнение последнего сводилось к двум аксиомам: скорости падающих тел пропорциональны их весу и обратно пропорциональны «густоте среды». Очевидные сложности возникали со вторым утверждением: получалось, что в пустоте, «густота» которой равна нулю, скорость падения должна быть бесконечной. На это Аристотель добавлял, что в природе пустоты не бывает («природа боится пустоты»).

В 1585 году Галилей получил возможность ознакомиться с недавно вышедшим трактатом Бенедетти, который позволил себе не согласиться и с первым утверждением Аристотеля. И вот в чем дело. Пусть имеются два тела — тяжелое и легкое (рис. 1); первое должно падать быстрее. Теперь соединим их. Естественно предположить, что легкое тело притормозит тяжелое и скорость падения станет промежуточной между скоростями падения составляющих тел. Но по Аристотелю скорость должна стать больше, чем скорость каждого тела. С продумывания работы Бенедетти Галилей начинает свои размышления. Но рассуждениям не очень верили, и, по словам Вивиани, «он доказывал это неоднократными экспериментами, производившимися с высоты Пизанской башни в присутствии других лекторов, философов и всей ученой братии». Галилея по сей день часто рисуют кидающим камни с Пизанской башни.

Еще большее внимание Галилея привлекло другое наблюдение Бенедетти, что скорость свободного падения увеличивается по мере дви-

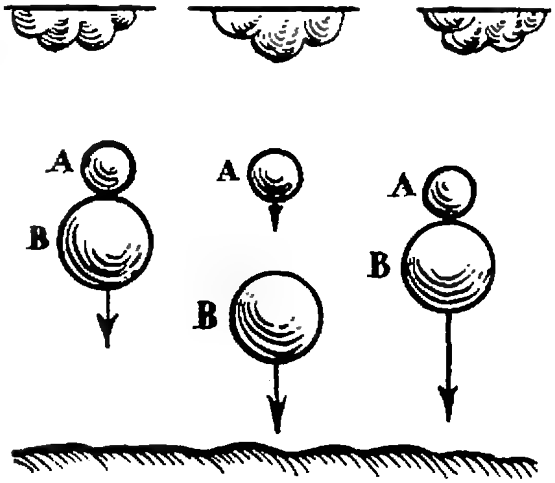


Рис. 1.

жения тела. И Галилей решает найти математически точное описание этого изменения скорости. Здесь следует сказать, что первоначально Галилей видел свою задачу в том, чтобы математизировать физику Аристотеля: «Философия написана в величайшей книге, которая постоянно открыта нашим глазам (я говорю о Вселенной); но нельзя ее понять, не научившись сперва понимать язык и различать знаки, которыми она написана. Написана же она языком математическим, и знаки ее суть треугольники, круги и другие математические фигуры». Однако скоро стало ясно, что математизация требует систематического пересмотра всех фактов.

Как же найти закон изменения скорости свободного падения? Эксперимент только начинал входить в практику научного исследования. Для Аристотеля и его последователей он считался лишним и недостойным занятием как при установлении истины, так и при ее проверке. Галилей мог бы попытаться проделать серию экспериментов со свободно падающими телами, провести тщательные измерения и искать закономерность, которая их объясняет. Так современник Галилея Кеплер, обрабатывая многочисленные наблюдения Тихо Браге, обнаружил, что планеты движутся по эллипсам. Но Галилей выбирает другой путь. Он решает вначале угадать закон из общих соображений, а уже затем проверить его экспериментально. Раньше никто так не поступал, но постепенно такой план исследований станет одним из ведущих при установлении научных истин.

Теперь о том, как Галилей попытался угадать закон. Он решает, что природа «стремится применять во всех своих приспособлениях самые простые и легкие средства», а значит, и закон нарастания скорости должен происходить «в самой простой и ясной для всякого форме». Но раз скорость растет с ростом пройденного пути, то что может быть проще предположения о том, что скорость пропорциональна пути: $v = cs$, c — постоянное число. Это предположение испугало его по-

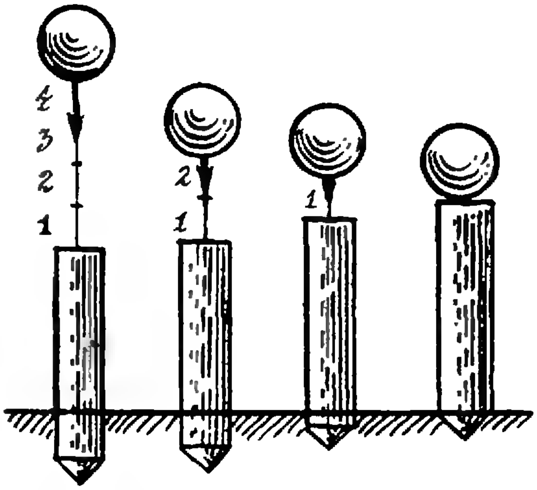


Рис. 2.

началу: ведь получается, что падение начинается с нулевой скоростью, а кажется, что скорость с самого начала велика. Но вот какое рассуждение убедило его, что противоречия нет (рис 2): «Если груз, падающий на сваю с высоты четырех локтей, вгоняет последнюю в землю приблизительно на четыре дюйма, — при падении с высоты двух локтей он вгоняет ее в землю меньше, и, конечно, еще меньше при падении с высоты одного локтя или одной пяди, и когда, наконец, груз падает с высоты не более толщины пальца, то производит ли он на сваю больше действия, чем если бы он был положен без всякого удара? Еще меньшим и совершенно незаметным будет действие груза, поднятого на толщину листа. Так как действие удара находится в зависимости от скорости ударяющего тела, то кто может сомневаться в том, что движение чрезвычайно медленно и скорость минимальна, если действие удара совершенно незаметно?»

Галилей долго исследовал различные следствия из сделанного предположения и неожиданно обнаружил, что, по такому закону движение вообще происходить не может! Давайте и мы попытаемся понять, в чем дело. Коэффициент пропорциональности c зависит от выбора единицы времени. Будем считать для простоты, что $c = 1$, путь измеряется в метрах, а время в секундах. Тогда во все моменты времени $v = s$.

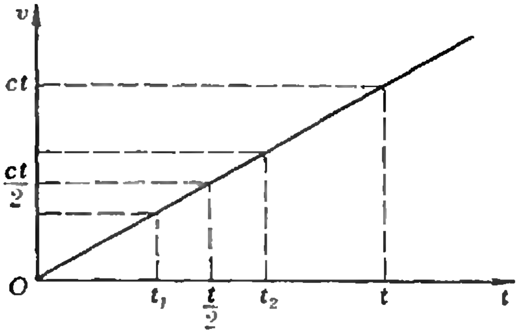


Рис. 3.

Рассмотрим точку A, находящуюся на расстоянии 1 м от начала O. Прикинем, через какое время от начала движения тело окажется в этой точке. В точке A скорость равна 1 м/с. Возьмем точку A_1, лежащую посередине между началом O и A. На отрезке A_1A мгновенная скорость будет меньше 1 м/с, и на отрезок длиной 1/2 м потребуется больше 1/2 с. Возьмем теперь точку A_2 — посередине между O и A_1. На отрезке A_1A_2 мгновенная скорость будет меньше 1/2 м/с (все точки находятся от O на расстоянии, меньшем 1/2 м), и на отрезок A_1A_2 длиной 1/4 м уйдет опять более 1/2 с. Вы уже, конечно, догадались, как мы будет рассуждать дальше: точка A_3 — середина отрезка OA_2, на отрезок A_2A_3 длиной 1/8 м при скорости, меньшей 1/4 м/с, опять-таки уйдет более 1/2 с и т. д. Процесс деления можно продолжать неограниченно, и мы можем набрать любое число отрезков, на прохождение которых уходит больше 1/2 с, так и не добравшись до O. Значит, тело из O попасть в A вообще не может!

Мы предположили, что A находится на расстоянии 1 м от O. Но аналогично показывается, что вообще ни в какую точку тело из O попасть не может. Вот с какого замечательного рассуждения началась классическая механика!

Ну что же, у Галилея были все основания обидеться на коварство природы, которая не выбрала самого простого пути. Однако вера в разумность природы у Галилея не угасла. Он рассматривает не менее простое предположение, что нарастание скорости происходит пропорционально времени: $v=ct$. Такое движение он назвал естественно ускоренным, но прижился термин «равномерно ускоренное движение». Галилей рассматривает график скорости на отрезке времени от 0 до t (рис. 3) и замечает, что если взять моменты времени t_1, t_2, равноотстоящие от $t/2$, то насколько в t_1 скорость меньше $ct/2$, настолько в t_2 она больше. Отсюда он делает вывод, что в среднем скорость равна $ct/2$, и пройденный путь равен $ct/2 \cdot t=ct^2/2$ (не слишком строгое рассуждение!). Значит, если рассмотреть равноотстоящие отрезки времени $t=1, 2, 3, 4,\ldots$, то отрезки пути, пройденные от начала, будут относиться как квадраты натуральных чисел 1, 4, 9, 16,..., а отрезки, пройденные между соседними моментами отсчета,— как нечетные числа 1, 3, 5, 7,...

Именно этот вывод Галилей считает основным и его он хочет проверить. Но как это сделать? Нельзя же продолжать кидать камни с Пизанской башни (хотя, может быть, для наблюдения и удобно, что она разделена на этажи), а в лаборатории падение происходит слишком быстро. Галилей и здесь находит выход. Он показывает, что если свободное падение равноускоренное, то равноускоренным будет и движение тел по наклонной плоскости. Он проводит серию очень остроумно подобранных экспериментов.

Движение по наклонной плоскости

Галилей поступает следующим образом. Он замечает, что из предположения о равноускоренности свободного падения следует равноускоренность движения тяжелой точки по наклонной плоскости. По существу — это привычное сегодня рассуждение с разложением сил, показывающее, что тяжелая точка скатывается по наклонной плоскости с постоянным ускорением $g\sin\alpha$, где α — угол наклона к горизонтали (g — ускорение свободного падения). Рассуждения Галилея более громоздки: он не вводит ускорения свободного падения, а манипулирует, как это было принято тогда, с большим числом пропорций. Он делает целый ряд следствий из равноускоренности движения точки по наклонной плоскости, которые уже удобны для лабораторной проверки (если угол наклона мал, то время скатывания велико). Центральное место занимает утверждение, что если наклонные плоскости имеют одинаковую высоту AB, то времена скатывания относятся как пройденные пути AB_j (рис. 4).

Движение по наклонной плоскости представляет для Галилея самостоятельный интерес. Он делает целый ряд наблюдений. Например, если точки двигаются по хордам окружности AE_i, BF_j (рис. 5), AB — вертикальный диаметр, то все времена скатывания равны времени свободного падения по AB (докажите!). Довольно сложное рассуждение приводит Галилей в доказательство того, что если A, B, C — последовательные точки на окружности (рис. 6), то точка по ломаной ABC скатывается быстрее, чем по хорде AC. С этим утверждением связана известная ошибка Галилея: он считал, что быстрее всего точка из A в B скатывается по четверти окружности, в то время как этим свойством обладает дуга циклоиды (см. «Квант», 1975, № 12, с. 29).

В экспериментах с наклонными плоскостями Галилей нуждался в средстве для сравнения времен. Для этого он пользовался медленно вытекающей струей воды, то есть некоторым вариантом водяных часов.

Движение брошенных тел

Такое движение Галилей называл принужденным (в отличие от свободного падения). Аристотель считал, что тело, брошенное под углом к горизонту, двигается вначале по наклонной прямой, затем по дуге окружности и, наконец, по вертикальной прямой. Возможно Тарталья[*] был первым, кто утверждал, что траектория брошенного тела «не имеет ни одной части, которая была бы совершенно прямой». Об этом говорится в его книге «Проблемы и различные изобретения», где читателю обещаются «...новые изобретения, не краденные ни у Платона, ни у Плотина, ни у какого иного грека и латинянина, а полученные лишь искусством, измерением и разумом». Задачей о движении брошенного тела Тарталья заинтересовался под влиянием вопросов инженеров из знаменитого венецианского арсенала. Тарталью спрашивали, в частности, под каким углом надо наклонить ствол орудия, чтобы обеспечить наибольшую дальность полета ядра. Ответу — 45 — не поверили, но «несколько частных опытов» доказали правоту Тартальи. Тарталья упоминает о каких-то «математических доводах», но, несомненно, сколько-нибудь полной теорией движения брошенного тела он не обладал.

Такую теорию построил Галилей сразу же за теорией свободного падения. Путь, по которому он двигался, был прежним: теория (модель явления) предшествовала экспериментам. Догадка Галилея была гениально простой: движение тела,

---

[*] Никколо Тарталья (1500—1557). Подробнее о нем можно прочитать, например, в статье С. Гиндикина «Великое искусство» («Квант», 1976, № 9).

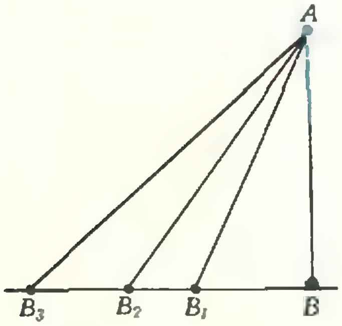


Рис. 4.

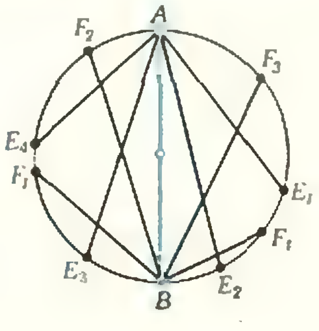


Рис. 5.

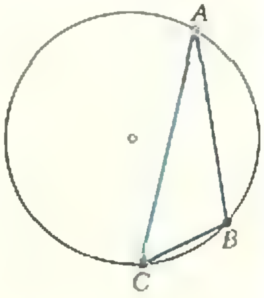


Рис. 6.

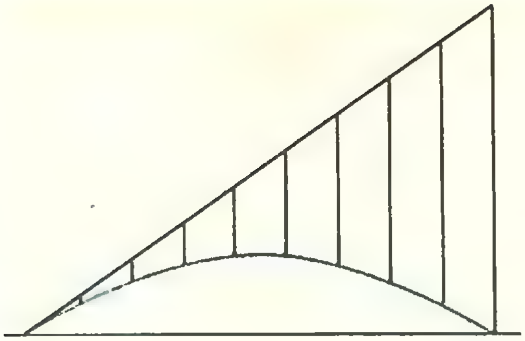


Рис. 7.

брошенного под углом к горизонту, складывается из равномерного прямолинейного движения, которое имело бы место не будь силы тяжести, и свободного падения. В результате тело двигается по параболе (рис. 7). Отметим, что в этом рассуждении существенно используется закон инерции — закон Галилея.

Открытие Галилея поразило современников. Конические сечения (эллипсы, параболы, гиперболы) — вершина греческой геометрии — казались плодом математической фантазии, не имеющим отношения к реальной действительности. И вот Кеплер обнаружил, что по эллипсам двигаются планеты, а Галилей показал, что параболы возникают уж совсем в «земной» ситуации. (Еще в XIX веке Лаплас приводил применение конических сечений как самое неожиданное из применений чистой математики.) Пользуясь свойствами параболы, Галилей составил целый ряд таблиц, которые, в частности, допускают экспериментальную проверку. Он доказал утверждение Тартальи о том, что угол в 45° отвечает наибольшей дальности полета, и показал, что для углов, дающих в сумме 90°, дальности полета одинаковы (при фиксированной величине скорости).

Работы Галилея по механике были закончены в Падуе, но опубликованы лишь в конце жизни Галилея в книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению». Она вышла в 1638 году, а была написана после отречения Галилея, когда он был тяжело болен и почти слеп. «Я хотя и молчу, но провожу жизнь не совсем праздно» — писал он. Книга написана в форме диалогов, которые ведут в течение шести дней Сальвиати (проводящий точку зрения автора), Сагредо и Симпличио (сторонник Аристотеля, его имя переводится как «простак»). В третий и четвертый дни они читают трактат академика (Галилея) «О местном движении» и подробно обсуждают его. Эта дискуссия позволяет многое узнать про то, как Галилей шел к своим открытиям.

Эпилог

У рассказанной истории есть и другая сторона: это — история не только о совершившемся открытии, но и об открытии... упущенном. После того как Галилей понял, что по закону $v(t)=cs(t)$ движение происходить не может, он потерял интерес к этому закону. Его интересуют только естественные движения, происходящие в природе, а не те умозрительные движения, «которые в действительности в природе не встречаются, но могут соответствовать предполагаемым условиям». Вскоре шотландский лорд Непер заинтересовался движением, происходящим по аналогичному закону.

Непер рассмотрел прямолинейное движение, происходящее по закону $v(t)=l(t)$, где $v(t)$ — мгновенная скорость в момент времени t, а $l(t)$ — расстояние движущейся точки в момент t от фиксированной точки 0 на прямой. Случай, рассмотренный Галилеем, отвечает ситуации, когда движущаяся точка находится в начальный момент $t=0$ в точке 0, то есть $l(0)=0$, $l(t)=s(t)$. У Непера $l(0)>0$, $l(t)=l(0)+s(t)$.

Оказывается, что движение с такими свойствами в принципе происходить может и обладает замечательными математическими свойствами (хотя «в природе и не происходит»!). Прежде всего, если начальное расстояние $l(0)$ умножить на c, то на c умножатся расстояния $l(t)$ и скорости $v(t)$ во все моменты

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuove ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

Титульный лист «Бесед».

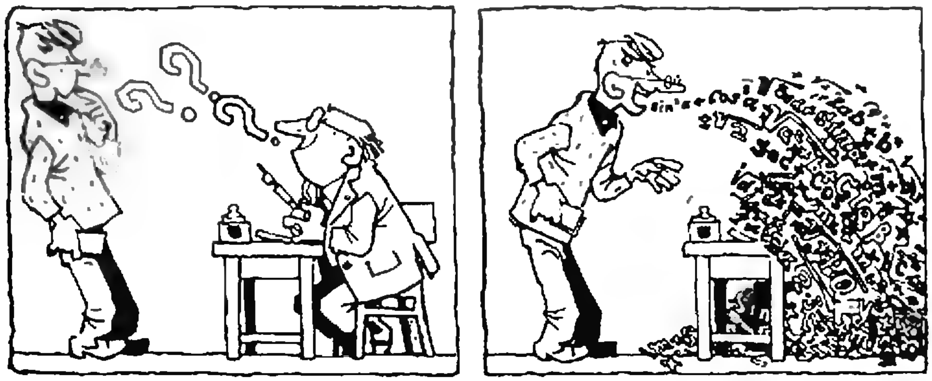
времени. Далее, Непер ограничивается случаем $l(0)=1$. Тогда $l(t_1+t_2)=l(t_1)l(t_2)$. Наметим доказательство этого соотношения. Удобно объявить момент t_1 новым началом отсчета времени. Тогда в силу сказанного выше в новый момент t_2 (старый t_1+t_2) расстояние до 0 должно быть в $l(t_1)$ раз больше, чем в старый момент t_2. Это и означает что $l(t_1+t_2)=l(t_1)l(t_2)$. Так впервые появилась в науке показательная функция.

Имеем $l(x)=e^x$, где $e=l(1)$, то есть это расстояние от 0 в момент $t=1$. Пользуясь тем, что e — расстояние от 0 в момент времени $t=1$, и тем, что $v=l$, нетрудно показать, что $e>2$ (докажите!). На самом деле $e=2{,}71828...$; e стали называть числом Непера. Рассматривая движения, происходящие по закону $v(t)=ks(t)$, можно получить показательные функции с другими основаниями.

Для всякого положительного a время t, для которого $s(t)=a$, Непер назвал логарифмом (натуральным) a (обозначается $\ln a$). В силу сказанного выше $\ln ab=\ln a+\ln b$. Двадцать лет составлял Непер таблицы логарифмов, и в 1614 году вышло «Описание удивительной таблицы логарифмов», предуведомление к которой содержало извинения за неминуемые ошибки и кончалось словами: «Ничто сначала не бывает совершенным».

Открытие Непера замечательно не только тем, что он создал таблицы логарифмов, но и тем, что он показал, что новые функции могут появляться при изучении движений. Начиная с этих работ Галилея и Непера, механика стала для математики постоянным источником новых функций и кривых.

ИЗ ИНОСТРАННОГО ЮМОРА



Происшествие на экзамене

«Альфа» 73 — № 1

В. Майер

Автоколебания в потоке воздуха

Существует несколько способов возбуждения незатухающих колебаний упругих тел. Один из них — с помощью постоянного потока воздуха. Предлагаем вам провести несложный эксперимент, позволяющий воочию убедиться в этом.

Вырежьте из плотной бумаги полоску шириной 2 — 3 см и длиной 50 — 80 см. Концы полоски несколько раз оберните вокруг двух карандашей и возьмитесь за них руками. Свободно расположите полоску на расстоянии 20 - 50 см перед включенным вентилятором так, чтобы плоскость полоски была горизонтальной. Вы увидите, что под действием потока воздуха полоска начнет колебаться, причем колебания ее будут нерегулярными и непериодическими.

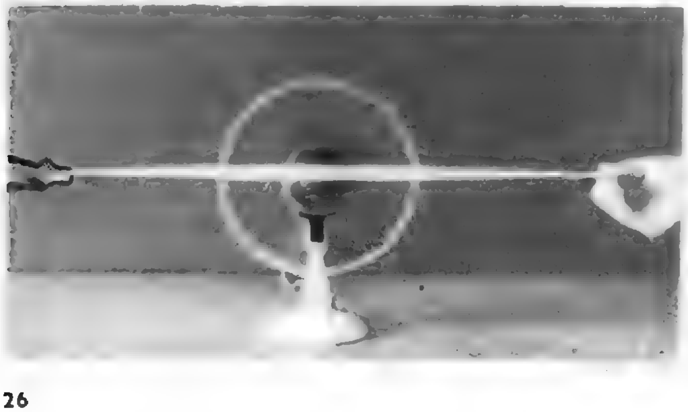
Теперь постепенно натягивайте полоску (прикладывать слишком большие усилия не нужно). При некотором натяжении возникнут довольно сильные периодические колебания и на полоске установится стоячая волна (см. рисунок). Появившиеся колебания будут продолжаться в течение всего времени, пока вы сможете условия опыта поддерживать неизменными. Очевидно, это — *автоколебательный процесс*.

Попробуем разобраться в причине образования автоколебаний. Поток воздуха, обтекающий полоску, вызывает появление воздушных вихрей, которые периодически срываются с полоски. В моменты отрыва вихрей изменяется сопротивление полоски воздушному потоку. Поскольку вихри отрываются через равные промежутки времени, можно сказать, что со стороны воздушного потока на бумажную полоску периодически действует сила. В результате полоска совершает автоколебания.

Почему же колебания стали заметными лишь при определенном натяжении бумажной полоски? Дело в том, что полоска представляет собой упругое тело, способное совершать собственные колебания. Изменяя натяжение полоски, мы тем самым меняли частоту ее собственных колебаний. Когда частота собственных колебаний совпала с частотой автоколебаний, наступил своеобразный резонанс и амплитуда автоколебаний резко возросла.

Таким образом, в этом эксперименте тесно переплетаются автоколебательные и резонансные явления.

О том, к каким нежелательным эффектам могут привести эти явления, рассказывалось в третьем номере журнала за 1972 год в статье Л. Асламазова «Почему гудят провода».



Так выглядит натянутая бумажная полоска, в которой под действием потока воздуха от вентилятора установилась стоячая волна.

М. Мамикон

Обобщенная задача о фальшивых монетах

Многим читателям хорошо известна следующая классическая задача о фальшивых монетах, поражающая тем, что она разрешима:

Задача о мешке с фальшивыми монетами

Имеются N мешков и в каждом из них достаточное количество монет. Все мешки, кроме одного, содержат одинаковые «нормальные» монеты, в одном же мешке все монеты фальшивые. Известен вес нормальной монеты и известно, что фальшивая монета на 1 грамм легче нормальной. Требуется при помощи одного взвешивания на весах с разновесками обнаружить мешок с фальшивыми монетами.

Вот как решается эта задача. Мешки последовательно нумеруются и из каждого мешка берется количество монет, равное номеру этого мешка. Суммарный вес всех взятых таким образом монет будет «не дотягивать» до веса такого же количества нормальных монет (который нам известен) на количество граммов, равное номеру именно того мешка, который содержит фальшивые монеты*).

Раздумывая над этой задачей, я пришел к более удивительному выводу о том, что одним взвешиванием может быть решена и более сложная задача:

---

*) Эта задача решается — правда, хитрее — и в том случае, когда вес нормальной монеты неизвестен и разновесков нет. Подумайте, как.

Задача о нескольких мешках с фальшивыми монетами

Пусть в условиях предыдущей задачи имеется не один, а несколько мешков с фальшивыми монетами, причем их количество неизвестно. Требуется при помощи одного взвешивания на весах с разновесками обнаружить все эти мешки.

Решив и эту задачу, я осмелился на дальнейшие усложнения. Задача оказалась разрешимой при еще более удивительных условиях:

Задача о мешках с тяжелыми и легкими монетами

Среди N мешков имеются некоторое (неизвестное) количество мешков с тяжелыми и некоторое (тоже неизвестное) количество мешков с легкими монетами. Легкая монета на 1 г легче нормальной, а тяжелая, наоборот, на 1 г тяжелее нормальной. Требуется при помощи одного взвешивания на весах с разновесками узнать, какие мешки содержат нормальные монеты, какие — тяжелые, а какие — легкие. (Напомним, что внутри данного мешка все монеты одинакового веса и что вес нормальной монеты известен.)

Разрешимость и этой задачи вдохновила меня на дальнейшее обобщение, которое уже напрашивалось само собой. До сих пор мы фактически рассматривали задачи о двух или трех сортах (типах) монет, поэтому естественна следующая

Задача о мешках с разносортными монетами

Пусть имеются N мешков и в каждом достаточное количество монет. Имеются монеты разных сортов, но в каждом мешке содержатся монеты только одного сорта. Количество мешков с монетами данного сорта произвольное, и нам оно неизвестно. Монеты разных сортов отличаются друг от друга по весу, причем на целое число граммов. Вес монеты каждого сорта нам известен. Требуется при помощи одного взвешивания на весах с разновесками определить, к какому сорту принадлежат монеты в каждом мешке.

Мы предлагаем читателю попробовать самостоятельно решить предыдущие задачи, прежде чем перейти к излагаемому ниже решению обобщенной задачи о фальшивых монетах.

Решение задачи о мешках с разносортными монетами

Перенумеруем последовательно мешки от 0 до $N-1$. Обозначим вес самой легкой монеты через m. Пусть мешок под номером j содержит монеты веса $m+\Delta_j$, то есть Δ_j определяет сорт монеты в j-м мешке. Пусть в зависимости от сорта монеты величины Δ могут принимать (целые) значения 0, 1, 2,..., меньшие k, то есть количество сортов монет равно k.

Теперь возьмем из мешка с номером j количество монет, равное k^j, то есть из первого мешка — одну монету, из второго — k,..., из последнего — k^{N-1} монет. Всего взятых монет будет

$$M=\sum_{j=0}^{N-1} k^j = 1+k+k^2+\ldots$$

$$\ldots+k^{N-1}=\frac{k^N-1}{k-1}.$$

Их суммарный вес S на весах будет равен

$$S=\sum_{j=0}^{N-1}(m+\Delta_j)\,k_j = m\sum_{j=0}^{N-1}k^j+$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}\Delta_j k^j = m\cdot M+\sum_{j=0}^{N-1}\Delta_j k^j.$$

Поскольку всегда $\Delta_j<k$, вторая сумма в правой части

$$\Delta=\sum_{j=0}^{N-1}\Delta_j k^j=\Delta_0+\Delta_1 k+\Delta_2 k^2+\ldots$$

$$\ldots+\Delta_{N-1}k^{N-1}$$

представляет собой перевод числа Δ из десятичной системы счисления (в которой работают весы) в систему счисления с основанием, равным k. В этой системе Δ записывается в виде числа со следующей последовательностью цифр:

$$\Delta \rightarrow \overline{\Delta_{N-1}\Delta_{N-2}\ldots\Delta_2\Delta_1\Delta_0}. \qquad (*)$$

Мы видим, что каждая цифра этой записи показывает сорт монеты в последовательности мешков, взятой в обратном порядке. В этом состоит суть нашего решения.

Итак, из суммарного веса S всех выбранных M монет вычитаем величину Mm — вес того же количества монет наилегчайшего сорта и оставшееся число $\Delta = S - Mm$ переводим в систему счисления с основанием k (разлагаем по степеням k, начиная со старшей). Тогда мы получим число вида (*). Его j-я цифра с конца (счет ведется от нуля) показывает сорт монеты Δ_j в мешке под номером j.

Пример

В приводимой ниже таблице указаны веса монет, содержащихся в пяти мешках. Сверху дана нумерация мешков справа налево (это и есть обратный порядок), а под мешками указаны сорта монет. Они являются искомыми.

4	3	2	1	0	номер мешка j
11 г	12 г	10 г	12 г	10 г	содержимое мешка $m+\Delta_j$
1	2	0	2	0	сорт монеты Δ_j
81	27	9	3	1	количество взятых монет k_j

В этом случае $k=3$ и количество взятых монет соответствует степеням тройки, как показано в последней строчке таблицы. Всего мы взяли $M=121$ монету. Их общий вес на весах будет равен $S=1351$ г. Вычитая величину $M \cdot m = 121 \cdot 10$, получим $\Delta = 141$ г. Переводя Δ в троичную систему

$\Delta = 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 +$
$+ 0 \cdot 3^2$,

получим число $\overline{12020}$, последовательность цифр которого совпадает с исходной последовательностью сортов, приведенной в таблице.

Если $k=10$, то надобность перевода Δ из одной системы счисления в другую отпадает. Для случая $k=3$ существует несколько отличная от нашей интерпретация решения задачи. Найти ее мы предоставляем читателю.

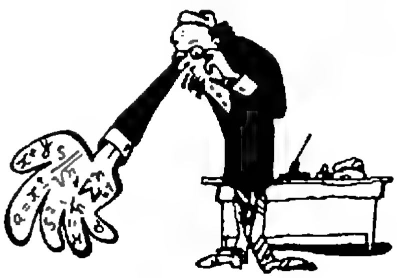
Немного истории

Классическую задачу об одном мешке с фальшивыми монетами можно найти во многих популярных книжках по математике. Говорят, что во время второй мировой войны англичане «сбросили» эту задачу над немецкими солдатами с целью их дезорганизации и что те потеряли над ее решением более 40 000 человеко-часов.

В книге Д. Бизама и Я. Герцега «Многоцветная логика» (М., «Мир», 1978 г.) рассматривается также случай двух мешков с фальшивыми монетами и приводится решение этой задачи при помощи двух взвешиваний.

Классическая задача о фальшивых монетах в последнее время нашла применение в теории кодирования и информации — для обнаружения ошибки в коде.

ИЗ ИНОСТРАННОГО ЮМОРА



Кто из студентов здоровался со мной за руку

«Альфа» 77 — № 3

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер уже 10 лет — с момента основания журнала. В нем публикуются задачи, решения которых мы ожидаем получить от читателей. Среди них — задачи, близкие к олимпиадным, требующие длительных размышлений. Наряду с относительно легкими задачами встречаются и такие, которые нелегко решить и специалистам. Самые трудные задачи помечаются звездочкой.

Если задача вас заинтересовала, но не получилась сразу — не опускайте руки, попробуйте вернуться к ней через день, через неделю. Не откладывайте ее даже после того, как она сделана — подумайте, как наиболее рационально и убедительно записать решение, как обобщить задачу, уточнить ее результат, какие близкие задачи она позволяет решить.

Во второй части раздела мы помещаем решения задач (примерно через 8—10 месяцев после публикации условий) с учетом присланных читателями писем. Каждое решение — это, по существу, небольшая отдельная статья. Мы советуем разобраться в них и тем, кто не выписывал в прошлом году «Квант» или не решал задач.

Мы регулярно публикуем фамилии читателей, приславших нам решения. Школьники, присылающие интересные и полные решения, получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной олимпиады (итоги, на основании которых победители конкурса Задачника «Кванта» получают приглашения на олимпиаду, подводятся в декабре).

Для учеников Всесоюзной заочной математической школы правильное решение задач из Задачника считается выполнением факультативных заданий.

Разумеется, не все наши задачи публикуются впервые. После формулировки мы обычно указываем, кто предложил нам задачу. Придумать новую оригинальную задачу — сделать небольшое самостоятельное «открытие» — пожалуй, даже труднее, чем решить готовую чужую. Если вам это удастся, пришлите нам задачу вместе с кратким решением. Наиболее интересные задачи мы публикуем в Задачнике или других разделах журнала. Новые задачи, а также решения и комментарии к задачам из Задачника мы будем рады получать не только от школьников, но и от взрослых читателей журнала.

Наш адрес: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» — и укажите решения каких задач вы посылаете (например: «№ 1 (1980), М602, М605, а, б»), либо пометьте «Новая задача по математике (физике)». Решения задач по разным предметам или из разных номеров журнала просьба присылать в разных конвертах. Формулировки новых задач (как и любые материалы, предназначенные публикации) нужно присылать в двух экземплярах. Мы стараемся отвечать всем нашим корреспондентам. Просим оформлять решения аккуратно, чтобы облегчить работу редакции и консультантам раздела Задачник «Кванта». В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес; школьников просим также указывать класс и школу (и «номер» или адрес филиала, если вы учитесь в ВЗМШ).

Крайний срок посылки ответов на задачи этого номера — 15 марта 1980 года.

Задачи

М601—М605; Ф613—Ф617

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	8 28 56 70 56 28 8 1

Рис. 1. В *n*-й строке k-е по порядку число равно $C_n^k = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$.

М601. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот треугольника ABC с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A, и делит этот отрезок пополам.

Г. Грошев,
ученик 10 класса

М602. В треугольнике Паскаля, начало которого изображено на рисунке 1 (каждое «внутреннее» число равно сумме двух стоящих над ним), в седьмой строке встречаются подряд три числа, образующие арифметическую прогрессию.

а) В какой следующей строке случится такое же событие?

б) Докажите, что оно произойдет в бесконечном количестве строк, и постарайтесь указать все номера таких строк.

А. Авраамов

М603*. Решите систему уравнений

$$x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \quad y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Л. Купцов

М604. а) Андрей, Виктор, Сергей, плавающие под водой, одновременно вынырнули в точках A_0, B_0, C_0 и тут же нырнули снова, причем Андрей решил проплыть за минуту треть пути до Виктора, Виктор — треть пути до Сергея, Сергей — треть пути до Андрея. Через минуту они вынырнули вновь (точки A_1, B_1, C_1 — см. рис. 2) и решили повторить этот маневр — уже за полминуты; потом — за четверть минуты и т. д.

Где и когда они встретятся?

б)* Внутри сферы радиуса 1 км расположен миллион точек, занумерованных числами от 1 до миллиона. Каждую секунду одновременно каждая точка двигается к следующей по номеру на $^1/_3$ расстояния до этой точки; последняя точка точно так же двигается к первой. Докажите, что через некоторое время все точки соберутся внутри некоторой сферы радиуса 1 мм.

Ф. Шлейфер

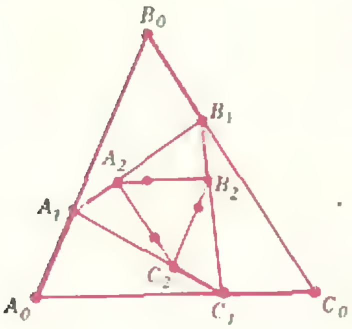


Рис. 2.

М605. На плоскости отмечены $2n+1$ различных точек. Занумеруем их числами $1, 2, \ldots, 2n+1$ и рассмотрим следующее преобразование R плоскости: сначала делается симметрия относительно первой точки, затем — относительно второй и т. д. — до $(2n+1)$-й точки.

а) Докажите, что у этого преобразования R есть единственная «неподвижная точка» (точка, которая отображается в себя).

Рассмотрим всевозможные способы нумерации наших $2n + 1$ точек (числами $1, 2, ..., 2n + 1$). Каждой такой нумерации соответствуют свое преобразование плоскости R и своя неподвижная точка. Пусть F — множество неподвижных точек всех этих преобразований.

б) Укажите множество F для $n = 1$.

в) Какое максимальное и какое минимальное количество точек может содержать множество F при каждом $n = 2, 3, ...$?

А. Талалай

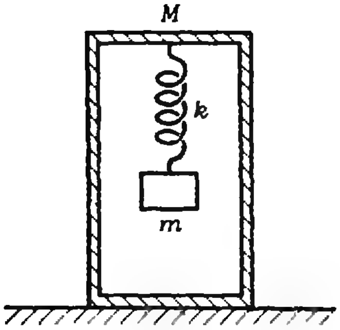


Рис. 3.

Ф613. Коробка массы M стоит на горизонтальном столе. В коробке на пружине с жесткостью k подвешен груз массы m (рис. 1). При какой амплитуде колебаний груза коробка начнет подпрыгивать на столе?

Л. Баканина

Ф614. В замкнутом сосуде находился газообразный азот при комнатной температуре $t_0 = 20°C$ и давлении $p_0 = 10^5$ Па. В сосуд впрыснули некоторое количество жидкого азота с температурой $t_1 = -196°C$ (температура кипения азота при нормальном атмосферном давлении). Жидкий азот быстро испарился, после чего температура в сосуде оказалась равной $t_2 = -140°C$. После того как сосуд прогрелся до комнатной температуры, в нем установилось давление $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па. Определить молярную теплоту испарения жидкого азота. Теплоемкость газообразного азота при постоянном объеме $C_V = 20{,}8$ Дж/(моль·К).

В. Белонучкин

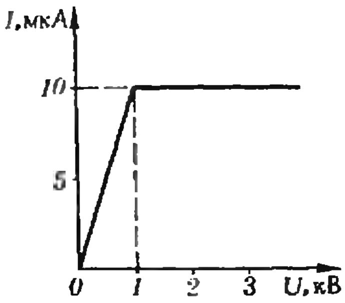


Рис. 4.

Ф615. В случае несамостоятельного газового разряда зависимость тока I через газоразрядную трубку от напряжения U между электродами трубки имеет вид, показанный на рисунке 2. Трубка с последовательно соединенным балластным сопротивлением $R = 3 \cdot 10^8$ Ом подключена к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E} = 6$ кВ. Найдите, какой ток установится через трубку и чему будет равно при этом напряжение на трубке. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

В. Можаев

Ф616*. Длина нити накаливания электрической лампочки равна l, а диаметр — d. Каковы длина l_1 и диаметр d_1 другой лампочки, рассчитанной на то же напряжение сети, но с вдвое бóльшим световым потоком, если КПД обеих лампочек один и тот же?

Ф617. Газетный текст, фотографируется аппаратом «Зенит» с объективом, имеющим фокусное расстояние 50 мм, дважды:

1) с наименьшего допустимого для этого объектива расстояния $a = 0{,}5$ м;

2) после присоединения объектива к камере через удлинительное кольцо высотой $h = 25$ мм (также с минимально возможного расстояния).

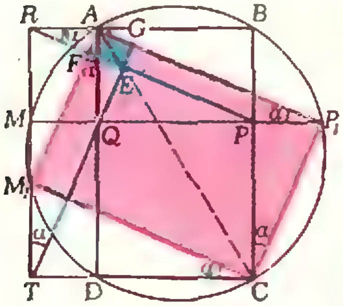
Найдите отношение размеров изображений, полученных на фотопленке в этих двух случаях.

В. Дерябкин

Решения задач

М546—М550; Ф558—Ф562

М546. *Из произвольной точки M окружности, описанной около прямоугольника, опустили перпендикуляры MP и MQ на две его противоположные стороны и перпендикуляры MR и MT на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые PR и QT перпендикулярны друг другу, а их точка пересечения принадлежит диагоналям прямоугольника.*



Обозначим через M_1 и P_1 точки пересечения отрезков MT и MP с данной окружностью (см. рис.). Поскольку углы MMP_1 и ADC прямые, углы M_1AP_1 и AM_1C также прямые и четырехугольник AP_1CM_1 — прямоугольник. С другой стороны, четырехугольники AM_1TQ и $ARPP_1$ — параллелограммы (пары отрезков M_1T, AQ и AR, PP_1 параллельны и равны по длине). Поэтому $(AM_1) \parallel (TE)$ и $(AP_1) \parallel (RP)$. Отсюда следует, что $(TE) \perp (RP)$.

Второе же утверждение задачи ($E \in (AC)$) эквивалентно подобию прямоугольников AP_1CM_1 и $AGEF$. Покажем, что они действительно подобны

В самом деле, все отмеченные на рисунке углы конгруэнтны; пусть они равны по величине α. Тогда, если $|AM_1| = a$ и $|CM_1| = b$, то $|AF| = |AR| \sin \alpha = |PP_1| \sin a = |CP_1| \sin^2\alpha = a \sin^2\alpha$ и аналогично $|AG| = b \sin^2\alpha$, то есть $\frac{|AM_1|}{|CM_1|} = \frac{|AF|}{|FE|}$.

Поэтому $E \in [AC]$.

И. Клумова

◆

М547. *Для того чтобы уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$, где n — натуральное число, имело единственное решение в натуральных числах x, y, необходимо и достаточно, чтобы n было простым. Докажите это.*

Из уравнения $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ следует, что $\frac{1}{x} > \frac{1}{n}$, то есть $x < n$. Поэтому, если $n = 1$, то в натуральных числах решений нет. Пусть $n \neq 1$, тогда $x = n - i$, $0 < i < n$, и $\frac{1}{n-i} - \frac{1}{n} = \frac{1}{y}$. Отсюда $y = \frac{n(n-i)}{i}$. Одно решение (в натуральных числах) всегда есть: оно получается при $i = 1$: $x = n - 1$, $y = n(n-1)$.

Пусть теперь n — простое и $i > 1$. Тогда числа n и i взаимно просты и числа $n - i$ и i также взаимно просты, а следовательно, числа $n(n-i)$ и i также взаимно просты (убедитесь в этом, рассмотрев, например, сумму $n(n-i) + ni$. Поэтому, если n — простое, а $i > 1$, получаем $y = \frac{n(n-i)}{i} \notin \mathbf{N}$. Значит, при простом n обязательно $i = 1$, и у нашего уравнения решение единственно.

Если же n — составное: $n = n_1 n_2$, то положив, например, $i = n_1$, получим, кроме решения $x = n - 1$, $y = n(n-1)$, еще одно: $x = n - n_1$, $y = n_2(n - n_1)$. Это полностью доказывает утверждение задачи.

А. Даниелян

◆

М548. *а) На окружности расположено 4 точки. Через середину хорды, соединяющей две из них, проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две другие точки. (Такая прямая проводится для каждой пары точек.) Докажите, что все шесть построенных прямых проходят через одну точку.*

Решим сразу пункт в) задачи. Для этого прежде всего надо его сформулировать:

На окружности расположено n точек. Через центр тяжести $n-2$ из них проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей оставшиеся две точки. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

Но что такое центр тяжести k точек? Дадим определение: *центром тяжести k точек* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называется такая точка G, что

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}.$$

б) На окружности расположено 5 точек. Через центр тяжести трех из них (точку пересечения медиан треугольника с вершинами в этих точках) проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей остальные точки. Докажите, что все десять построенных прямых проходят через одну точку.

в) Обобщите эти утверждения на случай n точек.

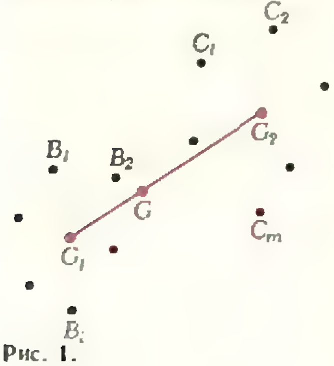


Рис. 1.

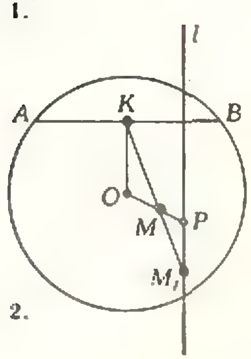


Рис. 2.

М349. *Дано натуральное число N. Выпишем все его делители $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и для каждого из них найдем, сколько делителей оно имеет. Докажите, что для полученных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ выполняется равенство*

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3.$$

Например, число $N=6$ имеет четыре делителя: 1, 2, 3, 6; здесь $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=2$, $a_4=4$ и

$$(1+2+2+4)^2=1^3+2^3+2^3+4^3.$$

Легко убедиться, что если точка G существует, то она определяется однозначно. В самом деле, для любой точки M, отличной от точки G,

$$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_k}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_1})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_2})+\ldots+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_k})=kMG\neq 0.$$

Поэтому, если точка G существует, то она единственная. С другой стороны, ясно, что найти ее можно следующим образом: взять произвольную точку M и построить точку G так, чтобы

$$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{k}(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_k})$$

— центр тяжести является, так сказать, «средним арифметическим», но не чисел, а точек.

Формулировка задачи полностью прояснена, остается ее решить.

Для этого нам понадобится такое свойство центра тяжести:

Центр тяжести G системы из $l+m$ точек $B_1, \ldots, B_l$, $C_1, \ldots, C_m$ делит отрезок G_1G_2, где G_1 — центр тяжести точек $B_1, \ldots, B_l$, и G_2 — центр тяжести точек $C_1, \ldots, C_m$ в отношении $m:l$ (рис. 1). Докажите это свойство самостоятельно.

Теперь уже очень легко решить задачу.

Пусть M — центр тяжести наших n точек, O — центр окружности, M_1 — центр тяжести некоторых $n-2$ точек, K — середина «оставшейся» хорды, и l — соответствующая перпендикулярная ей прямая (рис. 2). Точки K, M и M_1 лежат на одной прямой, причем $\frac{|KM|}{|MM_1|}=\frac{n-2}{2}$ (K — центр тяжести точек A и B). Пусть P — точка пересечения прямых OM и l. Треугольники KOM и M_1PM подобны, поскольку $(KO)\parallel l$. Поэтому $\frac{|MP|}{|OM|}=\frac{2}{n-2}$ и точка P однозначно определяется по точкам O и M. Следовательно, эта точка является общей для всех прямых.

Л. Лиманов

◆

Справедливость равенства

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3 \qquad \text{(A)}$$

для любого $N\geqslant 1$ следует из двух утверждений:

1° (А) верно для $N=p^m$, где p — простое число.

2°. Если (А) верно для некоторого N, то (А) верно и для $M=N\cdot p^k$, где p — простое число, не являющееся делителем числа N.

Рассмотрим 1°. Очевидно, все делители числа $N=p^k$ это $1, p, \ldots, p^k$, имеющие соответственно $1, 2, \ldots, k+1$ делителей. В данном случае (А) превращается в известное соотношение

$$(1+2+\ldots+(k+1))^2=1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3, \qquad \text{(B)}$$

которое можно доказать по индукции.

Докажем 2°. Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — делители числа N, имеющие соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делителей, и пусть p не является делителем числа N. Тогда делители числа $N\cdot p^k$ и числа делителей каждого из этих делителей естественно расположить в виде двух таблиц:

$$\begin{array}{lcr}
d_1, \ldots, d_n & \qquad\qquad & a_1, \ldots, a_n \\
pd_1, \ldots, pd_n & & 2a_1, \ldots, 2a_n \\
p^2d_1, \ldots, p^2d_n & & 3a_1, \ldots, 3a_n \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\
p^kd_1, \ldots, p^kd_n & & (k+1)a_1, \ldots, (k+1)a_n.
\end{array}$$

Вычислим сумму кубов чисел второй таблицы:

$$\left(a_1^3+\cdots+a_n^3\right)+\left((2a_1)^3+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(2a_n)^3\right)+\cdots+\left(((k+1)a_1)^3+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+((k+1)a_n)^3\right)=\left(a_1^3+\cdots+a_n^3\right)\left(1^3+\cdots+(k+1)^3\right).$$

Вычислим квадрат суммы этих чисел:

$$((a_1+\cdots+a_n)+(2a_1+\cdots+2a_n)+\cdots$$
$$\cdots+((k+1)a_1+\cdots+(k+1)a_n))^2=$$
$$=(a_1+\cdots+a_n)^2(1+2+\cdots+(k+1))^2.$$

По предположению $\left(a_1+\cdots+a_n\right)^2=a_1^3+\cdots+a_n^3$. Из (В) получаем нужное равенство.

Утверждение задачи М549, по-видимому, впервые доказал известный французский математик *Ж. Лиувилль.* Наш читатель *В. Абрамович* из Ростова-на-Дону предлагает еще одну задачу про числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Попробуйте ее решить.

Докажите, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно так перенумеровать, чтобы выполнялось тождество

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-\ldots+(-1)^{n+1}a_n^2=$$
$$=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

(здесь мы считаем, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уже имеют нужную нумерацию).

Например, для $N=12$ имеем числа 1, 2, 2, 3, 4, 6. Если

$$a_1=6,\ a_2=4,\ a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=2,\ a_6=1,$$

то

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+a_5^2-a_6^2=$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6.$$

В. Матизен

◆

М550. *Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно d км, должны добраться n велосипедистов, у которых имеется m велосипедов. Каждый может идти пешком со скоростью u км/ч или ехать на велосипеде со скоростью v км/ч. За какое наименьшее время все n велосипедистов смогут попасть из A в B? (Время считается по последнему прибывшему. Велосипед можно оставлять на дороге без присмотра.) Рассмотрите частный случай: $m=2$, $n=3$.*

Разобьем решение задачи М550 на две части. Вначале, исходя из возможностей движения каждой из «точек системы» (каждого велосипедиста) в отдельности, найдем наименьшее время передвижения всей «системы точек». А затем опишем один из возможных способов движения, реализующих это наименьшее время.

Покажем, что в нашей задаче наименьшее время передвижения

$$t_{\min}=\frac{d}{v}\,\frac{m}{n}+\frac{d}{u}\,\frac{n-m}{n},$$

причем каждый из велосипедистов при таком движении проходит расстояние $d\frac{n-m}{n}$ пешком (со скоростью u), и оставшееся расстояние $d\frac{m}{n}$ проезжает на велосипеде (со скоростью v), и все велосипедисты добираются из A в B одновременно. Действительно, так как каждый из велосипедистов в общей сложности перемещается на расстояние d (из A в B), в итоге все m велосипедов проедут путь $m\cdot d$. Если какой-нибудь из велосипедистов проедет на велосипеде путь, больший $d\frac{m}{n}$, то найдется велосипедист, который проедет на велосипеде путь $d_1<d\frac{m}{n}$. Пешком этот велосипедист пройдет путь $d-d_1$. Полное время движения этого велосипедиста

$$t_1=\frac{d_1}{v}+\frac{d-d_1}{u}=\frac{d}{u}+d_1\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)$$

Так как по условию задачи $u<v$, а по предположению $d_1<d\frac{m}{n}$, для времени t_1 получим

$$t_1>\frac{d}{u}+d\frac{m}{n}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)=t_{\min}.$$

Очевидно, общее время движения группы T (которое засчитывается по последнему прибывшему) будет удовлетворять условию $T\geqslant t_1>t_{\min}$. Поэтому движение, при котором какой-нибудь велосипедист проезжает на велосипеде не $d\frac{m}{n}$, не будет «оптимальным».

Укажем теперь, как должны вести себя велосипедисты, чтобы общее время передвижения было равно $t_{\min}$. Это удобно сделать с помощью «столбов».

Будем считать, что по дороге на одинаковых расстояниях друг от друга расставлены n столбов: K_1, K_2,..., K_n, причем последний столб — в пункте B. Способ передвижения состоит в следующем. m велосипедистов садятся на m велосипедов и проезжают вдоль дороги: первый — до столба K_1, второй — до столба K_2,..., m-й — до столба K_m. После этого они оставляют велосипеды на дороге (у столбов K_1,..., K_m соответственно) и дальше идут пешком. При этом первый велосипедист доходит до столба K_{n-m+1}, второй до столба K_{n-m+2},..., и m-й велосипедист доходит до пункта B. $n-m$ велосипедистов, которым не достались велосипеды, идут из пункта A пешком. Они последовательно доходят до столбов K_1,..., K_{n-m}, садятся на оставленные там велосипеды и дальше уже едут — до столбов K_{m+1}, K_{m+2},..., K_n (то есть «последний» из этих велосипедистов приезжает в пункт B). Велосипедист, вначале доехавший до столба K_1, а затем дошедший до столба K_{n-m+1}, садится на стоящий там велосипед (оставленный велосипедистом из первой или из второй группы) и заканчивает свое движение на велосипеде. Велосипедист, вначале доехавший до столба K_2, а затем дошедший до столба K_{n-m+2}, садится на велосипед, оставленный велосипедистом, доехавшим до этого столба, и также заканчивает свое путешествие на велосипеде. И так далее.

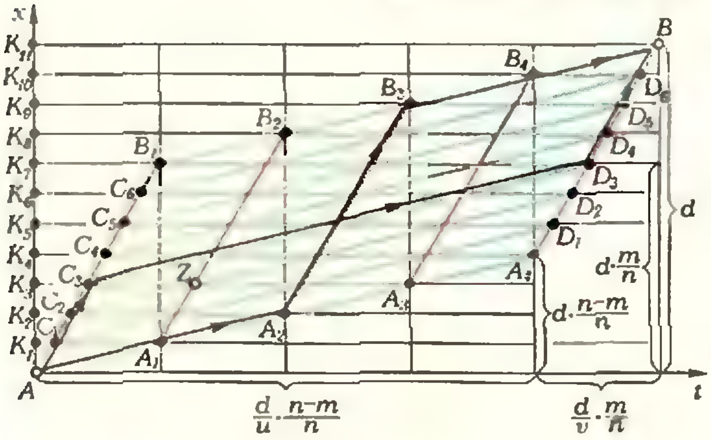


Рис. 1.

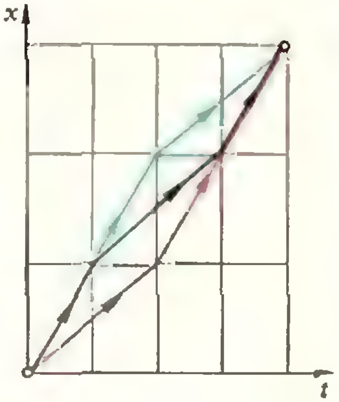


Рис. 2.

Велосипедисты, которые вначале шли пешком, а потом ехали на велосипедах, оставляют (кроме последнего из них) свои велосипеды у столбов K_{m+1},..., K_{n-1} соответственно и доканчивают свое движение пешком. Идущие пешком велосипедисты, начавшие свое движение на велосипедах, «подбирают» оставленные у соответствующих столбов велосипеды, садятся на них и таким образом заканчивают свое движение.

На рисунке 1 изображены графики перемещения велосипедистов из A в B для случая $m=7$, $n=11$ (по оси абсцисс отмечается время движения, по оси ординат — координата места нахождения). Красные отрезки отвечают перемещениям на велосипедах, синие — перемещениям пешком. На этом рисунке выделены графики перемещения одного из выехавших из A и одного из вышедших из A велосипедистов (ломаные AC_3D_3B и AA_2B_3B). Из графика видно, что время перемещения каждого велосипедиста равно t_{min}.

Случай $m=2$, $n=3$ проиллюстрирован на рисунке 2: синим цветом изображен график перемещения первого велосипедиста; красным — второго и черным — третьего.

С. Кротов

◆

Ф558. *Маленький тяжелый шарик влетает через отверстие внутри гладкой сферы той же массы, проходя на расстоянии $R/2$ от центра сферы (R — радиус сферы). После влета шарика отверстие автоматически закрывается. Считая соударения между шариком и сферой абсолютно упругими, найти траектории шарика и центра сферы в той системе отсчета, в которой сфера первоначально покоилась. Определить параметры этих траекторий и отметить на них точки, в которых происходят соударения.*

Пусть шарик влетает в отверстие со скоростью $\vec v$ относительно той системы отсчета, в которой сфера первоначально покоилась. Очевидно, что все движения будут происходить в плоскости, где лежат вектор $\vec v$ и центр сферы.

Массы шарика и сферы равны, поэтому центр масс системы будет двигаться со скоростью $\vec v/2$ по прямой, лежащей в той же плоскости на расстоянии $R/4$ от центра сферы. Так как внешние силы на систему не действуют, движение центра масс не изменится даже при наличии каких-либо соударений внутри системы.

По условию задачи соударения абсолютно упругие, а поверхности гладкие. Это означает, что касательная проекция скорости шарика относительно сферы остается неизменной, а нормальная меняет знак на противоположный. Следовательно, при каждом соударении модуль вектора скорости шарика относительно сферы не меняется и остается равным $|\vec v|$, а углы падения и отражения конгруэнтны. Траектория шарика относительно сферы имеет вид вписанного равностороннего треугольника со стороной $R\sqrt{3}$ (показан красным на рисунке 1), а промежутки времени между последовательными соударениями равны $R\sqrt{3}/|\vec v|$.

Центр масс системы относительно сферы движется со скоростью вдвое меньшей, и его траектория — тоже равносторонний треугольник, но со стороной $R\sqrt{3}/2$ (показан черным на рисунке 1).

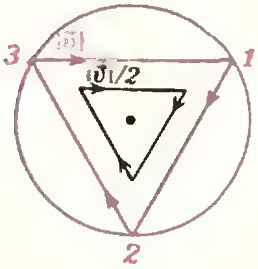


Рис. 1.

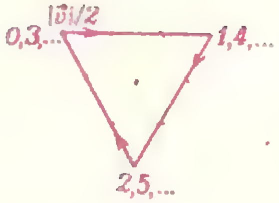


Рис. 2.

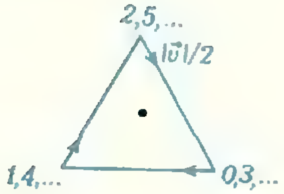


Рис. 3.

Теперь рассмотрим поступательно движущуюся систему отсчета, где неподвижна не сфера, а центр масс системы. Скорости шарика и центра сферы в этой системе одинаковы по модулю, который равен $|\vec v|/2$, а движение происходит по траекториям, изображенным соответетствующими цветами на рисунках 2 и 3.

В заключение остается перейти в исходную систему отсчета, где сфера первоначально покоилась, шарик двигался со скоростью $\vec v$, а центр масс все время движется со скоростью $\vec v/2$ (рис. 4). Для такого перехода необходимо прибавить вектор $\vec v/2$ ко всем векторам скоростей, изображенным на рисунках 2 и 3. Получится, что до первого соударения (после «нулевого», третьего, шестого,..., $3n$-го) шарик движется со скоростью, равной по модулю $|\vec v|$ и направленной параллельно скорости (и траектории) центра масс, и проходит расстояние $R\sqrt{3}$. Сфера в этот промежуток времени покоится.

После первого (четвертого, седьмого,..., $(3n+1)$-го) соударения вектор скорости шарика направлен под углом $\pi/3$ к вектору скорости центра масс и по модулю равен

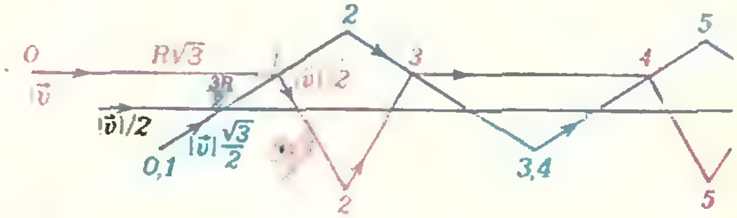


Рис. 4.

$|\vec{v}|/2$. До второго соударения шарик проходит путь $R\sqrt{3}/2$. Соответственно скорость сферы направлена под углом $\pi/6$ к тому же вектору, а ее модуль равен $|\vec{v}|\sqrt{3}/2$. Сфера проходит путь $3R/2$.

После второго (пятого, восьмого,..., $(3n+2)$-го) соударения векторы скоростей шарика и центра масс составляют угол $\pi/3$ и равны по модулю $|\vec{v}|/2$. Путь шарика прежний, то есть $R\sqrt{3}/2$. Наклон вектора скорости сферы в это время $-\pi/6$, модуль скорости $|\vec{v}|\sqrt{3}/2$, путь $3R/2$.

Далее картина повторяется, то есть между третьим и четвертым соударениями сфера снова покоится, а шарик движется со скоростью $\vec{v}$ и т. д.

Б. Буховцев

Ф559. *Согласно теории Бете углеродный цикл звездных термоядерных реакций состоит из следующих реакций:*

$$p+{}^{12}C\rightarrow{}^{13}N+\gamma,$$
$${}^{13}N\rightarrow{}^{13}C+e^{+}+\nu,$$
$$p+{}^{13}C\rightarrow{}^{14}N+\gamma,$$
$$p+{}^{14}N\rightarrow{}^{15}O+\gamma,$$
$${}^{15}O\rightarrow{}^{15}N+e^{+}+\nu,$$
$$p+{}^{15}N\rightarrow{}^{12}C+{}^{4}He.$$

Найти энергию, выделяющуюся при образовании моля гелия.

◆

Цикл Бете приводит к образованию из четырех протонов одного ядра гелия:

$$4p\rightarrow{}^{4}He+2e^{+}+3\gamma+2\nu.$$

Подсчитав по формуле $E=mc^2$ энергии частиц слева и справа, найдем энергию, выделившуюся при синтезе одного ядра атома гелия ($m_p=1{,}6724\cdot10^{-27}$ кг, $m_{^4He}=6{,}6439\cdot10^{-27}$ кг, $m_{e^+}=0{,}9108\cdot10^{-30}$ кг, $c=3\cdot10^8$ м/с):

$$E_{выд}=(4m_p-m_{^4He}-2m_{e^+})c^2=0{,}3951\cdot10^{-11}\ Дж.$$

При образовании моля гелия выделяется энергия

$$W=E_{выд}N_A\approx2{,}4\cdot10^9\ кДж$$

(здесь $N_A\approx6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро).

Ф560. *Плоская бесконечная струя толщины d_0 падает под углом α на плоскость (рис. 1). Скорость струи равна $\vec{v}$, ее плотность ρ. На какие струи распадается струя?*

◆

Обозначим через d_1 и d_2 толщины образовавшихся струй (рис. 2), а через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — их скорости. Так как через поперечное сечение первоначальной падающей струи за одну секунду проходит такая же масса жидкости, что и через поперечные сечения обеих образовавшихся струй, то

$$\rho d_0v=\rho d_1v_1+\rho d_2v_2 \qquad (1)$$

(здесь v, v_1 и v_2 — модули соответствующих скоростей).

Выделим так называемую трубку тока жидкости (на рисунке 2 она показана цветом) и рассмотрим ее участок между сечениями I и II. За малое время Δt через сечение I площадью Δs втекает, а через сечение II площадью Δs_1 вытекает одна и та же масса жидкости.

$$\Delta m=\rho\Delta sv\Delta t=\rho\Delta s_1v_1\Delta t.$$

Изменение кинетической энергии этой массы жидкости равно работе A сил давления $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$. Если при переходе через сечение I работа положительна, то при переходе через сечение II она отрицательна, поэтому

$$A=Fv\Delta t-F_1v_1\Delta t=p\Delta sv\Delta t-p_1\Delta s_1v_1\Delta t,$$

где F и F_1 — модули сил давления, а p и p_1 — давления в сечениях I и II соответственно.

Но давление как в левой, так и в правой струях равно давлению в падающей струе (все струи имеют свободную плоскую поверхность и давление в них равно атмосферному), то есть $p=p_1$. Кроме того,

$$\Delta sv\Delta t=\Delta s_1v_1\Delta t=\frac{\Delta m}{\rho}.$$

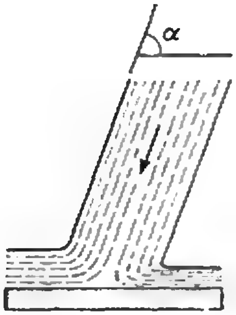


Рис. 1.

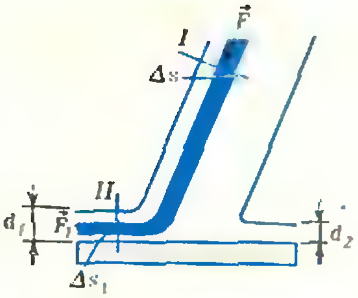


Рис. 2.

Таким образом,

$$A = p\frac{\Delta m}{\rho} - p\frac{\Delta m}{\rho} = 0,$$

и изменение кинетической энергии массы Δm жидкости равно нулю, то есть $v_1 = v$. Точно так же можно показать, что и $v_2 = v$. Поэтому из равенства (1) получаем

$$d_0 = d_1 + d_2. \qquad (2)$$

Так как на жидкость не действуют никакие внешние горизонтальные силы, горизонтальная проекция импульса текущей жидкости должна оставаться постоянной:

$$mv\cos\alpha = m_1v_1 - m_2v_2,$$

где $m \sim d_0$, $m_1 \sim d_1$, $m_2 \sim d_2$ и $v = v_1 = v_2$. Следовательно,

$$d_0\cos\alpha = d_1 - d_2. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) получаем

$$d_1 = d_0\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad d_2 = d_0\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

◆

Ф561. *Глубоководный батискаф сварен из двух полусфер радиуса $R = 2$ м. Батискаф должен погружаться на глубину $H = 10$ км. Какое напряжение (отношение модуля силы к длине экватора) должен выдерживать шов батискафа, если сварной экватор расположен: а) горизонтально? б) вертикально?*

а) Сила, действующая по экватору на нижнюю часть батискафа, равна весу столба воды над верхней полусферой (рис. 1). Объем этого столба равен объему цилиндра радиусом R и высотой H без объема полусферы радиусом R, поэтому модуль веса воды равен

$$P = \rho g\left(H\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi R^3\right).$$

Напряжение, которое должен выдерживать шов батискафа, равно

$$\sigma_а = \frac{P}{2\pi R} = \frac{1}{2}\rho g\left(HR - \frac{2}{3}R^2\right).$$

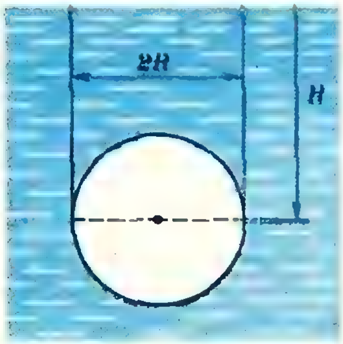


Рис. 1.

б) Рассмотрим две маленькие площадки площадью Δs каждая, находящиеся на расстоянии h выше и ниже центра сферы (рис. 2). На верхнюю площадку действует сила $\vec{F}_1$, модуль которой $F_1 = \rho g(H - h)\Delta s$. Проекция этой силы на горизонтальную плоскость равна

$$F_1\cos\alpha = \rho g(H - h)\Delta s\cos\alpha.$$

На нижнюю площадку действует сила $\vec{F}_2$, ее модуль $F_2 = \rho g(H + h)\Delta s$, а проекция на горизонтальную плоскость равна

$$F_2\cos\alpha = \rho g(H + h)\Delta s\cos\alpha.$$

Сумма этих проекций не зависит от h и равна

$$2\rho gH\Delta s\cos\alpha$$

Но $\Delta s\cos\alpha$ представляет собой проекцию площадки Δs на вертикальную плоскость. Отсюда следует, что сумма F горизонтальных проекций сил, действующих на всю правую полусферу, равна произведению величины $2\rho gH$ на половину площади сечения полусферы, проходящего через вертикальный диаметр:

$$F = 2\rho gH\,\frac{1}{2}\,\pi R^2 = \rho gH\pi R^2.$$

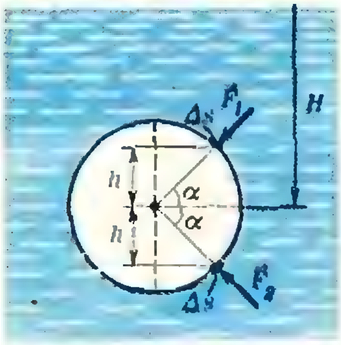


Рис. 2.

Напряжение, которое должен выдерживать шов в этом случае, равно

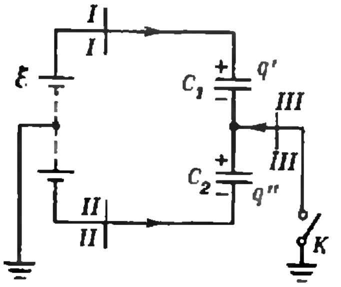
$$\sigma_б = \frac{\rho gH\pi R^2}{2\pi R} = \frac{1}{2}\rho gHR.$$

Так как $H \gg R$, то

$$\sigma_а \approx \sigma_б = \frac{1}{2}\rho gHR = 10^8 \text{ Н/м}.$$

Мы привели строгое решение задачи, справедливое для всех значений H. При $H \gg R$ ответ, конечно, можно получить сразу, без сложных вычислений, так как в этом случае можно считать, что давление во всех точках батискафа одно и то же.

Ф562. *Конденсаторы емкостей $C_1 = 2{,}00$ мкФ и $C_2 = 3{,}00$ мкФ соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС $\mathscr{E} = 120$ В, средняя точка которой заземлена. Провод, соединяющий конденсаторы, может быть заземлен с помощью ключа К. Найти заряды q_1, q_2 и q_3, которые пройдут после замыкания ключа через сечения I—I, II—II и III—III в направлениях, указанных на рисунке.*



◆

До замыкания ключа заряды q обоих конденсаторов одинаковы (поскольку конденсаторы соединены последовательно) и равны

$$q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\mathscr{E}.$$

После замыкания ключа напряжения на конденсаторах станут равными $\frac{1}{2}\mathscr{E}$, и заряды конденсаторов будут равны

$$q' = \frac{1}{2} C_1 \mathscr{E} \text{ и } q'' = \frac{1}{2} C_2 \mathscr{E}.$$

Следовательно, через сечения $I - I$ и $II - II$ в заданных направлениях пройдут заряды

$$q_1 = q' - q = \frac{C_1 (C_1 - C_2)}{2(C_1 + C_2)}\mathscr{E} = -2{.}4 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

и

$$q_2 = q - q'' = \frac{C_2 (C_1 - C_2)}{2(C_1 + C_2)}\mathscr{E} = -3{.}6 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

Суммарный заряд соединенных друг с другом пластин конденсаторов до замыкания ключа был равен нулю, а после замыкания ключа он стал равным $q'' - q'$. Такой заряд, очевидно, и прошел через сечение $III - III$, то есть

$$q_3 = q'' - q' = \frac{1}{2}(C_2 - C_1)\mathscr{E} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

И. Слободецкий

Задачи наших читателей

Используя неравенство Коши — Буняковского

$$(A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_N^2) \times$$
$$\times (B_1^2 + B_2^2 + \ldots + B_N^2) \geqslant$$
$$\geqslant (A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots$$
$$\ldots + A_N B_N)^2$$

(доказательство его см. в статье В. Левина «Парабола и неравенства» — «Квант», 1976, № 4; для $N = 2$ и $N = 3$ очевиден геометрический смысл этого неравенства: произведение длин двух векторов не меньше их скалярного произведения), решите следующие задачи:

1. Найдите наименьшие значения выражений

а) $(x + y)^2 + (x + a)^2 + (y + b)^2$, где a и b — параметры;

б) $(x + y + z)^2 + (x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2$, где a, b, c — параметры;

в) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + (x_1 + a_1)^2 + (x_2 + a_2)^2 + \ldots + (x_n + a_n)^2$, где a_i — параметры.

При каких значениях переменных достигаются эти значения?

2. Докажите, что квадрат любого действительного корня многочлена

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_1 x + a_0$$

меньше суммы квадратов всех его коэффициентов.

Л. Пугач

КВАНТ для младших школьников

Задачи

1. Из двадцати мальчиков нашего класса у четырнадцати — карие глаза, у пятнадцати — темные волосы, семнадцать мальчиков весят больше 40 кг и 18 мальчиков — выше 1 м 60 см. Докажите, что по крайней мере четверо мальчиков обладают всеми перечисленными признаками.

2. Если из некоторого числа вычесть 7, а остаток умножить на 7, то получится тот же результат, как если бы мы вычли из данного числа 11, а остаток умножили на 11. Найдите это число.

3. Имеется 5 листов бумаги. Некоторые из них порвали на 5 кусков каждый. Некоторые из получившихся кусков снова порвали на 5 частей. И так далее. Можно ли, продолжая эту операцию, получить 1980 листочков?

4. Имеется некоторое количество гирь, массы которых не превосходят 10 кг. Известно, что если все гири каким-либо способом разбить на две кучки, то обязательно масса одной из кучек не превосходит 10 кг. Найти наибольшую общую массу всех гирь.

5. Расшифруйте ребус:

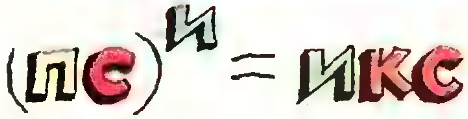
$$(\text{ПС})^{\text{И}} = \text{ИКС}.$$

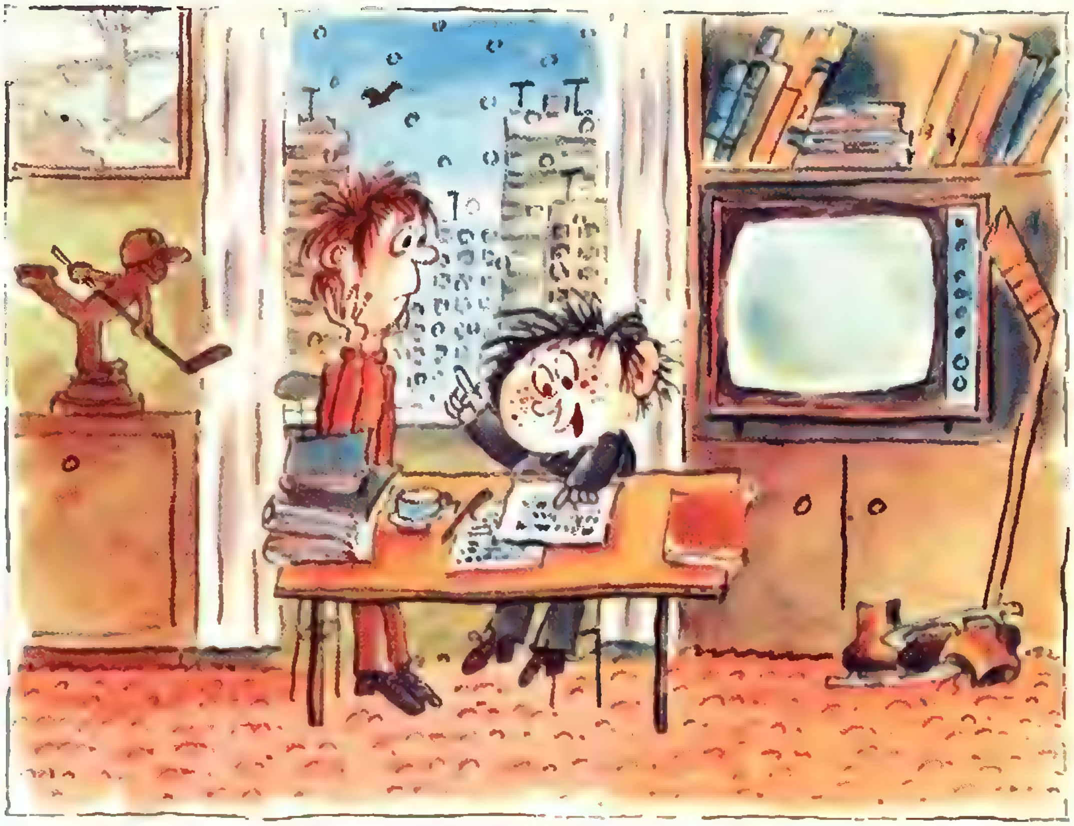
6. Четырехзначное число $A=\overline{abcd}$ является квадратом двузначного числа B. Четырехзначное число $A'=\overline{dcba}$ является квадратом некоторого двузначного числа, кратного числу B. Найдите числа A и B.

7. Имеет ли уравнение

$$x^2+y^2+z^2=1980$$

решение в натуральных числах?





Д. Изаак, Т. Уткина

Кружочки Степы Мошкина

После факультатива по математике семиклассник Степа Мошкин зашел к своему однокласснику Олегу. Тот решил воспользоваться Степиным приходом.

— Дай списать геометрию, а то я ничегошеньки не понимаю.

— Думаешь, после этого ты станешь понимать ее лучше? — неожиданно возразил Степа, решивший на этот раз проявить сознательность.

— Ну как в этой геометрии разобраться? — воскликнул Олег.— Вот в алгебре, там куда ни шло, считай себе, пока ответ не получишь. А в геометрии перемещений ни увидишь, ни пощупаешь, а сейчас еще кружочки какие-то, эти, как их, композиции...

— Мы на факультативе как раз разбирали композиции перемещений. И знаешь — с ними точно, как в алгебре: считаешь, считаешь и ответ получаешь. Так здорово! Давай расскажу!

— Зачем мне твой факультатив? Ты лучше сказал бы, как домашние задания решать.

Ребята спорили не долго: энтузиазм Степы оказался сильнее лени Олега. Вскоре на столе появились листки для черновика, ручки и чистая двухконечная тетрадь в клеточку. Поначалу Степа пытался подражать Марии Васильевне, но быстро сбился на более вольную речь:

— Ты понимаешь, кружочек — это вроде как в алгебре умножение, операция такая между буквами,— начал Степа.— Только буквы не числа обозначают, а перемещения. И как в алгебре, скобки все равно как ставить.

Степа написал в чистовой тетради

$$R\circ(Q\circ P)=(R\circ Q)\circ P. \qquad (1)$$

— Это законом ассоциативности называется. А тождественное перемещение E, это когда все точки на месте остаются, вроде единицы

$$P\circ E=E\circ P=P. \qquad (2)$$

И у каждого перемещения P обратное есть, P^{-1} обозначается; для него

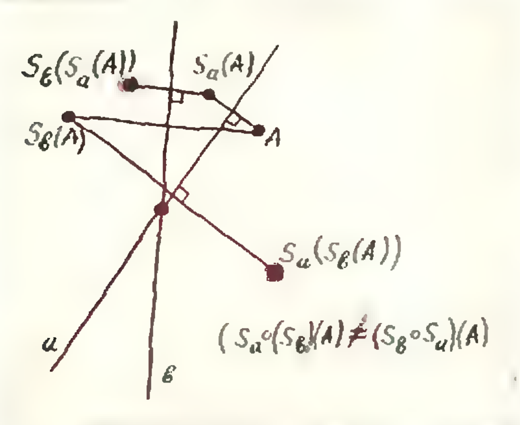
$$P\circ P^{-1}=P^{-1}\circ P=E. \qquad (3)$$

— Все понятно,— сказал Олег,— только вот чего ты самое простое свойство не привел?

И Олег написал на черновике $Q\circ P=P\circ Q$.

— Э нет, это как раз для перемещений не всегда верно,— сказал Степа. В чистовой тетради появилась такая запись с рисунком:

Пример. $S_a\circ S_b\neq S_b\circ S_a$.



В примере Олег быстро разобрался (а вы?); Степа же в чистовую тетрадь написал еще две строчки:

$$\begin{aligned} P=Q &\Leftrightarrow T\circ P=T\circ Q,\\ P=Q &\Leftarrow P\circ T=Q\circ T, \end{aligned} \qquad (4)$$

снабдив их таким комментарием:

— Как в алгебре: обе части равенства можно «умножить» на одно и то же перемещение, и сокращать тоже можно. Только с одной и той же стороны. Вот так: $P\circ T=T\circ Q\Rightarrow P=Q$ делать нельзя!

— Почему? — спросил Олег, но тут же сам себе ответил.— Если $T\circ Q\neq Q\circ T$, как в примере, то тогда чепуха получается.

Затем Степа решил проверить, какие перемещения все-таки знает Олег. Когда он выжал из Олега слова «центральная симметрия», ребята вспомнили обозначение Z_Q (для симметрии с центром Q), и Степа написал $Z_Q\circ Z_Q=?$ Олег, подумав немного, стер знак вопроса, и в тетрадке появилась такая запись:

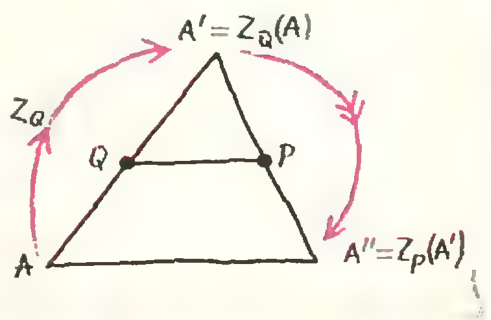
$$Z_Q\circ Z_Q=E. \qquad (5)$$

Тут Степа предложил более сложный вопрос: $Z_P\circ Z_Q=?$ Когда ребята разобрались с этим в черновике, Олег аккуратно записал:

Композиция двух центральных симметрий — перенос:

$$Z_P\circ Z_Q=2\overrightarrow{QP}. \qquad (6)$$

Под рисунком



Степа добавил доказательство: $\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PA''}=\overrightarrow{QA'}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{A'P}=\overrightarrow{QP}+(\overrightarrow{QA'}+\overrightarrow{A'P})=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{QP}$.

Следующий вопрос Степы вы, наверное, угадали: $Z_P\circ Z_Q\circ Z_R=?$ Со Степиной подсказкой Олег решил и эту задачу; записал он результат так:

Композиция трех центральных симметрий — тоже центральная симметрия:

$$Z_P\circ Z_Q\circ Z_R=Z_S, \qquad (7)$$

где S — такая точка, что

$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}. \qquad (8)$$

Доказательство.

$Z_Q\circ Z_R \underset{6,8}{=} Z_P\circ Z_S\Rightarrow Z_P\circ Z_Q\circ Z_R=$ $=Z_P\circ Z_P\circ Z_S\underset{5}{\Rightarrow} Z_P\circ Z_Q\circ Z_R=E\circ Z_S\underset{2}{=}Z_S$.

— Мы с тобой так и будем под знаками $=$ и $\Rightarrow$ ставить цифирьки, чтобы не забыть, откуда у нас что получилось,— пояснил Степа.

Затем Олег вспомнил, что, кроме центральной, бывает и осевая симметрия: S_a; в тетрадь он тут же записал:

$$S_a\circ S_a=E, \qquad (9)$$

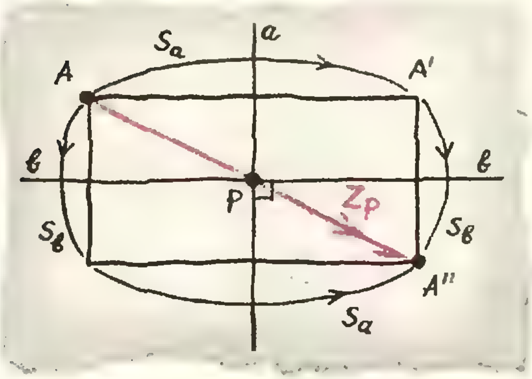
после чего ребята стали размышлять над вопросом $S_b\circ S_a=?$ Вспомнив факультатив, Степа предложил это сделать сначала в случае, когда $a\perp b$. В тетради вскоре появилась такая запись:

Композиция осевых симметрий с перпендикулярными осями — центральная симметрия:

$$S_b \circ S_a = S_a \circ S_b = Z_P, \qquad (10)$$

если $a \perp b$ *и* $P = a \cap b$.

Вместо доказательства они сделали рисунок.



А для случая $a \| b$ ребята написали:

Композиция двух осевых симметрий с параллельными осями — параллельный перенос:

$$S_b \circ S_a = 2\overrightarrow{AB}, \qquad (11)$$

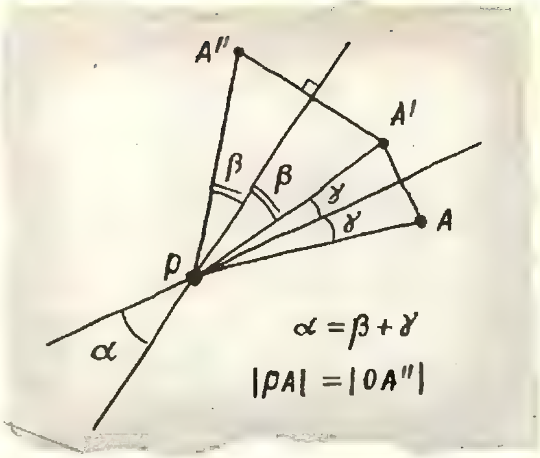
если $a \| b$, $A \in a$, $B \in b$, $(AB) \perp a$.

Доказательство. $S_b \circ S_a \underset{(2)}{=} S_b \circ (E \circ S_a) \underset{(9)}{=} S_b \circ ((S_c \circ S_c) \circ S_a) \underset{(1)}{=} (S_b \circ S_c) \circ (S_c \circ S_a) \underset{(10)}{=} Z_B \circ Z_A \underset{(6)}{=} 2AB$, где $(AB) = c$.

— Вот видишь,— торжествовал Стена,— считаешь, считаешь, ответ получаешь! А наши ответы — равенства — тем хороши, что их можно в обе стороны читать. Вот последнее, например, можно прочитать так:

Всякий параллельный перенос можно представить в виде композиции двух осевых симметрий, оси которых перпендикулярны направлению переноса и отстоят друг от друга на половину его длины.

Ребята вернулись к задаче „$S_b \circ S_a = ?$" в общем случае, когда a пересекает b. Появилась новая запись, а вместо доказательства — рисунок:



Композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями — поворот:

$$S_b \circ S_a = R_P^{2\alpha}, \qquad (12)$$

где $P = a \cap b$ *и* α *— угол*) между* a *и* b.

Стена объяснил, что и это соотношение можно «прочитать в другую сторону»: *поворот можно представить в виде композиции двух осевых симметрий, оси которых пересекаются в центре поворота и угол между которыми равен половине угла поворота.*

Затем ребята занялись поворотом (R_P^α); в тетрадке появились следующие записи:

$$R_P^\alpha \circ R_P^{-\alpha} = E, \qquad (13)$$

$$R_P^\alpha \circ R_P^\beta = R_P^{\alpha+\beta}. \qquad (14)$$

Композиция двух поворотов — поворот:

$$R_Q^\beta \circ R_P^\alpha = R_T^{\alpha+\beta}, \qquad (15)$$

*если**) T — точка пересечения прямых* $c = R_P^{\alpha/2}(a)$ *и* $b = R_Q^{\beta/2}(c)$, *где* $c = (PQ)$.

Доказательство. $R_Q^\beta \circ R_P^\alpha \underset{(1.2)}{=} (S_b \circ S_c) \circ (S_c \circ S_a) \underset{(1)}{=} S_b \circ (S_c \circ S_c) \circ S_a \underset{(9)}{=} S_b \circ S_a = R_T^{2(\alpha/2+\beta/2)} = R_T^{\alpha+\beta}$.

---

*) Ребята забыли написать, что берется наименьший угол между a и b.

**) Ребята забыли потребовать $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha + \beta < 2\pi$.

— Ну как, понравилось? — спросил Степа, подводя итог импровизированному занятию.

— Здорово,— согласился Олег, а потом с грустью добавил: но домашнее задание я так и не сделал, а через пять минут «Спартак» — «Динамо» по первой программе...

— Ничего подобного, ты уже все сделал! Смотри: равенство (15) — это номер 781*), номер 770 — это (10), 772 — это (11).

— Но была еще задача, которую Мария Васильевна диктовала,— и Олег прочитал:

Задача. *Даны три точки A_1, B_1, C_1, не лежащие на одной прямой. Постройте треугольник ABC так, чтобы точки A_1, B_1, C_1 были серединами его сторон.*

— Так ее решение сразу следует из (7): ведь $Z_{A_1}\circ Z_{B_1}\circ Z_{C_1}$ будет симметрией относительно вершины B, которая поэтому строится по формуле (8). Понимаешь?

...Когда нападающий «Спартака» Якушев овладел шайбой после первого вбрасывания, оба товарища уже сидели перед телевизором.

---

*) «Геометрия 6—8», п. 54, с. 194.

Наша обложка

На первой странице обложки показано созданное компьютером совместно с художником изображение поверхности Штейнера, заданной уравнением 4 степени

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz = 0. \qquad (*)$$

Как нередко бывает, характерное по виду уравнение представляет интересный и тоже характерный геометрический образ.

На обложке показаны сечения поверхности семейством плоскостей, перпендикулярных одной из осей координат (Ox). Эти сечения напоминают «восьмерки», которые увеличиваются и переходят в подобие «бантиков» (невидимые части сечений ЭВМ не показала). На рисунках 1 и 2 поверхность показана в двух ракурсах.

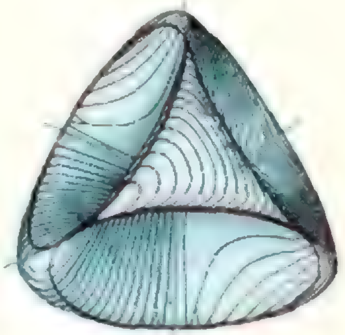


Рис. 1.

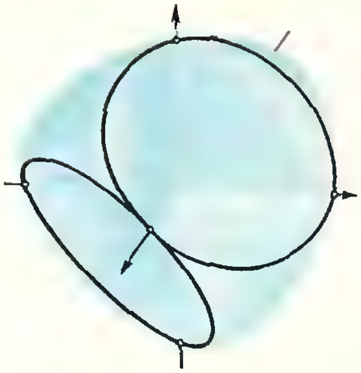


Рис. 2.

Она пересекает оси координат x, y, z в 6 «особых» точках со значениями координат 1/2 и −1/2. На интервалах между особыми точками, вдоль каждой координатной оси, поверхность самопересекается (рис. 1). В окрестности начала координат она близка к трем пересекающимся координатным плоскостям, что хорошо видно на рисунке 2. Кроме того, поверхность содержит все три координатные оси, вписана в правильный тетраэдр (с центром в начале координат) и касается четырех его граней по четырем окружностям. Видимые окружности показаны на рисунке 1 красным цветом. Каждые две из этих окружностей имеют общую точку — одну из шести особых.

Поверхность Штейнера можно считать замкнутой (если исключить из рассмотрения принадлежащие ей координатные оси), она ограничивает четыре одинаковых тела, «состыкованных» ребрами (отрезками координатных осей). Если считать, что, двигаясь по какой-либо стороне поверхности, можно «проходить сквозь» пересекающую ее другую полость, то при таком движении легко попасть на противоположную сторону; наша поверхность, как лист Мёбиуса или бутылка Клейна, односторонняя.

В заключение — вопрос: какая получится поверхность, если в правую часть уравнения (*) вместо нуля поставить числа +0,001, −0,001? Если этот вопрос заинтересует вас и вы пришлете свои рисунки, мы попросим компьютер нарисовать эти поверхности более точно.

Ю. Котов

Десять лет издается «Квант» — и все десять лет на его страницах неизменно появляется рубрика «Практикум абитуриента». Редакционная почта, встречи с учащимися и педагогами, присылаемые в редакцию читательские анкеты показывают, что этот раздел вызывает большой интерес у многих юных читателей журнала.

И это вполне понятно: будущим абитуриентам (особенно тем, кто живет на селе, вдали от научно-педагогических центров) хочется узнать, какие задачи предлагают поступающим, что представляет собой приемный экзамен, как лучше к нему подготовиться. Редакция «Кванта» стремится по возможности полно и всесторонне отвечать на такие вопросы.

Прежде всего, в «Практикуме абитуриента» читатели найдут статьи, посвященные подробному разъяснению наиболее важных и сложных вопросов программ вступительных экзаменов по математике и физике, разбору типичных задач, главным образом взятых непосредственно из вариантов приемных экзаменов в вузы, анализу характерных, особенно часто встречающихся ошибок абитуриентов. Кроме того, на страницах этого раздела будут регулярно помещаться тексты задач вариантов письменных экзаменов и образцы задач устных экзаменов, которые предлагались в прошлом году в различных высших учебных заведениях нашей страны.

Познакомившись с публикациями «Практикума абитуриента», читатели смогут легко убедиться, что для успешной сдачи вступительных экзаменов никаких дополнительных — по сравнению со школьными курсами математики и физики — знаний не требуется. Однако не следует думать, что достаточно было бы просто еще раз прочесть школьные учебники,— необходимо внимательно разобрать и глубоко усвоить теоретический материал, получить твердые и прочные навыки в решении задач. Этого можно достичь лишь настойчивым, упорным трудом, систематическими, планомерными занятиями в течение всего оставшегося до экзаменов времени.

Статьи «Практикума абитуриента» не могут (да и не ставят такой цели) заменить собой школьные учебники. Они написаны в расчете на то, что читатель уже усвоил школьные курсы математики и физики и хотел бы найти дополнительные пояснения и задачи для самостоятельного решения. Кроме материалов, которые появятся в «Практикуме абитуриента» в следующих номерах журнала, при подготовке к вступительным экзаменам полезно было бы познакомиться и с некоторыми статьями «Кванта», публиковавшимися в прошлые годы. Тематический список таких статей помещен ниже; в списке указаны год, номер журнала и страница, где статья начинается. (Следует иметь в виду, что в статьях, опубликованных до 1977 года, иногда встречаются термины и обозначения, отличающиеся от принятых в школе сейчас; мы надеемся, что внимательный читатель легко преодолеет это затруднение.)

Математика

Числа, арифметика, алгебра: 1970, № 3, с. 53; 1972, № 3, с. 50; 1972, № 6, с. 30; 1972, № 9, с. 45; 1974, №9, с. 70; 1975, № 3, с. 72; 1975, № 8, с. 59; 1977, № 5, с. 45;

Функции: 1970, № 1, с. 27; 1970, № 2, с. 3; 1971, № 2, с. 37; 1971, № 9, с. 41; 1971, № 11, с. 48; 1972, № 5, с. 36; 1972, № 12, с. 19; 1973, № 4, с. 57; 1973, № 5, с. 38; 1974, № 12, с. 66; 1975, № 2, с. 43; 1975, № 4, с. 37; 1976, № 10, с. 41; 1976, № 11, с. 47; 1976, № 12, с. 34; 1977, № 1, с. 43; 1977, № 4, с. 38; 1978, № 2, с. 49; 1978, № 3, с. 38; 1978, № 10, с. 54.

Уравнения и неравенства: 1970, № 4, с. 41; 1970, № 5, с. 48; 1971, № 3, с. 40; 1971, № 4, с. 43; 1971, № 5, с. 40; 1971, № 6, с. 46; 1971, № 10, с. 45; 1972, № 1, с. 46; 1972, № 12, с. 49; 1973, № 2, с. 58; 1976, № 3, с. 51; 1977, № 3, с. 56; 1977, № 9, с. 53; 1978, № 6, с. 53; 1979, № 2, с. 48; 1979, № 5, с. 43; 1979, № 9, с. 29; 1979, № 12, с. 34.

Предел, производная, первообразная: 1974, № 11, с. 54; 1975, № 12, с. 10; 1977, № 1, с. 36; 1977, № 2, с. 35; 1977, № 4, с. 46; 1977, № 5, с. 30; 1977, № 12, с. 40; 1978, № 5, с. 44; 1978, № 6, с. 60; 1978, № 9, с. 53; 1978, № 10, с. 62; 1978, № 11, с. 28; 1979, № 2, с. 40; 1979, № 3, с. 41; 1979, № 6, с. 24; 1979, № 10, с. 36.

Геометрия: 1970, № 2, с. 23; 1970, № 11, с. 54; 1971, № 1, с. 28; 1971, № 6, с. 52; 1971, № 12, с. 41; 1972, № 2, с. 60; 1972, № 4, с. 54; 1972, № 7, с. 40; 1972, № 11, с. 52; 1973, № 10, с. 56; 1974, № 2, с. 46; 1974, № 5, с. 58; 1974, № 9, с. 53; 1974, № 10, с. 32; 1974, № 12, с. 55; 1975, № 1, с. 55; 1975, № 3, с. 61; 1975, № 7, с. 30; 1975, № 10, с. 48; 1975, № 11, с. 45; 1975, № 12, с. 46; 1976, № 1, с. 61; 1976, № 2, с. 46; 1976, № 5, с. 57; 1976, № 7, с. 21; 1976, № 9, с. 56; 1976, № 10, с. 46; 1976, № 12, с. 50; 1977, № 2, с. 47; 1977, № 3, с. 38; 1977, № 10, с. 48; 1977, № 11, с. 82; 1977, № 12, с. 48; 1978, № 1, с. 47; 1978, № 2, с. 36; 1978, № 3, с. 48; 1978, № 4, с. 36; 1978, № 11, с. 42; 1979, № 1, с. 45; 1979, № 3, с. 51; 1979, № 5, с. 34; 1979, № 6, с. 33; 1979, № 9, с. 38; 1979, № 10, с. 44; 1979, № 11, с. 41.

Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1972, № 6, с. 44; 1972, № 10, с. 47; 1973, № 1, с. 35; 1973, № 3, с. 44; 1973, № 8, с. 71; 1973, № 11, с. 52; 1973, № 12, с. 39; 1974, № 1, с. 53; 1974, № 3, с. 48; 1976, № 2, с. 61; 1976, № 3, с. 69; 1976, № 4, с. 40; 1976, № 6, с. 49; 1976, № 9, с. 59; 1977, № 6, с. 71; 1977, № 9, с. 44; 1978, № 1, с. 36; 1978, № 2, с. 34; 1978, № 4, с. 48; 1978, № 6, с. 32; 1978, № 7, с. 44; 1978, № 12, с. 34; 1979, № 4, с. 48; 1979, № 7, с. 37.

Физика

Механика: 1970, № 6, с. 39; 1971, № 2, с. 44; 1971, № 5, с. 50; 1971, № 9, с. 47; 1971, № 11, с. 54; 1972, № 3, с. 58; 1972, № 9, с. 51; 1973, № 9, с. 68; 1973, № 11, с. 57; 1974, № 3, с. 52; 1974, № 11, с. 60; 1975, № 1, с. 60; 1976, № 12, с. 40; 1977, № 2, с. 50; 1977, № 3, с. 46; 1977, № 11, с. 77; 1977, № 12, с. 52; 1978, № 3, с. 54; 1978, № 11, с. 48; 1978, № 12, с. 42; 1979, № 10, с. 49.

Жидкости и газы: 1972, № 12, с. 53.

Молекулярная физика; тепловые явления: 1972, № 5, с. 45; 1973, № 1, с. 43; 1974, № 1, с. 60; 1976, № 3, с. 58; 1977, № 6, с. 67; 1978, № 1, с. 42; 1979, № 1, с. 50.

Основы электродинамики: 1972, № 2, с. 54; 1972, № 4, с. 62; 1972, № 6, с. 55; 1972, № 6, с. 59; 1972, № 7, с. 48; 1972, № 7, с. 51; 1973, № 3, с. 50; 1973, № 7, с. 35; 1974, № 5, с. 64; 1975, № 4, с. 41; 1975, № 12, с. 51; 1978, № 4, с. 42; 1978, № 5, с. 38; 1979, № 2, с. 52; 1979, № 3, с. 45; 1979, № 4, с. 43.

Колебания и волны: 1974, № 6, с. 31; 1976, № 2, с. 51.

Оптика: 1971, № 7, с. 41; 1977, № 4, с. 50; 1979, № 5, с. 39; 1979, № 6, с. 30.

Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1970, № 12, с. 50; 1972, № 6, с. 62; 1972, № 10, с. 52; 1973, № 4, с. 52; 1973, № 5, с. 43; 1973, № 7, с. 30; 1975, № 5, с. 60; 1975, № 11, с. 50; 1978, № 6, с. 65; 1979, № 7, с. 41.

Н. Виленкин

Три точки, три точки, три точки...

Однажды во время приемных экзаменов в вуз, в котором математика изучается весьма глубоко и потому к поступающим предъявляют высокие требования, одному абитуриенту задали вопрос, совсем простой на первый взгляд:

Сколько решений имеет уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}}x$?

Поскольку решение уравнения $\varphi(x)=\psi(x)$ равносильно отысканию абсцисс точек, в которых пересекаются графики функций $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$, экзаменующийся сделал эскиз графиков функций $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{16}}x$ (рис. 1) и сказал:

«Это уравнение имеет одно решение. При этом, поскольку по определению логарифма функции $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{16}}x$ обратны друг другу, их графики симметричны относительно прямой $y=x$, а потому точка пересечения графиков лежит на этой прямой. Значит, чтобы найти ее, надо решить уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^x=x$. Но как его решать, я не знаю».

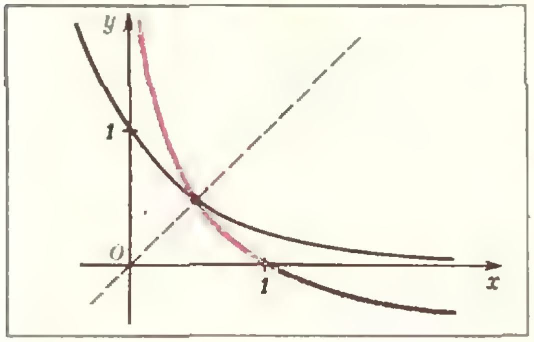


Рис. 1.

Экзаменатор ответил:

«То, что Вы не умеете решать уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^x=x$,— не беда, мы этого не требуем: оно не решается элементарными методами. Хуже то, что Вы пропустили два его решения: $x=\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{4}$. Подставьте эти значения в уравнение, проверьте!»

И действительно, написав равенства $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{2}$ и $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{4}$, абитуриент с огорчением обнаружил, что они истинны: $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ и $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. Таким образом, его обманула «наглядность»: графики функций $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{16}}x$ пересекаются не только в точке $P\,(b;b)$, но еще в двух точках: $M\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)$ и $N\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$, симметричных относительно прямой $y=x$.

Причина ошибки абитуриента состоит в следующем. Он знал, что при $0<a<1$ значения функции $y=\log_a x$ неограниченно увеличиваются по мере приближения x к нулю, а функция $y=a^x$ при $x=0$ принимает значение 1. Отсюда он сделал «вывод», что на всем промежутке $]0;b[$, где b — абсцисса точки P, $a^x<\log_a x$, и потому иных точек пересечения, кроме P, графики этих функций не имеют. Однако сделать этот вывод столь же логично, как, глядя на заключительную таблицу чемпионата СССР по футболу, сделать вывод, что победившая команда была впереди и после первого круга — как известно, очки по осени считают.

Оказалось, что при $a=\frac{1}{16}$ графики рассматриваемых функций ведут

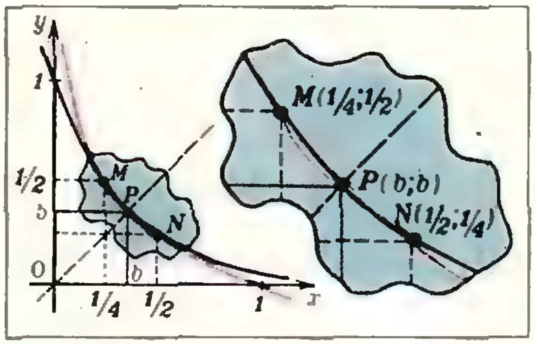


Рис. 2.

себя куда хитрее (рис. 2): на промежутке $]0; \frac{1}{4}[$ выше расположен график функции $y=\log_{\frac{1}{16}} x$, на промежутке $]\frac{1}{4}; b[$ «в лидеры» выходит функция $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$, на промежутке $]b; \frac{1}{2}[$ снова выше график функции $y=\log_{\frac{1}{16}} x$ и лишь на луче $[\frac{1}{2}; +\infty[$ функция $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ окончательно становится лидером — на всем этом луче ее график выше графика функции $y=\log_{\frac{1}{16}} x$.

В данном случае во взаимном расположении графиков удалось разобраться, непосредственно найдя корни уравнения $\left(\frac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}} x$. При других значениях a дело обстоит хуже, и ответить без подробного исследования, сколько точек пересечения имеют графики функций $y=\left(\frac{1}{15{,}5}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{15{,}5}} x$ или графики функций $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{10}} x$, весьма сложно. Мы расскажем сейчас, как это исследование проводится с помощью производных*). Сейчас нас интересует только случай $0<a<1$.

Обозначим $\ln a$ через $-k$**). Тогда функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ запишутся так: $y=e^{-kx}$ и $y=-\frac{\ln x}{k}$. Отыскание точек пересечения их графиков равносильно отысканию точек, в которых график функции $F(x)=e^{-kx}+\frac{\ln x}{k}$ пересекает ось абсцисс, а это последнее связано с изучением промежутков возрастания и убывания функции F. Для этого мы найдем производную:

$$F'(x)=-ke^{-kx}+\frac{1}{kx}=$$
$$=\frac{1-k^2xe^{-kx}}{kx}. \qquad (1)$$

Разберем три случая.

Первый случай: $0<k<e$. Покажем, что в этом случае $F'(x)>0$ для всех $x>0$. Для этого достаточно доказать, что наименьшее значение функции $1-k^2xe^{-kx}$ при $x>0$ положительно. Это наименьшее значение достигается в точке, где $(1-k^2xe^{-kx})'=0$, то есть, где $-k^2e^{-kx}+k^3xe^{-kx}=0$. Решая это уравнение, находим $x=\frac{1}{k}$. При этом значении x числитель в (1) равен $1-ke^{-1}$, что при $k<e$ положительно. Поскольку это значение наименьшее, то $F'(x)>0$ для всех $x>0$.

Из того, что $F'(x)>0$ при $x>0$, следует, что функция F возрастает на луче $]0; +\infty[$ и ее график ровно один раз пересечет ось абсцисс*). Таким образом, *при $0<k<e$ графики функций $y=e^{-kx}$ и $y=-\frac{\ln x}{k}$ пересекаются лишь один раз*, а именно на прямой $y=x$ (так, как на рисунке 1).

Второй случай: $k>e$. Здесь дело обстоит сложнее. Обозначим через b абсциссу точки пересечения

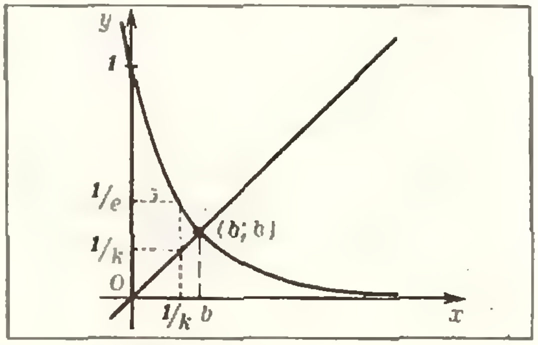


Рис. 3.

---

*) См. также «Квант», 1977, № 10, с. 37.

**) Так как $0<a<1$, $\ln a<0$.

*) Это следует, например, из п. 84 пособия «Алгебра и начала анализа 10».

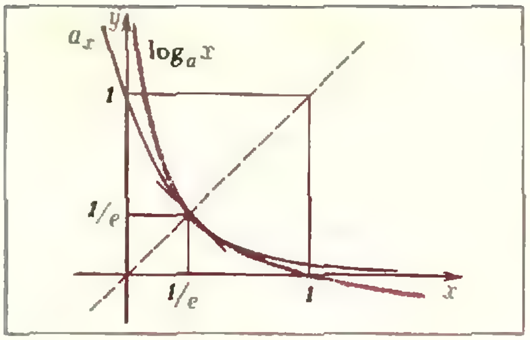


Рис. 4.

графиков $y=e^{-kx}$ и $y=x$. В этой точке $e^{-kb}=b=-\frac{\ln b}{k}$, и потому $kb=-\ln b$. При $x=\frac{1}{k}$ функция e^{-kx} равна $\frac{1}{e}$, а функция $y=x$ принимает значение $\frac{1}{k}$, поэтому в силу условия $k>e$ абсцисса точки пересечения графиков функций $y=e^{-kx}$ и $y=x$ больше, чем $\frac{1}{k}$ (рис. 3), то есть $b>\frac{1}{k}$. Но тогда $kb>1$, и потому

$$F'(b)=\frac{1-k^2be^{-kb}}{kb}=$$

$$=\frac{1-k^2b^2}{kb}<0.$$

Значит, при $k>e$ производная функции F в точке $x=b$ отрицательна. Поскольку $F(b)=0$, слева от b найдутся точки, где $F(x)>0$. Так как по мере приближения x к нулю $F(x)$ становится отрицательным, существует по крайней мере одна точка c, лежащая между 0 и b, в которой $F(x)=0$*). Это показывает, что при $k>e$ графики функций $y=e^{-kx}$ и $y=-\frac{\ln x}{k}$ пересекаются по крайней мере в одной точке, не лежащей на прямой $y=x$. Из того, что эти графики симметричны друг другу относительно прямой $y=x$, вытекает наличие еще одной точки пересечения. Можно доказать, что иных точек пересечения, кроме этих трех, графики не имеют (доказательство связано с изучением второй производной функции F).

Итак, если $k>e$, рассматриваемые *графики имеют ровно три точки пересечения.*

Третий случай: $k=e$. В точке пересечения $(b;\ b)$ графиков функций e^{-kx} и $-\frac{\ln x}{k}$ имеем $e^{-kb}=b$ или, в нашем случае, $e^{-eb}=b$. Непосредственной подстановкой проверяется, что число $\frac{1}{e}$ является корнем уравнения $e^{-ex}=x$. Поскольку функция e^{-ex} убывает (на всей прямой), а функция x возрастает, уравнение $e^{-ex}=x$ имеет не больше одного корня. Значит, $b=\frac{1}{e}$. Легко проверить, что $F(b)=F'(b)=0$, поэтому график функции F при $x=b=e^{-1}$ касается оси абсцисс.

В нашем случае $F(x)=e^{-ex}+\frac{1}{e}\ln x$. Поэтому

$$F'(x)=-e^{1-ex}+\frac{1}{ex}=$$

$$=\frac{e^{ex-2}-x}{xe^{ex-1}}.$$

Производная функции $e^{ex-2}-x$ отрицательна при $x<b$, равна 0 при $x=b$ и положительна при $x>b$. Поэтому функция $e^{ex-2}-x$ положительна при всех $x\neq b$. Значит, при всех положительных $x\neq b$ имеем $F'(x)>0$. Следовательно, график функции F, касаясь оси абсцисс в точке $x=b$, при переходе через точку b меняет знак с минуса на плюс.

В соответствии с этим графики функций $y=e^{-ex}$ и $y=\frac{\ln x}{e}$, касаясь друг друга в их общей точке $(e^{-1};\ e^{-1})$, «переплетаются» друг с другом (рис. 4).

Подведем итог: *если* $1>a\geqslant e^{-e}\approx\frac{1}{15{,}18}$, *то графики функций* $y=a^x$ *и* $y=\log_a x$ *имеют одну точку пересечения; если же* $e^{-e}>a>0$,*— то три точки пересечения.*

Теперь можно с уверенностью сказать, что графики функций $y=\left(\frac{1}{15{,}5}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{15{,}5}}x$ имеют три точки пересечения, а графики функций $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{10}}x$ — лишь одну общую точку.

---

*) См. предыдущую сноску.

Московский инженерно-физический институт

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов 1979 года.

Математика

Письменный экзамен

Вариант

1. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два пешехода. Когда пешеход, вышедший из A, прошел 1/3 пути, второй пешеход находился в 3 км от середины пути. Найдите расстояние между A и B, если известно, что, когда пешеход, вышедший из B, прошел половину пути, первый пешеход находился от него на расстоянии 2 км. Скорости пешеходов постоянны.

2. В правильной треугольной пирамиде длина радиуса круга, вписанного в основание, равна r, а величина угла между плоскостями боковых граней пирамиды равна φ. Определите длину ребра куба, объем которого в $\sqrt{3}$ раз больше объема данной пирамиды.

3. Найдите A, B, C такие, чтобы функция вида

$$f(x)=Ax^2+Bx+C$$

удовлетворяла условиям $f'(1)=8$, $f(2)+f''(2)=33$, $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{7}{3}$.

4. Площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sin 2x$, прямыми $x=\frac{\pi}{6}$, $x=a$ и осью абсцисс, равна 0,5. Определите a.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Верхний конец однородного стержня свободно поворачивается вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис. 1). Нижним концом стержень опирается на брусок, лежащий на гладком столе. Масса стержня $m=1{,}50$ кг, угол между стержнем и вертикалью $\alpha=30°$. Если брусок потянуть вправо с силой $\vec{F}$ ($|\vec{F}|>2{,}45$ Н), он сдвигается с места. С какой силой давит стержень на брусок во время его движения?

2. Газообразный водород массой $m=1$ кг при начальной температуре $T_1=300$ К охлаждают изохорически так, что его давление падает в $\eta=3$ раза. Затем газ расширяют при постоянном давлении. Найти произведенную газом работу, если в конечном состоянии его температура оказалась равной первоначальной.

3. На тонкой изолирующей нити длиной $l=60$ см подвешен заряженный электричеством небольшой шарик массой $m=20$ мг. На расстоянии l от подвешенного шарика в одной с ним горизонтальной плоскости находится металлическая сфера радиусом $a=3$ см (рис. 2). Если зарядить сферу, подав на нее напряжение $U=8$ кВ относительно Земли, нить с шариком отклоняется от вертикали на максимальный угол 90°. Найти заряд q на шарике.

4. В установке, показанной на рисунке 3, точечный источник света S находится на главной оптической оси тонкой линзы на расстоянии $|SO|=a=0{,}6$ м от нее. Оптическая сила линзы $D=2$ дптр. За линзой расположено плоское зеркало, нормаль $\vec{n}$ к которому составляет угол $\alpha=15°$ с главной оптической осью линзы. Расстояние от линзы до зеркала $|ON|=l=1$ м. Зеркало вращают с постоянной угловой скоростью вокруг главной оптической оси линзы, при этом изображение источника движется равномерно по окружности со скоростью $v=0{,}31$ м/с. Найти период вращения зеркала.

А. Александров,
А. Забоев,
Н. Шолохов

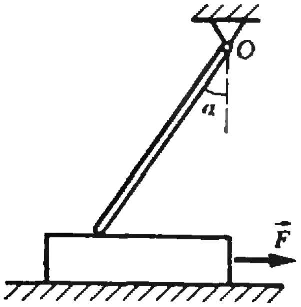


Рис. 1.

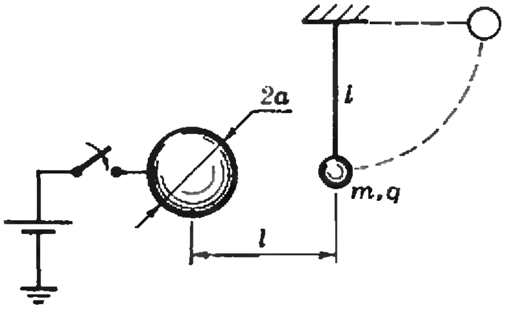


Рис. 2.

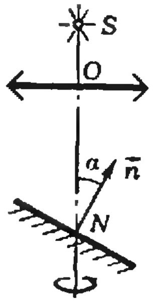


Рис. 3.

Раздел «Искусство программирования» ведется в нашем журнале начиная с № 9 прошлого года. Его цель двоякая: во-первых, разъяснить общие вопросы, связанные с ЭВМ,— что такое алгоритм и программа, что такое память и процессор компьютера, как взаимодействуют человек и машина; во-вторых, обучить некоторым машинным языкам, научить писать программы и отлаживать их на реальных ЭВМ.

Развивать эти навыки призвана «Заочная школа программирования» (см. «Квант», 1979, № 9). Новые подписчики «Кванта» могут включиться в нее начиная с этого урока, если они самостоятельно ознакомятся с основными идеями программирования на языке Робик («Квант», 1979, № 9—11).

Напоминаем нашим старым учащимся и сообщаем новым, что все задания одного номера следует выполнять В ОДНОЙ УЧЕНИЧЕСКОЙ ТЕТРАДИ (а не на отдельных листках!) и высылать нам простым (НЕ ЗАКАЗНЫМ!) письмом (не бандеролью) не позже 20 числа следующего месяца, написав на конверте в правом нижнем углу слово «КВАНТ», по адресу: 630090, Новосибирск 90, проспект Науки 6, ВЦ СО АН, отдел информатики, Заочная школа программирования. Просим вложить в ваше отправление конверт с вашим адресом и 6-копеечной маркой для ответа.

Новым учащимся к заданиям 5 урока следует приложить заявление, написанное по образцу, указанному в «Кванте», 1979, № 9, с. 45.

Заочная школа программирования

Урок 5: Основные операторы учебно-производственного языка Рапира

На предыдущих уроках мы познакомились с учебным языком Робик, предназначенным для обучения основным понятиям программирования и важнейшим навыкам, необходимым для решения задач на ЭВМ. Сегодня мы приступаем к изучению нового, значительно более мощного языка, позволяющего решать не только учебные, но и практически важные научные и производственные задачи.

Прежде, чем читать дальше, проверьте себя, ответив на следующие вопросы:

1. Что такое предписание? процедура? оператор? директива?
2. Как описывать и как вызывать процедуры в Робике?
3. Как составлять и читать синтаксические диаграммы?
4. Что такое имя? Что может быть значением имени? Как присвоить имени новое значение?
5. Как записывается и как выполняется предписание присваивания? предписание печати? условное и циклическое предписание?
6. Что такое параметры и для чего они используются?

Если какие-то из этих вопросов вызвали у вас затруднения, перечитайте материалы уроков 1—4 («Квант», 1979, №№ 9—11).

Основные правила языка Рапира

Основные правила языка Рапира очень похожи на правила Робика. Любая программа состоит из предписаний; после каждого из них ставится точка с запятой. Предписания состоят из отдельных слов. Под *словами* в большинстве языков программирования, в том числе в Робике и Рапире, подразумевают *числа, тексты, имена, специальные знаки* (например, скобки, знаки арифметических операций и т. д.) и так называемые *ключевые слова* (например, слова ЕСЛИ, ТО, ИНАЧЕ в условном операторе Робика). Правила записи слов в Рапире в основном знакомы вам по Робику:

Имена состоят из букв и цифр, причем первым символом в имени должна быть буква, например:

А5, ЗАЯЦ, Л1Д1, ПУТЬ, ВРЕМЯ.

Число символов в имени может быть любым, но машина различает имена по первым шести символам, так что с ее точки зрения имена

КРОКОДИЛ, КРОКОДИЛ5,
КРОКОД и КРОКОДИЛЬЧИК

— это одно и то же имя. Во избежание ошибок не рекомендуется без крайней необходимости употреблять в программе имена длиннее шести символов. Кроме того, запрещено употреблять имена, совпадающие с ключевыми словами. Слово ЕСЛИ, например, не может быть именем.

Тексты состоят из любых символов, заключенных в апострофы:

'ЭТО ТЕКСТ НА РАПИРЕ'
'A+B+C9090=33/— /'.

Числа состоят из цифр; для отделения целой части от дробной используется **точка:**

2.521 21393 2345.00098

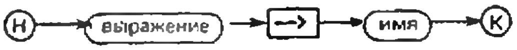
В числах должно быть не больше 12 цифр.

Со специальными знаками и ключевыми словами мы познакомимся по мере изучения отдельных предписаний.

В Рапире, в отличие от Робика, разрешается располагать несколько предписаний на одной строке или, наоборот,— одно предписание записывать в несколько строк. Переходить на новую строку можно в любом месте предписания, но разрывать слова языка при этом нельзя.

Предписание присваивания

Знакомство с предписаниями языка Рапира мы начнем с предписания присваивания. Его синтаксическая диаграмма очень проста и напоминает сокращенную до предела диаграмму соответствующего предписания Робика:



Стрелка —> читается «присвоить». На клавиатуре обычных терминалов такого знака нет, так что для изображения стрелки приходится нажимать две клавиши: «—» (минус) и «>» (больше).

В отличие от Робика, значением переменного поля выражение в Рапире может быть не только имя, число или строка, но и любая последовательность чисел и имен, соединенных правильно расставленными знаками арифметических операций и круглыми скобками. В математике такая конструкция называется, как известно, ***арифметическим выражением***. (Несколько позже мы встретимся и с другими разновидностями выражений в Рапире.)

В языке Рапира используются следующие знаки арифметических операций:

+ сложение
— вычитание
* умножение
/ деление
! возведение в степень*)

Порядок выполнения операций такой же, как обычно в математике; сначала выполняется возведение в степень, затем умножение и деление и в последнюю очередь — сложение и вычитание; при этом, как обычно, учитывается наличие скобок. Результат присваивается имени, стоящему после стрелки.

Ясно, что специальные вычислительные операторы (СЛОЖИТЬ, ВЫЧЕСТЬ и т. д.), имеющиеся в Робике, оказываются совершенно ненужными в Рапире: любые вычисления могут быть исполнены в самом операторе присваивания, при этом формулы записываются почти так же, как в школьной математике.

---

*) Например, A^2 записывается так: A!2.

Например, для вычислений по формуле

$$У=2{,}781\cdot 250+500-92{,}5$$

достаточно написать

```
2.781*250+500—92.5—>У
```

При переходе от математической записи к программе на Рапире следует учитывать, однако, что знак умножения в Рапире, в отличие от обычной математики, нельзя пропускать: вместо 2AB нужно писать $2*A*B$, вместо $(A+B)(A-B)$ пишется $(A+B)*(A-B)$.

→Задание 5.1. *Записать на языке Рапира последовательность предписаний для вычислений по формулам:*

$$A=15;\ B=24;$$

$$C=3A+A^3B^2+(A+B)^5-$$

$$-\frac{A^6}{25}+33A^6;$$

$$K=8C+A^2(A+B+C)^7-33+$$

$$+\frac{(76A-34)}{58}-C^9;$$

$$Л=\frac{K^8}{38}+\frac{5A}{8}+(A+K+B)^9-76+58C;$$

→Задание 5.2. *Составить таблицу значений имен и определить, чему будут равны значения этих имен после исполнения программы:*

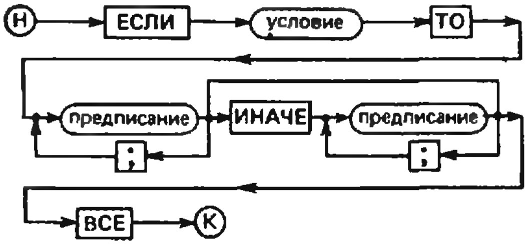
```
2—>A; A!2—>B;
B*A+(B+A+B)*A!2+A—>A
A*B—>C
C*2+B*8+C*2+A/2—>A
```

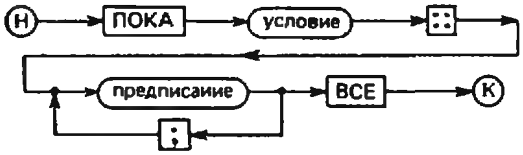
Задание 5.3. *Записать на Рапире формулы для отыскания корней X1 и X2 квадратного уравнения*)* $Ax^2+Bx+C=0$.

(Указание для шести- и семиклассников: $\sqrt{A}$ можно записать в виде $A^{1/2}$.)

Условное предписание и цикл

Условное и *циклическое предписания* в Рапире выглядят так:

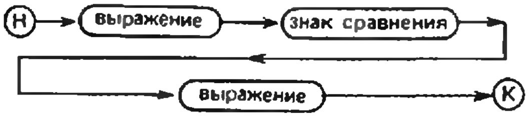




Специальный знак :: (два двоеточия) в циклическом предписании читается «повторять».

Основное отличие этих диаграмм от диаграммы Робика, как легко заметить, состоит в том, что после слов ТО и ИНАЧЕ в условном предписании и после знака :: в циклическом может стоять любое число предписаний, разделенных точками с запятой, а не одно-единственное предписание, как в Робике. В конце обоих предписаний ставится ключевое слово ВСЕ.

Условие в простейшем случае имеет вид:



В Рапире используются такие знаки сравнения:

= равно
/= не равно
> больше
< меньше
>= больше или равно
=< меньше или равно

Например, после выполнения предписания

```
ЕСЛИ A>B ТО B—>C
ИНАЧЕ A—>C ВСЕ;
```

значение имени *C* станет равным меньшему из значений имен *A* и *B*.

Рассмотрим более подробно работу такой программы:

---

*) Сообщаем шестиклассникам эту формулу $X_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

```
1—>X; 0—>C;
ПОКА X<1000:: 1/X+C—>C;
    X+1—>X ВСЕ;
```

После выполнения первых двух предписаний таблица имен будет иметь такой вид:

ИМЯ	ЗНАЧЕНИЕ
X	1
C	0

Теперь начинает работу циклическое предписание. Прежде всего проверяется условие

$$X<1000$$

Значение X, как видно из таблицы, равно 1, так что условие истинно и все предписания вплоть до ключевого слова ВСЕ будут выполняться. После этого таблица станет такой:

ИМЯ	ЗНАЧЕНИЕ
X	~~1~~ 2
C	~~0~~ 1

На следующем шаге снова проверяется условие. Оно по-прежнему истинно, так что те же самые предписания выполняются еще раз. Очевидно, так будет повторяться до тех пор, пока значение X не окажется равным (или большим) 1000. При этом условие станет ложным и выполнение цикла закончится. Значением имени X при этом останется число 1000, а значением имени C будет сумма

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{999}.$$

Если у вас есть время и желание, можете подсчитать вручную значение этой суммы и заметить, сколько времени у вас на это уйдет. Для сравнения: на ЭВМ БЭСМ-6 по этой программе получилось $C=7.48447$ (с точностью до 5 знаков после точки) за сотую долю секунды.

→Задание 5.4. *Значениями имен А и В являются различные числа. Запишите предписание, после выполнения которого значение имени МИН станет равным меньшему, а значение МАКС — большему из этих чисел.*

→Задание 5.5. *Составьте программу для вычисления суммы квадратов целых чисел от 1 до 100 включительно.*

→Задание 5.6. *Составьте программу для нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел А и В.*

Г. Звенигородский

Задачи наших читателей

1. Назовем число (день) месяца «правильным», если остаток от его деления на 7 совпадает с номером дня недели (воскресенье — нулевой день, понедельник — первый и т. д.). Назовем неделю «правильной», если все ее дни «правильные». Какой ближайший в будущем год содержит

а) максимальное число «правильных» дней;

б) максимальное число «правильных» недель?

Г. Гольдфайн

2. Докажите, что в арифметической прогрессии

1, 14, 27, 40, ...

бесконечно много членов, записываемых одними двойками. Найдите общий вид этих членов.

Д. Нямсурж

3. Докажите, что в последовательности

31, 331, 3331, 33331, ...

найдется бесконечно много членов, делящихся на 31, и ни одного, делящегося на 13.

И. Суев

4. Найдите площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей, описанных, соответственно, около треугольников ABC и ABD равны R и r.

И. Коршак

5. В некотором царстве $3n!$ городов и n видов транспорта ($n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ читается: «эн-факториал»). Любые два города связаны между собой только одним видом транспорта. Докажите, что всегда найдется такой город, выехав из которого можно побывать не менее чем в двух городах и вернуться обратно, не меняя вида транспорта.

В. Губа

А. Салихова, Н. Соколова

Графическая система Шпага

На обложках нашего журнала неоднократно публиковались рисунки, выполненные ЭВМ. Программы для «компьютеров-художников» составляли опытные программисты при помощи довольно сложных языков программирования и систем машинной графики.

Многие рисунки для раздела «Искусство программирования» тоже выполнены ЭВМ, но по программам, авторам которых — от 8 до 15 лет. На нашей фотографии показана группа юных программистов за работой у графопостроителя. Крайняя слева школьница — семиклассница Ася Салихова и ее подруга восьмиклассница Наташа Соколова разработали набор процедур графической системы Шпага, с использованием которой пишутся программы нашей машинной графики.

Статьей об этой системе, написанной ее разработчицами, и открывается подраздел «Трибуна юного программиста».

Система Шпага — это набор процедур, каждая из которых проводит какую-либо линию или выполняет вспомогательное действие (например, меняет систему координат). Процедурами Шпаги можно пользоваться в различных языках программирования, в том числе в языках Робик, Рапира, Алгол, Поплан и Паскаль. Шпага — это прежде всего учебная система, поэтому названия и параметры ее процедур*) выбирались так, чтобы их было легко запомнить и понять. Кстати, название самой системы расшифровывается так:

Школьный Пакет Графических процедур, Адаптированный

С чего начинается рисунок?

Для того, чтобы машина нарисовала такой пароходик, как на рисунке 1, ей надо дать задание.

Во-первых, следует определить место для рисунка, т. е. задать рамку нужного размера (например, 100 на 100 мм). После этого необхо-

---

*) Если слова «процедура» и «параметр» показались вам незнакомыми, посмотрите материалы первых уроков Заочной школы программирования («Квант», 1979, №№ 9—11).

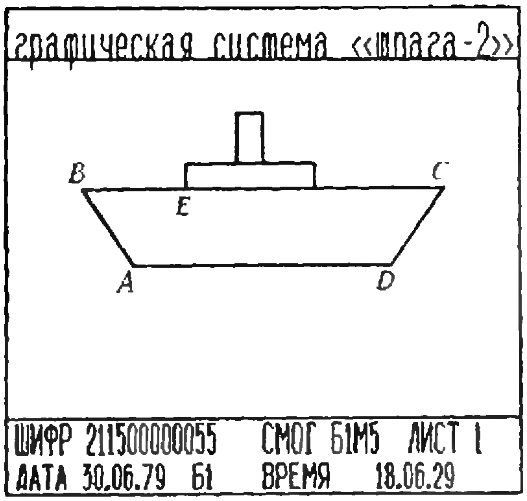

графическая система «шпага-2»
B
C
E
A
D
ШИФР 211500000055 СМОГ 61М5 ЛИСТ 1
ДАТА 30.06.79 Б1 ВРЕМЯ 18.06.29

Рис. 1

димо подвести перо или другой рисующий инструмент в точку *A*, провести отрезок в точку *B*, в точки *C* и *D*, вновь в точку *A*. Затем переставить инструмент в точку *E* и продолжить работу.

Для выполнения этих действий предназначены основные процедуры Шпаги: РАМКА, ПОДВОД, ЛУЧ, ТОЧКА, КРУГ и другие. Например, программа на Рапире для изображения пароходика могла бы выглядеть так: РАМКА (100, 100); ПОДВОД (25, 30); ЛУЧ (15,45); ЛУЧ (85, 45); ЛУЧ (75, 30); ЛУЧ (25, 30); ПОДВОД (35, 45); ЛУЧ (35, 50); ЛУЧ (60, 50); ЛУЧ (60, 45); ПОДВОД (45, 50); ЛУЧ (45, 60); ЛУЧ (50, 60); ЛУЧ (50, 50);. КОНЕЦ;

Опишем подробнее работу графических процедур, встретившихся в этой программе.

Процедура РАМКА (Д, В) играет очень важную роль в нашей системе, с нее должна начинаться любая программа, в которой используются процедуры Шпаги. Параметры Д и В в этой процедуре указывают размеры рамки в миллиметрах (Д — длина, В — высота). Исполняя процедуру РАМКА, машина, во-первых, *нарисует рамку* указанного размера, во-вторых, *напишет* над рамкой и под ней некоторые сведения о рисунке (название графической системы, дату и время исполнения рисунка) и, в-третьих, *установит* внутри рамки стандартную прямоугольную систему координат: единица масштаба — 1 мм, начало координат в левом нижнем углу рамки.

Как работают процедуры ЛУЧ и ПОДВОД, вы уже, вероятно, догадались; процедура ПОДВОД (X, Y) помещает рисующий инструмент (перо графопостроителя) в точку (X, Y), при этом никаких следов на бумаге не остается. Процедура ЛУЧ (X, Y) проводит *отрезок прямой линии* из точки, в которой перед этим находилось перо, в точку (X, Y).

Все рисующие процедуры системы Шпага работают только внутри установленной рамки. Например, если при выполнении процедуры ЛУЧ начальная или конечная точка отрезка (или обе сразу) из-за ошибки программиста оказались за рамкой, то будет нарисована только та часть отрезка, которая находится внутри рамки.

Процедура КОНЕЦ, не имеющая параметров, сообщает машине, что программа закончила работу с графопостроителем. После ее выполнения никакими процедурами Шпаги пользоваться нельзя.

Названия большинства процедур системы можно сокращать. В частности, слова РАМКА, ЛУЧ и ПОДВОД можно сократить до одной буквы: Р, Л и П. В отличие от них, название процедуры КОНЕЦ сокращать нельзя.

В сокращенном виде программа оказывается очень компактной. Например, для изображения самолетика.

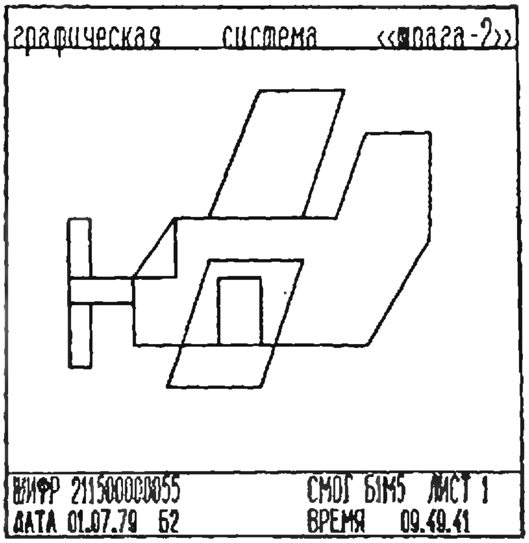

графическая система «шпага-2»
ШИФР 211500000055 СМОГ 61М5 ЛИСТ 1
ДАТА 01.07.79 Б2 ВРЕМЯ 09.49.41

Рис. 2.

достаточно написать*):

```
Р (120, 100); П (30, 46); Л (15, 46);
Л (15, 40); Л (30, 40); П (20, 46);
Л (20, 60); Л (15, 60); Л (15, 25);
Л (20, 25); Л (20, 40); П (40, 60);
Л (40, 46); Л (30, 46); Л (40, 60);
Л (78, 60); Л (85, 80); Л (100, 80);
Л (100, 55); Л (85, 30); Л (30, 30);
Л (30, 46); П (48, 60); Л (60, 90);
Л (80, 90); Л (70, 60); П (50, 30);
Л (50, 46); Л (60, 46); Л (60, 30);
П (70, 50); Л (48, 50); Л (38,20);
Л (60, 20); Л (70, 50);. КОНЕЦ;
```

Точки, круги, дуги

Процедура ТОЧКА (X, Y) (сокращенно — Т (X, Y) позволяет изобразить в нужном месте рисунка точку. После этого перо остается в точке (X, Y).

Процедура КРУГ (R) рисует окружность радиуса *R* с центром в точке, в которой перед этим находилось перо. После исполнения процедуры перо возвращается в центр. Сокращенное название этой процедуры — К (R). Например, по программе: Р (100, 100); Т (50, 50); К (10); К (20); К (30); К (40); К (50); КОНЕЦ;

ЭВМ нарисует несколько концентрических окружностей (нечто вроде мишени) с точкой в центре.

Для изображения дуг предусмотрено четыре процедуры: ДУГАЛ, ДУГАП, ДУГАЛБ, ДУГАПБ (сокращенно — ДЛ, ДП, ДЛБ, ДПБ). У каждой из них по три параметра: (X, Y, R). X и Y — это координаты точки, в которой должна закончиться дуга, *R* — радиус, которым проводится дуга. Так же, как и отрезок в процедуре ЛУЧ, дуга проводится из той точки, где перед этим находилось перо.

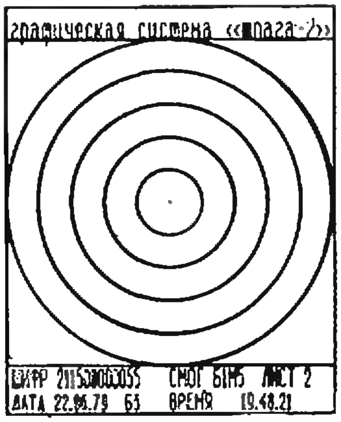

графическая система «прага-2»
ШИФР 21153000055 СМОГ БИН5 ЛИСТ 2
ДАТА 22.06.79 65 ВРЕМЯ 19.48.21

Рис. 3.

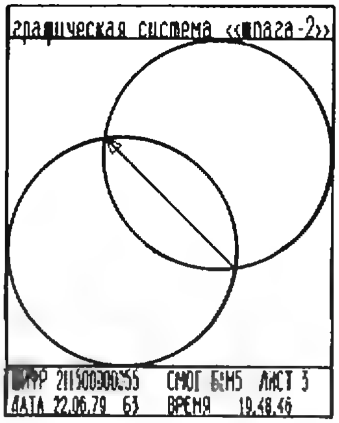

графическая система «прага-2»
ШИФР 21150030055 СМОГ БИН5 ЛИСТ 3
ДАТА 22.06.79 63 ВРЕМЯ 19.48.46

Рис. 4.

Из чертежа 4 видно, что из одной точки в другую заданным радиусом можно провести, как правило, 4 разные дуги: во-первых, больше или меньше полуокружности и, во-вторых, по часовой стрелке или против. Этим четырем случаям и соответствуют четыре процедуры. Буква Б в конце названия означает, что дуга должна быть больше полуокружности; процедуры ДП и ДПБ рисуют дугу против часовой стрелки, то есть справа от вектора, проведенного из начальной точки дуги в конечную (отсюда название ДП — «дуга правая»), процедуры ДЛ и ДЛБ рисуют дугу слева от вектора, то есть по часовой стрелке. В качестве примера приведем программу для рисунка 4:

```
Р (100, 100); П (70, 30);
Л (30, 70); Л (33, 70); Л (30, 67);
Л (30, 70); П (70, 30); ДП (30, 70,
35); П (70, 30); ДЛ (30, 70, 35);
П (70, 30); ДПБ (30, 70, 35);
П (70, 30); ДЛБ (30, 70, 35);
КОНЕЦ;
```

Если задан слишком маленький радиус, то дуга не будет нарисована, при этом система отпечатает сообщение:

```
ОШИБКА. РАДИУС МЕНЬШЕ
ПОЛОВИНЫ РАССТОЯНИЯ МЕЖ-
ДУ ТОЧКАМИ.
```

---

*) Программа составлена третьеклассницей И. Афанасьевой.

Надписи

Очень часто бывает нужно разместить на рисунке какие-нибудь надписи. Для этого в системе Шпага предусмотрены процедуры НАДПИСЬ, НПН и СТРОКА.

Процедура НАДПИСЬ (Т, В, Д) (сокращенно — НП (Т, В, Д)) позволяет изобразить горизонтальную надпись прямыми (вертикальными) буквами. Первый параметр процедуры — это текст, который нужно написать (или имя, значением которого является текст). Точка, в которой находилось перо, считается левым нижним углом надписи. Из этой точки перо начинает рисовать. Параметр В задает высоту надписи, а параметр Д — ее длину.

Процедура НПН (Т, В, Д) работает точно так же, но дает надпись со стандартным наклоном вправо.

Процедура СТРОКА (Т, X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3) позволяет нарисовать текст Т в произвольном положении. Остальные параметры этой процедуры — это координаты трех точек: (X1, Y1), (X2, Y2) и (X3, Y3). В параллелограмм, вершинами которого являются эти точки (четвертую вершину легко достроить), вписывается текст. Первая из перечисленных точек считается левой нижней вершиной параллелограмма, вторая — левой верхней и третья — правой нижней. Манипулируя этими точками, можно получать даже перевернутые и зеркально отраженные надписи.

Во всех этих процедурах надписи выполняются строчными буквами; если же мы хотим получить прописную букву, то перед ней в тексте нужно поставить двоеточие.

Примеры работы описанных процедур приведены на рисунке 5, выполненном по следующей программе:

```
':КВАНТ' —> А;

Р (100, 100); П (10, 85); НП (А, 10,
30); П (60, 85); НПН (А, 10, 30);
СТРОКА (А, 60, 40, 60, 47, 80, 20);
СТРОКА (А, 60, 50, 60, 67, 80, 70);
СТРОКА (А, 40, 40, 40, 47, 20, 20);
СТРОКА (А, 40, 57, 40, 50, 20, 77);
.КОНЕЦ;
```

Изменение системы координат

Систему координат, установленную процедурой РАМКА, можно изменить. Для этого используются процедуры МАСШТАБ, НАЧАЛО, ПОВОРОТ и некоторые другие.

Процедура МАСШТАБ (А) (сокращенно — М (А)) устанавливает новую единицу масштаба, равную А мм.

Процедура НАЧАЛО (X, Y) (сокращенно — Н (X, Y)) переносит начало координат в точку (X, Y) действующей системы; процедура ПОВОРОТ (А) поворачивает систему координат на угол А вокруг действующего начала координат. Угол задается в радианах, при А>0 поворот выполняется против часовой стрелки, при А<0 — по часовой стрелке.

Если в одной программе несколько раз использовались процедуры НАЧАЛО и ПОВОРОТ, то каждая из них исполняется в системе координат, установленной предыдущей процедурой, и в конце концов бывает трудно определить, какая система координат действует в данный момент. Поэтому предусмотрена не имеющая параметров процедура СБРОС (сокращенно — С), восстанавливающая стандартную систему координат.

От стандартной системы координат можно перейти к полярным координатам при помощи процедуры без параметров ПОЛЯР. В этом случае во всех процедурах Шпаги параметр X считается полярным радиусом, а Y — полярным углом. Для возврата к декартовым (прямоугольным) координатам служит процедура ДЕКАРТ.

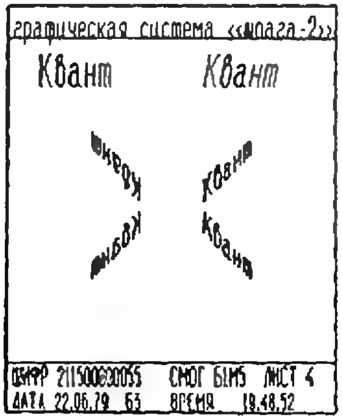

графическая система «шпага-2»
Квант
Квант
Квант
Квант
Квант
Квант
ШИФР 2115006300S5 СНОГ БИ5 ЛИСТ 4
ДАТА 22.06.79 63 ВРЕМЯ 19.48.52

Рис. 5.

Мы описали здесь лишь основные процедуры системы Шпага. Используя вместе с ними конструкции различных языков программирования, циклы, описания процедур, условные предписания и т. д., можно получать с помощью системы Шпага самые разнообразные рисунки и чертежи, строить графики сложных функций, изготовлять мультфильмы и выполнять другие графические работы.

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8-й, 9-й и 10-й классы на 1980/81 учебный год.

Цель этой школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях физикой и математикой. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно нужна.

Обучение в школе бесплатное.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых становятся студентами ведущих вузов страны.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ содержат теоретический материал, разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это — и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы отдельных учащихся проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а работы членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы проводятся очные занятия по физике и математике. Они проходят два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике. Собеседование будет проводиться во второй половине сентября (справки по телефону 216-00-05, доб. 2-59).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик должен выполнить самостоятельно на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте тетрадь в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой Вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу, приведенному ниже.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1980 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1980 года.

Тетрадь с выполненным вступительным заданием (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700,

1. Область (край или АССР)	*Башкирская АССР*
2. Фамилия, имя, отчество	*Басманова Ольга Петровна*
3. Класс	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*Наумовская средняя школа*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*бригадир*
мать	*доярка*
6. Подробный домашний адрес	*453081, Стерлитамакский р-н,* *дер. Наумовка, совхоз-техникум*

г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся задачи вступительного задания по физике и математике. По физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 4—10 — для учащихся восьмых классов и задачи 6—12 — для учащихся девятых классов. По математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 4 — 10 — для восьмых классов и 7—13 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Льдина плавает на воде. Объем ее надводной части $V_н = 20$ м³. Каков объем всей льдины?

2. Алюминиевая и латунная гири уравновешены в воздухе на аналитических весах, точность взвешивания которых $m_0 = 0,1$ мг. При какой массе гирь можно заметить нарушение равновесия весов, если поместить их в вакуумную камеру? Плотность алюминия $\rho_1 = 2,7$ г/см³, латуни $\rho_2 = 8,5$ г/см³, воздуха $\rho = 1,29$ кг/м³.

3. В теплоизолированном сосуде находится лед при температуре $t_1 = -5$°C. Какова масса льда, если при введении в сосуд стоградусного водяного пара в сосуде оказалось $m = 300$ г воды при температуре $t_2 = 80$°C?

4. На рисунке 1 изображены две электрические цепи, состоящие из известных сопротивлений $R = 10$ Ом и $2R = 20$ Ом и неизвестного сопротивления r. При каком значении r сопротивлений обеих цепей, измеренные между точками A и B, окажутся одинаковыми и каково при этом общее сопротивление цепи?

5. Три электрические лампочки, рассчитанные на напряжение $U_1 = 110$ В, имеют мощности $P_1 = P_2 = 50$ Вт и $P_3 = 100$ Вт. По какой схеме нужно включить эти лампочки в сеть с напряжением $U_2 = 220$ В так, чтобы все они горели полным накалом?

6. Прибор для изучения законов равноускоренного движения состоит из двух грузов массой $M = 100$ г, связанных невесомой нерастяжимой нитью, которая перекинута через неподвижный блок (рис. 2). На правый груз кладут добавочный груз массой $m = 10$ г, и система начинает двигаться. Когда правый груз пройдет расстояние $s = 1$ м, добавочный груз подхватывается специальным упором, и основные грузы продолжают двигаться далее с постоянной скоростью $|\vec{v}| = 0,99$ м/с. Найдите ускорение свободного падения g по результатам данного опыта.

7. Водометный катер движется следующим образом: он забирает забортную воду и выбрасывает ее назад со скоростью $|\vec{V}| = 10$ м/с относительно катера, двигаясь при этом со скоростью $|\vec{v}| = 5$ м/с. К катеру на длинном тросе прицепили буксируемое судно, сила сопротивления которого в воде при одинаковой с катером скорости движения равна силе сопротивления катера. Определите скорость буксира, если известно, что силы сопротивления катера и буксируемого судна пропорциональны их скоростям.

8. Подъемное устройство (рис. 3) состоит из однородного стержня длиной $L = 2,5$ м и массой $m = 5$ кг. Нижним концом устройство шарнирно соединено со стенкой (может свободно вращаться). Стержень образует с вертикалью постоянный угол благодаря горизонтально натянутому тросу, который соединен со стержнем на расстоянии $l = 2$ м от шарнира. Длина троса $a = 1$ м. Груз массой $M = 50$ кг подвешен в верхней точке стержня. Найдите натяжение троса.

9. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и вращается по круговой орбите в плоскости экватора в направлении вращения Земли. Найдите отношение радиуса орбиты спутника к радиусу Земли, при котором спутник периодически проходит над точкой запуска ровно через двое суток. Радиус Земли $R_З = 6400$ км.

10. В реакции синтеза ядер тяжелого (дейтерия) и сверхтяжелого (трития) изото-

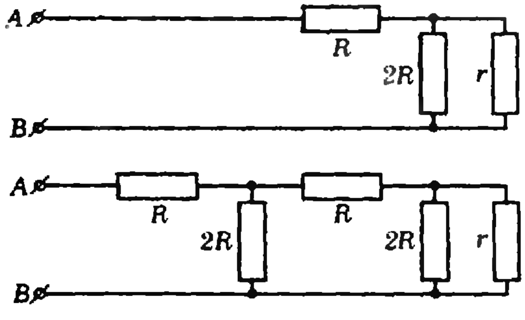


Рис. 1.

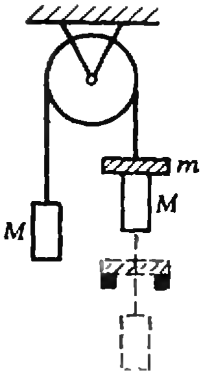


Рис. 2.

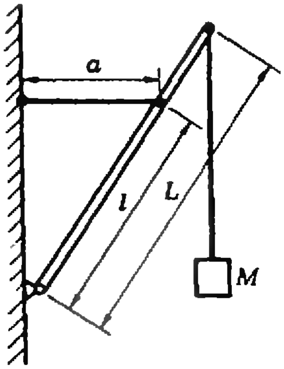


Рис. 3.

пов водорода выделяется энергия. В результате реакции образуется ядро гелия и нейтрон. Какую часть выделившейся энергии уносит нейтрон? Кинетической энергией ядер изотопов водорода до реакции пренебречь. Массы ядер равны: дейтерия — $3{,}32 \cdot 10^{-24}$ г, трития — $4{,}98 \cdot 10^{-24}$ г, гелия — $6{,}64 \cdot 10^{-24}$ г; масса нейтрона равна $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ г.

11. Сосуд наполнен смесью азота и водорода. При температуре T, когда азот полностью распался на атомы, а водород находится еще в молекулярном состоянии, давление равно p. При температуре $2T$, когда оба газа полностью распались на атомы, давление в сосуде $3p$. Каково отношение числа молей атомов азота и водорода в смеси?

12. Какое количество теплоты необходимо сообщить комнате объемом $V = 40$ м^3, чтобы увеличить ее температуру от $t_1 = 10°$C до $t_2 = 20°$C. Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной $C_V = 21$ Дж/(моль·К). Атмосферное давление $p = 0{,}1$ МПа.

Математика

1. Четыре ученика: Витя, Петя, Юра и Сергей заняли на математической олимпиаде четыре первых места. На вопрос, какие места они заняли, были даны ответы:

а) Петя — второе, Витя — третье;

б) Сергей — второе, Петя — первое,

в) Юра — второе, Витя — четвертое.

Указать, кто какое место занял, если в каждом ответе правильна лишь одна часть.

2. В выпуклом четырехугольнике найти точку, сумма расстояний от которой до вершин имеет наименьшее значение.

3. Известно, что $a + b + c < 0$ и что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней. Определить знак коэффициента c.

4. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

а) для того чтобы число $n^5 - n\,(n > 1)$ делилось на 24, достаточно, чтобы натуральное число n было нечетным;

б) для того чтобы число $n^5 - n\,(n > 1)$ делилось на 24, необходимо, чтобы натуральное число n было нечетным.

5. Выпуклый четырехугольник имеет ось симметрии. Доказать, что верно по крайней мере одно из следующих утверждений:

а) вокруг четырехугольника можно описать окружность;

б) в четырехугольник можно вписать окружность.

6. В треугольнике ABC P — точка пересечения медиан. Доказать, что при любом выборе начальной точки O

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

7. При каких значениях a и b многочлен

$$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$$

можно представить в виде

$$P(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^2?$$

8. Дано, что n и k — натуральные числа. Известно, что из следующих четырех утверждений:

а) $n + 1$ делится на k,

б) $n = 2k + 5$,

в) $n + k$ делится на 3;

г) $n + 7k$ — простое число

три верных, а одно неверное. Найти все возможные пары $(n;\,k)$.

9. Доказать, что площадь квадрата, вписанного в треугольник (одна сторона квадрата лежит на стороне треугольника), не превосходит половины площади треугольника.

10. В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал во встрече с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек принимало участие в турнире?

11. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит угол между медианой и высотой, проведенными из вершины прямого угла, на конгруэнтные части.

12. Доказать, что уравнение

$$x^4 + 5x^3 + 15x - 9 = 0$$

имеет два корня: один — отрицательный, другой — положительный.

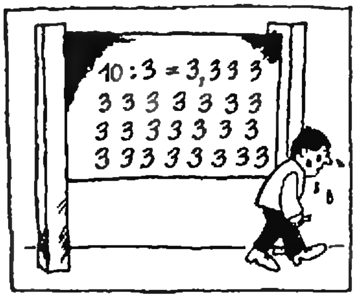
13. Дана непрерывная функция $\varphi(x)$. При каком необходимом и достаточном условии функция

$$f(x) = |x - a|\,\varphi(x)$$

дифференцируема в точке $x = a$.

В. Асланян,
С. Коршунов,
Т. Чугунова

ИЗ ИНОСТРАННОГО ЮМОРА



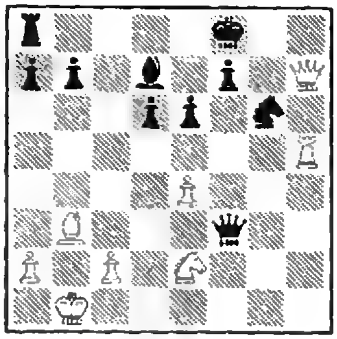
«Альфа» 73 — № 3

Поздравляю читателей „Кванта" с открытием „Шахматной странички". Желаю вам успехов в учебе, и занятиях математикой, физикой и ... шахматами.

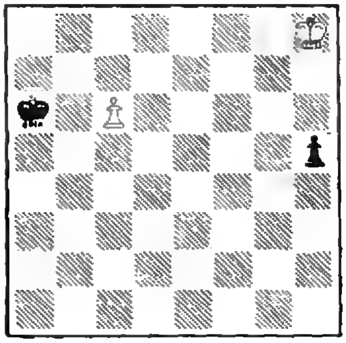
Если вы увлекаетесь математикой и физикой, то скорее всего являетесь и поклонником шахмат, любите играть в них, охотно решаете задачи и этюды. Вот почему, начиная с этого номера, в «Кванте» открывается постоянная «Шахматная страничка». Надеемся, что ее чтение станет для вас приятной и полезной разрядкой после решения задач по математике и физике. На этой страничке вы найдете различные шахматные задачи, этюды, окончания партий, шахматные головоломки. Конечно, учитывая круг читателей, мы будем стремиться к тому, чтобы предлагаемые позиции содержали какой-нибудь математический элемент, геометрическую идею. Здесь вы познакомитесь также с эффектными комбинациями из партий мастеров, получите краткую информацию о событиях, происходящих в шахматном мире. Вести страничку будет Евгений Гик, консультировать — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер, главный редактор журнала «Шахматное обозрение 64» Анатолий Карпов.

Мы не случайно обратились к А. Карпову с просьбой консультировать «Шахматную страничку» именно в нашем журнале. В свое время он окончил математическую школу в г. Туле с золотой медалью, был призером областной математической олимпиады, но... в дальнейшем избрал своей специальностью не математику, а шахматы. Нельзя сказать, что Анатолий полностью отошел от математики. Он окончил с отличием экономический факультет ЛГУ, а, как вы знаете, экономика и математика тесно связаны между собою.

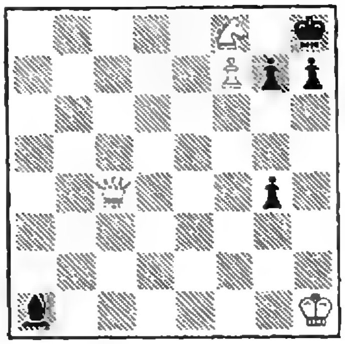
Евгений Гик — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук, наш постоянный автор. Вероятно, многие с удовольствием прочитали его книгу «Математика на шахматной доске».



1. А. Карпов — Е. Гик. Белые выигрывают.



2. Р. Рети. Белые начинают и делают ничью.



3. С. Лойд. Мат в 3 хода.

Задачи

Позиция № 1 возникла в одной из партий чемпионата МГУ 1968 года. Белыми играл тогдашний студент первого курса мехмата молодой мастер Анатолий Карпов, а черными выпускник мехмата Евгений Гик. Черные, имея две лишние пешки, были настроены довольно оптимистично. Однако белые нашли эффектное «геометрическое» продолжение, сразу решившее судьбу партии в их пользу (в результате победитель стал чемпионом МГУ, а проигравший занял второе место). Этим поединком открывается вышедший в 1978 году сборник избранных партий чемпиона мира.

Этюд № 2 представляет собой классический пример, иллюстрирующий необычные геометрические свойства шахматной доски. Парадоксально, но белым удается остановить неудержимую, на первый взгляд, неприятельскую пешку.

Задача № 3 принадлежит выдающемуся шахматному композитору Сэмюэлю Лойду, который известен также как один из величайших мастеров в жанре занимательных математических задач и головоломок, автор популярной игры «15». (В «Кванте» нередко печатались различные игры и задачи, придуманные С. Лойдом; с его шахматно-математическими задачами вы можете ознакомиться в № 6 за 1976 г.) Хотя данная задача чисто шахматная, но и она содержит некоторый геометрический мотив.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант

1. Обозначим скорость пешехода, вышедшего из A, через v_1, вышедшего из B — через v_2, искомое расстояние — через x. Поскольку в условии задачи не уточнено, по какую сторону от середины пути находился второй пешеход, когда пешеход, вышедший из A, прошел $\frac{1}{3}$ пути, и по какую сторону от второго пешехода находился первый пешеход, когда пешеход, вышедший из B, прошел половину пути, расстояния надо выражать при помощи модуля:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\frac{x}{3}}{v_1}\cdot v_2 - \dfrac{x}{2}\right| = 3, \\ \left|\dfrac{\frac{x}{2}}{v_2}\cdot v_1 - \dfrac{x}{2}\right| = 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$3\left|\frac{1}{\frac{v_2}{v_1}} - 1\right| = 4\left|\frac{\frac{v_2}{v_1}}{3} - \frac{1}{2}\right|.$$

Дальше надо решить уравнение

$3\left|\frac{1}{y} - 1\right| = \left|\frac{y}{3} - \frac{1}{2}\right|$, рассмотрев три случая: $0 < y \leqslant 1$, $1 < y \leqslant \frac{3}{2}$, $y > \frac{3}{2}$.

Ответ. $\{12$ км, $15 + 3\sqrt{17}$ км, 6 км$\}$.

2. Пусть $SABC$ — данная пирамида (S — вершина). Опустим из C перпендикуляр на (AS). Его основание F будет лежать внутри отрезка AS, если $\widehat{ASC} < \frac{\pi}{2}$ (в этом случае и $\widehat{BFC} < \frac{\pi}{2}$), в точке S, если $\widehat{ASC} = \frac{\pi}{2}$, и на продолжении отрезка AS за точку S, если $\widehat{ASC} > \frac{\pi}{2}$ (тогда и $\widehat{BFC} > \frac{\pi}{2}$). Обозначим $\widehat{BFC}$ через α. Искомая длина ребра равна

$$\frac{r\sqrt[3]{6}}{\sqrt[6]{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}}.$$

Однако ее нужно выразить через данный угол между плоскостями φ. Если $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \alpha$; если же $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \pi - \alpha$ («Геометрия 9», § 38).

Ответ. Если $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $l =$

$$= \frac{r\sqrt[3]{6}}{\sqrt[6]{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}};\ \text{если } \alpha > \frac{\pi}{2},\ l = \frac{r\sqrt[3]{6}}{\sqrt[6]{3\,\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2} - 1}}.$$

3. $A = 7$, $B = -6$, $C = 3$. **4.** $\left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$.

Физика

1. $|\vec{F}_д| = |\vec{F}|\,\mathrm{ctg}\,\alpha + mg/2 = 11{,}6$ Н.

2. $A = \frac{\eta - 1}{\eta}\,\frac{m}{\mu}\,RT_1 = 8{,}3\cdot 10^5$ Дж.

3. $q = \frac{mgl^2}{Ua\left(1 - 1/\sqrt{5}\right)} \approx 5{,}4\cdot 10^{-7}$ Кл

4. $T = \frac{2\pi}{v}\left(\frac{a}{Da - 1} - l\right)\sin 2\alpha \approx 20$ с.

Номер готовили
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, Л. Черниевская, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры О. Кривенко, Т. Панькова

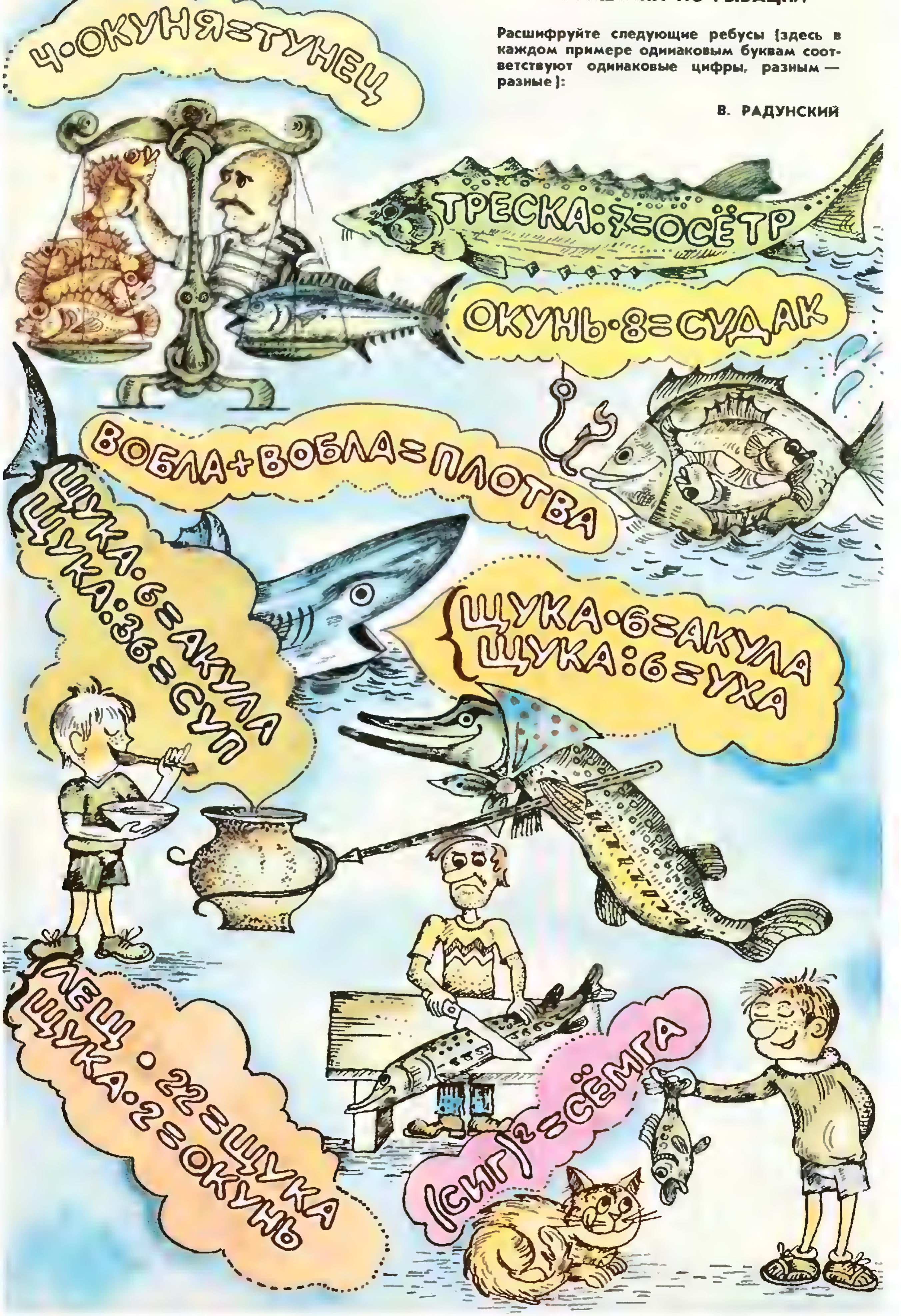
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 20.XI.79
Подписано в печать 20.XII.79
Печать офсетная
Бумага $70\times108^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч. изд. л. 6,35. Т-21573.
Цена 30 коп. Заказ 2737
Тираж 264 513

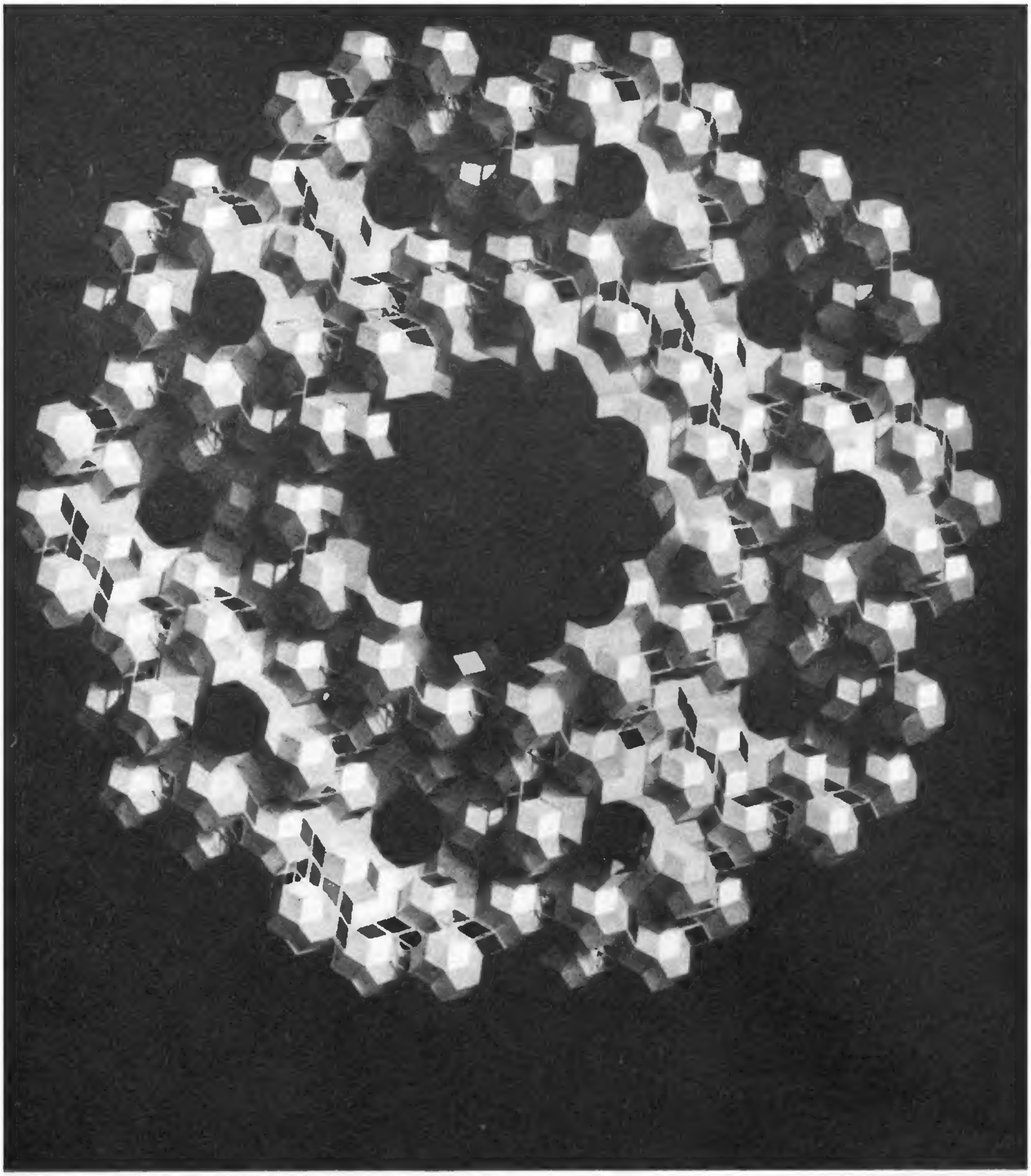
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

АРИФМЕТИКА ПО-РЫБАЦКИ

Расшифруйте следующие ребусы (здесь в каждом примере одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные):

В. РАДУНСКИЙ


Ч·ОКУНЯ=ТУНЕЦ
ТРЕСКА:7=ОСЁТР
ОКУНЬ·8=СУДАК
ВОБЛА+ВОБЛА=ПЛОТВА
ЩУКА·6=АКУЛА
ЩУКА:36=СУП
ЩУКА·6=АКУЛА
ЩУКА:6=УХА
ЛЕЩ·22=ЩУКА
ЩУКА·2=ОКУНЬ
(СИГ)²=СЁМГА



Сложная геометрическая структура, изображенная на обложке, составлена из десяти аналогичных между собой частей. Каждая из них состоит из состыкованных ромбических двадцатигранников и шестигранников (см. фотографию). Ромбические двадцатигранники (их 15 штук в каждой части: 10 — во внешнем кольце, 5 — во внутреннем) строятся следующим образом: берется додекаэдр и на каждое его ребро (их 30) кладется ромб так, чтобы его короткая диагональ совпала с ребром; размеры ромбов (все ромбы одинаковы) и их положения выбраны так, чтобы ромбы состыковывались сторонами, образуя выпуклый тридцатигранник (проверьте, что это возможно!); из тридцатигранника удален «экваториальный пояс» из десяти ромбов; склеивая две оставшиеся «шапочки», получаем наш двадцатигранник.

Шестигранники составлены из ромбов тех же размеров и бывают двух типов (почему?); они образуют сложную сеть «коридоров» между «комнатами»-двадцатигранниками.

Эта структура послужила основой экспериментального архитектурного проекта жилого поселка для Крайнего Севера.

О. Боднар

Цена 30 коп.
Индекс 70465

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

В каждом номере нашего журнала в разделе «Задачник «Кванта» публикуются задачи по физике и математике. Ежегодно редакция получает несколько тысяч писем от читателей с решениями этих задач. Среди авторов этих писем редакция отбирает школьников, решивших наибольшее число задач и приславших наиболее оригинальные решения. Эти школьники награждаются специальной премией, учрежденной редколлегией журнала «Квант», и получают право участвовать в Республиканских олимпиадах по математике и физике. Придумать интересную новую задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам.

Школьники — авторы лучших задач будут награждены специальными премиями «Кванта», а сами задачи будут опубликованы в журнале.

Задачи должны присылаться вместе с решениями. Каждая задача должна быть представлена на отдельном листе.

Если задача заимствована, то должен быть указан источник, откуда она взята.

По задачам, не принятым к публикации, переписка с авторами не ведется и текст задач авторам не возвращается.

Ждем Ваших писем.

К НАШИМ АВТОРАМ

Если Вы решили прислать нам статью, то просим Вас:

1) Перепечатать ее на машинке в двух экземплярах через два интервала и вписать от руки формулы (рукописный текст мы рассматриваем только в том случае, если автор его — школьник).
2) Нарисовать также в двух экземплярах эскизы рисунков (каждый эскиз — на отдельном листе).
3) Статья не должна содержать более 12 машинописных страниц.
4) Не забудьте сообщить нам полностью Ваши фамилию, имя и отчество, домашний адрес и телефон.

НОМЕР
2

Основан в 1970 году

КВАНТ

2
1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

2 *Б. Гнеденко.* Математика в Московском государственном университете

10 *В. Гуревич.* Флуктуации физических величин

17 *С. Ашманов.* Числа и многочлены

22 *З. Керимов.* Как найти целый корень?

Лаборатория «Кванта»

24 *А. Митрофанов.* Вверх по наклонной плоскости

Математический кружок

26 *Н. Вагутен.* Сопряженные числа

Задачник «Кванта»

34 Задачи М606—М610; Ф618—Ф622

36 Решения задач М551—М556; Ф563—Ф567

«Квант» для младших школьников

43 Задачи

44 *А. Бендукидзе, А. Савин.* Производные пропорции

Практикум абитуриента

46 *В. Дубровский.* Неожиданный ракурс

51 *В. Можаев, Б. Федосов, В. Чехлов.* Московский физико-технический институт

Искусство программирования

53 Заочная школа программирования. Урок 6

Информация

56 *В. Комаров.* На пути в большую науку

57 *А. Виленкин.* II Всероссийский слет актива НОУ

59 **Шахматная страничка**

60 **Ответы, указания, решения**

Наша обложка *(25, 33)*

Смесь *(23, 32, 45, 55)*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

На первой
странице обложки
показано
оригинальное замощение
плоскости
многоугольниками
Подробнее о нем можно
прочитать на с. 25

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1980

Б. Гнеденко

Математика в Московском государственном университете

25 января 1980 г. исполнилось 225 лет со дня подписания указа об учреждении Московского университета. При университете были созданы две гимназии: одна — для дворянских детей, другая — для детей разночинцев. Торжественное открытие университета состоялось 26 апреля 1755 г. Но это было лишь открытие гимназий. Занятия же со студентами начались только летом 1755 г., когда в университете собрались 30 молодых людей, откомандированных духовными семинариями (других подготовленных абитуриентов для университетских занятий в ту пору в стране не было).

Московский университет был открыт благодаря кипучей деятельности М. В. Ломоносова, добивавшегося широкого распространения просвещения в России, не связанного с сословными ограничениями. Однако в ту пору правительство крепостнической империи категорически отказало крестьянству в самой возможности получения высшего образования. Ломоносов же утверждал, что «в университете тот студент почтеннее, кто больше научился: а чей он сын в том нет нужды».

На первых порах университет состоял из трех факультетов: философского, юридического и медицинского — и, формально, двух гимназий. Фактически же гимназия была одна. Только занятия проводились раздельно для дворянских детей и детей разночинцев. Объединение разрешалось только в последнем, так называемом «ректорском» классе. Этот последний класс давал дополнительную подготовку для поступления в университет, и занятия в нем продолжались один-два года.

Все студенты должны были начинать занятия на философском факультете, являвшемся своеобразной общеобразовательной ступенью для перехода на медицинский и юридический факультеты. Занятия на философском факультете продолжались три года, а на медицинском и юридическом — четыре года. Таким образом, обучение в университете продолжалось 7 лет. Медицинский и юридический факультеты назывались в ту пору «высшими» факультетами.

Преподавание в университете было лекционным; лекция продолжалась два часа. В первые годы лекции студентам

читались на латинском, французском и немецком языках, и только с 1767 года, когда в университете стали работать в качестве профессоров многие воспитанники самого Московского университета, преподавание стало вестись на русском языке.

Уже в первый год своего существования университетская гимназия приняла несколько сот учащихся, а к концу XVIII века их число возросло до трех тысяч. В 1758 г. по настоянию Московского университета была открыта гимназия в Казани. Она фактически была составной частью Московского университета. Университет обеспечивал ее средствами, учебными пособиями, преподавательским составом. Интересно, что в это время гимназии не было даже в Петербурге — столице Российской империи.

В последней четверти XVIII века Московский университет принял активное участие в организации гимназий в ряде губернских городов России — Ярославле, Твери, Владимире, Костроме, Вологде. Выпускники университета становились первыми преподавателями вновь созданных гимназий. Таким образом, в первое время университет был основным центром подготовки научных и педагогических кадров.

Первоначально кафедры математики в университете не было. Математика входила в ведение кафедры физики и преподавалась лишь на философском факультете. Содержание курса математики не выходило за пределы элементарной математики и включало в себя арифметику, элементарную алгебру, геометрию и начала тригонометрии. Для преподавания этого курса был приглашен один из учеников М. В. Ломоносова Антон Алексеевич Барсов (1730—1791).

Но уже через три года (в 1758 г.) было принято решение о создании специальной кафедры чистой математики.

В первые годы математику преподавали не профессионалы. Так, первый профессор математики А. А. Барсов был специалистом в области синтаксиса русского языка. Преподавание курса прикладной математики было поручено Ивану Акимовичу Росту, преподававшему до того английский язык.

В первые пятьдесят лет существования Московского университета лектор обычно строго придерживался раз и навсегда избранного им учебника. Традиционными оставались даже дни и часы лекций. Так, А. А. Барсов еще в 1757 году избрал для лекций по чистой математике среду и субботу. В те же дни и часы после А. А. Барсова читал его ученик Дмитрий Сергеевич Аничков (1733—1788), а затем и другой выпускник университета Василий Кондратьевич Аршеневский (1758—1807). То же самое случилось и с лекциями по прикладной математике: И. А. Рост читал их по понедельникам, вторникам, четвергам и пятницам. Эти же дни для курса сохранил и его преемник Михаил Иванович Панкевич (1757—1812).

Кафедру чистой математики от А. А. Барсова принял Д. С. Аничков. Для него преподавание математики было делом жизни. В связи с этим он не только преподавал, передавая содержание учебников, уже написанных другими авторами, но стремился как можно лучше приспособить изложение к психологическим особенностям учащихся. Им были написаны четыре учебника, пользовавшихся в ту пору широкой известностью: «Арифметика» (1764), «Геометрия» (1780), «Тригонометрия» (1780) и «Алгебра» (1781). В то время книги не назывались так просто, их заголовки были многословными и звучали очень торжественно. Вот как звучит заголовок учебника по геометрии: «Теоретическая и практическая геометрия, в пользу и употребление не токмо юношества, но и тех, кои упражняются в землемерии, фортификации и артиллерии, из разных авторов собранная. . Дмитрием Аничковым».

Как ни распространены были учебники Аничкова в XVIII веке, все же основную известность ему принесла его диссертация на тему «Рассуждения из натуральной богословии о начале и происшествии натурального богопочитания», которая за атеистическую направленность была по распоряжению Синода сожжена на Лобном месте.

Сейчас, спустя два столетия, мы яснее видим недостатки учебников того времени, в первую очередь — их формализм и оторванность от жизненных проблем, волновавших в ту пору практику. На этот недостаток книг по математике не уставали указывать и передовые мыслители того времени. В частности, М. В. Ломоносов неоднократно указывал на необходимость теснейшей связи математики с естествознанием, с практическими потребностями. Об этом же очень красочно сказал один из видных русских философов второй половины XVIII века Яков Козельский: «Хотя главный и единственный всех физических наук предмет есть натура, однако вы найдете там не натуру, изъясненную математикой, как бы то надлежало, а математику, налагающую натуре свои законы: натура никогда не училась математике, а, напротив, математика — у натуры, которая всех наук умнее и превосходнее»

В XIX веке Россия переживала годы быстрого промышленного и хозяйственного развития. Это вызвало появление большого числа гимназий в губернских и уездных городах. Появилась большая потребность в преподавателях естественного цикла.

Все это привело к выработке нового университетского Устава (1804 г.). Согласно этому уставу, Московский университет разделялся уже на четыре отделения (факультета): 1) нравственных и политических наук, 2) словесных наук, 4) врачебных, или медицинских наук, 4) физических и математических наук.

В то время, как правило, учитель математики преподавал также и естественные дисциплины — физику, астрономию, ботанику, зоологию, географию. Это обстоятельство неизбежно приводило к своеобразию обучения на физико-математическом факультете того времени. В неделю студент факультета имел всего-навсего шесть-восемь лекций по математике, раза в три больше лекций по физике, ботанике, минералогии, а также другим предметам естественнонаучного цикла. В те годы стремились придать школьному и университетскому обучению практический характер, чтобы молодой человек после окончания гимназии мог сразу начать работу в сфере коммерции или промышленного производства. Заметим, что новый устав университета вменял профессорам в обязанность на занятиях обращать внимание студентов на связь теории с практикой.

На вновь открытом физико-математическом факультете были созданы такие кафедры: 1) опытной и теоретической физики, 2) чистой математики, 3) прикладной математики, 4) астрономии, 5) химии, 6) ботаники, 7) минералогии и сельского хозяйства, 8) технологии и наук, относящихся к торговле и фабрикам.

По уставу от профессоров требовалось не только читать лекции и проводить практические занятия со студентами, но и заниматься научными исследованиями, пополняя свои курсы результатами новых открытий. Это обстоятельство существенно меняло направление деятельности университета.

Уже в начале XIX века ряд профессоров Московского университета начали читать лекции по новой математике. Так, профессор И. А. Иде (1775—1806) начал чтение курсов аналитической геометрии и математического анализа. Профессор В. К. Аршеневский сообщил, что три раза в неделю он будет «преподавать слушателям своим высшую геометрию, в которой покажет пользу и употребление дифференциальных и интегральных исчислений». Кроме того, студенты слушали курсы артиллерии и баллистики, математической географии. В результате физико-математический факультет дал стране выдающихся ис-

Д. М. Перевощиков

следователей в области математики, биологии, физики, химии, механики, внешней баллистики и артиллерии.

Отечественная война 1812 года тяжело отразилась на Московском университете: наполеоновская армия разграбила и сожгла коллекции, библиотеку, здания. Многие студенты и преподаватели ушли защищать страну. Занятия в университете прекратились. Для восстановления достигнутого уровня преподавания потребовалось длительное время, и дальнейший прогресс математической жизни Московского университета относится уже к двадцатым годам. Этот прогресс в значительной степени связан с именем профессора Дмитрия Матвеевича Перевощикова (1790—1880), автора ряда учебников по математике и тринадцатитомной «Ручной математической энциклопедии», служившей настольной книгой математиков, инженеров, артиллеристов, естествоиспытателей. В течение более чем пятнадцати лет он был деканом физико-математического факультета, а затем последовательно проректором и ректором университета. Он возглавлял строительство астрономической обсерватории, а затем с 1830 по 1851 год был ее директором, совмещая эту работу с работой декана, проректора, ректора. Ему принадлежит более семидесяти научных (математических и астрономических), педагогических и научно-популярных работ.

Среди непосредственных учеников Перевощикова в первую очередь следует упомянуть Николая Ефимовича Зернова (1804—1862). С его именем связан значительный прогресс математического образования, его существенное обновление. В частности, именно Зернов по настоянию своего учителя впервые начал чтение в университете курса теории вероятностей. Тема магистерской диссертации Зернова «О суточном и годовом движении Земли» была предложена ему учителем, а тему докторской диссертации — «Рассуждение об интеграции уравнений с частными дифференциалами» (1837) — выбрал он сам. Интересно отметить, что это была первая докторская диссертация по математике, защищенная в Московском университете.

Декабрьские события 1825 года сильно сказались на жизни университета. Достаточно сказать, что среди воспитанников университета было по меньшей мере шестьдесят декабристов и треть из них — студенты и бывшие студенты физико-математического факультета. За университетом было установлено полицейское наблюдение, вместо прогрессивного устава 1804 года был введен новый, так называемый цензурный устав. Согласно этому уставу университету запрещалось печатать научные работы по естественным наукам, философии и медицине. Разрешалось печатать только учебники (конечно, после соответствующего досмотра).

В известном произведении «Былое и думы» выпускника физико-математического факультета Московского университета А. И. Герцена содержатся ценные воспоминания о профессорах, однокурсниках и своеобразии университетской жизни 1829—1833 гг. Герцен высоко оценил роль Московского университета в развитии русской культуры:

> «В истории русского образования и в жизни двух последних поколений Московский университет и Царскосельский лицей играют значительную роль.
>
> Московский университет вырос в своем значении вместе с Москвою после 1812 года; разжалованная императором Петром из царских столиц, Москва была произведена Наполеоном (сколько волею, а более неволею) в столицы народа русского... В ней университет больше и больше становился средоточием русского образования».

По словам Герцена, Николай I не любил Московский университет и называл его «волчьим гнездом». Его царствование резко отрицательно сказалось на жизни Московского университета: поступление в университет было затруднено, число студентов в университете сократилось. Особенно это сказалось на

Н. Д. Брашман

детях разночинцев. Однако, вопреки политике правительства, молодежь университета вырабатывала с помощью прогрессивных профессоров общественные, научные и педагогические идеалы и стремилась осуществлять их в жизни.

Дух творческих исканий, обновления математического образования вдохнул в Московский университет, наряду с Перевощиковым, выходец из Моравии Николай Дмитриевич Брашман (1796—1866). Почти сразу же после окончания Венского университета он переехал в Россию. Сначала он проработал совсем короткий срок в Петербурге, затем перевелся в Казанский университет и, наконец, в 1834 году переехал в Москву и стал профессором Московского университета. Москва стала как бы второй его родиной. Здесь он проявил свои способности ученого, организатора науки и воспитателя научной молодежи. Он публиковал научные статьи, писал оригинальные учебные руководства, читал лекции и настойчиво искал талантливых студентов, которых стремился побудить к самостоятельным научным поискам. Ему удалось воспитать ряд выдающихся математиков — ученых и педагогов. Среди его учеников в первую очередь следует указать академиков П. Л. Чебышева (1821—1894) и И. И. Сомова (1815—1876), а также профессора А. Ю. Давидова (1823—1886). Они все внесли значительный вклад в развитие математической культуры России. От Брашмана идет интерес московских математиков к задачам механики, в частности к задачам гидродинамики. В какой-то мере это обстоятельство повлияло на постепенное формирование московской школы механиков, давших во второй половине XIX века серьезные результаты в разработке гидравлики, механики твердого тела и гидродинамики.

Взгляды Н. Д. Брашмана на математику хорошо изложены им в речи «О влиянии математических наук на развитие умственных способностей», которая была произнесена им в университете 17 июня 1841 г.: «Геометр не трудится просто для удовлетворения своего любопытства: богатый запас форм геометрии, символов анализа и его сложных действий — не простая роскошная уродливость умственной изобретательности, не собрание редкостей для любителей; напротив, это могущественный арсенал, из которого исследователи природы и техники берут лучшие свои орудия».

В 1864 г. Брашман вышел на пенсию, но он не хотел и психологически не мог порвать с университетом. Для него университет был всем: домом, семьей, самой жизнью. Он добился разрешения на учреждене премии за лучшую студенческую научную работу по математике, на что он передал все свои сбережения. Эта премия регулярно присуждалась в течение пятидесяти лет.

Непосредственно перед выходом на пенсию он предложил своим ученикам, сослуживцам и другим близким ему математикам собираться у него на дому для обмена научными и педагогическими мыслями, а также для реферирования наиболее интересных исследований, которые появлялись в печати. На заседании 15 сентября 1864 г. было решено этот частный кружок превратить в регулярно действующее математическое общество. Президентом общества единогласно был избран Брашман. Члены общества разделили между собой области математики, за которыми они обязались регулярно следить и своевременно сообщать товарищам о всех мало-мальских интересных новых результатах.

Помимо «взаимного содействия в занятиях математическими науками», вновь организованное общество развернуло широкую популяризаторскую, просветительскую и литературную деятельность. Вскоре назрела необходимость в издании печатного органа общества. Такое решение было принято в апреле 1865 г. Предполагалось, что ежегодно будут выходить два выпуска нового журнала под названием «Математический сборник». Это был первый специализированный математический журнал в Рос-

Н. Е. Жуковский

сии. Так возник один из авторитетнейших математических журналов мира, в котором с первых номеров печатались статьи, сыгравшие значительную роль в развитии математики. Для примера укажем, что во втором томе была опубликована знаменитая статья П. Л. Чебышева, в которой содержалось изложение закона больших чисел и исключительное по простоте его доказательство.

Последующие годы дали математическим наукам весьма многое. В первую очередь мы должны отметить замечательные исследования Николая Егоровича Жуковского (1847—1921) в области гидродинамики и аэродинамики. Им были созданы основы теории полета аппаратов тяжелее воздуха и созданы основы советского самолетостроения. Недаром В. И. Ленин назвал Жуковского «отцом русской авиации». Далее следует заметить, что традиционные для Московского университета исследования по теории дифференциальных уравнений и геометрии продолжали развиваться в течение всего XIX и истекших десятилетий текущего XX века. Об этом мы еще скажем.

Сейчас же хотелось бы отметить работы Виктора Викторовича Бобынина (1849—1919), посвященные истории математики. Он впервые проблемы истории науки воспринял как поиск закономерностей развития научных идей, а не только как изложение научных биографий выдающихся ученых. Большое внимание он уделил изучению развития математики в нашей стране. В частности, ему принадлежит научное описание ряда древних русских математических рукописей. После Великой Октябрьской революции Бобынин начал деятельно сотрудничать с советскими органами просвещения. Наркомпрос поручил ему написание однотомной «Истории русской математики» и трехтомного труда «Всеобщая история математики». К сожалению, эта работа не была завершена в связи с кончиной автора.

Серьезная работа по истории математики возродилась в Московском университете уже в тридцатые годы, когда ее возглавила профессор Софья Александровна Яновская (1896—1966).

Существенный сдвиг в содержании и характере математического образования произошел в начале XX века и связан с именами профессоров Дмитрия Федоровича Егорова (1869—1931) и Болеслава Корнелиевича Млодзеевского (1859—1923). Они начали, наряду с чтением лекций и ведением упражнений, проведение занятий специальных семинаров, посвященных новым областям математики. Участники получали задания ознакомиться с определенными работами и на их базе подготовить доклады. Это нововведение оказалось исключительно полезным, поскольку дало возможность весьма эффективно приближать студентов и аспирантов к активной научной деятельности. На семинаре каждый доклад, а вместе с ним и каждая математическая идея подвергаются всестороннему обсуждению. В результате возникают новые вопросы, требующие дополнительных исследований, у участников семинаров появляются возможности активно включиться в самостоятельное творчество. Эта форма работы в настоящее время занимает видное место в жизни университета.

Уже в 1901 году Млодзеевский прочитал первый специальный курс, посвященный начавшей развиваться в ту пору теории функций действительного переменного. В следующем десятилетии эта область математики стала для Московского университета основным направлением творческих интересов молодых математиков. Дальнейшее развитие этого направления связано с Д. Ф. Егоровым и Н. Н. Лузиным (1883—1950). Школа теории функций действительного переменного является одной из наиболее ярких страниц в истории математики Московского университета. Если толчком к созданию этой школы явились упомянутый курс Млодзеевского и работа Егорова, то ее основателем и многолетним вдохновителем, несомненно, являлся Николай Николаевич Лузин. Его исследования 1911—1915 гг. составили предмет докторской диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915), которая не только стала вехой в развитии теории функций в Московском университете, но и надолго определила развитие этой теории как в Советском Союзе, так и за его пределами. Большое число нерешенных вопросов, выдвинутых Лузиным в этой диссертации, явилось предметом последующих исследований многих математиков.

Идеи теории множеств оказали существенное влияние на развитие теории функций комплексного переменного. Яркими представителями этого направления исследований в Московском университете, которое получило значительные применения в аэро- и гидродинамике, были В. В. Голубев (1884—1954), И. И. Привалов (1891—1941), М. В. Келдыш (1911—1978). Крупнейшим представителем этого направления исследований является М. А. Лаврентьев, исследования которого по теории функций комплексного переменного тесно связаны не только с аэро- и гидродинамикой, но и с теорией дифференциальных уравнений.

Большие успехи были получены учеными Московского университета в теории дифференциальных уравнений — как обыкновенных, так и в частных производных. Классическими считаются работы В. В. Степанова (1889—1950), воспитавшего сильную школу в качественной теории дифференциальных уравнений, И. Г. Петровского (1901—1973) и А. Н. Тихонова, с разных позиций разрабатывавших теорию дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков.

Значительные успехи получены математиками университета в области теории чисел. А. Я. Хинчин (1894—1959) получил ряд фундаментальных результатов в области метрической теории чисел; Л. Г. Шнирельман (1905—1938) совсем элементарным путем доказал замечательный факт на пути решения задачи Гольдбаха: каждое целое число представимо в виде суммы ограниченного числа простых слагаемых. А. О. Гельфонд (1906—1968) разработал замечательный метод исследования, позволивший ему доказать следующую гипотезу, высказанную в начале века Д. Гилбертом: всякое число вида α^β, где α и β — алгебраические числа, причем $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, а β иррационально, является трансцендентным.

Начиная с 1923 года, в круг интересов московских математиков вошла теория вероятностей. А. Я. Хинчин был пионером в этой области. Через два года вопросами теории вероятностей заинтересовался А. Н. Колмогоров. С этого времени началась интенсивная работа по преобразованию теории вероятностей: были найдены необходимые и достаточные условия для закона больших чисел; в связи с задачами физики было введено понятие случайного процесса и дано широкое развитие основ теории случайных процессов; разработано аксиоматическое построение теории вероятностей. Так возникла Московская школа теории вероятностей, преобразившая лицо этой науки. За пятьдесят с небольшим лет удалось воспитать многочисленных исследователей, с успехом разрабатывающих как теоретические проблемы теории вероятностей, так и многочисленные ее применения. Достаточно сказать, что только через аспирантуру кафедра теории вероятностей подготовила свыше 250 аспирантов, защитивших кандидатские диссертации. Многие ее воспитанники стали профессорами высших учебных заведений, избраны академиками и членами-корреспондентами. В настоящее время выпускниками Московского университета созданы сильные теоретико-вероятностные школы за пределами МГУ: в ГДР, Болгарии и некоторых союзных республиках.

Д. Ф. Егоров

Усилиями О. Ю. Шмидта (1891—1956) и А. Г. Куроша (1908—1971) в университете и далеко за его пределами создана обширная школа современной алгебры, оказавшая и оказывающая сильнейшее влияние на развитие практически всех направлений алгебраических исследований.

В качестве одного из крупнейших успехов современной математики следует назвать создание Л. С. Понтрягиным и его учениками математической теории оптимального управления. Его предшествовавшие работы заслуженно принесли ему положение одного из ведущих топологов.

В Московском университете успешно развиваются и многочисленные другие направления, которые принесли математике новые идеи и глубокие результаты: функциональный анализ, математическая логика, математическая кибернетика, геометрия, оптимизационные проблемы и вопросы управления.

Несколько слов необходимо сказать о вычислительной математике. До Великой Отечественной войны здесь развивались классические подходы, в том числе методы номографии. Начиная с конца сороковых — начала пятидесятых годов стало ясно, что основной путь приближенных вычислений связан с электронной вычислительной техникой и программированием. Буквально на пустом месте за исключительно короткие сроки удалось создать мощную школу современной вычислительной математики, которая разработала новые методы программирования вычислительных и логических задач для постановки их на ЭВМ, методы статистического моделирования и автоматизации программирования. Усилиями А. Н. Тихонова из механико-математического факультета в начале семидесятых годов был выделен особый факультет вычислительной математики и кибернетики, который с каждым годом набирает силы и тесно связан с актуальными прикладными задачами современности.

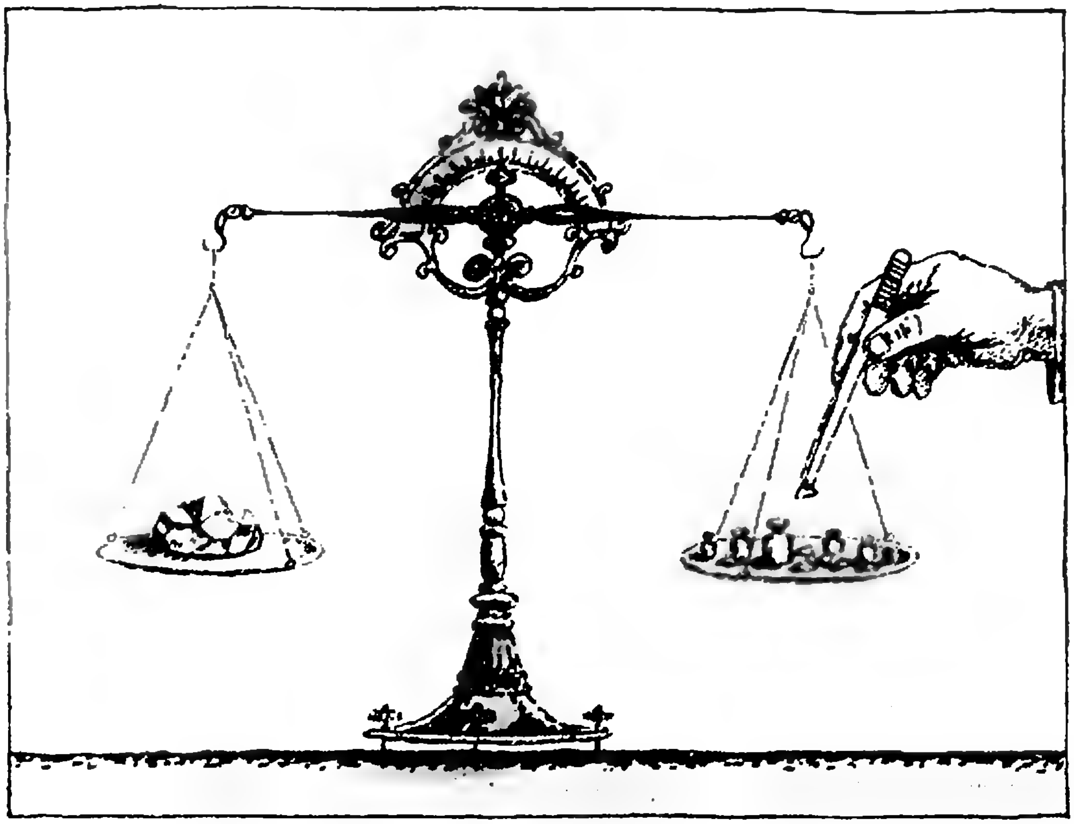
Математика в Московском университете в настоящее время развивается не только на двух математических факультетах, но также на физическом и экономическом факуьтетах, на которых имеются специальные кафедры математики, а также на биологическом факультете, где создана специализированная лаборатория математической статистики.

В настоящее время на каждом из двух математических факультетов Московского университета обучается значительно больше студентов, чем во всем дореволюционном университете. Московский университет принимает сейчас ежегодно студентов-математиков больше, чем до революции было студентов-математиков во всей России. Вот это-то обстоятельство — постоянный приток молодежи — делает университет вечно молодым, способным к восприятию и разработке новых идей как в науке и применениях, так и в педагогическом процессе.

О. Ю. Шмидт

К своему двухсотдвадцатипятилетию Московский университет пришел полным сил и научной свежести. Работники университета с гордостью могут оглянуться на пройденный путь. Воспитанники Московского университета принимали деятельное и непосредственное участие в становлении Советской власти в стране, борьбе с разрухой, создании научно-технической базы нашей страны, на фронтах гражданской и Великой Отечественной войн и в совершенствовании обороны страны. Его работники и воспитанники с успехом работают во всех областях народного хозяйства, просвещения, науки и культуры; во многих областях научного творчества они проложили новые пути и довели до логического завершения ранее начатые фундаментальные исследования.

Московский университет знает, что его будущее теснейшими нитями связано с воспитанием интереса к науке и прикладной деятельности у теперешних школьников. Именно поэтому ученые и аспиранты уделяют столь большое внимание работе с учащимися школ, преподавателями школ и вузов, а также научно-пропагандистской работе.



В. Гуревич

Флуктуации физических величин

Рассмотрим физическую систему, состоящую из очень большого числа атомов или молекул. Такие системы называются макроскопическими. Газ, заполняющий сосуд, жидкость, налитая в сосуд, твердый кристалл — это все примеры макроскопических систем.

Представим себе, что требуется измерить какую-нибудь физическую величину, характеризующую макроскопическую систему. Это могут быть, например, ее масса, электрический заряд, давление или температура.

Любое физическое измерение производится с определенной точностью. Мы привыкли к тому, что точность измерения, как правило, определяется конструкцией измерительного прибора. «Плохие» приборы дают низкую точность, «хорошие» — высокую. Например, аналитические весы дают точность измерения массы примерно в десять тысяч раз бо́льшую, чем обычные торговые весы.

Но всегда ли точность измерения определяется конструкцией измерительного прибора? Можно ли беспредельно повышать точность измерения физических величин, совершенствуя эту конструкцию? Или есть принципиальные ограничения, коренящиеся в самой природе вещей, которые кладут предел возможной точности измерений?

Для того чтобы понять, каким может быть ответ на этот вопрос, давайте разберем простейший пример. Рассмотрим сосуд, наполненный газом. Пусть газ находится при атмосферном давлении и комнатной температуре, а объем сосуда равен двум литрам. Разделим мысленно сосуд на две части, правую и левую, и будем наблюдать за газом, например, в левой половине сосуда. Сколько молекул газа имеется в этой половине сосуда? Можно подсчитать, что приблизительно $2{,}5\cdot10^{22}$. А можем ли мы рассчитать или измерить это число более точно? Например, можно ли в принципе указать все 23 цифры этого числа, предполагая, что и температура, и давление газа известны с достаточной точностью?

Чтобы понять это, вообразим, что существует очень точный измерительный прибор, который может определить, сколько молекул газа имеется в данный момент в выбранной половине сосуда. С другой стороны, мы знаем, что молекулы газа совершают беспорядочное, хаотическое движение (так называемое тепловое движение) во всех направлениях, время от времени сталкиваясь друг с другом и со стенками сосуда. Поэтому, многократно повторяя измерения, мы будем, как правило, всякий раз получать разные числа. Это неудивительно: молекулы движутся беспорядочно, и их число в каждой половине сосуда будет, вероятнее всего, меняться от опыта к опыту. Точного числа молекул мы не можем указать заранее. Зато всегда можно вычислить вероятность того, что их там будет какое-то определенное число. Ниже мы вычислим эту вероятность. Но сначала попробуем ответить на более простой вопрос: при каком числе молекул эта вероятность наибольшая, то есть каково наиболее вероятное распределение молекул между обеими половинами сосуда?

Большинство читателей, наверное, скажет, что над ответом на такой вопрос и думать нечего. Если полное число молекул обозначить через $2N$, то они, вероятнее всего, распределятся поровну между обеими половинами сосуда, так что в каждой из них окажется по N молекул.

Какова же вероятность этого наиболее вероятного распределения? Чтобы понять, как вычислять такие вероятности, начнем с самого простого случая, когда $N=1$, то есть всего в сосуде две молекулы. Эти молекулы можно распределить между обеими половинами сосуда четырьмя способами, которые изображены на рисунке 1. В двух случаях из четырех в каждой половине сосуда оказывается по одной молекуле. Если молекулы можно считать невзаимодействующими, то их положения независимы, и каждый из изображенных четырех способов равновероятен. Следовательно, вероятность равного распределения молекул равна $\frac{1}{2}$.

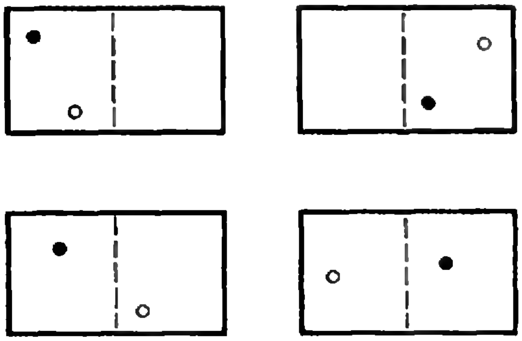


Рис. 1.

Когда полное число молекул есть $2N$, то число способов их распределения между двумя половинами сосуда есть 2^{2N}. Число же способов, приводящих к равнораспределению, когда в каждой половине сосуда окажется по N молекул, равно числу сочетаний из $2N$ по N: $C_{2N}^N = \frac{(2N)!}{(N!)^2}$. Вероятность интересующего нас события получится, если число способов, осуществляющих равное распределение между обеими половинами, разделить на полное число способов:

$$w = \frac{(2N)!}{2^{2N}(N!)^2}. \qquad (1)$$

При $N=1$ эта общая формула дает уже полученную величину $\frac{1}{2}$.

Вероятность легко сосчитать по формуле (1), когда N равно небольшому числу. Но как рассчитать ее, когда N порядка 10^{22}? В этом случае существует приближенная формула для $N!$, которая «работает» тем точнее, чем больше число N. Вычисления, проделанные с помощью этой формулы в Приложении, дают

$$w = \frac{1}{\sqrt{\pi N}}. \qquad (2)$$

Для любого реального сосуда с газом это очень маленькая величина. Если, как в нашем примере, $N = 2{,}5 \cdot 10^{22}$, то $w = 3{,}7 \cdot 10^{-12}$. А это ничтожно малое число. Почему же наиболее вероятное распределение оказалось совершенно невероятным? Чтобы понять это, вычислим вероятность $w(n)$ такого распределения, когда в левой половине сосуда число частиц немного отличается от N, а именно, равно $N+n$, а в правой половине, соответственно, $N-n$. Слова «немного отличается» означают, что мы будем вычислять вероятность $w(n)$ только для таких n, которые по абсолютной величине гораздо меньше N.

Выкладки, проделанные в Приложении, дают для этого случая

$$w(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} e^{-n^2/N}, \qquad (3)$$

где $e = 2{,}71\ldots$ — основание натуральных логарифмов.

График этой функции изображен на рисунке 2. Он симметричен относительно оси ординат и имеет максимум

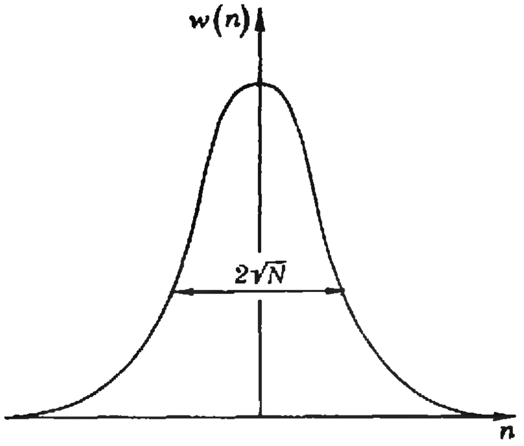


Рис. 2

при $n=0$. Вблизи максимума кривая изменяется плавно, а затем начинает спадать резко. Быстроту убывания обычно характеризуют так называемой полушириной максимума. Это — половина расстояния между абсциссами тех точек кривой, ординаты которых в e раз ниже ординаты максимума. Полуширина кривой на рисунке 2 равна $\sqrt{N}$. Когда n заметно превышает $\sqrt{N}$, $w(n)$ оказывается гораздо меньше своего максимального значения.

А теперь вспомним, что суммарная вероятность всех возможных событий по определению равна единице:

$$\sum_{n=-N}^{N} w(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \sum_{n} e^{-n^2/N} = 1.$$

Сколько же надо учитывать слагаемых в этой сумме? Казалось бы, вопрос не имеет большого смысла. Достаточно взглянуть на пределы суммирования, чтобы увидеть, что всего слагаемых $2N+1$. На самом деле, задавая такой вопрос, мы хотим понять, какое число слагаемых фактически дает в сумму заметный вклад. Ведь при n^2, гораздо бо́льших чем N, слагаемые становятся очень маленькими, и их можно попросту отбросить. Число же существенных слагаемых в этой сумме — порядка $\sqrt{N}$. Это значит, что если взять в сумме число слагаемых в несколько раз больше $\sqrt{N}$, то допущенная погрешность, то есть отличие суммы от единицы, будет очень маленькой.

За этим математическим фактом кроется следующая интересная физика. Многократно измеряя число молекул в данной половине сосуда, мы, скорее всего, никогда не получим числа N. Всякий раз будет получаться новое число молекул — то немного больше N, то немного меньше N. Как говорят, число молекул будет *флуктуировать* около значения N.

Как можно охарактеризовать величину таких флуктуаций? Ведь n принимает разные значения, положительные и отрицательные. Поэтому естественно для описания флуктуаций использовать средние величины. Усреднение будем производить по большому числу измерений или, что то же самое, по достаточно большому промежутку времени — ведь можно представить себе, что измерения делаются последовательно, одно за другим, в течение этого промежутка. Усреднение будет обозначаться чертой над усредняемой величиной. Наша цель — найти количественную меру величины флуктуаций, то есть какое-то число, которое характеризовало бы их «размах», так чтобы мы могли сравнивать величины флуктуаций в разных случаях. Не может ли такой мерой служить средняя величина $\bar{n}$? Чтобы найти $\bar{n}$, каждое значение n надо умножить на вероятность появления этого значения и просуммировать по всем n. В итоге мы получаем:

$$\bar{n} = \sum_{n=-N}^{N} n w(n) = \sum_{n} \frac{1}{\sqrt{\pi N}} n e^{-n^2/N}.$$

Легко видеть, что эта сумма равна нулю. Действительно, каждому слагаемому суммы с некоторым номером n можно подобрать «пару» — слагаемое с номером $-n$, а два таких слагаемых в сумме дадут нуль. Это значит, что $\bar{n}$ не может служить мерой интенсивности флуктуаций. Это значит также, что N есть не только наиболее вероятное число частиц в данной половине сосуда, а также и среднее их число.

Мерой интенсивности флуктуаций может служить средний квадрат флуктуаций числа частиц, то есть среднее значение n^2, равное

$$\overline{n^2} = \sum_{n=-N}^{N} n^2 w(n). \qquad (4)$$

Эта величина равна $N/2$ *), так что формулу (3) можно теперь переписать в виде

$$w(n) = w(0) e^{-n^2/2\overline{n^2}}. \qquad (5)$$

где $w(0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi N}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \overline{n^2}}}$. Квадратный корень из $\overline{n^2}$ называется среднеквадратичной флуктуацией числа частиц. В нашем случае среднеквадратичная флуктуация равна

---

*) Мы вычислим эту величину в Приложении

$$\sqrt{\overline{n^2}}=\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2}}.$$

Эта величина имеет наглядный физический смысл: если измерять число частиц в одной половине сосуда, то оно, вероятнее всего, будет отличаться от среднего числа частиц на величину порядка среднеквадратичной флуктуации (причем знак соответствующей разности может быть любым).

Таким образом, чем больше частиц в системе, тем больше и среднеквадратичная флуктуация. Однако с ростом числа частиц среднеквадратичная флуктуация растет не пропорционально N, а гораздо медленнее — пропорционально $\sqrt{N}$.

Теперь понятно, с какой максимальной точностью имеет смысл измерять число молекул в данной половине сосуда. Эта точность определяется величиной среднеквадратичной флуктуации. В нашем случае (когда объем половины сосуда равен одному литру) среднеквадратичная флуктуация составляет приблизительно $2{,}2\cdot10^{11}$. Это значит, что в выражении для числа молекул следует сохранять, самое большее, 11 первых значащих цифр. Если же выполнить серию измерений с большей точностью, то 11 первых цифр будут повторяться практически во всех измерениях (флуктуации, заметно превышающие среднеквадратичную, имеют очень малую вероятность), в то время как прочие цифры будут меняться от одного измерения к другому случайным образом.

В приведенном примере максимальное число значащих цифр, которые можно удержать в ответе, очень велико, и реально, конечно, предел точности измерения ставится конструкцией прибора. Однако это число может быть и небольшим, если измерять среднее число молекул газа в малом объеме. Так, например, среднее число молекул в одном кубическом микроне (10^{-18}м^3) равно при тех же условиях $2{,}5\cdot10^7$. Среднеквадратичная флуктуация в этом случае равна приблизительно $4\cdot10^3$, так что определять число молекул в таком объеме имеет смысл, самое большее, с четырьмя значащими цифрами.

На явление флуктуаций можно взглянуть и с несколько иной точки зрения. Рассмотрим мысленный эксперимент, в процессе которого некоторое число n молекул перемещается из правой половины сосуда в левую не в результате самопроизвольной флуктуации, а под действием внешней силы. (Число n по-прежнему мало по сравнению с N.) Какая работа совершается при таком перемещении?

На вопрос, поставленный в такой форме, ответа дать нельзя. Совершенная работа зависит от того, каким способом перемещать молекулы, и даже от формы сосуда. Дело в том, что в зависимости от условий опыта, в первую очередь — от скорости перемещения газа, мы должны будем совершать различную работу против сил трения, препятствующих газу перетекать под давлением из одной половины сосуда в другую. Поскольку величина сил трения в газе пропорциональна скорости, чем меньше скорость, тем меньшую работу против сил трения приходится совершать. Наименьшая работа $A_{\min}$ будет совершена, если перемещать газ предельно медленно. И если мы скажем, что хотим вычислить именно эту наименьшую работу, то тем самым задача будет сформулирована вполне определенно.

А как можно было бы переместить указанное число молекул газа? Представим себе, что в сосуд с газом вставлен очень тонкий поршень. Он делит весь объем не точно пополам, а таким образом, что слева от него имеется $N+n$ молекул, а справа $N-n$. Начнем двигать поршень влево, как показано стрелкой на рисунке 3, пока он не займет положения, показанного пунктиром, при котором он делит объем сосуда пополам. Требуется вычислить работу, которую совершает поршень против сил давления газа.

Что происходит при движении поршня? Перемещаясь влево, поршень сжимает газ в левой части сосуда и расширяет в правой. В результате давление слева повышается, а справа понижается. Сила, действующая на поршень, равна произведению его площади S на разность давлений в левой и правой частях сосуда. По условию n гораздо меньше N, а значит, и путь, пройденный поршнем, мал по сравнению с размерами сосуда. Поэтому в первом приближении разность давлений можно считать пропорциональной этому пути. (Попробуйте оценить сами, с какой точностью справедливо это утверждение.) Тогда работа $A_{\min}$

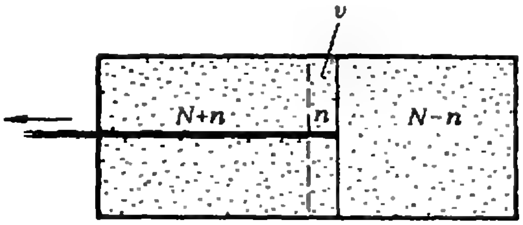


Рис. 3.

есть произведение пути на среднюю силу. Средняя же сила равна половине силы, действующей на поршень в конце его перемещения, то есть половине величины $(p_1-p_2)S$, где p_1 и p_2 — соответственно конечные значения давлений в левой и правой половинах сосуда. Отсюда работа

$$A_{\min}=\frac{1}{2}\,(p_1-p_2)\,v,$$

где v — объем области, ограниченной сплошной и пунктирной линиями на рисунке 3.

Обозначим полный объем сосуда через $2V$. Согласно закону Бойля — Мариотта

$$p_1V=p(V+v),\quad p_2V=p(V-v),$$

откуда

$$p_1-p_2=2p\,\frac{v}{V}.$$

Таким образом,

$$A_{\min}=p\,\frac{v^2}{V}.$$

Принимая во внимание уравнение Клапейрона — Менделеева, которое мы запишем в виде $pV=NkT$, и учитывая, что $v:V=n:N$, мы можем представить выражение для $A_{\min}$ в следующем окончательном виде:

$$A_{\min}=kT\,\frac{n^2}{N}. \qquad (6)$$

Вернемся теперь к формуле (3) для $w(n)$. Сравнивая (3) и (6), мы видим, что (3) можно переписать так:

$$w(n)=w(0)\,e^{-A_{\min}/kT} \qquad (7)$$

(напомним, что $w(0)=1/\sqrt{\pi N}$). Для вероятности $w(n)$ у нас есть еще одно выражение — через среднеквадратичную флуктуацию числа частиц (см. (5)):

$$w(n)=w(0)\,e^{-n^2/2\overline{n^2}}.$$

(напомним, что среднеквадратичная флуктуация — это $\sqrt{\overline{n^2}}$) Сравнивая это выражение с (7), мы находим, что

$$\frac{n}{\sqrt{\overline{n^2}}}=\sqrt{\frac{2A_{\min}}{kT}} \qquad (8)$$

Соотношение (8) означает, что каждой флуктуации можно сопоставить некоторую работу, которая требуется, чтобы создать данное флуктуационное отклонение с помощью внешних сил! Источник этой работы в случае самопроизвольных флуктуаций — тепловая энергия, запасенная в системе. В нашем примере это — энергия хаотического движения молекул газа. Чем больше работа $A_{\min}$, тем менее вероятна флуктуация.

Возникает очень интересный вопрос: нельзя ли за счет флуктуаций получить *полезную* работу? Было бы очень заманчиво отбирать таким образом энергию от макроскопической системы, имеющей конечную температуру. Ведь во всякой такой системе происходят флуктуации каких-либо величин.

Если обратиться к нашему примеру, то можно было бы предложить такую конструкцию двигателя. Поместим в сосуд с газом поршень, разделяющий сосуд на две половины, как на рисунке 4. Дальнейшая идея устройства заключается в следующем: при перемещении влево вследствие флуктуаций поршень вращает храповое колесо, которое может совершать полезную работу, а при перемещении поршня вправо колесо удерживается собачкой, на которую давит пружина.

Такой двигатель, однако, работать не будет. Дело в том, что наши рассуждения не учитывали флуктуаций в устройстве, препятствующем обратному ходу храпового колеса; благодаря им это устройство время от времени «отпускает» колесо. Если же учесть эти флуктуации, то окажется, что колесо совершает движение по часовой стрелке в среднем столь же часто, как и против часовой стрелки, так что никакой полезной работы не производится. Этот вывод находится в полном соответствии с известным из школьного курса утверждением, что никакой тепловой двигатель не может работать при одинаковой температуре его рабочего тела и окружающей среды.

Можно спросить: зачем мы занимались всем этим переписыванием формул для вероятности флуктуационного отклонения? Чем выражение (7) лучше эквивалентного ему выражения (3)? Дело в том, что флуктуировать могут самые различные физические величины, а не только число молекул в какой-то части сосуда, наполненного газом. Формула (3) справедлива только для описания конкретных рассмотреных выше флуктуаций в газе. Формула же (7)

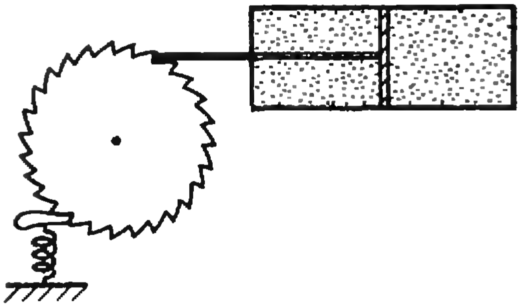


Рис. 4.

представлена в столь общем виде, не зависящем от конкретного устройства физической системы, что, пользуясь ею, можно вычислять флуктуации любых физических величин. Для этого необходимо только получить формулу для работы $A_{\min}$, которую нужно затратить, чтобы создать данное флуктуационное отклонение. Как это делается, мы сейчас проследим на нескольких примерах.

Начнем с того, что рассмотрим флуктуации числа частиц в объеме V, содержащем в среднем N частиц газа. Но при этом будем считать, что он сообщается не с другим в точности таким же объемом, а является малой частью большого сосуда с газом. Как должна измениться в этом случае среднеквадратичная флуктуация числа частиц по сравнению со случаем, рассмотренным выше? Из физических соображений ясно, что она должна увеличиться: появились дополнительные возможности для притока молекул в объем V или оттока из него. Но на сколько?

Подсчитаем работу $A_{\min}$, которую нужно затратить для перемещения n молекул в объем V. Считается она, по существу, так же, как и выше. Единственное различие состоит в том, что внешнее давление p_2, которое установилось после перемещения, можно с достаточной точностью считать равным первоначальному давлению p; поскольку объем всего сосуда гораздо больше объема V, изменение давления в сосуде гораздо меньше, чем изменение давления в объеме V, и им можно пренебречь. Проведя расчеты, мы найдем, что

$$A_{\min} = \frac{1}{2}\, kT\, \frac{n^2}{N},$$

то есть получим величину, вдвое меньшую, чем выше. Воспользовавшись формулой (8), находим среднеквадратичную флуктуацию числа частиц

$$\sqrt{\overline{n^2}} = \sqrt{N}.$$

Эта величина в $\sqrt{2}$ раз больше, чем полученное ранее значение среднеквадратичной флуктуации числа частиц в половине сосуда.

В качестве другого примера рассмотрим флуктуации в электрической цепи, изображенной на рисунке 5. Цепь состоит из конденсатора емкости C и резистора с сопротивлением R, соединенных в замкнутый контур. Электрические заряды в резисторе совершают тепловое движение, вследствие которого через резистор течет флуктуационный ток, а значит, на конденсаторе возникает флуктуационный электрический заряд. Среднюю квадратичную флуктуацию этого заряда мы и хотим вычислить.

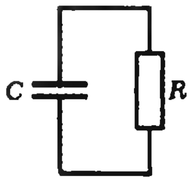


Рис. 5.

Подсчитаем работу $A_{\min}$, которую надо затратить, чтобы сообщить конденсатору заряд Q, то есть зарядить его до напряжения Q/C. Среднее значение напряжения в процессе зарядки есть $Q/2C$ (конденсатор в начальный момент не заряжен), и $A_{\min} = Q^2/2C$. Вероятность того, что на конденсаторе флуктуационным образом возникает заряд Q, равна

$$w(Q) = w(0)\, e^{-Q^2/2CkT},$$

и по аналогии с (8) мы можем сразу написать выражение для среднеквадратичной флуктуации заряда:

$$\sqrt{\overline{Q^2}} = Q\sqrt{\frac{kT}{2A_{\min}}} = \sqrt{CkT}.$$

В качестве еще одного примера найдем среднеквадратичную скорость частиц, участвующих в броуновском движении.

Представим себе, что мы интересуемся среднеквадратичной скоростью броуновского движения частицы в направлении какой-нибудь оси, например оси X. Проекцию скорости на это направление мы обозначим через v_x. Очевидно, в данном случае $A_{\min}$ равна кинетической энергии частицы $mv_x^2/2$, где m — масса частицы. Среднеквадратичную скорость мы можем вычислить сразу — по аналогии с формулой (8). Она равна

$$\sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

Так, если масса частицы 10^{-15} кг, при комнатной температуре $\sqrt{\overline{v_x^2}} \approx 0{,}002$ м/с.

В заключение обратим внимание на одно интересное и важное обстоятельство. И среднеквадратичная флуктуация заряда на конденсаторе, и среднеквадратичная флуктуация скорости тем больше, чем выше температура. Это естественно, поскольку температура — это мера интенсивности беспорядочного теплового движения молекул, которое служит причиной флуктуаций. Для газа же среднеквадратичная флуктуация числа молекул не зависит от температуры. Но сама формула (5) справедлива только при достаточно высоких температурах. При понижении температуры газ конденсируется в жидкость, и формула (5) становится неприменимой, потому что движения отдельных молекул нельзя считать независимыми.

Подведем некоторые итоги. Из сказанного следует важный вывод. Не все физические величины в принципе определяются со сколь угодно высокой точностью. Принципиально можно, например, измерить с любой точностью массу, заряд или число атомов какого-нибудь изолированного тела. Эти величины не флуктуируют, если только тело не обменивается частицами с другими телами.

Мы здесь встретились с примерами величин, способных флуктуировать. Их значения в принципе не имеет смысла задавать с неограниченной точностью. Мы видели, что число молекул в какой-то части сосуда с газом имеет смысл задавать только с точностью до среднеквадратичной флуктуации. То же самое можно сказать и относительно давления газа на стенку сосуда. Флуктуирует, и потому по самой своей природе не может быть измерена со слишком высокой точностью, и температура. Чем меньше размеры физической системы или число атомов в ней, тем больше относительные флуктуации характеризующих ее физических величин и с тем меньшей относительной точностью они могут быть заданы или измерены.

Приложение

Чтобы получить выражение (1), воспользуемся приближенной формулой Стирлинга для $N!$, справедливой при больших значениях N. Эта формула имеет вид:

$$N! = \sqrt{2\pi N}\, e^{N(\ln N - 1)},$$

где ln обозначает логарифм, взятый по основанию e. Относительная точность этой формулы тем выше, чем больше число N; можно показать, что относительная погрешность, которую она дает, меньше $\frac{1}{8N}$. Воспользовавшись ею для вычисления вероятности (1), мы получаем выражение (2).

Применяя ту же формулу для расчета вероятности

$$w(n) = \frac{(2n)!}{2^{2N}(N+n)!(N-n)!},$$

мы получаем

$$w(n) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\pi(N^2-n^2)}} \times$$

$$\times e^{2N\ln 2N-(N+n)\ln(N+n)-(N-n)\ln(N-n)}.$$

В выражении под корнем мы пренебрегли малой величиной n^2 по сравнению с большой величиной N^2; тогда коэффициент перед экспонентой оказывается равным $\frac{1}{\sqrt{\pi N}}$. Для того чтобы вычислить выражение в показателе, представим фигурирующие там логарифмы в виде

$$\ln(N \pm n) = \ln N + \ln\left(1 \pm \frac{n}{N}\right).$$

Для вычисления $\ln\left(1 \pm \frac{n}{N}\right)$, в свою очередь, воспользуемся следующей приближенной формулой, справедливой для любых малых по абсолютной величине положительных или отрицательных x:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$$

(например, при $|x| < 0{,}1$ эта формула дает погрешность, не превышающую $0{,}4x^3$). В итоге получается выражение (3), приведенное в тексте.

Нам осталось еще доказать, что средний квадрат флуктуации числа частиц (см. (4)) равен $N/2$. Идея доказательства проста. Сначала вспомним, как доказывается известное соотношение

$$\sum_{n=-N}^{N} C_{2N}^{N+n} = 2^{2N}.$$

Для этого рассматривается биномиальное разложение функции $f(x) = (1+x)^{2N}$. Оно имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} C_{2N}^{N+n} x^{N+n}.$$

Отсюда немедленно следует, что сумма $\sum C_{2N}^{N+n}$ есть $f(1) = 2^{2N}$.

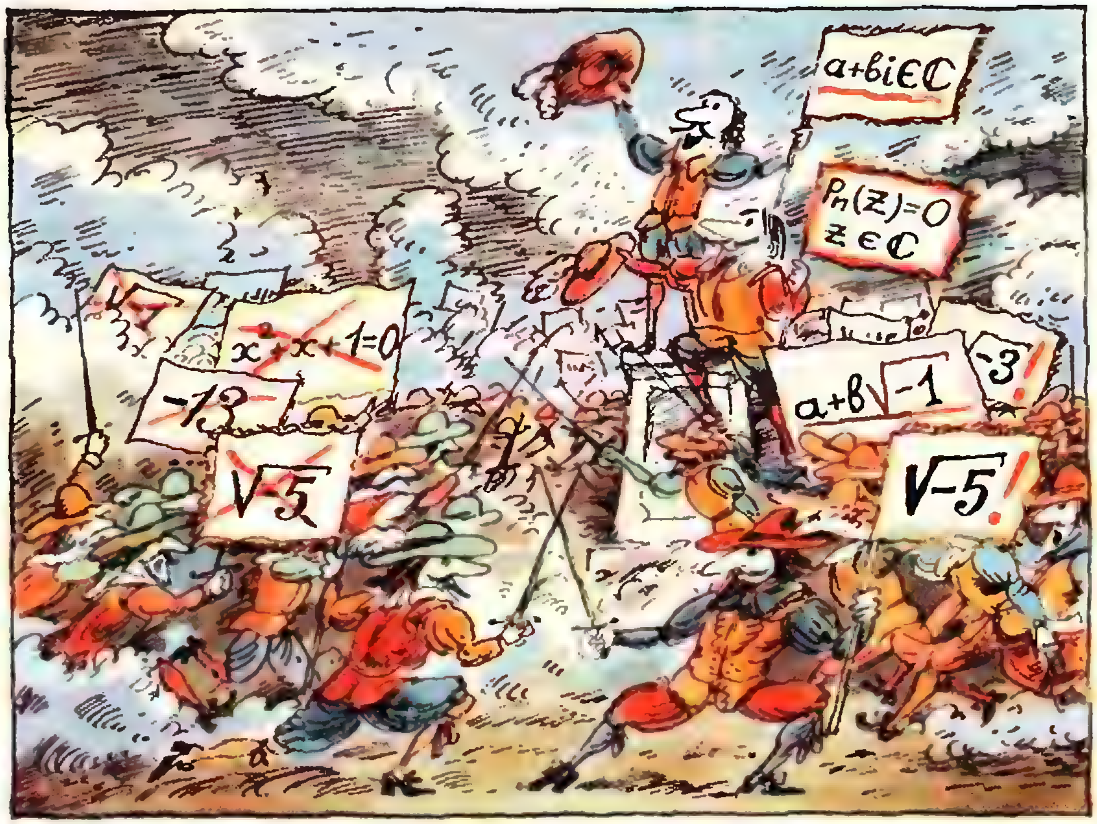
В нашем же случае для вычисления суммы (4), равной $2^{-2N} \sum_{n=-N}^{N} n^2 C_{2N}^{N+n}$, требуется найти функцию, биномиальное разложение которой имело бы вид

$$g(x) = \frac{1}{2^{2N}} \sum_{n=-N}^{N} C_{2N}^{N+n} n^2 x^n.$$

Тогда $g(1)$ дает искомое среднее значение $\overline{n^2}$. Проверьте сами, что $g(x)$ имеет вид

$$g(x) = \frac{N}{2^{2N}x^N}(1+x)^{2N-2}[N(1+x)^2 - 2(2N-1)x].$$

Отсюда $g(1) = \frac{N}{2}$.



С. Ашманов

Числа и многочлены

В этой статье мы расскажем о том, каким образом в математике переплелись комплексные числа и многочлены.

Когда чисел не хватает

Числа бывают разные: положительные и отрицательные, рациональные и иррациональные, алгебраические и трансцендентные. История появления каждого нового класса чисел весьма поучительна и даже драматична.

Такой привычный для нас объект, как отрицательные числа, являлся предметом дискуссий в течение столетий. *О них знали в древности в Индии,* Китае и Вавилоне, однако споры о природе отрицательных чисел, о их праве на существование велись еще во времена Ньютона в конце XVII века.

Поводом для введения отрицательных чисел явилось, по-видимому, желание решать уравнения вида $x+a=b$ для любых положительных чисел a и b.

Введение рациональных чисел дало возможность решать уравнения вида $ax=b$, где a и b — целые числа ($a\neq 0$).

После того как в Древней Греции была доказана иррациональность числа $\sqrt{2}$, то есть невозможность решить уравнение $x^2=2$, имея в своем распоряжении только рациональные числа, человечество вновь столкнулось с необходимостью расширить свой числовой запас.

Расширить множество рациональных чисел так, чтобы уравнение $x^2=2$ в новом, более широком, множестве имело корень, можно не только так, как это делается в учебнике, но и следующим образом:

Введем символ j и положим $j^2=2$. Будем рассматривать выражения вида $a+bj$, где a и b — произвольные рациональные числа.

Сформулируем правила действий над нашими кандидатами в новые числа:

$$(a_1+b_1j)+(a_2+b_2j)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)j;$$

$$(a_1+b_1j)(a_2+b_2j)=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)j.$$

(Определяя умножение, мы воспользовались тем, что $j^2=2$.)

Сумма и произведение наших выражений вновь оказались выражениями того же вида. Таким образом в множестве выражений $a+bj$ мы определили две операции — сложение и умножение. Нетрудно проверить, что эти операции обладают всеми привычными свойствами сложения и умножения (коммутативность, ассоциативность и т. д.). Роль нуля играет выражение $0+0j$.

Легко проверить, что выражения вида $a+0j$ *ведут себя так же, как рациональные числа*. Поэтому рациональное число a и выражение $a+0j$ можно отождествить друг с другом. Значит, можно считать, что множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел является подмножеством множества выражений $a+bj$.

Покажем, что в этом множестве возможно и деление, т. е. что уравнение

$(a+bj)x=c+dj$, где $a+bj\neq 0+0j$, имеет решение

$$\frac{c+dj}{a+bj}=\frac{(c+dj)(a-bj)}{(a+bj)(a-bj)}=$$
$$=\frac{(ac-2bd)+(ad-bc)j}{a^2-2b^2}=$$
$$=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}j.$$

Значит, $x=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}j$.

(Из $a+bj\neq 0+0j$ следует, что $a\neq 0$ или $b\neq 0$; тогда из рациональности чисел a, b вытекает $a^2-2b^2\neq 0$.)

Обозначим множество новых «чисел» — выражений вида $a+bj$ ($a, b\in\mathbf{Q}$) — через $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. В таком множестве уравнение $x^2=2$ имеет решение: легко проверить, что $(0+1j)^2=2$. Выражение $0+1j=j$ естественно обозначить через $\sqrt{2}$.

Мы добились, чего хотели. Более того, некоторые другие уравнения, которые не имели корней в множестве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, также стали обладать корнями в множестве $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$; например, уравнение $x^2-2x-1=0$ имеет корень $1+\sqrt{2}$. Но вот уравнение $x^2=3$, не имевшее корней в множестве $\mathbf{Q}$, не имеет их и в множестве $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ (докажите!).

Таким образом, если мы пойдем тем же путем, то, чтобы получить возможность решать все уравнения вида $x^n=k$, где k — натуральное число, нам пришлось бы расширять множество $\mathbf{Q}$ бесконечное число раз. Человечество, введя понятие *действительного числа*, решило эту проблему по-другому, «одним махом».

Однако уравнение x^2+1 и в множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел не имеет решений.

Числа, не похожие ни на что

В школьном учебнике говорится: если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то оно не имеет корней. Так считали со времен Вавилона. Лишь в XVI веке математики поняли, что корни четной степени из отрицательных чисел могут быть полезными. Им в ряде случаев для получения обычного (действительного!) корня уравнения приходилось оперировать с бессмысленными выражениями вроде $5+2\sqrt{-3}$.

Конечно, математики делали это не с легким сердцем — необычные «числа» долго сохраняли несколько мистическую окраску (им даже придумали название — мнимые). Сначала выражения вида $a+b\sqrt{-1}$ применялись исключительно во вспомогательных целях, и по-прежнему считалось, что уравнение $x^2+1=0$ не имеет корней. Однако постепенно у математиков крепло убеждение, что всякое уравнение

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

с действительными коэффициентами должно иметь корни. «Пусть это будут даже не числа»,— говорили они. Стоп! Что значит «не числа»? Что имели в виду дерзкие математики? Еще и отрицательные числа не получили «гражданских прав», а тут какие-то новые «не числа».

А в самом деле, что требуется от объектов, претендующих на звание «корень алгебраического уравнения»? Нужно, чтобы их можно было подставить вместо переменной x, произвести вычисления и сравнить с нулем.

Другими словами, нужны какие-то объекты, обладающие свойствами действительных чисел, но чтобы их было «больше», чем последних, с тем чтобы в тех случаях, когда для решения алгебраических уравнений «не хватает» действительных чисел, прибегнуть к помощи таких объектов.

Какие же свойства действительных чисел важны? Оказывается, множество действительных чисел является полем*). Множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел тоже является полем.

---

*) Напомним, что *полем* называется более чем одноэлементное множество $\mathbf{M}$ с двумя операциями — сложением и умножением,— удовлетворяющими следующим аксиомам:

Если добавить i

Попробуем подобно тому, как мы поступили с полем рациональных чисел и уравнением $x^2=2$, расширить поле $\mathbb{R}$ действительных чисел, присоединив к нему «корень» уравнения $x^2+1=0$.

Пусть i — символ, единственным свойством которого является то, что он — корень уравнения $x^2+1=0$; то есть $i^2=-1$.

Рассмотрим выражения вида $a+bi$, где a и b — произвольные действительные числа; назовем их *комплексными числами*. Введем правила действий над комплексными числами:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=$$
$$=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i;$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=$$
$$=(a_1a_2-a_1b_2)+(b_1b_2+a_2b_1i.)$$

Читатель без труда докажет, что множество комплексных чисел с так определенными сложением и умножением является полем.

Легко проверить, что комплексные числа вида $a+0i$ *ведут себя так же, как действительные числа*. Поэтому действительное число a и комплексное число $a+0i$ можно отождествить друг с другом. Значит, можно считать, что мы действительно расширили поле действительных чисел до поля комплексных чисел. В этом более широком поле уравнение $x^2+1=0$ имеет корень: $i^2+1=0$ (и даже два корня: $(-i)^2+1=0$).

Но чего мы добились? Только того, что уравнение $x^2+1=0$ приобрело корни? Оказывается, мы добились гораздо большего. Имеет место замечательная

Основная теорема алгебры

Любой многочлен $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ *ненулевой степени имеет в множестве комплексных чисел хотя бы один корень* (который, конечно, может быть и действительным числом).

Первую попытку доказательства этой теоремы предпринял Даламбер в 1746 году. Строгое же доказательство привел Гаусс в 1799 году.

Оказывается, основная теорема алгебры верна не только для многочленов с действительными коэффициентами, но и для многочленов с комплексными коэффициентами (или, как принято говорить, для многочленов *над полем комплексных чисел*).

Основная теорема алгебры позволяет дать изящный ответ на вопрос, сколько корней имеет произвольный многочлен n-й степени, *если рассматривать многочлены над полем комплексных чисел*.

Чтобы сформулировать этот ответ, нам понадобится понятие «кратности» (корня многочлена), а это понятие определяется через понятие «один многочлен *делится* на другой». Говорят, что *многочлен* $P_1(x)$ *делится на многочлен* $P_2(x)$, если существует такой многочлен $q(x)$, что $P_1(x)=q(x)\cdot P_2(x)$.

Понятия «делится» и «корень» тесно связаны:

Теорема 1. *Число* α *тогда и только тогда является корнем многочлена* $P(x)$, *когда* $P(x)$ *делится на* $x-\alpha$.

Теорему 1 нетрудно доказать самостоятельно. (Указание. Делите «уголком».)

Может случиться, что многочлен $P(x)$ степени n будет делиться не только на $x-\alpha$, то и на некоторую степень $x-\alpha$. В соответствии с этим условимся α называть *k-кратным корнем* многочлена $P(x)$, если $P(x)$ делится на $(x-\alpha)^k$, но не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$. (Например, число 1 является двукратным корнем многочлена

$$P(x)=x^3+x^2-5x+3=(x-1)^2(x+3).$$

Теперь легко может быть доказана

Теорема 2. *Всякий многочлен* $P(x)$ *степени* n (с действительными или комплексными коэффициентами) *имеет в поле комплексных чисел ровно* n *корней* (среди которых, разумеется, могут быть и действительные числа), *если каждый корень считать столько раз, какова его кратность*.

Доказательство. По основной теореме алгебры многочлен $P(x)$ имеет в поле комплексных чисел хотя бы один корень. Допустим, что α_1 есть корень многочлена $P(x)$. По теореме 1 $P(x)=(x-\alpha_1)q(x)$, где $q(x)$ — многочлен степени $n-1$. (Даже если коэффициенты многочлена $P(x)$ — действительные числа, многочлен $q(x)$ будет, если α_1 — комплексный корень, иметь комплексные коэффициенты.)

Применим дальше то же рассуждение к многочлену $q(x)$. По основной теореме алгебры существует корень α_2 многочлена $q(x)$, так что $q(x)=(x-\alpha_2)h(x)$, где $h(x)$ — многочлен, степень которого уже $n-2$. Повторяя это рассуждение $n-1$ раз (применяя, конечно, при

сложение: 1. *коммутативно*, 2. *ассоциативно*, 3. *существует ноль*, 4. *для каждого элемента из* **M** *существует противоположный;*

умножение: 5. *коммутативно*, 6. *ассоциативно*, 7. *существует единица*, 8 *для каждого ненулевого элемента из* **M** *существует обратный*, 9. *дистрибутивно по отношению к сложению.*

строгом изложении принципа математической индукции), мы, в конце концов, придем к разложению

$$P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n), \qquad (*)$$

где a_n — коэффициент при старшей степени x^n многочлена $P(x)$.

Из тождества (*) следует не только то, что комплексные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (среди них могут быть и равные!) являются корнями многочлена $P(x)$, но и то, что иных корней этот многочлен не имеет. В самом деле, если число β — корень многочлена $P(x)$, то

$$P(\beta)=a_n(\beta-\alpha_1)(\beta-\alpha_2)\dots(\beta-\alpha_n).$$

Но произведение комплексных чисел равно нулю в том и только в том случае, когда один из сомножителей равен нулю (докажите это). Поэтому один из множителей $\beta-\alpha_i$ равен нулю, то есть $\beta=\alpha_i$. Это завершает доказательство теоремы 2.

По мере развития науки стало ясно, что без комплексных чисел нельзя обойтись в самых что ни на есть «действительных» делах. Когда появились самолеты, потребовалась теория обтекания крыла самолета потоком воздуха. Выяснилось, что самым естественным языком описания подобного процесса, т. е. языком аэродинамики, является теория функций комплексного переменного! Поэтому, когда вы видите современный авиалайнер, знайте, что его сделали гений конструкторов, инженеров, рабочих и... комплексные числа. То же можно сказать и о науке об обтекании судна водой — гидродинамике. Знаете такую игрушку — Ванька-встанька? Положишь Ваньку спать, а он тут же вскочит — у него самое устойчивое положение, когда он стоит. Подобными вопросами для гораздо более сложных механических, электрических и других систем занимается математическая теория устойчивости. И вновь оказывается, что ответ на то, является ли система устойчивой, кроется в свойствах комплексных чисел, являющихся корнями некоторого многочлена, характеризующего рассматриваемую систему.

Современный самолет и Ванька-встанька — таков диапазон действия комплексных чисел. Мы привели только несколько областей их применения, поскольку все перечислить невозможно. Вот тебе и мнимые числа!

Мы расскажем сейчас для примера, как комплексные числа помогли ответить на некоторые важные вопросы относительно многочленов с действительными коэффициентами.

Многочлены, похожие на простые числа

Рассмотрим множество всех многочленов произвольной степени от переменной x. Вы умеете складывать и перемножать элементы этого множества, то есть многочлены, умеете разлагать их на множители.

Это очень похоже на то, что вы умеете делать с натуральными числами. Натуральные числа вы еще умеете разлагать на простые множители. Вы, наверное, знаете, что это можно сделать всегда и притом единственным образом.

Роль простых чисел в теории многочленов играют так называемые неприводимые многочлены. Говорят, что многочлен $P(x)$ степени $n>0$ *неприводим*, если он не делится ни на какой многочлен степени $0<s<n$.

Аналог утверждения о разложении любого натурального числа в произведение простых множителей звучит так:

Теорема 3. *Всякий многочлен ненулевой степени разлагается в произведение неприводимых многочленов:*

$$P(x)=P_1(x)P_2(x)\dots P_m(x),$$

*и это разложение является единственным с точностью до порядка и множителей нулевой степени**).

Доказывая теорему 2, мы получили, что *всякий многочлен $P(x)$ степени n раскладывается над полем комплексных чисел в произведение линейных* (т. е. первой степени) *сомножителей* (см. равенство (*)).

Таким образом, *над полем комплексных чисел неприводимы только многочлены первой степени.*

А какие многочлены неприводимы над полем действительных чисел? Ответить на этот вопрос нам помогут, как ни странно, комплексные числа.

Пусть $z=a+bi$ — произвольное комплексное число. Назовем комплексное число $\bar{z}=a-bi$ *сопряженным* к числу z.

Нам понадобится

Теорема 4. *Если z — корень многочлена $P(x)$ с действительными коэффициентами, то и $\bar{z}$ — его корень.*

Для доказательства отметим следующие свойства операции взятия сопряженного числа $\bar{z}$:

1. Число $\bar{\bar{z}}$, сопряженное к сопряженному числу $\bar{z}$, совпадает с исходным комплексным числом z.

2. Число z равно своему сопряженному $\bar{z}$ тогда и только тогда, когда z является действительным числом.

3. Сопряженное к сумме комплексных чисел равно сумме чисел, сопряженных к слагаемым:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2.$$

4. Число, сопряженное к произведению, равно произведению сопряженных к сомножителям:

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2.$$

---

*) Доказательство теоремы 3 см., например, в «Кванте», 1976, № 8, с. 15.

С помощью метода математической индукции можно показать, что правила 3 и 4 распространяются на сумму и произведение более чем двух чисел:

$$\overline{z_1+z_2+\ldots+z_m}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\ldots+\overline{z_m},$$
$$\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_m}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_m},$$

в частности, $\overline{z^m}=(\overline{z})^m$.

5. Произведение многочленов $x-z$ и $x-\overline{z}$ является многочленом с действительными коэффициентами:

$$(x-z)(x-\bar{z})=x^2-2ax+(a^2+b^2).$$

Доказательство теоремы 4. Пусть

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

где $a_n, a_{n-1},\ldots, a_2, a_1, a_0$ — действительные числа, z — корень этого многочлена. Тогда

$$0=P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0.$$

Воспользуемся свойствами операции сопряжения:

$$0=\overline{0}=\overline{P(z)}=$$
$$=\overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0}=$$
$$=\overline{a_nz^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+\ldots+\overline{a_2z^2}+\overline{a_1z}+\overline{a_0}=$$
$$=\overline{a_n}\,\overline{z^n}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}}+\ldots+\overline{a_2}\,\overline{z^2}+\overline{a_1}\,\overline{z}+\overline{a_0}=$$
$$=a_n\overline{z^n}+a_{n-1}\overline{z^{n-1}}+\ldots+a_2\overline{z^2}+a_1\overline{z}+a_0=P(\overline{z}).$$

Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 легко следует

Теорема 5. *Многочлен с действительными коэффициентами имеет четное число не действительных корней.*

В самом деле, по теореме 4 не действительные корни многочлена с действительными коэффициентами «ходят парами»: $(z;\ \overline{z})$.

Из теоремы 5 немедленно вытекает

Теорема 6. *Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.*

По основной теореме алгебры этот многочлен имеет нечетное число корней (равное его степени), следовательно, по теореме 5, они не могут быть все не действительными[*]).

С помощью комплексных чисел мы доказали вполне «действительную» теорему. Но гораздо более важным и интересным является следующий факт:

Теорема 7. *Любой многочлен с действительными коэффициентами, степень которого больше двух, приводим над полем действительных чисел.*

Доказательство. Если у многочлена $P(x)$ имеется действительный корень α, то $P(x)=q(x)\cdot(x-\alpha)$. Из придуманного вами доказательства теоремы 1 видно, что $q(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Следовательно, в этом случае $P(x)$ есть призведение двух многочленов с действительными коэффициентами, то есть $P(x)$ приводим над полем действительных чисел.

Пусть теперь все корни $z_1, z_2, \ldots, z$ многочлена $P(x)$ — не действительные. По теореме 6 n — четное и

$$P(x)=a_n(x-z_1)(x-z_2)\ldots(x-z_n).$$

Разобьем корни $z_1,\ldots, z_n$ на сопряженные пары вида $(z_i;\ \overline{z_i})$ и запишем $P(x)$ так:

$$P(x)=a_n(x-z_1)(x-\bar{z}_1)(x-z_2)(x-\bar{z}_2)\times\ldots$$
$$\ldots\times(x-z_k)(x-\bar{z}_k);$$

здесь $k=\frac{n}{2}$.

Каждый многочлен $P_i(x)=(x-z_i)\times\times(x-\overline{z_i})$, $i=1, 2, \ldots, k$, имеет, как мы видели, действительные коэффициенты. Следовательно, многочлен $P(x)==a_nP_1(x)P_2(x)\ldots P_k(x)$ приводим над полем действительных чисел — ведь в этом произведении не менее двух сомножителей (из $n>2$ следует $k>1$).

Поэтому окончательный вывод о неприводимости многочленов над полем действительных чисел таков:

Теорема 8. *Над полем действительных чисел неприводимыми являются лишь многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.*

Следствие. *Любой многочлен с действительными коэффициентами разложим в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами.*

О чем мы еще не рассказали? О том, какую роль сыграли многочлены в решении знаменитых задач древности — задач о трисекции угла, квадратуре круга и удвоении куба. О том, как юным Нильсом Абелем было доказано, что формул для нахождения корней многочленов степени выше четвертой не существует; как еще более юный Эварист Галуа полностью решил проблему о решении уравнений в радикалах. Наконец, мы ведь еще не доказали основную теорему алгебры...

Нет, автор должен признаться, что взялся за непосильную задачу; он в изнеможении откладывает перо и просит читателя не быть слишком взыскательным.

---

[*]) Попробуйте доказать эту теорему при помощи понятия непрерывности.

З. Керимов

Как найти целый корень?

Пусть нам надо решить уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0. \quad (1)$$

Если $n=1$ или $n=2$, мы это умеем — в школьных учебниках есть формулы. Если $n=3$ или $n=4$, тоже существуют формулы («Квант», 1976, № 9), правда, довольно громоздкие. Если же $n>4$, то таких формул просто не существует — не «не найдено», а доказано, что не существует («Квант», 1976, № 5, с. 6). Как же быть? Как находить корни уравнений «высших степеней»?

Для отыскания целых корней уравнения с целыми коэффициентами*) можно воспользоваться следующим достаточным условием: *если l — целый корень уравнения* (1) *с целыми коэффициентами, то l является делителем свободного члена a_n.*

В самом деле, если l — корень уравнения (1), то

$$a_n=l(-a_0l^{n-1}-a_1l^{n-2}-\ldots-a_{n-1}). \quad (2)$$

Если $l\in\mathbf{Z}$ и коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, a_n — тоже целые числа, то $-a_0l^{n-1}-a_1l^{n-2}-\ldots-a_{n-1}\in\mathbf{Z}$ и (2) означает, что a_n делится на l**).

Таким образом, если мы рассмотрим все — положительные и отрицательные! — делители числа a_n и каждый из них проверим, не является ли он корнем, мы найдем (если они есть!) все целые корни.

Пример 1. У свободного члена уравнения

$$3x^3+5x^2+x-46=0 \quad (3)$$

следующие делители: ±1, ±2, ±23, ±46. Проверив «маленькие» делители (±1, ±2), мы увидим, что 2 является корнем уравнения (3). Дальше можно было бы проверять «большие» делители (впрочем, для данного конкретного уравнения легко увидеть, не вычисляя до конца, что ни одно из чисел ±23, ±46 корнем не является), но проще, как говорят, понизить степень уравнения, воспользовавшись легко доказываемым утверждением: *число l тогда и только тогда является корнем многочлена $f(x)$, когда $f(x)$ делится на $x-l$**). Поскольку 2 является корнем уравнения (3), многочлен $3x^3+5x^2+x-46$ делится на $x-2$. Найдем частное.

$$\begin{array}{r|l}
3x^3+5x^2+x-46 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\;3x^3-6x^2\phantom{{}+x-46} & 3x^2+11x+23 \\ \cline{1-1}
11x^2+x-46 & \\
-\;11x^2-22x\phantom{{}-46} & \\ \cline{1-1}
23x-46 & \\
-\;23x-46 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Итак, $3x^3+5x^2+x-46=(x-2)(3x^2+11x+23)$. Значит, вместо кубического уравнения (3) мы можем решать теперь квадратное уравнение $3x^2+11x+23=0$. Это последнее уравнение корней (действительных) не имеет. Значит, уравнение (3) имеет один корень 2.

Пример 2. У свободного члена уравнения

$$x^4-17x^3+77x^2-85x+360=0 \quad (4)$$

очень много делителей: ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6, ±8, ±9, ±10, ±12, ±15, ±18, ±20, ±24, ±30, ±36, ±40, ±45, ±60, ±72, ±90, ±120, ±180, ±360. Подставлять их все в левую часть уравнения — не очень благодарный труд. Правда, сразу видно, что у данного уравнения не может быть отрицательных корней, но остаются еще 24 делителя.

Воспользуемся следующим обобщением сформулированного выше утверждения о целых корнях: *если l — целый корень уравнения* (1) *с целыми коэффициентами, то для любого $m\in\mathbf{Z}$ разность $m-l$ является делителем числа $f(m)$* (здесь через $f(x)$ обозначен многочлен, стоящий в левой части уравнения (1) *).

---

*) Впрочем, уравнение с рациональными коэффициентами легко заменяется равносильным уравнением с целыми коэффициентами. Как?

**) Понятия «делитель», «делится» определяются для целых чисел.

*) См. статью С. Ашманова *«Числа и многочлены»*, с. 17

В самом деле, если l — корень уравнения (1), то $f(l) = 0$ и

$$f(m) = f(m) - f(l) =$$
$$= a_0(m^n - l^n) + a_1(m^{n-1} - l^{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(m - l).$$

При целых m и l каждая скобка делится на $m-l$, значит, и $f(m)$ делится на $m-l$.

Таким образом, *целые корни достаточно искать среди чисел вида* $m+p$**), *где* p — *делитель числа* $f(m)$, причем «степень свободы» — выбор числа m — в нашей власти. Впрочем, по-видимому, проще не перебирать делители числа $f(m)$, а рассмотреть разности $m - l$ для делителей l свободного члена.

Вернемся к примеру 2. Пусть

$$f(x) = x^4 - 17x^3 + 77x^2 - 85x + 360.$$

Начнем с наименьшего делителя 1. Проверяем: $f(1) = 336$. Значит, 1 — не корень.

Применим обобщенное правило к $m = 1$. Выберем из положительных делителей числа 360 такие l, для которых число $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$ делится на $1 - l$. Таких делителей семь: 2, 3, 4, 5, 8, 9, 15.

Проверяем наименьший делитель: $f(2) = 378$. Значит, 2 — не корень. Применим теперь обобщенное правило к $m = 2$: из семи оставшихся «кандидатов в корни» отберем те l, для которых число $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$ делится на $2 - l$. Остается пять «кандидатов»: 3, 4, 5, 8, 9.

Любопытно, что, если мы сделаем еще шаг по тому же пути: вычислим $f(3) = 420$ и рассмотрим разности $3 - l$, мы не получим сужения проверяемого множества.

Дальше вам предоставляется выбор: либо брать наугад еще какие-нибудь m и применять обобщенное правило, либо «в лоб» подставлять пять «подозрительных» чисел в $f(x)$, либо делить $f(x)$ на $x - 3$, $x - 4$, $x - 5$, $x - 8$, $x - 9$.

Оказывается, у уравнения (4) два целых корня: 8 и 9. Разделив $f(x)$ на $(x - 8)(x - 9)$, получим $x^2 + 5$. Значит, больше целых корней у него нет.

---

*) При $m = 0$ отсюда легко получается первоначальное утверждение.

**) Почему мы написали $m+p$, а не $m-p$?

М. В. Ломоносов и Московский университет

Создание Московского университета неразрывно связано с именем великого помора, выдающегося русского ученого-самородка М. В. Ломоносова (1711—1765).

Еще к 1748 году относится письмо М. В. Ломоносова, где он формулирует свое мнение об университетском регламенте и, в частности, указывает, что «в университете неотменно дóлжно быть трем факультетам: юридическому, медицинскому и философскому (богословский оставляю синодальным училищам), в которых бы производились в магистры лиценциаты и доктора». В 1754 году М. В. Ломоносов составляет проект организации в Москве университета и двух гимназий при нем. Наконец, в январе 1755 года энергичные усилия М. В. Ломоносова увенчались успехом: публикуется указ об учреждении Московского университета. Символично, что здание, в котором сначала разместился первый русский университет, стояло на Красной площади, рядом с Кремлем — на том месте, где сегодня возвышается Исторический музей.

В 1940 году Указом Президиума Верховного Совета СССР Московскому государственному университету присвоено имя его основателя. В 1961 г. в связи с 250-летием со дня рождения М. В. Ломоносова, была выпущена памятная настольная бронзовая медаль, на которой, в частности, изображен контур Главного здания МГУ на Ленинских горах (эту медаль вы видите на снимке).

Н. Х.

ДЛЯ ПОЛЬЗЫ
ОБЩЕСТВА
КОЛЬ РАДОСТНО
ТРУДИТЬСЯ
ЛОМОНОСОВ

А. Митрофанов

Вверх по наклонной плоскости

Предлагаем вам провести опыт, очень старый и очень похожий на фокус.

Возьмите два одинаковых конуса, например из дерева, пластмассы или металла (материал не имеет решительно никакого значения). Конусы могут быть сплошными или пустотелыми, лишь бы они не были слишком легкими. Прочно соедините конусы основаниями (например, склейте), причем так, чтобы оси конусов обязательно совпадали. Для опыта вам понадобятся также толстая книга и два одинаковых достаточно длинных стержня.

Положите книгу на стол, а стержни расположите так, чтобы они одними концами опирались на ребро книги, другими — на стол, причем в одном и том же месте. Короче говоря, стержни и ребро книги должны образовать своеобразную «наклонную плоскость» в форме равнобедренного треугольника (рис. 1).

Теперь возьмите скрепленные конусы и положите их на стержни, при этом ось конусов должна быть горизонтальной. Как только вы это сделаете, вы увидите, что конусы сами, без подталкивания, покатятся по наклонной плоскости... не вниз, а вверх, вопреки привычному опыту и здравому смыслу.

В чем же секрет этого фокуса? Чудес здесь, конечно, никаких нет. Просто оказывается, что при выполнении некоторых условий центр тяжести конусов в процессе их «скатывания» вверх будет не подниматься, а опускаться. Именно сила тяжести и является причиной такого, на первый взгляд, необычного движения.

Какие же условия должны выполняться? Рассмотрим этот вопрос подробнее. Обозначим угол наклона плоскости к горизонту через α, угол между стержнями — через 2β и угол при вершине конусов — через 2γ (рис. 2). Пусть конусы перемещаются вверх по направляющим стержням из положения I в положение II, l_1 и l_2 — соответствующие расстояния между точками касания конусов со стержнями.

Из рисунка 2, *а* видно, что по отношению к точкам касания центр тяжести конусов опускается (по вертикали) на величину

$$H=\frac{l_2-l_1}{2}\operatorname{tg}\gamma.$$

Сами же точки касания при этом естественно поднимаются, высота их поднятия равна (см. рис. 2, *б*)

$$h=|MN|\sin\alpha=\frac{l_2-l_1}{2}\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha.$$

Теперь нетрудно сформулировать условие «скатывания» конусов вверх по наклонной плоскости. Очевидно, что для этого должно выполняться требование $H>h$:

$$\frac{l_2-l_1}{2}\operatorname{tg}\gamma>\frac{l_2-l_1}{2}\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha,$$

или

$$\sin\alpha<\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Только в таком случае центр тяжести конусов будет опускаться при движении конусов вверх по плоскости.

Если выполняется противоположное неравенство

$$\sin\alpha>\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

конусы будут по-настоящему скатываться с плоскости, то есть опускаться вниз.

При условии

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

конусы будут находиться на наклонной

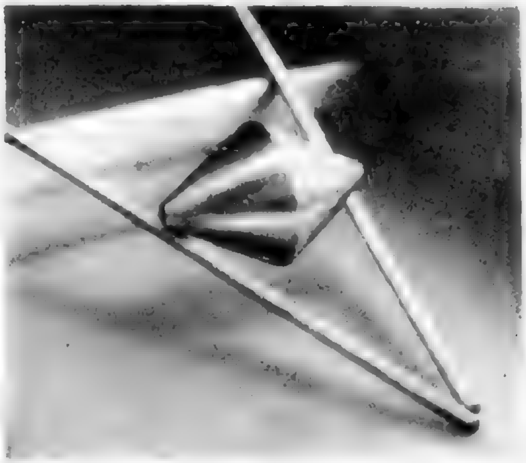


Рис. 1.

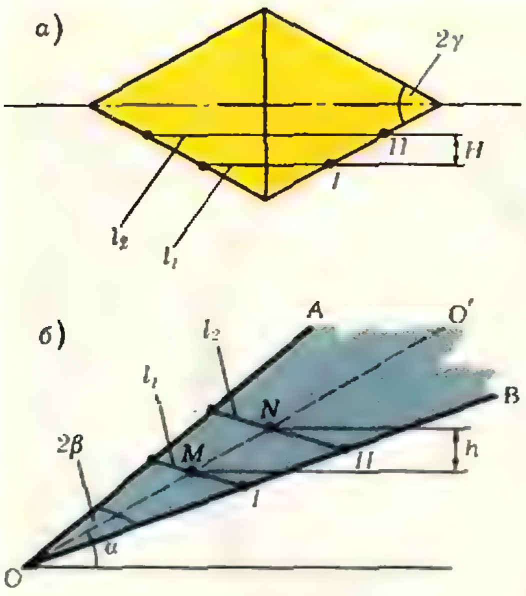


Рис. 2.

плоскости в безразличном равновесии, то есть покоиться (как, например, покоится цилиндр на горизонтальной плоскости). На фотографии, приведенной на рисунке 1, запечатлен как раз этот случай.

В заключение предлагаем вам несколько экспериментальных задач, связанных с уже проделанным вами опытом.

1. Проверьте экспериментально, что при безразличном равновесии конусов на наклонной плоскости $\sin\alpha = \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$. С какой точностью удается проверить это соотношение?

2. Покажите с помощью расчетов и проверьте на опыте, что условие безразличного равновесия будет также выполняться, если точка упора стержней переместится по столу по направлению к книге, а точки касания стержней ребра книги останутся на прежних местах.

3. Теоретически можно подобрать углы γ и β так, что условие поднятия конусов по плоскости будет выполняться при угле $\alpha = 90°$ ($\sin\alpha = 1$), то есть когда плоскость вертикальна. А что дает в таких условиях опыт?

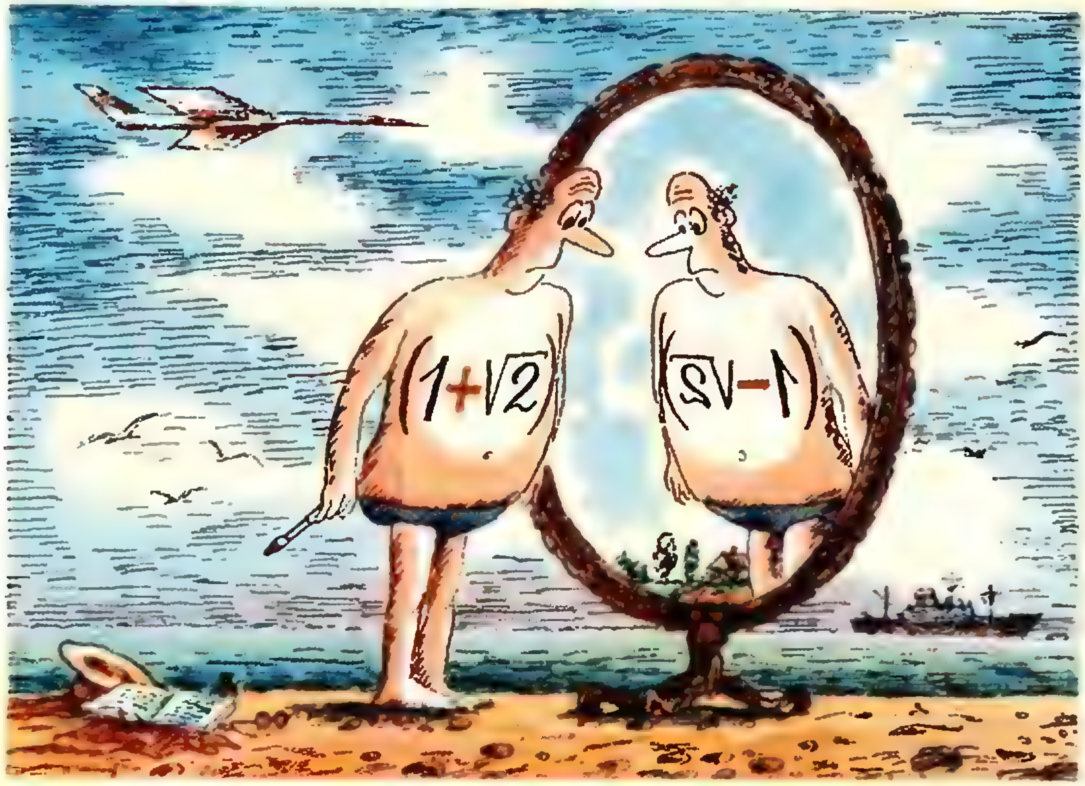
4. Пусть наклонная плоскость образована стержнями, сходящимися кверху, а не книзу. Тела какой формы смогут «скатываться» вверх по таким направляющим?

ЗАПОЛНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ.

Посмотрите внимательно на конфигурацию, изображенную на первой обложке: она составлена из большого числа конгруэнтных девятиугольников. Эти девятиугольники — невыпуклы, их неправильная форма напоминает латинскую букву S (см. обложку). Оказывается, конфигурация может быть продолжена до бесконечности; при этом девятиугольники продолжают разворачиваться по «двойной спирали» и заполняют всю плоскость (без пробелов и наложений друг на друга). Это доказано в 1937 г. ее создателем, немецким математиком Х. Ворденбергом.

Задача о заполнении плоскости многоугольниками уже не раз обсуждалась на страницах нашего журнала. В частности, в «Кванте» 1979, № 2, с. 9 приводилась классификация паркетов, в «Кванте» 1972, № 8, с. 41 — калейдоскопов. В отличие от нашей конфигурации, паркеты и калейдоскопы обладают простыми свойствами регулярности и периодичности. В частности, все вершины у них устроены одинаково, их можно сдвигать самих в себя с помощью различных перемещений. Наша же конфигурация обладает набором вершин разных типов (к ним примыкают 18, 7, 6 или 5 многоугольников) и лишь одно нетождественное перемещение (какое?) переводит фигуру в себя.

Попробуйте самостоятельно придумать подобные нерегулярные замощения плоскости одинаковыми многоугольниками. Если эта тематика вас заинтересует или если у вас получатся красивые картинки — напишите нам. Мы тогда вернемся к этим вопросам.



Н. Вагутен

Сопряженные числа

Читать эту статью (или проводить на ее основе занятие математического кружка) можно по-разному. Простейший способ — разобрать решения предложенных в ней задач, пропустив мелкий шрифт, а затем закрепить продемонстрированные приемы, перерешав предложенные в конце статьи упражнения. Но если вас заинтересовала та или иная задача или серия задач, можно поступить и иначе: внимательно прочитать помещенный вслед за ней мелким шрифтом текст и, пользуясь указанной автором дополнительной литературой, более глубоко разобраться в существе затронутых вопросов.

Читателю, вероятно, известны на первый взгляд трудные геометрические задачи, которые мгновенно решаются, если заменить одну данную точку другой, симметричной ей относительно какой-то прямой. Соображения симметрии очень важны и в алгебре.

В этой статье мы рассмотрим ряд ситуаций, в которых число вида $a+b\sqrt{d}$ полезно заменить *сопряженным* $a-b\sqrt{d}$. Мы увидим, как этот простой прием — замена знака перед радикалом — помогает в решении разнообразных задач алгебры и анализа — от нехитрых оценок и преобразований до трудных олимпиадных задач и замысловатых придумок составителей конкурсных экзаменов.

Большинство наших примеров может служить первым знакомством с глубокими математическими теориями (кое-где мы указываем статьи и книги для продолжения знакомства). Среди задач, включенных в статью, две — из Задачника «Кванта» и несколько — из писем читателей, уже испытавших удовольствие от трюков с радикалами и желающих поделиться им с другими.

Пары сопряженных чисел появляются вполне естественным образом, когда мы решаем квадратное уравнение, а корень из дискриминанта не извлекается: скажем, уравнение $\lambda^2-\lambda-1=0$ имеет пару «сопряженных» корней: $\lambda_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\lambda_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. К этому мы еще вернемся, а начнем с примеров другого рода: займемся «перебросками»...

Если в книжке указан ответ к задаче $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$, а у вас получилось $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ — не спешите искать ошибку в решении: ответ правильный — эти числа равны, потому что

$$(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})=3^2-7=2.$$

Вот несколько характерных примеров, где полезно перенести «иррациональность» из числителя в знаменатель или наоборот.

1. *Найти сумму*

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Эта сумма мгновенно «сворачивается», если переписать ее так:

$$(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots$$
$$\ldots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=-1+10=9.$$

По выражению из статьи [1] «остаются крайние» (см. также [5]).

2. *Доказать, что для любых натуральных m и n*

$$\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|>\frac{1}{\alpha n^2}, \qquad (1)$$

где $\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Подобный факт мы использовали недавно в решении трудной задачи **М514** ([2]).

В самом деле, всегда

$$\left|\frac{m-n\sqrt{2}}{n}\right|=$$
$$=\frac{|m^2-2n^2|}{(m+n\sqrt{2})n}>\frac{1}{(m+n\sqrt{2})n}, \qquad (2)$$

поскольку число $|m^2-2n^2|$ — целое и отлично от 0 (равенство $m^2=2n^2$ невозможно — подумайте, почему!). Если бы выполнялось неравенство, противоположное (1), то должно было бы быть $m<n\sqrt{2}+\frac{1}{\alpha n}$ и

$$n(m+n\sqrt{2})<n\left(2n\sqrt{2}+\frac{1}{\alpha n}\right)=$$
$$=2n^2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=2n^2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}<$$
$$<n^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\alpha n^2. \qquad (3)$$

Но из (2) и (3) следует (1). Значит, наше предположение неверно, то есть (1) выполнено.

Неравенство (1) показывает, что число $\sqrt{2}$ сравнительно плохо приближается дробями с небольшими знаменателями; аналогичное неравенство (только с другим коэффициентом α*)) выполнено не только для $\sqrt{2}$, но и для любой «квадратичной иррациональности». Вопросы о приближениях квадратичных иррациональностей рациональными числами — далеко продвинутая и важная для приложений область теории чисел ([3], [4]); с приближениями числа $\sqrt{2}$ мы еще встретимся ниже (см. упражнение 4).

3. *Найдите предел последовательности* $a_n=(\sqrt{n^2+1}-n)n$.

Преобразуем a_n так:

$$(\sqrt{n^2+1}-n)n=$$
$$=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{1+\sqrt{1+1/n^2}}.$$

Теперь ясно, что a_n убывает и стремится к пределу 1/2.

В противоположность предыдущему примеру здесь мы имеем дело с хорошим приближением: $\sqrt{n^2+1}-n<1/2n$.

4 (**М532**). *Даны две последовательности* $a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ *и* $b_n=\sqrt{4n+2}$. *Докажите, что*

а) $[a_n]=[b_n]$,

б) $0<b_n-a_n<1/16n\sqrt{n}$.

В разности b_n-a_n появляется «тройная иррациональность»; к таким иррациональностям мы еще вернемся (см. задачу 8), но пока мы будем рассматривать $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=a_n$ как одно целое. Заметим, что величина $a_n^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$, очевидно, заключена между $4n+1$ и $4n+2=b_n^2$, поскольку $n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$. Итак, мы уже получили $a_n<b_n$ — левое неравенство в б). Кроме того, число $b_n^2=4n+2$, дающее при делении на 4 в остатке 2, не может быть полным квадратом (проверьте!), поэтому квадрат целого числа $[b_n]$ не больше $4n+1$; из неравенств $[b_n]<\sqrt{4n+1}<a_n<b_n$ вытекает а). Теперь осталось оценить разность b_n-a_n сверху. Посмотрите, как здесь дважды работает переброска «сопряженного» числа в знаменатель:

$$\sqrt{4n+2}-\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=$$
$$\frac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}\times$$
$$\frac{1}{(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})}\leqslant$$

---

*) Разумеется, (1) выполнено и при всех $\alpha>\sqrt{3}+\sqrt{2}$, но константа $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ здесь не наименьшая из возможных.

(тут, конечно, нам повезло: разность квадратов $(2n+1)^2-4n(n+1)$ равна 1)

$$< \frac{1}{(2\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n})\ (2n+2n)} = \frac{1}{16n\sqrt{n}}.$$

Заметим, что и эта оценка очень точная. Но убедиться в этом (и вообще исследовать поведение функции с многими радикалами) лучше уже не с помощью алгебраических преобразований, а средствами анализа — заменить переменную n на $h = 1/n$ и воспользоваться формулой Тейлора $\sqrt{1+h} = 1+h/2-h^2/8+\ldots$ (См. [6].)

Заменим плюс на минус

Мы уже говорили о пользе симметрии в геометрических задачах. Своего рода симметрией в алгебре является замена плюса на минус.

Так, если какое-либо выражение от $\sqrt{d}$ равно $p+q\sqrt{d}$ и мы всюду в этом выражении заменим $\sqrt{d}$ на $-\sqrt{d}$, то естественно ожидать, что новое выражение окажется равным сопряженному числу $p-q\sqrt{d}$. Мы будем пользоваться таким очевидным частным случаем этого свойства (a и b — рациональны, $\sqrt{d}$ — нет):

$$(a+b\sqrt{d})^n = p+q\sqrt{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-b\sqrt{d})^n = p-q\sqrt{d}. \qquad (4)$$

5. *Доказать, что уравнение*

$$(x+y\sqrt{5})^4+(z+t\sqrt{5})^4 = 2+\sqrt{5}$$

не имеет решений в рациональных числах x, y, z, t.

Можно, конечно, найти отдельно сумму членов левой части, не содержащих $\sqrt{5}$ (она должна быть равна 2), и отдельно — коэффициент при $\sqrt{5}$ (он должен равняться 1). Но что делать с полученной громоздкой системой, неясно. Вместо этого воспользуемся (4) и заменим плюс перед $\sqrt{5}$ на минус!

$$(x-y\sqrt{5})^4+(z-t\sqrt{5})^4 = 2-\sqrt{5}.$$

Слева стоит неотрицательное число, справа — отрицательное.

6. *Доказать, что существует бесконечно много пар $(x; y)$ натуральных чисел, для которых x^2 отличается от $2y^2$ на 1:*

$$|x^2-2y^2| = 1. \qquad (5)$$

Несколько таких пар с небольшими $(x; y)$ легко найти подбором: это (1; 2), (3; 2), (7; 5), (17; 12), ... (рис. 1). Как продолжить этот набор? Можно ли записать общую формулу для этих решений?

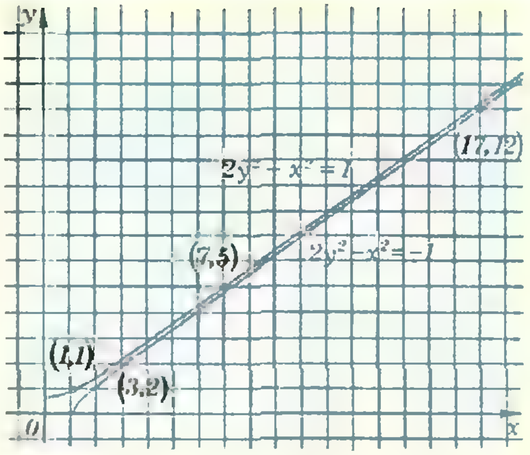


Рис. 1. Проходят ли эти гиперболы через бесконечное число узлов клетчатой бумаги?

Найти ответы на эти вопросы нам поможет число $1+\sqrt{2}$. Закономерность, позволяющая получать все новые и новые решения $(x; y)$, указана в таблице:

n	$(1+\sqrt{2})^n$	x_n	y_n	$x_n^2-2y_n^2$	$(1-\sqrt{2})^n$
1	$1+\sqrt{2}$	1	1	$1-2=-1$	$1-\sqrt{2}$
2	$3+2\sqrt{2}$	3	2	$9-8=1$	$3-2\sqrt{2}$
3	$7+5\sqrt{2}$	7	5	$49-50=-1$	$7-5\sqrt{2}$
4	$17+12\sqrt{2}$	17	12	$289-288=1$	$17-12\sqrt{2}$
5	$41+29\sqrt{2}$	41	29	$1681-1682=$ $=-1$	$41-29\sqrt{2}$
...	...	...	...	...	...

Какой будет шестая строчка?

Видно, что коэффициенты x_n, y_n в числе

$$x_n+y_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n$$

будут давать нужную пару. Доказать это поможет колонка таблицы из сопряженных чисел (мы снова применяем (4)):

$$x_n-y_n\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^n.$$

Перемножив два последних равенства, получим

$$x_n^2-2y_n^2 = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n =$$

$$= ((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}))^n = (-1)^n,$$

и интересующее нас выражение попеременно равно то 1, то −1. Складывая и вычитая эти же два равенства, мы получим явное выражение для x_n и y_n:

$$x_n = ((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n)/2$$

$$y_n = ((1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n)/2\sqrt{2}.$$

Можно ли в решении этой задачи про целые числа обойтись без иррациональных чисел $1+\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$? Теперь, зная ответ, мы можем легко выразить $(x_{n+1};\ y_{n+1})$ через предыдущую пару $(x_n;\ y_n)$: из $x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}=(x_n+y_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$ вытекает

$$x_{n+1}=x_n+2y_n,\ y_{n+1}=x_n+y_n. \qquad (6)$$

До этого рекуррентного соотношения можно было, видимо, догадаться по нескольким первым решениям, а потом проверить, что

$$|x_n^2-2y_n^2|=|x_{n+1}^2-2y_{n+1}^2|.$$

Добавив начальное условие $x_1=1$, $y_1=1$, отсюда (по индукции) можно было бы заключить, что $|x_n^2-2y_n^2|=1$ для любого n. Далее, выразив обратно $(x_n;\ y_n)$ через $(x_{n+1};\ y_{n+1})$, «методом спуска» ([8]) можно доказать, что найденной серией исчерпываются все решения уравнения (5) в натуральных числах $(x;\ y)$. Подобным же образом решается любое «уравнение Пелля» $x^2-dy^2=c$ (а к уравнениям такого типа сводится любое квадратное уравнение в целых числах x, y), но у исходного уравнения может быть несколько серий решений ([7]).

Рекуррентные соотношения типа (6) возникают не только в теории чисел, но и в разных задачах анализа, теории вероятности. Вот характерный пример комбинаторной задачи такого типа (она предлагалась на последней международной олимпиаде в Лондоне):

7(M595). *В вершине A правильного восьмиугольника сидит лягушка. Из любой вершины восьмиугольника, кроме вершины E, противоположной A, она может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попав в E, лягушка останавливается и остается там. Найти количество e_m различных способов, которыми лягушка может попасть из вершины A в E ровно за m прыжков.*

Если раскрасить вершины восьмиугольника через одну в черный и белый цвет (рис. 2), сразу станет ясно, что $e_{2k-1}=0$ при любом k: цвет вершин при каждом прыжке меняется. Обозначим через a_n и c_n количество способов, которым лягушка может за $2n$ прыжков попасть из вершины A, соответственно, в вершину A и в одну из вершин C (из соображений симметрии ясно, что в каждую из вершин, обозначенных на рисунке буквой C, можно попасть одним и тем же числом способов). Как легко проверить (см. рисунки 2*а, б, в, г*)),

$$a_1=2,\quad c_1=1;$$

$$\left.\begin{aligned}a_{n+1}&=2a_n+2c_n,\\ c_{n+1}&=a_n+2c_n.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

А интересующее нас число e_{2n} равно, очевидно, $2c_{n-1}$ (рис. 2*д*).

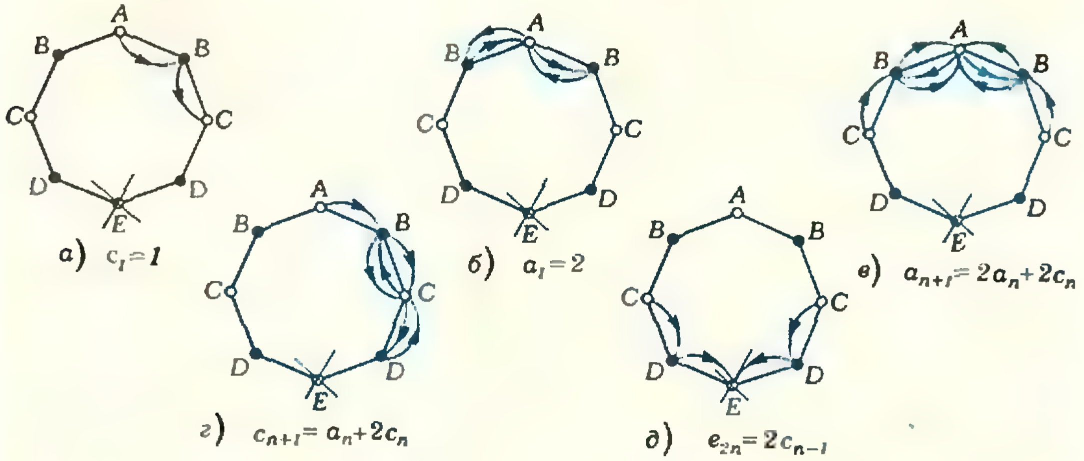
Как же найти явную формулу для a_n и c_n? Запишем наше рекуррентное соотношение (7) так:

$$a_{n+1}+c_{n+1}\sqrt{2}=(a_n+c_n\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) \qquad (8)$$

и — как вы уже, конечно, догадались — еще так:

$$a_{n+1}-c_{n+1}\sqrt{2}=(a_n-c_n\sqrt{2})(2+\sqrt{2}). \qquad (9)$$

Отсюда по индукции, пользуясь (7), по-



а) $c_1=1$

б) $a_1=2$

в) $a_{n+1}=2a_n+2c_n$

г) $c_{n+1}=a_n+2c_n$

д) $e_{2n}=2c_{n-1}$

Рис. 2. а) Из A в C за два прыжка можно попасть только одним способом: $c_1=1$.

б) Из A в A за два прыжка можно попасть двумя способами: $a_1=2$.

в) В A можно попасть из C двумя способами и из A двумя способами: $a_{n+1}=2a_n+2c_n$.

г) В C можно попасть из A одним способом и из C — двумя: $c_{n+1}=a_n+2c_n$.

д) В E можно попасть из C двумя способами: $e_{2n}=2c_{n-1}$.

лучаем:

$$a_n+c_n\sqrt{2}=$$
$$=(2+\sqrt{2})^{n-1}(a_1+c_1\sqrt{2})=(2+\sqrt{2})^n;$$
$$a_n-c_n\sqrt{2}=$$
$$=(2-\sqrt{2})^{n-1}(a_1-c_1\sqrt{2})=(2-\sqrt{2})^n.$$

Поэтому $c_n=[(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})^n]:$ $:2\sqrt{2}$, и так как $e_{2n}=2c_{n-1}$, получаем окончательно

$$e_{2n}=[(2+\sqrt{2})^{n-1}-$$
$$-(2-\sqrt{2})^{n-1}]/\sqrt{2};\qquad e_{2n-1}=0.$$

Задача решена. Неясно только, как в этой задаче (и в предыдущей задаче 6) можно было додуматься до формул, содержащих $\pm\sqrt{2}$, — ведь в задаче речь идет о целых числах! (Для участников олимпиады и читателей «Кванта» задача 7 была облегчена тем, что в формулировке указывался ответ — «Квант», 1979, № 11, М595).

Однако «сопряженные числа» возникли бы совершенно автоматически, если бы мы владели началами линейной алгебры (см. [12]), и применили стандартные правила этой науки к решению уравнений (7). Эти правила предлагают сначала выяснить, какие геометрические прогрессии ($a_n=a_0\lambda^n$, $c_n=c_0\lambda^n$) удовлетворяют данному рекуррентному соотношению. Значения, для которых такие прогрессии существуют,— они называются *характеристическими значениями* или *собственными числами* — определяются из некоторого уравнения (оно тоже называется *характеристическим*). Для (7) характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2+2-4\lambda=0$, его корни — как раз $2+\sqrt{2}$ и $2-\sqrt{2}$. Зная эти корни, любое решение рекуррентного соотношения мы можем получить как «линейную комбинацию» соответствующих геометрических прогрессий ([11]). «Начальное условие» (в нашем случае $a_1=2$, $c_1=1$) определяет нужное нам решение однозначно.

Неудивительно, что даже самые простые рекуррентные целочисленные последовательности, для которых характеристическое уравнение — квадратное с целыми коэффициентами (примеры — те же (6) и (7) или последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., $\Phi_{n+1}=\Phi_n+\Phi_{n-1}$ — см. [9], [10]), выражаются, как функции номера, с помощью «сопряженных» квадратичных иррациональностей.

Заметим, что большее характеристическое число определяет скорость роста последовательности: при больших n в задаче 7 $e_n\approx(2+\sqrt{2})^n/\sqrt{2}$. Можно сказать это еще так: $\lim\limits_{n\to\infty}(e_{n+1}/e_n)=2+\sqrt{2}$. Для задачи 6 аналогичное наблюдение: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n)=\sqrt{2}$ — показывает, что оба члена суммы $x_n+y_n\sqrt{2}$ при больших n примерно равны друг другу. Интересное продолжение этого факта мы увидим в следующей задаче с большим числом «сопряженных» иррациональностей.

Поочередно меняем все знаки

8 (М520). *Пусть* $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n=$ $=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$, *где* q_n, r_n, s_n *и* t_n *— целые числа. Найти пределы* $\lim\limits_{n\to\infty}r_n/q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n/q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}t_n/q_n$.

Конечно, мы здесь можем выразить $(q_{n+1};\ r_{n+1};\ s_{n+1};\ t_{n+1})$ через $(q_n;\ r_n;\ s_n;\ t_n)$, пользуясь тем, что

$$q_{n+1}+r_{n+1}\sqrt{2}+s_{n+1}\sqrt{3}+t_{n+1}\sqrt{6}=$$
$$=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(q_n+r_n\sqrt{2}+$$
$$+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}).$$

Но, наученные опытом, мы уже знаем, что более простые формулы получаются не для самих чисел q_n, r_n, s_n, t_n, а для некоторых их комбинаций. Одну такую комбинацию мы уже знаем: это q_n+ $+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}=(1+\sqrt{2}+3)^n$. Нетрудно сообразить, каковы будут другие. Рассмотрим вместе с данным числом $\lambda_1=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ еще три «сопряженных»: $\lambda_2=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\lambda_3=1+\sqrt{2}-$ $-\sqrt{3}$, $\lambda_4=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Тогда

$$q_n-r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6}=\lambda_2^n,$$
$$q_n+r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6}=\lambda_3^n,$$
$$q_n-r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}=\lambda_4^n.$$

Мы можем выразить q_n, r_n, s_n, t_n через λ_1, λ_2, λ_3, λ_4:

$$q_n=(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n+\lambda_4^n)/4,$$
$$r_n=(\lambda_1^n-\lambda_2^n+\lambda_3^n-\lambda_4^n)/4\sqrt{2},$$
$$s_n=(\lambda_1^n+\lambda_2^n-\lambda_3^n-\lambda_4^n)/4\sqrt{3},$$
$$t_n=(\lambda_1^n-\lambda_2^n-\lambda_3^n+\lambda_4^n)/4\sqrt{6}.$$

Теперь заметим, что $\lambda_1>|\lambda_2|$, $\lambda_1>|\lambda_3|$, $\lambda_1>|\lambda_4|$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\lambda_2/\lambda_1)^n+(\lambda_3/\lambda_1)^n-(\lambda_4/\lambda_1)^n}{1+(\lambda_2/\lambda_1)^n+(\lambda_3/\lambda_1)^n+(\lambda_4/\lambda_1)^n}\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично найдем, что $\lim\limits_{n\to\infty}s_n/q_n=$ $=1/\sqrt{3}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}t_n/q_n=1/\sqrt{6}$.

Мы говорили выше, что сопряженные числа $a\pm b\sqrt{d}$ возникают часто как корни квадратного уравнения с целыми коэффициентами. В связи с последней задачей возникает такое желание:

9. *Написать уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен* $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Возникает подозрение, что вместе с этим числом λ_1 уравнению с целыми коэффициентами удовлетворяют и сопряженные, которые в решении предыдущей задачи мы обозначили λ_2, λ_3, λ_4. Нужное уравнение можно записать так:

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)=0;$$

то есть

$$(x-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\times$$
$$\times(x-1-\sqrt{2}+\sqrt{3})\times$$
$$\times(x-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})=0;$$

после преобразований получаем

$$((x-1)^2-5-2\sqrt{6})(x-1)^2-5+2\sqrt{6})=0,$$
$$(x^2-2x-4)^2-24=0,$$
$$x^4-4x^3-4x^2-16x-8=0.$$

Именно такое уравнение получилось бы в качестве характеристического, если бы мы применяли упомянутую мелким шрифтом на с. 30 общую теорию к исследованию линейного преобразования $(q_n; r_n; s_n; t_n)\rightarrow(q_{n+1}; r_{n+1}; s_{n+1}; t_{n+1})$ в предыдущей задаче. Заметим, кроме того, что мы на самом деле получили уравнение наименьшей степени (с целыми коэффициентами) с корнем $\lambda_1=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Попробуйте это доказать!

Алгебраическое послесловие

Мы разобрали несколько примеров, в которых затрагивались пограничные вопросы алгебры, математического анализа и теории чисел. (Каждому направлению, которое мы наметили, можно было бы посвятить более подробную статью в «Кванте»!) В заключение покажем еще, как можно смотреть на основных героев статьи — «сопряженные числа» — с чисто алгебраической точки зрения.

Предположим, что у нас есть множество P чисел (или выражений с буквами, или еще каких-то элементов), с которыми можно выполнять четыре действия арифметики с соблюдением обычных арифметических правил. Такое множество называется *полем* (точное определение см. в сноске на с. 18); поля образуют, например, рациональные и действительные числа. Если в поле P не разрешимо, скажем, уравнение $x^2-d=0$, то можно расширить его, рассматривая элементы вида $p+q\sqrt{d}$, где $p, q\in P$, а $\sqrt{d}$ — новый символ, который при умножении сам на себя дает d, т. е. $\sqrt{d}\sqrt{d}=d$, так что $(p+q\sqrt{d})(p'+q'\sqrt{d})=(pp'+qq'd)+(pq'+qp')\sqrt{d}$. Подробно эта конструкция, для $d=2$ и $d=-1$, описана в статье С. Ашманова в этом номере «Кванта». Во втором случае, то есть при $d=-1$, расширением поля вещественных чисел получаются *комплексные числа*. К ним мы еще вернемся в следующих номерах «Кванта».

В новом поле P_1 — «квадратичном расширении» поля P — есть интересное отображение $\lambda=p+q\sqrt{d}\rightarrow\overline{\lambda}=p-q\sqrt{d}$ (своеобразная «алгебраическая симметрия»), называемое *сопряжением*, с такими свойствами:

1°. Все элементы старого поля P переходят в себя;

2°. Все равенства, содержащие арифметические операции, при этом отображении сохраняются:

$$\overline{\lambda+\mu}=\overline{\lambda}+\overline{\mu};\quad \overline{\lambda\mu}=\overline{\lambda}\cdot\overline{\mu}. \qquad (10)$$

Это отображение является частным случаем так называемых *автоморфизмов Галуа* расширения P_1 поля P.

В задачах 8 и 9 мы видели пример «двукратного» расширения — присоединения $\sqrt{2}$ и затем $\sqrt{3}$, — в результате которого получилось поле с бо́льшим количеством автоморфизмов Галуа: кроме тождественного отображения, их уже три

$$(\sqrt{2}\rightarrow-\sqrt{2},\ \sqrt{3}\rightarrow\sqrt{3},$$
$$\sqrt{2}\rightarrow\sqrt{2},\ \sqrt{3}\rightarrow-\sqrt{3};$$
$$\sqrt{2}\rightarrow-\sqrt{2},\ \sqrt{3}\rightarrow-\sqrt{3}),$$

и их «взаимодействие» устроено так же, как во множестве самосовмещений прямоугольника.

Оказывается, к основному полю можно присоединять корни любого алгебраического уравнения. Автоморфизмы возникающего нового поля — предмет одной из красивейших ветвей алгебры XIX—XX века, теории Галуа, которая позволяет, в частности, исследовать вопрос о разрешимости уравнений в радикалах ([13], [14]).

Мы закончим эту статью набором задач, в основном продолжающих уже затронутые темы, но требующих иногда и новых соображений, и обещанным списком литературы.

Упражнения

1. Что больше: $\sqrt{1979}+\sqrt{1980}$ или $\sqrt{1978}+\sqrt{1981}$?

2. Докажите, что при всех положительных x

$$|\sqrt{x^2+1}-x-1/2x|<1/8x^3.$$

3. Постройте график функции $y=\sqrt{x^2-1}$ и докажите, что при $|x|>1$

$$0<|x|-\sqrt{x^2-1}<1/|x|.$$

4. В формуле $\sqrt{2}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ заменим $\sqrt{2}$, стоящий в правой части (в знаменателе), по той же формуле:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}.$$

В этой формуле снова заменим нижний $\sqrt{2}$ на $1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, и т. д. n раз. Если теперь нижний корень заменить на 1 или на 2, мы получим два рациональных числа p_n, q_n. Докажите, что $\sqrt{2}$ лежит между ними и $\lim p_n=\lim q_n=\sqrt{2}$. (Не встречались ли мы с этими числами в одной из задач?)

5. Докажите, что уравнения а) $x^2-3y^2=1$, б) $x^2-3y^2=2$ имеют бесконечное множество решений в целых числах.

6. Докажите, что функция $y=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ — нечетная, и постройте ее график.

7. а) Докажите, что для любого натурального n

$$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1.$$

б) (*С. Майзус*, Запорожье) Докажите, что последовательность

$$U_n=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}-4\sqrt[4]{n}$$

убывает и стремится к пределу.

8. а) (*В. Комов*, Александров) Докажите, что последовательность $\{(2+\sqrt{3})^n\}$ сходится, и найдите ее предел.

б) Каковы первые 100 десятичных знаков после запятой в записи числа $(\sqrt{50}+7)^{100}$?

9. Докажите, что для любого натурального d, не являющегося полным квадратом, найдется такое α, что для любых m и n

$$|m/n-\sqrt{d}\,|>1/\alpha n^2.$$

10. (*Н. Жук*, Минск) Докажите, что при любом натуральном n число $\left[(35+\sqrt{1157})^n/2^n\right]$ делится на 17, и вообще для любых натуральных k и n число $\left[(2k+1+\sqrt{4k^2+1})^n/2^n\right]$ делится на k.

11. (*С. Манукян*, с. Малый Памач ГССР). Докажите, что для любого числа $p>2$ найдется такое число β, что для каждого n

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2+p}}}}}_{n \text{ радикалов}}=\beta^{2^n}+\beta^{-2^n}.$$

12. (*Н. Жук*, Минск) Докажите, что последовательность $b_m=1+17m^2$ содержит бесконечно много квадратов целых чисел.

13. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого $(3+\sqrt{5})/4$.

14. Составьте уравнение 4-й степени с корнями $\pm\sqrt{p}\pm\sqrt{q}$ и решите его, как биквадратное уравнение. Сравнивая ответ с данными корнями, докажите популярные формулы для двойных радикалов:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\quad(A^2>B>0,\ A>0).$$

15. (*А. Земляков*, Москва) Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}}$.

16. Лягушка может прыгнуть из каждой вершины правильного треугольника ABC в любую из двух других вершин. Найдите число a_n способов, которым она может совершить прогулку из n прыжков, начинающуюся и заканчивающуюся в вершине A. Докажите, что существует предел $\lim a_{n+1}/a_n$, и найдите его.

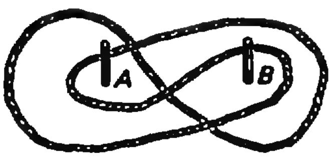
Задание для учеников ВЗМШ (факультативное): упражнения 1, 3, 5а, 6, 7а, 8а, 11, 13, 15, 16.

Список дополнительной литературы

1. Л. Курляндчик, А. Лисицкий «Суммы и произведения» («Квант», 1978, № 10).
2. Второе решение задачи М514 («Квант», 1979, № 5, с. 26).
3. Р. Нивен «Числа рациональные и иррациональные» (М., «Мир», 1966).
4. Д. Фукс, М. Фукс «О наилучших приближениях («Квант», 1971, №№ 6, 11) и «Рациональные приближения и трансцендентность» («Квант», 1973, № 1).
5. Н. Васильев, В. Гутенмахер «Прямые и кривые» (М., «Наука», 1978), с. 103—105
6. А. Н. Маркушевич «Ряды» (М., «Наука», 1979).
7. Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly (М., «Мир», 1977), с. 560—561.
8. Л. Курляндчик, Г. Розенблюм «Метод бесконечного спуска» («Квант», 1978, № 1).
9. В. Березин «Филлотаксис и последовательность Фибоначчи», («Квант», 1979, № 5, с. 53).
10. Н. Н. Воробьев «Числа Фибоначчи» (Популярные лекции по математике, вып. 6) (М., «Наука», 1978).
11. А. И. Маркушевич «Возвратные последовательности» (Популярные лекции по математике, вып. 1) (М., «Наука», 1978).
12. Л. И. Головина «Линейная алгебра и некоторые ее приложения» (М., «Наука», 1979).
13. М. М. Постников «Теория Галуа» (М., Физматгиз, 1963).
14. Ван-дер-Варден «Алгебра» (М., «Наука», 1976).

Стяните петлю

В плоскость воткнуты два колышка A и B, на них накинута веревочная петля (см. рисунок). Снять петлю с колышков, не разрывая ее и не поднимая ее над колышками, очевидно, нельзя; если же убрать любой из них, то это сделать можно.



З а д а ч а. *Нарисуйте петлю, наброшенную на три колышка, которая с них не снимается, но, если убрать любой колышек, снимается с оставшихся двух.*

В. Березин

Конические сечения и задача Аполлония

В истории науки имя греческого геометра и астронома Аполлония Пергского в течение многих столетий учеными ставилось чуть ли не в один ряд с именем Архимеда.

Когда живший в XVI веке алгебраист Ф. Виет нашел свое решение задачи Аполлония, он в восторге воскликнул: «Я Аполлоний Галльский!» (то есть французский). О задаче Аполлония из утерянной рукописи «О касании», знакомой нам только по комментариям его современников, уже рассказывалось в «Кванте» (1971, № 8). Вот ее условие: *построить окружность, касательную к трем другим окружностям, произвольно расположенным на плоскости.*

Аполлоний внес много нового и в теорию конических сечений. Напомним, что конические сечения определяются как линии, представляющие собой сечения плоскостью поверхности конуса. Названия этих линий — эллипс, гипербола и парабола — были придуманы им («Квант», 1975, №№ 1, 3, 4).

Однако сейчас более привычны другие определения этих линий. *Эллипс* — множество точек плоскости P, находящихся на таких расстояниях r_1 и r_2 от двух фиксированных точек — фокусов $F_1 \in P$ и $F_2 \in P$, что $r_1+r_2=2a$ ($a>0$ — постоянная). *Гипербола* — множество точек в плоскости P, находящихся на таких расстояниях r_1 и r_2 от фокусов $F_1 \in P$ и $F_2 \in P$, что $|r_2-r_1|=2a$. Наконец, *парабола* — множество точек в плоскости P, находящихся на равных расстояниях от фокуса $F \in P$ и от прямой (так называемой *директрисы*) $d \in P$.

Можно обойтись без конуса и совсем необязательно выходить в пространство, чтобы найти скрепляющий эти три так непохожих друг на друга кривых (эллипс замкнут, парабола состоит из одной «бесконечной ветви», гипербола — из двух) математический цемент.

Именно, рассмотрим на плоскости две пересекающиеся окружности *) ε_1 и ε_2 с центрами в точках F_1 и F_2. Оказывается, центры всевозможных окружностей, касающихся одной из окружностей ε_1 ε_2 внутренним образом, а другой — внешним, образуют некоторый эллипс. Действительно, пусть окружность с центром в F_1 имеет радиус R_1 (рис. 1), а окружность с центром в F_2 — радиус R_2. Пусть T_1 и T_2 — соответственно, точки касания этих окружностей с окружностью с центром M. Тогда ясно, что

$$R_1+R_2=|F_1T_1|+|F_2T_2|=$$
$$=|F_1T_1|+|MF_2|+|T_1M|=$$
$$=r_1+r_2=\text{const}.$$

Если же рассмотреть множество центров M окружностей, касающихся обеих окружностей ε_1 и ε_2 внешним образом (или обеих внутренним образом), то это множество оказывается гиперболой. Проведем доказательство для точки M_1 (рис. 2):

$$R_2-R_1=$$
$$=|F_2M_1|+|M_1N_2|-$$
$$-|F_1M_1|-|M_1N_2|=$$
$$=|F_2M_1|-|F_1M_1|=$$
$$=r_2-r_1=\text{const}.$$

Докажите самостоятельно, что точка M_3 лежит на правой ветви той же гиперболы.

А в каких же случаях возникает парабола как семейство центров окружностей? Чтобы ответить на этот вопрос, постараемся представить прямую как окружность бесконечного радиуса. Множество центров окружностей, касающихся прямой произвольного положения и некоторой окружности, есть парабола (рис. 3). Докажите это!

Принятое здесь представление конических сечений в виде семейств центров окружностей оказывается полезным, например, для решения приведенной выше задачи Аполлония. Действительно, центр окружности, касательной к трем данным, можно найти так. Выберем две из данных трех окружностей. Множество точек — центров окружностей, которые касаются этих двух, есть коническое сечение, как нами уже установлено. Рассмотрим другую пару из данных трех окружностей. Множество центров касающихся их окружностей — опять-таки коническое сечение. Центр окружности, касающейся трех данных, получим, таким образом, как пересечение двух конических сечений. Теперь соединяем центры искомых окружностей с центрами данных отрезками прямых и получаем в пересечении точки касания искомой окружности с данными тремя.

Конечно, такое решение задачи Аполлония не могло бы удовлетворить древнегреческих геометров. Почему? Да потому, что не ясно, как построить точку пересечения двух кривых с помощью только линейки и циркуля. Поэтому так и радовался Ф. Виет, когда ему удалось найти решение задачи Аполлония, использующее только циркуль и линейку. А вы можете это сделать?

В. Березин

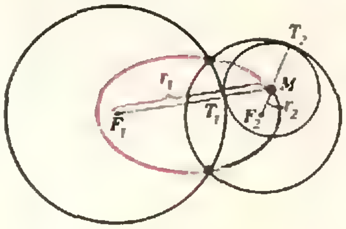


Рис. 1.

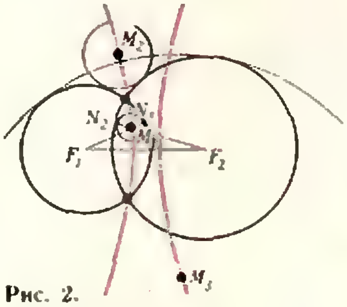


Рис. 2.

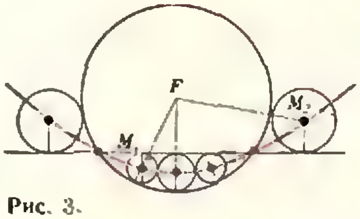


Рис. 3.

---

*) Они показаны желтым цветом на второй странице обложки.

задачник Кванта

Задачи

М606 — М610; Ф618 — Ф622

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 апреля 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М606, М607» или «Ф618». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М606. Функция f такова, что для всех действительных x

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x).$$

Докажите, что f — периодическая функция.

Э. Туркевич

М607. а) Разрежьте квадрат на равнобедренные трапеции.

б) Разрежьте равнобедренный прямоугольный треугольник на равнобедренные трапеции.

в) Докажите, что любой многоугольник можно разрезать на равнобедренные трапеции.

В. Лев

М608. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1) нарисован n-угольник, все стороны которого лежат на линиях сетки и имеют нечетную длину.

а) Докажите, что n делится на 4.

б)* Докажите, что при $n=100$ площадь этого n-угольника обязательно нечетна. Выясните, какова четность площади при других n.

М. Концевич,
ученик 10 класса

М609. а) Длины проекций выпуклого многоугольника площади S на две взаимно перпендикулярные прямые равны l_1 и l_2. Докажите, что $S<l_1l_2$.

б) Длины проекций выпуклого многогранника объема V на три взаимно перпендикулярные прямые равны l_1, l_2 и l_3. Докажите, что $V<l_1l_2l_3$.

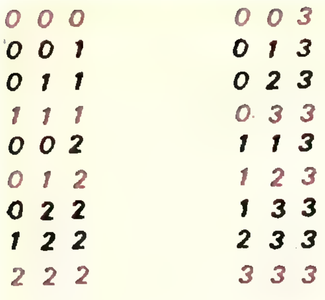
в)* Площади проекций выпуклого многогранника объема V на три взаимно перпендикулярные плоскости равны S_1, S_2 и S_3. Докажите, что $V<\sqrt{S_1S_2S_3}$.

Ю. Смирнов

М610. Фиксируем $k\in N$. а) Рассмотрим множество всех наборов целых чисел $a_1, \ldots, a_k$ таких, что $0<a_1<a_2<\ldots<a_k<k$; обозначим число таких наборов через N. Рассмотрим среди них те, для которых $a_k=k$; пусть их число равно M. Докажите, что $N=2M$.

б) Наложим на рассматриваемые наборы дополнительное ограничение: сумма $a_1+\ldots+a_k$ делится на k. Пусть соответствующие числа равны N' и M'. Докажите, что $N'=2M'$. (Из рисунка 1 видно, что при $k=3$ эти числа равны $M=9$, $N=18$; $M'=4$, $N'=8$.)

А. Толпыго



0 0 0	0 0 3
0 0 1	0 1 3
0 1 1	0 2 3
1 1 1	0 3 3
0 0 2	1 1 3
0 1 2	1 2 3
0 2 2	1 3 3
1 2 2	2 3 3
2 2 2	3 3 3

Рис. 1.

Ф618. Можно ли две лампы накаливания мощностью 60 Вт и 100 Вт, рассчитанные на напряжение 110 В, включить последовательно в сеть напряжением 220 В, если допустимо превышение напряжения на каждой из ламп не более 10% от номинального? Вольт-амперная характеристика лампы мощностью 100 Вт показана на рисунке 2.

А. Зильберман

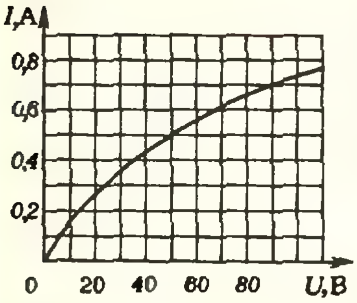


Рис. 2.

Ф619. Светящаяся точка находится на главной оптической оси на расстоянии $d=40$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F=10$ см. Точку сместили на расстояние $h=5$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение светящейся точки вернулось в старое положение?

Ленинградская городская олимпиада по физике, 1979 г.

Ф620. Если в центр квадратного стола поставить предмет массой, большей m_0, ножки стола сломаются. Найти множество точек стола, куда можно поставить предмет массой $m_0/2$, не боясь поломки стола.

О. Батищев

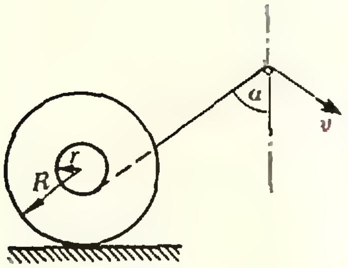


Рис. 3.

Ф621. Конец нити, намотанной на катушку, перекинут через вбитый в стену гвоздь (рис. 3). Нитку тянут с постоянной скоростью v. С какой скоростью движется центр катушки в тот момент, когда нить составляет угол α с вертикалью? Внешний радиус катушки равен R, внутренний — r.

Ф622. Когда и во сколько раз больше абсолютная влажность воздуха (плотность водяных паров): в ноябре при температуре $t_1=0°C$ и влажности 95% или в июле при $t_2=35°C$ и влажности 40%, если давление насыщенного пара при $t_1=0°C$ равно $p_1=6\cdot10^2$ Па, а при $t_2=35°C$ равно $p_2=5{,}5\cdot10^3$ Па?

ВНИМАНИЕ, ЧИТАТЕЛИ!

По вине типографии в условии задачи **М598** и в сноске к условию задачи **М599** («Квант», 1979, № 12, с. 20) были допущены опечатки. В условии задачи **М598** вместо буквы *n* должна быть буква *R*, в сноску к **М599** следует читать так:

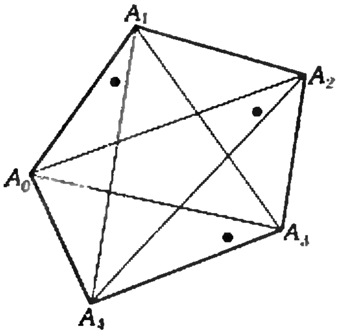
a^{b^c} *означает* $a^{(b^c)}$.

Срок присылки решений этих задач продлевается до 1 апреля.

Решения задач

M551 — M556; Ф563 — Ф567

M551. *а) Какое наименьшее число точек достаточно отметить внутри выпуклого пятиугольника, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах пятиугольника содержалась хотя бы одна отмеченная точка?*
б) Тот же вопрос для выпуклого n-угольника.



Решим сразу задачу б). Ответ. $n-2$.

Ясно, что необходимо поставить по крайней мере $n-2$ точки, поскольку n-угольник можно разрезать на $n-2$ треугольника и в каждом должно быть по точке. Покажем, как в n-угольнике $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ расставить точки нужным образом. Поставим k-ю точку B_k $(k=1, 2, \ldots, n-2)$ вблизи вершины A_k внутри угла $A_0A_kA_n$ (см. рис.), точнее,— в пересечении этого угла с полуплоскостью, ограниченной прямой $A_{k-1}A_{k+1}$ и содержащей точку A_k. Ясно, что треугольник $A_iA_kA_j$, где $0 \leq i<k<j \leq n-1$, содержит точку B_k: угол $A_iA_kA_j$ содержит угол $A_0A_kA_n$, а диагональ $A_{k-1}A_{k+1}$ пересекает отрезки A_iA_k и A_kA_j.

Н. Васильев

◆

M552. *а) Найдите хотя бы одну пару $(p;\ q)$ целых чисел, отличных от нуля, для которой трехчлены x^2+px+q и x^2+qx+p имеют целые корни.*
б) Найдите все такие пары $(p;\ q)$.

Мы будем решать сразу пункт б). Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 — целые корни трехчленов x^2+px+q и x^2+qx+p соответственно. По теореме Виета

$$x_1+x_2=-p,\quad y_1+y_2=-q,\quad x_1x_2=q,\quad y_1y_2=p.$$

Разделив произведение первых двух равенств на произведение двух других $(pq \neq 0)$, получим:

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)=1.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right| \geqslant 1 \text{ и } \left|\frac{1}{x_1}\right| \geqslant \frac{1}{2}, \text{ то есть } |x_1| \leqslant 2.$$

Возможны два случая: $|x_1|=1$ и $|x_1|=2$.

1°. Пусть $|x_1|=1$. Тогда из неравенства $\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right|>1$ получаем $|x_2|=n$, где $n \in \mathbf{N}$, $x_1x_2>0$. Отсюда по теореме Виета для первого трехчлена получаем $p=\pm(n+1)$, $q=n$. Трехчлен $x^2+nx-(n+1)$ имеет целые корни при всех $n \in \mathbf{N}$, а трехчлен $x^2+nx+n+1$ имеет целые корни лишь при $n=5$. Действительно, дискриминант этого трехчлена $(n-2)^2-8$ должен быть полным квадратом: $(n-2)^2-8=b^2$, то есть $(n-2)^2-b^2=8$; отсюда $(n-2-b)(n-2+b)=8$, причем $n \in \mathbf{N}$ и $b \in \mathbf{N}$. Поэтому

$$\begin{cases} n-2-b=2 \\ n-2+b=4 \end{cases} \Rightarrow n=5.$$

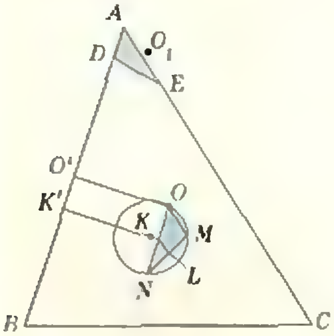
2°. Пусть $|x_1|=2$. Тогда из неравенства $\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right|>1$ следует, что $|x_2| \leqslant 2$. Случай $|x_2|=1$ с точностью до обозначений рассмотрен выше, а случай $|x_2|=2$ приводит к парам $(4, 4)$ и $(-4, 4)$, вторая из которых не подходит (у многочлена x^2+4x-4 — не целые корни).

Итак, полный ответ в задаче б): пары (4, 4); (5, 6); $(n, -n-1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Э. Туркевич

◆

M553. *Дан треугольник ABC, причем $|BC| < |AC| < |AB|$. На лучах BA и CA отложены отрезки BD и CE такие, что $|BD| = |CE| = |BC|$. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ADE, равен расстоянию между центрами окружности, описанной около треугольника ABC, и окружности, вписанной в него.*



Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, O_1 — центр окружности описанной около треугольника ADE, K — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$ (см. рис.). Нужно доказать, что $|KO| = |O_1A|$.

Пусть $|BC| = |BD| = |CE| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$.

Рассмотрим окружность с центром в точке K радиуса $|KO|$. Проведем хорды $[OM] \parallel [AC]$ и $[ON] \parallel [AB]$. Докажем, что треугольники OMN и ADE с конгруэнтными при вершинах O и A углами конгруэнтны.

Опустим из центров O и K перпендикуляры OO' и KK' на сторону $AB (L = [ON] \cap [KK'])$. Легко проверить, что

$$|AK'| = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2},$$

$$|O'K'| = |AK'| - |AO'| = \frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2},$$

$$|ON| = 2|OL| = 2|O'K'| = b - a = |AE|.$$

Аналогично доказывается, что $|OM| = |AD|$.

Таким образом, треугольники OMN и ADE конгруэнтны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $|KO| = |O_1A|$.

С. Мейдман

◆

M554. *Назовем натуральное число n хорошим, если существуют такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (не обязательно различные), что*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$$

и

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Известно, что все числа от 33 до 73 — хорошие. Докажите, что все числа, большие 73,— тоже хорошие.

Утверждение задачи сразу следует из двух лемм:

1°. *если число n — хорошее, то и $2n + 2$ — хорошее;*

2°. *если число n — хорошее, то и $2n + 9$ — хорошее.*

Докажем их.

Из равенств

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1$$

следует

$$2n + 2 = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_k + 2,$$

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{2} = 1$$

— тем самым доказано 1°;

$$2n + 9 = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_k + 3 + 6,$$

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

— тем самым доказано 2°.

Пользуясь 1° и 2°, очевидной индукцией (начинающейся с $2 \cdot 36 + 2 = 74$ для четных n и с $2 \cdot 33 + 9 = 75$ для нечетных n) доказываем, что любое число, большее 73,— хорошее.

Любопытно, однако, выяснить, какие числа, меньшие 73, хорошие, в частности — проверить правильность предпосылки, высказанной в условии. Без труда доказывается, что k^2 — всегда хорошее число и что если m и n — хорошие числа, то и mn —

$4 = 2^2$
$9 = 3^2$
$10 = 2 \cdot 1 + 8 = 4 \cdot 1 + 6$
$11 = 3 \cdot 1 + 8 = 6 \cdot 1 + 5$
$16 = 4^2$
$17 = 2 \cdot 4 + 9 = 4 \cdot 1 + 13$
$18 = 3 \cdot 4 + 6$
$20 = 3 \cdot 4 + 8$
$22 = 4 \cdot 4 + 6$
$24 = 2 \cdot 11 + 2$
$25 = 5^2$
$26 = 2 \cdot 9 + 8$
$27 = 2 \cdot 9 + 9$
$28 = 2 \cdot 10 + 8$
$29 = 2 \cdot 10 + 9$
$30 = 2 \cdot 11 + 8$
$31 = 2 \cdot 11 + 9$
$32 = 2 + 3 + 9 + 18$
$33 = 3 \cdot 9 + 6$
$34 = 2 \cdot 16 + 2$
$35 = 3 \cdot 9 + 8$
$36 = 4 \cdot 9$
$37 = 2 + 5 + 10 + 10 + 10$
$38 = 3 \cdot 10 + 8$
$39 = 3 \cdot 11 + 6$
$40 = 4 \cdot 10$
. . . .

хорошее. Кроме того, аналогично тому, как это сделано в 1° и 2°, проверяется, что если n — хорошее, то хорошими будут также: $2n+8$ $(8=4+4)$, $2n+20$ $(20=4+8+8)$, $3n+6$ $(6=3+3)$, $3n+8$ $(8=2+6)$, $4n+6$ $(6=2+4)$, $4n+13$ $(13=3+4+6)$, $6n+5$ $(5=2+3)$.

Пользуясь этим, а также подбирая представления для «недостающих» чисел, легко доказать, что хорошими будут числа 1, 4, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 20, 22 и все числа от 24 до 73 (эти доказательства пояснят формулы на полях).

Подумайте, как проверить, будут ли хорошими числа 19, 21 и 23. Может быть, те, кто занимаются в нашей Заочной школе программирования, найдут более полезным составить программу, проверяющую, имеет ли система

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_k = 23, \\ \dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_k} = 1 \end{cases}$$

решение в натуральных числах. (Если решение есть, то программа должна напечатать хотя бы одно решение, если нет — выдать «0».) Можете рассматривать это как дополнительную задачу к очередному уроку программирования; разумеется, полезно также дать оценку времени работы (числа тактов) и постараться, чтобы оно было как можно меньше.

◆

M555. *Рассмотрим пересечение*
а) двух;
б) трех
цилиндров одинакового радиуса r, оси которых взаимно перпендикулярны и проходят через одну точку. Сколько плоскостей симметрии имеет это пересечение? Каков его объем?

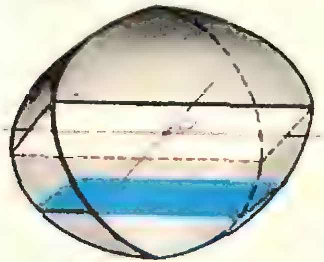


Рис. 1.

а) Сечение нашего тела Ф плоскостью α_0, проходящей через оси цилиндров (будем считать, что α_0 горизонтальна, рис. 1), — квадрат со стороной $2r$. Тело Ф имеет, очевидно, те же пять плоскостей симметрии, что и квадрат $\Phi \cap \alpha_0$: это — сама плоскость α_0 и еще четыре перпендикулярные α_0 плоскости, проходящие через оси симметрии квадрата. А сечение тела Ф горизонтальной плоскостью α_x, отстоящей от α_0 на расстояние $|x| < r$, — квадрат со стороной длины $2\sqrt{r^2-x^2}$: каждый из цилиндров пересекается с этой плоскостью по полосе ширины $2\sqrt{r^2-x^2}$ (рис. 2, 3), а пересечение двух таких полос со взаимно перпендикулярными краями дает квадрат (рис. 2). Поэтому объем нашего тела равен

$$\int_{-r}^{r} 4(r^2-x^2)\,dx = 8r^3 - 8r^3/3 = 16r^3/3.$$

Для нахождения объема тела Ф считать интеграл вовсе не обязательно. Нужно только заметить, что сечение шара радиуса r (который, разумеется, можно вписать в тело Ф) плоскостью α_x — круг площади $\pi(r^2-x^2)$. Поэтому отношение искомого объема к объему шара радиуса r равно $4/\pi$. Отсюда объем тела Ф равен $16r^3/3$ (объем шара — $4\pi r^3/3$).

б) Чтобы представить себе пересечение Ψ трех цилиндров, удобно поступить так: взять куб (с диагональю грани длины $2r$, то есть с ребром $r\sqrt{2}$) и через каждую четверку параллельных ребер провести цилиндрическую поверхность (рис. 4). Ψ имеет те же девять плоскостей симметрии, что и куб. В вершинах куба будут пересекаться по три цилиндрических поверхности, и «над» каждой гранью возникнет купол, имеющий такую же форму, как часть тела Ф, расположенная над плоскостью $\alpha_{r\sqrt{2}/2}$. Объем одного купола равен

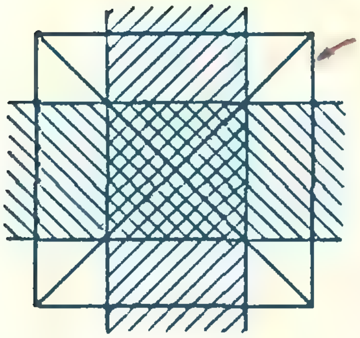


Рис. 2.

$$\int_{r\sqrt{2}/2}^{r} 4(r^2-x^2)\,dx = 4r^3\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3\cdot 4}\right)\right] = r^3(8-5\sqrt{2})/3,$$

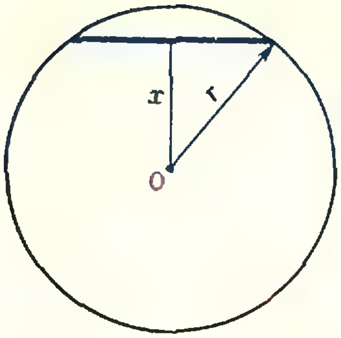


Рис. 3.

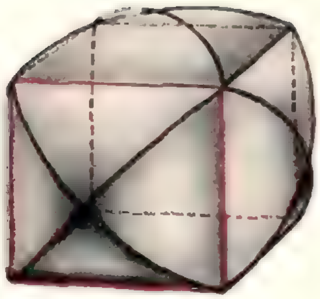


Рис. 4.

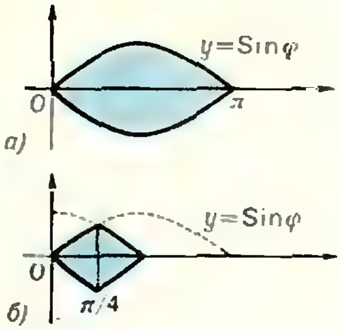


Рис. 5.

шести куполов $r^3(16-10\sqrt{2})$, куба $2r^3\sqrt{2}$, поэтому объем нужного нам тела $(16-8\sqrt{2})r^3 \approx 4{,}69r^3$ (объем шара радиуса r, который, разумеется, можно вписать в тело Ψ, равен $4\pi r^3/3 \approx 4{,}18r^3$).

Можно посчитать и площадь поверхности тел Φ и Ψ. Для этого нужно заметить, что если полосу бумаги шириной 2π свернуть цилиндрической трубкой (радиуса 1), разрезать этот цилиндр плоскостью под углом $\pi/4$ к оси и вновь развернуть бумагу на плоскость, то край ее будет иметь форму синусоиды. Для изготовления бумажной модели тела Φ надо взять четыре «лепестка» площади $2r^2\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=4r^2$ каждый (рис. 5, *а*), так что общая его поверхность $16r^2$, а бумажную модель тела Ψ можно сделать из двенадцати «лепестков» площади $4r^2\int\limits_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi=(4-2\sqrt{2})r^2$ каждый (рис. 5, *б*), так что площадь поверхности тела Ψ равна $(48-24\sqrt{2})r^2$.

Н. Васильев

◆

M556. *Обязательно ли конгруэнтны два остроугольных равнобедренных треугольника, имеющих равные по длине боковые стороны и равные радиусы вписанных окружностей?*

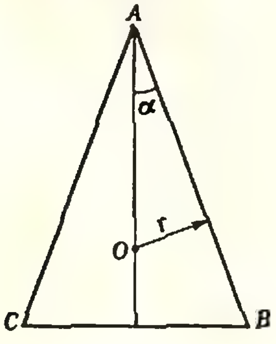


Рис. 1.

Ответ. Вообще говоря, не обязательно.

Пусть в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 1) $|AB|=|AC|=1$, $\widehat{BAC}=2\alpha$, O — центр вписанной окружности, r — ее радиус.

Для вычисления радиуса воспользуемся известной формулой $S=rp$, где S — площадь треугольника, p — его полупериметр. В нашем случае

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

$$p=\frac{|AB|+|BC|+|AC|}{2}=1+\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$r(\alpha)=\frac{S}{p}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

Треугольник ABC, по условию, должен быть остроугольным, так что нас будут интересовать значения α, принадлежащие промежутку $]0;\ \pi/4[$. Нам надо выяснить, будет ли функция $r=r(\alpha)$ на $]0;\ \pi/4[$ монотонна или она на этом промежутке принимает некоторые значения дважды.

Исследуем функцию r с помощью производной. Вычислив производную, получим:

$$r'(\alpha) = \frac{1 - \sin\alpha - \sin^2\alpha}{1 + \sin\alpha}$$

(убедитесь в этом). Приравнивая $r'(\alpha)$ нулю, получаем

$$\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0,$$

и, поскольку $\alpha \in \,]0;\, \pi/4]$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \alpha_0 \approx 38.2°$.

Легко видеть, что $r'(\alpha) > 0$ при $0 < \alpha < \alpha_0$ и $r'(\alpha) < 0$ при $\alpha_0 < \alpha < \pi/4$. Таким образом, r возрастает при $\alpha \in \,]0;\, \alpha_0[$ и убывает при $\alpha \in \,]\alpha_0;\, \pi/4[$, то есть α_0 — точка максимума функции r (примерный ее график изображен на рисунке 2).

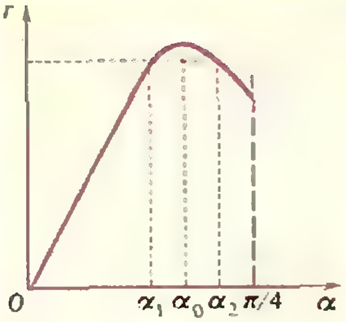
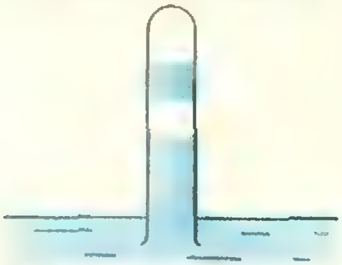


Рис. 2.

Теперь ясно, что внутри промежутка $]0;\, \pi/4[$ существуют такие α_1 и α_2, для которых $r(\alpha_1) = r(\alpha_2)$ (см. рис. 2).

А. Егоров

Ф563. *Посредине барометрической трубки имеется столбик воздуха. При температуре $t_0 = 0°C$ длина столбика равна $l_0 = 10$ см. Какой станет длина столбика при $t = 20°C$?*



◆

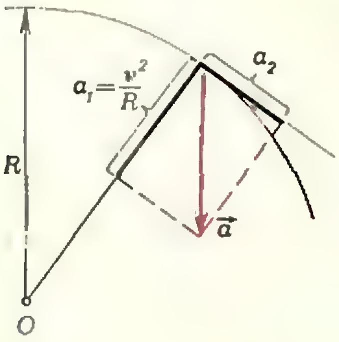
Давление в столбике воздуха равно весу столбика жидкости над воздухом, деленному на площадь сечения трубки. При изменении температуры изменится и высота столбика жидкости, и его плотность. Но масса останется прежней. Прежним останется и вес столбика, и следовательно, не изменится и давление воздуха. Поэтому отношение объемов воздушного столбика при температурах $T = 293$ К и $T_0 = 273$ К равно отношению температур, и следовательно,

$$\frac{l}{l_0} = \frac{T}{T_0}.$$

Отсюда

$$l = l_0\frac{T}{T_0} \approx 10.7 \text{ см}.$$

Ф564. *Автомобиль движется по повороту дороги радиуса R. Внезапно водитель увидел на дороге препятствие и начал тормозить. Какое расстояние автомобиль пройдет до остановки, если его скорость равна v_0, коэффициент трения колес о дорогу k и автомобиль тормозит с максимально возможным постоянным ускорением?*



◆

Единственная внешняя сила, действующая на автомобиль в горизонтальной плоскости, это сила трения. Так как колеса автомобиля не проскальзывают относительно дороги, то это — сила трения покоя. Эта сила сообщает автомобилю ускорение $\vec{a}$ такое, что модуль проекции $\vec{a}$ на радиус, проведенный к точке, в которой находится автомобиль, равен центростремительному ускорению $a_1 = v^2/R$; модуль проекции $\vec{a}$ на касательную к дороге равен $a_2 = \sqrt{a^2 - a_1^2}$. «Линейное» ускорение $\vec{a_2}$ обеспечивает уменьшение скорости автомобиля. Согласно условию задачи a_2 остается постоянным и максимально возможным. В момент начала торможения возможное ускорение a_2 определяется условием $a_2 = \sqrt{a^2 - v_0^4/R^2}$. Эта величина максимальна при $a = kg$ (максимальное значение силы трения покоя равно kmg).

Следовательно, автомобиль тормозит с постоянным «линейным» ускорением $a_2 = \sqrt{(kg)^2 - v_0^4/R^2}$. Расстояние l, пройденное автомобилем до остановки, равно

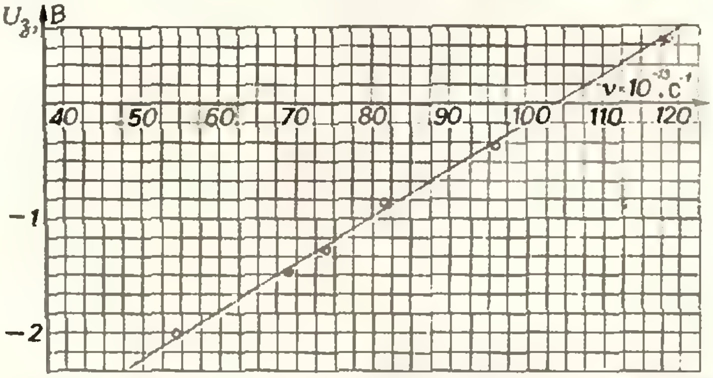
$$l = \frac{v_0^2}{2a_2} = \frac{v_0^2 R}{2\sqrt{(kgR)^2 - v_0^4}}.$$

Ф565. *На рисунке, взятом из работы Миликена, приведена зависимость задерживающего напряжения от частоты света в опытах по фотоэффекту. Определить из этого графика отношение постоянной Планка h к заряду электрона e.*

Согласно формуле Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2},$$

где A — работа выхода электрона из катода и $mv^2/2$ — кинетическая энергия, которую имеет вылетевший электрон. Максимальное напряжение между анодом и катодом, при котором электрон еще может попасть на анод, — задерживающее напряжение — определяется условием $U_з e = mv^2/2$. В нашем случае



$$h\nu = A + U_з e.$$

Для двух частот света ν_1 и ν_2 мы можем записать:

$$h\nu_1 = A + U_{з1}e, \quad h\nu_2 = A + U_{з2}e.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$h\Delta\nu = e\Delta U_з,$$

откуда

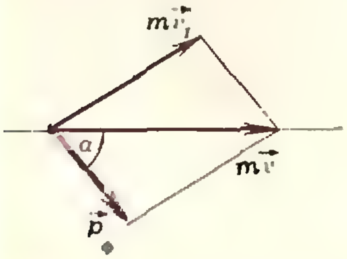
$$\frac{h}{e} = \frac{\Delta U_в}{\Delta\nu}.$$

Определив по графику соответствующие значения $\Delta U_з$ и $\Delta\nu$, находим:

$$\frac{h}{e} \approx 4 \cdot 10^{-15}\ \text{В}\cdot\text{с}.$$

◆

Ф566. *Атом, движущийся со скоростью v ($v \ll c$), испускает фотон под милым углом α к направлению своего движения. Доказать, что если ω_0 — частота излучения покоящегося атома, а ω — частота волны фотона, то для видимого света $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} \approx \frac{v}{c}\cos\alpha$.*



В результате излучения фотона меняются импульс атома, его кинетическая энергия и внутренняя энергия.

Согласно закону сохранения импульса $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + \vec{p}_ф$ ($m\vec{v}_1$ — импульс атома после излучения, $|\vec{p}_ф| = \hbar\omega/c$ — импульс излученного фотона), то есть

$$(mv_1)^2 = (mv)^2 + \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 - 2mv\frac{\hbar\omega}{c}\cos\alpha. \qquad (1)$$

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \hbar\omega + \Delta E \qquad (2)$$

($\hbar\omega$ — энергия излученного фотона, ΔE — изменение внутренней энергии атома).

Изменение ΔE внутренней энергии атома — это изменение энергии первоначально неподвижного атома после излучения фотона с энергией $\hbar\omega_0$. После излучения атом, согласно закону сохранения импульса, приобретает импульс $m\vec{u}$ такой, что $m\vec{u} + (\hbar\omega_0/c) = \vec{0}$ и $mu = \hbar\omega_0/c$. Так что изменение внутренней энергии атома, согласно закону сохранения энергии, равно

$$\Delta E = -\left[\hbar\omega_0 + \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2mc^2}\right] = -\hbar\omega_0\left(1 + \frac{\hbar\omega_0}{2mc^2}\right)$$

($\Delta E < 0$, так как внутренняя энергия атома уменьшилась).

Подставляя значение ΔE в (2) и исключая из (1) и (2) v_1, получаем:

$$\omega\left(1 + \frac{\hbar\omega}{2mc^2} - \frac{v}{c}\cos\alpha\right) = \omega_0\left(1 + \frac{\hbar\omega_0}{2mc^2}\right). \qquad (3)$$

При сравнительно малых значениях частот ω и ω_0 (порядка оптических) величины $\hbar\omega/2mc^2$ и $\hbar\omega_0/2mc^2$ много меньше единицы. Пренебрегая этими величинами, из (3) находим, что при малых углах α (когда $\cos\alpha \approx 1$)

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} \approx \frac{v}{c}.$$

◆

Ф567. *На рисунке 1 приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку включают в цепь, показанную на рисунке 2. Найти мощность, выделяющуюся на лампочке.*

Чтобы найти мощность, выделяющуюся на лампочке, надо определить напряжение на лампочке и текущий через нее ток.

Если на лампочке и на резисторе с сопротивлением R_2 напряжение равно U, то на резисторе с сопротивлением R_1 напряжение равно $\mathcal{E} - U$. Ток, текущий через R_1, равен $I_1 = (\mathcal{E} - U)/R_1$; ток, текущий через R_2, равен $I_2 = U/R_2$. Следовательно, ток, текущий через лампочку при напряжении на ней U, равен

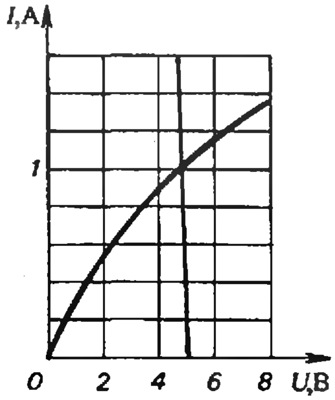


Рис. 1

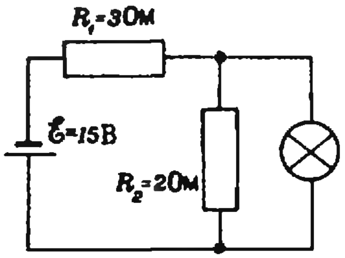


Рис. 2

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\mathcal{E} - U}{R_1} - \frac{U}{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_1} - U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \; (*)$$

Лампочка горит только в том случае, если значения U и I, связанные соотношением (*), соответствуют точке на вольтамперной характеристике лампочки. Эти значения определяют точку пересечения графика функции $I = 5 - \frac{5}{6}U$ (мы подставили в (*) численные значения) с вольтамперной характеристикой лампочки. Построив график (см. рис. 1), находим: $U \approx 4{,}8$ В, $I \approx 1$ А.

Таким образом, мощность, выделяющаяся на лампочке, равна

$$P = IU \approx 4{,}8 \text{ Вт}.$$

И. Слободецкий

Квант для младших школьников

Задачи

1. а) Два натуральных числа отличаются на 2, а их квадраты на 100. Какие это числа?
б) Квадраты двух последовательных натуральных чисел отличаются лишь перестановкой последних двух цифр. Найдите эти числа.

2. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько в этой книге страниц?

3. На улице, став в кружок, беседуют 4 девочки: Аня, Валя, Галя и Надя. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье носит каждая из девочек?

4. Если головоломка, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали эту, была труднее, чем головоломка, которую вы разгадали после того, как вы разгадали головоломку, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали эту, то была ли головоломка, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали эту, труднее, чем эта?

Головоломка
Головоломка
Головоломка
Головоломка
Головоломка
Головоломка
Головоломка
Головоломка

5. Разрежьте параллелограмм по прямой, проходящей через его центр, так, чтобы из полученных двух кусков можно было сложить ромб.

$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{4}$ = $\frac{7}{7}$ = 1

А. Бендукидзе, А. Савин

Производные пропорции

— Здравствуй, Ира!

— А, это ты, Витя! Заходи, садись.

— Как твоя ангина?

— Врач говорит, что в понедельник уже можно идти в школу. А что новенького в классе?

— Сегодня смеху было! Наталья Николаевна вызвала к доске Сережу Казакова. Уже не помню, какую он решал задачу, но по ходу дела ему нужно было сложить $^2/_3$ и $^5/_4$. Он взял и сложил числитель с числителем, а знаменатель со знаменателем,— получил в результате $^7/_7$, то есть единицу. А Наталья Николаевна и говорит: «Дай-ка, Сережа, дневник, я эту единицу поставлю туда тебе на память».

— Постой-ка, Витя, а это же любопытно!

— Это точно! Единиц у нас давно уже никто не получал.

— Да я не про то. Смотри, одна дробь была меньше единицы, а вторая больше, а в результате получилась единица. Подай, пожалуйста, со стола тетрадку и ручку! Спасибо. А ну-ка, возьмем $^2/_3$ и $^2/_5$. Так... Складываем числители, потом знаменатели...

— Тебе лавры Казакова не дают покоя?

— Обожди, мы получаем $^4/_8$, то есть $^2/_4$, то есть $^1/_2$. Ага! $^1/_2$ больше, чем $^2/_5$, но меньше, чем $^2/_3$. Ура! Витя, я придумала новую теорему: *если у двух дробей сложить числители, а потом знаменатели, то получится дробь, которая больше меньшей дроби, но меньше большей.*

— Постой, а откуда ты знаешь, что это верно?

— А я еще не знаю, я чувствую, что это так.

— Давай проверим. Если две дроби равны, то такое «сложение» по твоей теореме должно давать равную им дробь. Возьмем $^2/_3$ и $^4/_6$. Так... Получаем $^6/_9$, то есть снова $^2/_3$.

— А зачем брать частный случай? Возьмем несократимую дробь a/b.

— Почему несократимую?

— Хорошо, я умножу числитель и знаменатель на какое-нибудь число n. Теперь возьму другую, равную ей дробь. Для этого умножу числитель и знаменатель на число m. Получим

$$\frac{na}{nb} \text{ и } \frac{ma}{mb}.$$

Сложим числители и знаменатели, разделим. Получилось

$$\frac{na+ma}{nb+mb}.$$

— Теперь я вижу, что нужно сделать! В числителе вынесем множитель a, а в знаменателе b. Запишем это:

$$\frac{a(n+m)}{b(n+m)}.$$

Теперь можно сократить на $(n+m)$; видно, что получилась дробь, равная первоначальной.

— Витя, а ведь это тоже прекрасная теорема! Послушай формулировку: *если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

— А я думаю, что еще лучше ее сформулировать так: *если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{na+mc}{nb+md}.$$

В понедельник Ира и Витя показали Наталье Николаевне свое открытие.

— Что ж, молодцы,— сказала Наталья Николаевна,— свойство которое вы открыли, конечно же, известно. Оно называется *производной пропорцией*. В дальнейшем оно может вам не раз пригодиться. И конечно же, следует написать о нем в нашу математическую стенгазету. Там же мы поместим и твою, Ира, теорему: *если* $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, *то* $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$. Ты верно угадала. Только докажи ее сама.

А от себя я добавлю еще несколько теорем на производные пропорции. Запиши, Витя. Первой теоремой пусть будет такая:

если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то* $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

— Ну, Наталья Николаевна, это же совсем просто! Разделим почленно левую часть на b, а правую — на d, получим $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$. Но ведь дроби же равны, значит, прибавив по единице к обеим частям верного равенства, мы снова получим верное равенство.

— Вторая будет посложнее: *если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то* $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$.

Запиши и третью: *если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то* $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

— А вот тебе пропорция даже не с двумя, а с четырьмя произвольными числами: *если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *и* n, m, p *и* r — *произвольные числа, то*

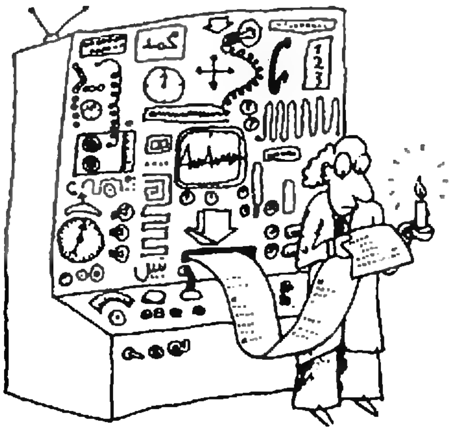
$$\frac{na+mb}{pa+rb}=\frac{nc+md}{rc+rd}.$$

— Наталья Николаевна,— сказала Ира,— а ведь предыдущие ваши теоремы являются частными случаями этой. В первой теореме n, m и r равны единице, а p — нулю, во второй m равняется нулю, а остальные числа — единице. А в третьей n, m и p равны единице, а r — минус единице. Стало быть, доказав эту теорему, я докажу и все остальные.

— Нет,— протянул Витя,— лучше я попробую рассмотреть частные случаи, а потом, глядишь, и станет ясно, как доказывать теорему в общем виде, чем сразу ломать голову над трудной теоремой,— тем более, одну я уже доказал.

И вас, читатели, приглашаем подумать над теоремами, о которых шла здесь речь.

ИЗ ИНОСТРАННОГО ЮМОРА



«Альфа» № 6 76

В. Дубровский

Неожиданный ракурс

> *Я видел озеро, стоящее отвесно.*
> О. Мандельштам

Чертежи в стереометрии обычно стараются делать как можно более наглядными, выбирая такой ракурс, чтобы все важные точки, линии, плоскости были хорошо видны. Однако для обширной группы задач выгодней другой ракурс: такой, при котором некоторые прямые и плоскости вырождаются, т. е. изображаются, соответственно, точками и прямыми. О таких задачах мы и расскажем.

Идея предлагаемого приема — специальный выбор параллельной проекции. Поэтому сформулируем сначала основное свойство параллельной проекции, непосредственно вытекающее из свойств, указанных в § 12 «Геометрии 9»:

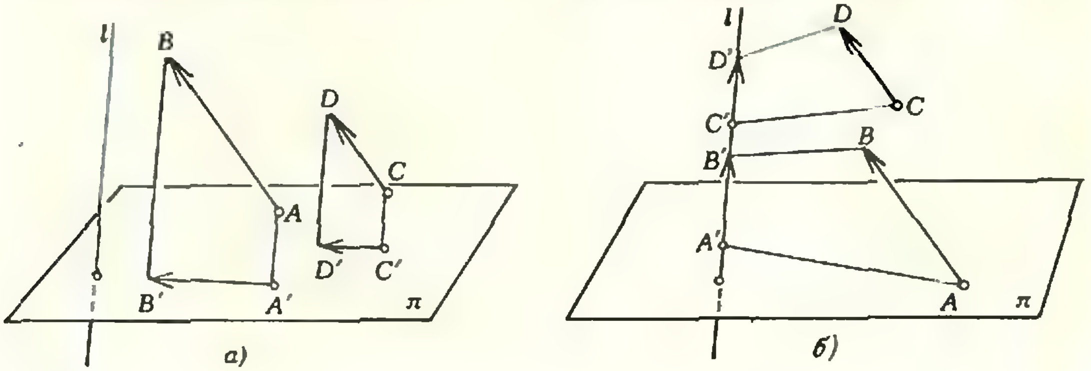
*Пусть A', B', C', D' — образы точек A, B, C, D при параллельной проекции на плоскость π вдоль прямой l. Тогда, если $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{CD}$, то и $\overrightarrow{A'B'}=k\,\overrightarrow{C'D'}$**) (рис. 1, *а*).

В частности, проекции трех точек, лежащих на одной прямой, также лежат на прямой; проекция прямой a — прямая, если $a \nparallel l$, и точка, если $a \parallel l$; проекция плоскости, параллельной l — прямая.

Мы будем пользоваться также *параллельной проекцией на прямую l вдоль плоскости π* ($l \nparallel \pi$). По определению, образом произвольной точки X при такой проекции является точка пересечения X' прямой l с плоскостью, проходящей через X и параллельной π. Нетрудно доказать, что сформулированное выше основное свойство имеет место и для проекции на прямую вдоль плоскости (рис. 1, *б*)*).

Задача 1. (МГУ, мехмат, 1978). *Дан тетраэдр $ABCD$. Через середины K и M ребер AB и CD тетраэдра проведена плоскость, пересекающая ребра BC и AD соответственно в точках L и N. Расстояние от вершины B до этой плоскости равно 2. Диагонали четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке Q, причем $|KQ|:|QM|=0{,}2$. Вычислить площадь четырехугольника $KLMN$, если известно, что объем тетраэдра $BKMC$ равен* 12.

Решение (рис. 2). Найдем сначала отношения, в которых точки L и Q делят, соответственно, отрезки BC и NL. Для этого построим параллельные проекции тетраэдра на некоторую плоскость



а) б)

Рис. 1.

---

*) В дальнейшем это свойство используется так часто, что ссылаться на него при его использовании мы не будем; при оформлении письменной работы школьники (и абитуриенты) должны непосредственно ссылаться на свойства из § 12 учебника.

*) Поскольку параллельная проекция на прямую вдоль плоскости в школе не изучается (в отличие от проекции на плоскость вдоль прямой), абитуриент, применяющий ее на экзамене, должен обосновать те ее свойства, на которые он ссылается. В этой связи, однако, мы советуем посмотреть мелкий шрифт на с. 48.

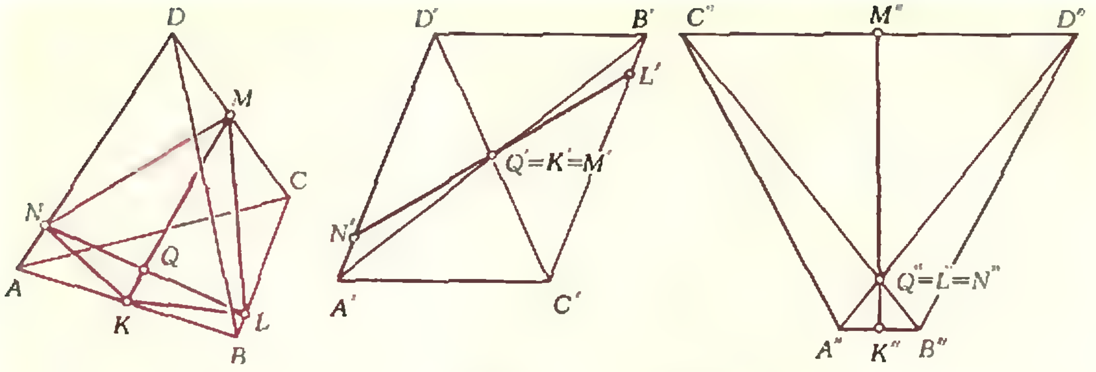


Рис. 2. *а)* *б)* *в)*

вдоль прямой KM (рис. 2, *б*) и вдоль прямой NL (рис. 2, *в*). Эта плоскость (которую естественно отождествлять с плоскостью чертежа), конечно, должна пересекать прямую KM (соответственно, прямую NL), но в остальном ее выбор не влияет ни на решение, ни на ответ — продумайте, почему.

Например, можно считать, что мы смотрим на тетраэдр, повернув его так, что точки K и M (или L и N) совместились.

На проекции вдоль прямой KM образы точек Q, K и M совпадают, сечение изображается отрезком $L'N'$, а тетраэдр — параллелограммом $A'C'B'D'$ с проведенными диагоналями, ведь, по условию, K и M — середины отрезков AB и CD. Из рисунка 2, *б* немедленно следует, что Q' — середина отрезка $L'N'$ (значит, Q — середина отрезка NL) и что точки L' и N' делят проекции ребер тетраэдра в равных отношениях: $|D'N'|:|N'A'|=|C'L'|:|L'B'|$. Это равенство сохраняется и при проекции вдоль (LN), то есть на рисунке 2, *в*: $|D''N''|:|N''A''|=|C''L''|:|L''B''|$; следовательно, на этом рисунке $(A''B'')\parallel(C''D'')$ и поэтому $\frac{|C''L''|}{|L''B''|}=\frac{|M''Q''|}{|Q''K''|}$. Значит, $\frac{|CL|}{|LB|}=\frac{|MQ|}{|QK|}$. Но по условию $\frac{|MQ|}{|QK|}=5$. Следовательно, $|CL|:|LB|=5$. Отсюда расстояние от точки C до плоскости сечения равно $5\cdot2=10$. Объем тетраэдра $BKMC$ равен сумме объемов тетраэдров $BKML$ и $CKML$, высоты которых, опущенные на грань KML, равны, как мы видели, 2 и 10. Таким образом, $V_{BKMC}=12=\frac{1}{3}S_{\Delta KML}\cdot(2+10)$; следовательно, площадь треугольника KML равна 3. Но площади треугольников KMN и KML равны, так как треугольники имеют общее основание KM и равные высоты, опущенные на это основание (напомним, что Q — середина $[NL]$), поэтому $S_{KLMN}=2S_{\Delta KML}=6$.

В дальнейшем, чтобы не перегружать формулы штрихами, мы будем одинаково обозначать изображение одной и той же точки во всех проекциях.

Для следующей задачи мы приведем два решения: одно — при помощи проекции вдоль прямой, другое — вдоль плоскости.

Задача 2. (МГУ, мехмат, 1964). *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делит ребро B_1C_1 точка E, которая принадлежит плоскости про-*

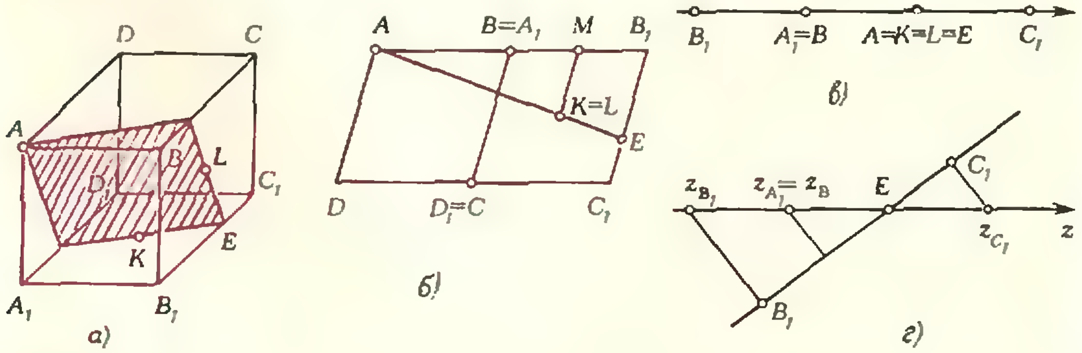


Рис. 3.

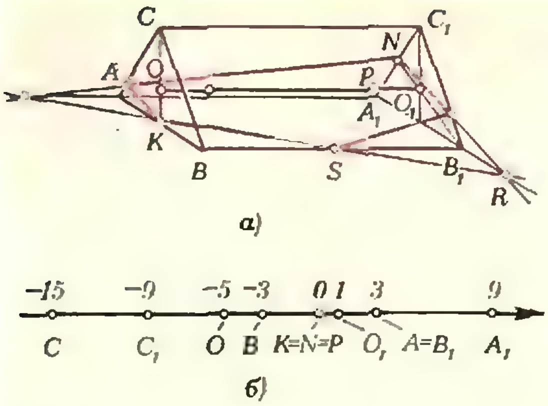


Рис. 4.

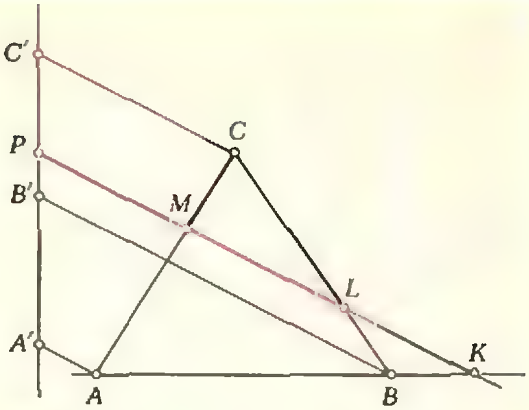


Рис. 5.

ходящей через вершину A и центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB?

Первое решение. Построим проекцию куба (рис. 3, *а*) вдоль прямой KL, где K — центр грани $A_1B_1C_1D_1$, L — центр грани B_1C_1CB (рис. 3, *б*). Проекции этих граней изобразятся в виде параллелограммов с общей стороной B_1C_1 и общим центром $K=L$; следовательно, проекции вершин B и A_1, C и D_1 также совпадут. Положение на рисунке 3, *а* точек A и D определяется из условий $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BB_1}$. Плоскость сечения проектируется в прямую AK, пересекающую отрезок B_1C_1 в точке E. Обозначим через M середину отрезка BB_1, тогда (рис. 3, *б*) $\frac{|B_1E|}{|B_1C_1|}=\frac{|B_1E|}{2|KM|}=\frac{1}{2}\frac{|B_1A|}{|MA|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$. Отсюда $|B_1E|:|EC_1|=2$.

Второе решение (рис. 3, *в*). Выберем систему координат с началом E так, чтобы оси абсцисс и ординат лежали в плоскости EKL. Тогда аппликаты точек E, K, L и A равны нулю. Воспользуемся основным свойством для проекции вдоль плоскости EKL. Из условия $\overrightarrow{KC_1}=-\overrightarrow{KA_1}$ и $\overrightarrow{LC_1}=-\overrightarrow{LB}$ получаем $z_{A_1}=z_B$ и $z_{C_1}=-z_{A_1}=-z_B$ (здесь z_P обозначает аппликату точки P). Далее из условия $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$ и равенства $z_{A_1}=z_B$ получаем $z_{B_1}=2z_{A_1}$. Таким образом, точки C_1, E, B_1 на отрезке C_1B_1 имеют аппликаты z_{C_1}, 0, $-2z_{C_1}$ соответственно. Вновь применяя основное свойство, получаем $|B_1E|:|EC_1|=2$.

Чтобы избежать ссылки на основное свойство проекции вдоль плоскости (которая не упомянута в школьном учебнике), предыдущий текст можно написать так: вместо фразы «Воспользуемся основным свойством для проекции вдоль плоскости...» написать «Воспользуемся теперь тем, что равные векторы имеют равные координаты и что координаты вектора равны разности координат его конца и начала» («Геометрия 10», § 42), а вместо последней фразы — написать: «Поэтому из подобия треугольников (рис. 3, *г*) получаем $|B_1E|:|EC_1|=2$». Аналогичные изменения можно внести в текст следующего решения, где также используются координаты.

Задача 3 (МГУ, мехмат, 1965). *Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть точка P делит ось OO_1 призмы в отношении 5:1. Через точку P и середины ребер AB и A_1C_1 проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?*

Решение. Пусть K — середина $[AB]$, N — середина $[A_1C_1]$. Спроектируем призму на некоторую прямую l вдоль плоскости сечения (PKN). Рассмотрим на прямой l координаты, приняв за начало отсчета проекцию плоскости PKN (рис. 4, *б*). Определим координаты проекций всех вершин призмы. Выбор масштаба в нашей воле; пусть, например, $x_{O_1}=1$. Тогда $x_O=-5$, поскольку $\overrightarrow{PO}=-5\overrightarrow{PO_1}$; далее,

$$\overrightarrow{NB_1}=3\overrightarrow{NO_1}\Rightarrow x_{B_1}=3x_{O_1}=3;\ \overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{O_1O}\Rightarrow x_B=x_{B_1}+x_O-x_{O_1}=-3.$$

Аналогично, $x_A=-x_B=3$, $x_{A_1}=x_A+x_{O_1}-x_O=9$, $x_{C_1}=-x_{A_1}=-9$, $x_C=x_{C_1}+x_O-x_{O_1}=-15$.

Теперь, для того чтобы найти, в каком отношении делит плоскость сечения некоторый отрезок XY, достаточно найти отношение координат его концов $x_X:x_Y$. Например, $x_B:x_{B_1}=-1$, следовательно, сечение проходит через середину отрезка BB_1; $x_{B_1}:x_{A_1}=\frac{1}{3}$, следовательно, плоскость сечения пересекает продолжение отрезка A_1B_1 за точку B_1 в такой точке R, что $|B_1R|:|A_1R|=1:3$ и т. д. Далее надо..., впрочем, не будем лишать читателя удовольствия дорешать эту задачу до конца самостоятельно. Ответ. 49/95.

Теперь можно сформулировать правило, на основе которого решались все разобранные задачи: *чтобы узнать, в каком отношении плоскость* π (соответственно, *прямая* l) *делит непараллельный ей отрезок, следует рассмотреть проекцию вдоль плоскости* π *или вдоль какой-либо известной прямой, лежащей в плоскости* π (соответственно, *вдоль прямой* l).

В качестве примера применения этого правила в планиметрии будет доказана

Теорема Менелая. *Если прямая* l *пересекает стороны* AB, BC *и* CA *треугольника* ABC *или их продолжения в точках* K, L, M *соответственно, то*
$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}}=-1$*).

Доказательство (рис. 5). Спроектируем треугольник параллельно прямой l на какую-либо пересекающую ее прямую. Тогда

$$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}}=$$

$$=\frac{\overrightarrow{A'P}}{\overrightarrow{PB'}}\cdot\frac{\overrightarrow{B'P}}{\overrightarrow{PC'}}\cdot\frac{\overrightarrow{C'P}}{\overrightarrow{PA'}}=(-1)^3=-1.$$

(Отметим, что верна и обратная теорема, ее можно доказать от противного.)

Разберем теперь задачу, в которой важны не только отношения длин параллельных отрезков, как это было выше, но и сами эти длины, а также углы между отрезками. В отличие от предыдущих задач, здесь играют роль и направление проекции, и плоскость, на которую мы проектируем.

Задача 4. (МФТИ, 1977) *Сторона основания* $ABCD$ *правильной призмы* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *имеет длину* $2a$, *боковое ребро — длину* a. *Рассматриваются отрезки с концами на диагонали* AD_1 *грани и диагонали* DB_1 *призмы, параллельные плоскости* AA_1B_1B.

1) *Один из этих отрезков проведен через такую точку* M *диагонали* AD_1, *что* $|AM|:|AD_1|=2:3$. *Найти его длину.*

2) *Найти наименьшую длину рассматриваемых отрезков.*

Решение (рис. 6). Спроектируем призму вдоль диагонали B_1D на плоскость грани ABB_1A_1. Легко видеть, что получится чертеж, изображенный на рисунке 6, *б*. Ясно, что любой отрезок, параллельный плоскости ABB_1A_1, спроектируется в отрезок той же длины (!). Поэтому рассматриваемые отрезки будут конгруэнтны своим проекциям $[DX]$, где $X\in[AD_1]$. Очевидно, кратчайший из них есть перпендикуляр DH, опущенный из точки D на (AD_1). Треугольник DHD_1, как и $\triangle ABD_1$,— прямоугольный и равнобедренный, поэтому $|DH|\frac{\sqrt{2}}{2}|DD_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ (это ответ на второй вопрос). Длину отрезка DM можно найти из прямоугольного треугольника MPD, в котором $|DP|=$ $=\frac{1}{3}|DD_1|=\frac{a}{3}$, $|MP|=\frac{1}{3}|AB|=\frac{2a}{3}$. Таким образом,

$$|DM|=\frac{a\sqrt{5}}{3}$$

В заключение приведем короткое и поучительное доказательство одной из красивейших теорем стереометрии, основанное на методе проектирования.

Задача 5. *Доказать, что если все грани тетраэдра равновелики (имеют одинаковые площади), то они попарно конгруэнтны**).

---

*) Через $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ мы обозначаем такое число k, что $\vec{a}=k\vec{b}$, если оно существует, т. е. если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $|\vec{b}|\neq 0$.

*) Тетраэдры, удовлетворяющие условию задачи, называются *равногранными*. Заметим, что они вовсе не обязаны быть правильными, хотя многие их свойства очень напоминают свойства правильных тетраэдров

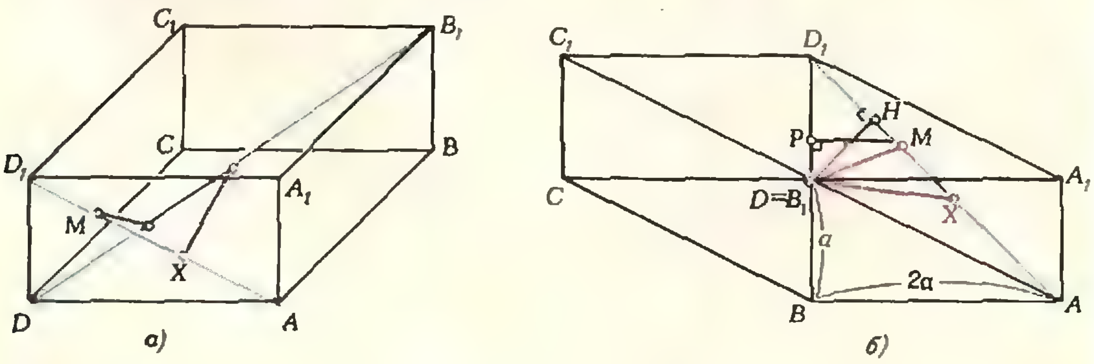


Рис. 6.

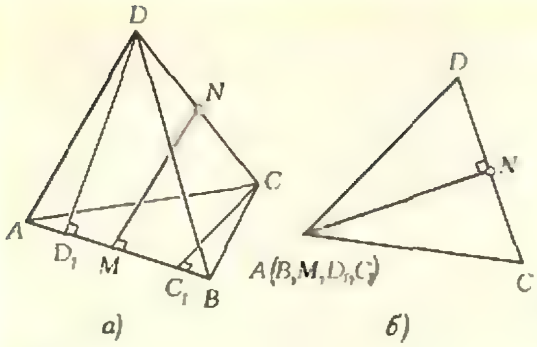


Рис. 7.

Решение. Пусть MN — общий перпендикуляр к ребрам AB и CD тетраэдра $ABCD$ с равновеликими гранями (рис. 7, *а*). Легко понять, что ортогональная проекция тетраэдра вдоль прямой AB является треугольником ADC (рис. 7, *б*), в котором сторона AD конгруэнтна высоте DD_1 грани ABD, а сторона AC — высоте CC_1 грани ABC, причем отрезок MN проектируется в высоту AN треугольника ADC. Поскольку треугольники ABC и ABD имеют одинаковые площади и общее основание AB, их высоты, опущенные на это основание, равны, значит, на рисунке 7, *б* $|AD|=|AC|$; а значит, точка N (основание высоты равнобедренного треугольника) делит отрезок CD пополам. Пользуясь основным свойством проекции и повторяя это рассуждение применительно к остальным ребрам тетраэдра, заключаем, что общие перпендикуляры всех пар скрещивающихся ребер тетраэдра $ABCD$ проходят через середины соответствующих ребер и, стало быть, являются осями симметрии тетраэдра. Например, при осевой симметрии с осью MN (рис. 7, *а*) вершина A перейдет в B, B — в A, C — в D, D — в C, поэтому грань ABC конгруэнтна грани ABD, а грань ACD — грани BCD. Точно так же доказывается, что $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

Задачи в этой заметке в основном подобраны так, чтобы читатель мог сравнить их решения, полученные с помощью параллельной проекции, с «традиционными» (чисто геометрическими) и векторными решениями. Так, задачи 2 и 3 разобраны в книге Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова и Н. Х. Розова «Пособие по математике для поступающих в вузы» (М., «Наука», 1976), с. 340 и 514, задача 3 — также в статье С. Овчинникова «Принадлежность точек прямой и плоскости» («Квант», 1978, № 3), задача 4 — в статье И. Габовича «Векторы помогают на экзамене» («Квант», 1979, № 1) и в статье Г. Бевза «Задачу можно решить проще» («Квант», 1979, № 11).

Упражнения

1. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Найти множество точек X, делящих в постоянном отношении отрезки AB ($|AX|:|XB|=k$), где а) точка A пробегает прямую a, B пробегает прямую b; б) то же самое, но с условием, что прямая AB остается все время параллельной данной плоскости α.

2. Дана замкнутая неплоская четырехзвенная ломаная $ABCD$ («пространственный четырехугольник»). Доказать, что точки K, L, M, N, взятые на ее звеньях AB, BC, CD и DA соответственно, лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MD}} \cdot \frac{\overrightarrow{DN}}{\overrightarrow{NA}} = 1$.

3. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. На ребрах SA и SC взяты точки K и L так, что $|SK|:|KA|=3$, $|SL|:|LC|=1/3$, точка M — середина а) ребра SF, б) ребра SE. Определить, какие ребра пирамиды пересекаются плоскостью (KLM) и в каком отношении они ею делятся.

4. (МФТИ, 1975). Площадь трапеции $ABCD$ равна S, отношение длин оснований $|AD|:|BC|=3:1$. Отрезок MK расположен так, что он параллелен стороне CD и пересекает сторону AB, а отрезок AM параллелен отрезку BK. Определить площадь треугольника BKC, если $|AM|:|BK|=3:2$, $|MK|:|CD|=1:3$ (найти все решения).

5. (МФТИ, 1976). На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены, соответственно, точки D и E так, что $(DE)\parallel(BC_1)$. Определить отношение $|DE|:|BC_1|$.

6. (МФТИ, 1977). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC, параллельные (SAD). Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

7. (М462). Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды в точках, отстоящих от вершины на расстояния a, b, c и d. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

8. (МГУ, мехмат, 1978). Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка MC равно $\frac{2}{3}$. Вычислить площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

9. (МГУ, геол. ф-т, 1974). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна 1 см. На ребрах AA_1, BB_1, DD_1 взяты, соответственно, точки K, P и M — так, что $|AK|:|A_1K|=1:3$, $|BP|:|B_1P|=3:1$, $|DM|:|D_1M|=3:1$. Найти объем пирамиды, у которой основанием служит сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, P и M, а вершина расположена в точке A_1.

10. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площади граней ABB_1A_1 и BCC_1B_1 равны, соответственно, S_1 и S_2, а площади «диагональных сечений» ACC_1A_1 и BDD_1B_1 — s_1 и s_2. Показать, что $s_1^2+s_2^2=2(S_1^2+S_2^2)$. Выразить двугранный угол при ребре AA_1 через эти площади.

Московский физико-технический институт

Ниже публикуются материалы письменных вступительных экзаменов 1979 года. На работу как по математике, так и по физике отводилось пять часов.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2-x}+\frac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3}\leqslant 1.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin^3 x,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\cos^2 3}(1+\sin(7x+5))<\sin 8x.$$

4. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q. Найти радиус описанной окружности, если $|AC|=a$, $|PQ|=\frac{6}{5}a$.

5. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB и BD прямые, $\widehat{ACD}=\alpha$. Вершина конуса совпадает с одной из вершин тетраэдра, окружность основания конуса вписана в одну из граней. Найти угол в осевом сечении конуса.

6. Пункт N расположен на берегу реки, ширина которой 1 км, а скорость течения 1 км/час. Не менее чем на 3 км ниже по течению на другом берегу находится пункт M. Из пункта M выходит рыбак и идет вдоль берега по направлению к N со скоростью 4 км/час. Одновременно из пункта N отплывает на лодке перевозчик, пересекает реку и, дождавшись рыбака, переправляет его в пункт N. Туда и обратно лодка двигалась по прямой, причем направление движения было выбрано так, что от отплытия до возвращения прошло наименьшее возможное время, равное $\frac{9}{8}$ часа. Скорость лодки в стоячей воде равна 4 км/час. Найти расстояние (по течению) между пунктами M и N.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$0{,}4^x-2{,}5^{x+1}>1{,}5.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 y=\log_4(xy-2),\\ \log_9 x^2+\log_3(x-y)=1.\end{cases}$$

3. Окружность радиуса R, проведенная через вершины A, B и C прямоугольной трапеции $ABCD$ $\left(\widehat{A}=\widehat{B}=\frac{\pi}{2}\right)$, пересекает отрезки AD и CD соответственно в точках M и N так, что $|AM|:|AD|=|CN|:|CD|=1:3$. Найти площадь трапеции.

4. Решить уравнение

$$\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0.$$

5. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю), а затем, достигнув некоторой скорости,— равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно $\frac{4}{3}$. В момент встречи поезда имели равные скорости, а в пункты B и A прибыли одновременно. Найти отношение ускорений поездов.

6. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$. Найти наибольший возможный угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

Физика

Вариант 1

1. Три одинаковых гладких биллиардных шара радиусом R расположены на гладкой горизонтальной плоскости, как показано на рисунке 1. Шару 1 сообщается скорость $\vec{v}_0$, он ударяется сначала о шар *2*, затем о шар *3* и останавливается. Определите расстояние r между центрами шаров *2* и *3* и скорости, которые приобретут после удара шары *2* и *3*. Соударения абсолютно упругие.

2. В цилиндре под поршнем содержится $n=0{,}5$ моля воздуха при температуре $T_0=300$ К. Во сколько раз увеличится объем газа при сообщении ему количества теплоты $Q=13{,}2$ кДж? Молярная теплоемкость воздуха при постоянном давлении $C_p=29{,}1$ Дж/(моль·К).

3. Параллельно соединенные катушка с индуктивностью L и сопротивление R подключены через ключ K к источнику с постоянной ЭДС E и внутренним сопротивлением r (рис. 2). В начальный момент времени ключ K разомкнут и тока в цепи нет. Какой заряд Q протечет через сопротивление R после замыкания ключа K? Омическим сопротивлением катушки пренебречь.

4. Экспериментально определяется зависимость величины, обратной линейному увеличению, от расстояния d от предмета до

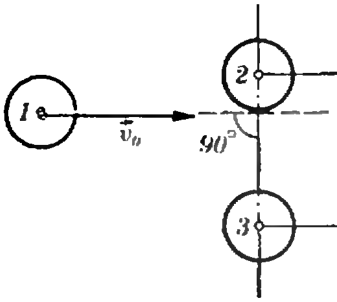


Рис. 1

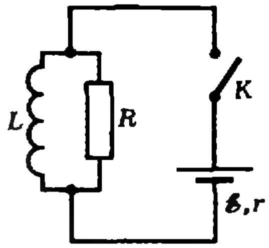


Рис. 2.

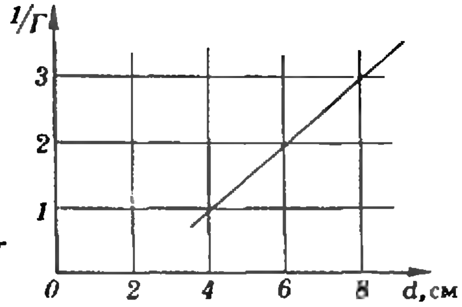


Рис. 3.

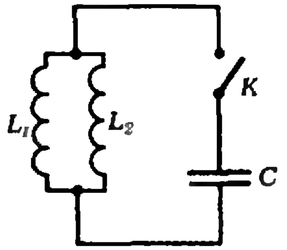


Рис. 4.

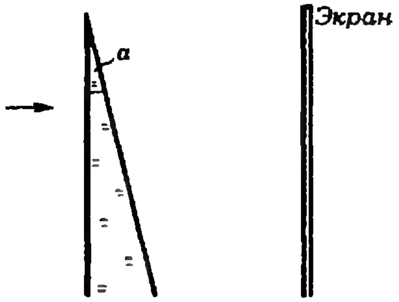


Рис. 5.

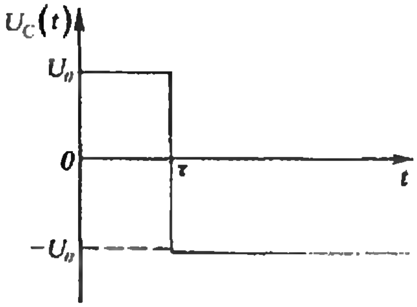


Рис. 6.

тонкой линзы. Эта зависимость показана на рисунке 3. Определите фокусное расстояние линзы.

Вариант 2

1. В результате взаимодействия ядер дейтерия и трития образуются ядро гелия и нейтрон: $^2H + ^3H = ^4He + n$. При этом выделяется значительная энергия. Какую часть ее уносит с собой нейтрон? Кинетическими энергиями дейтерия и трития до реакции можно пренебречь по сравнению с выделившейся энергией.

2. Лазерные трубки объемом $V_0 = 60$ см^3 должны заполняться смесью гелия и неона в молярном отношении 5:1 при общем давлении $p_0 = 6$ мм рт. ст. Имеются баллоны этих газов, каждый объемом $V_C = 2$ л. Давление в баллоне гелия $p_1 = 50$ мм рт. ст., неона — $p_2 = 200$ мм рт. ст. Какое число трубок можно заполнить?

3. Заряженный конденсатор емкостью C подключен через ключ K к двум параллельно соединенным катушкам с индуктивностями L_1 и L_2 (рис. 4). В начальный момент времени ключ разомкнут. Если замкнуть ключ K, через катушки потекут токи. Известно, что максимальная величина силы тока, протекающего через катушку с индуктивностью L_1, оказалась равной I_1. Найдите первоначальный заряд на конденсаторе. Омическим сопротивлением катушек пренебречь.

4. На стеклянный клин перпендикулярно его грани падает тонкий луч света (рис. 5). Показатель преломления стекла $n = 1{,}41$, угол $\alpha = 10°$. Сколько светлых пятен будет видно на экране, поставленном за клином?

Вариант 3

1. При какой продолжительности суток тела на экваторе Земли весили бы в два раза меньше, чем на полюсе? Радиус Земли $R = 6400$ км.

2. Ампула с радиоактивным препаратом ^{24}Na (период полураспада $\tau_{1/2} = 15$ ч) охлаждается потоком воздуха. В начале опыта воздух нагревается на $\Delta t_0 = 2°C$. Через какое время охлаждающий ампулу воздух будет нагреваться на $\Delta t_1 = 1{,}8°C$?

3. Неподвижная заряженная частица (протон) находится посередине между пластинами плоского конденсатора, помещенного в вакуум. На конденсатор подается напряжение $U_c(t)$ прямоугольной формы (рис. 6). Определите амплитуду напряжения U_0 и энергию частицы E в момент удара о пластину конденсатора, если известно, что за время $\tau = 10^{-6}$ с частица прошла расстояние $3/8L$, где L — расстояние между пластинами конденсатора, $L = 5$ см. Масса протона $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г, его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

4. В тонкостенном стеклянном шарике диаметром $2R = 4$ см видны два изображения пламени свечки, обусловленные отражением от ближней и дальней стенок шарика. Размеры изображений относятся как 19/21. Определите расстояние между центром шарика и свечкой.

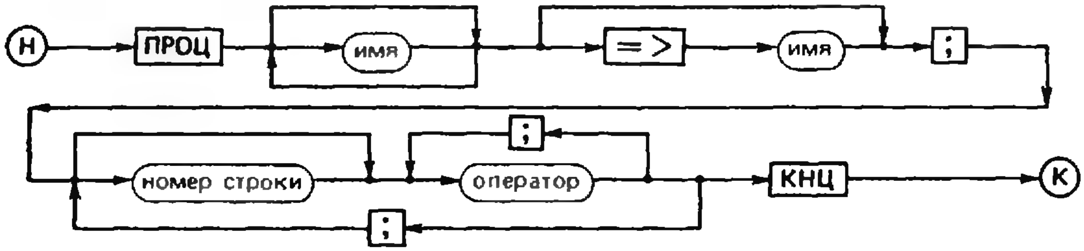
В. Можаев,
Б. Федосов,
В. Чехлов

Заочная школа программирования

Урок 6: Описание и вызов процедур на Рапире

На этом уроке мы продолжаем наше изучение учебно-производственного языка программирования Рапира, начатое на пятом уроке («Квант», № 1).

Описание процедуры в Рапире определяется такой диаграммой:



Описание начинается со слова ПРОЦ (вместо слов ЗАПОМНИТЬ ПРОЦЕДУРУ в Робике), после которого указывается *имя процедуры*. Затем перечисляются, если это необходимо, имена параметров. Отделяются они друг от друга пробелами; скобки и запятые, используемые в Робике, здесь не нужны.

Дальше может следовать стрелка =>, после которой указывается еще одно имя — так называемое *имя-результат*. На этом уроке мы будем рассматривать процедуры, в которых имя-результат не используется. Поэтому разбор этой конструкции мы отложим до следующего урока.

Слово ПРОЦ, имя процедуры, параметры и имя-результат образуют так называемый *заголовок процедуры*. После заголовка следуют операторы, разделяемые точками с запятой.

Вот пример описания процедуры на Рапире:

```
ПРОЦ ВЫБОР А В; А+В—>С;
А*В—>Д;
ЕСЛИ С>Д ТО С—>Д ИНАЧЕ Д—>С
ВСЕ;
КНЦ;
```

Для *вызова процедуры* в Рапире есть два способа. Применяя первый способ, следует написать в качестве очередного предписания *имя процедуры* и после него поставить *круглые скобки*. Если у процедуры есть параметры, то их значения перечисляются через запятую внутри этих скобок, как и в Робике, например:

```
ВЫБОР (10,X+5);
```

Если параметров нет, скобки при этом способе вызова все равно обязательны:

```
СБРОС ( );
```

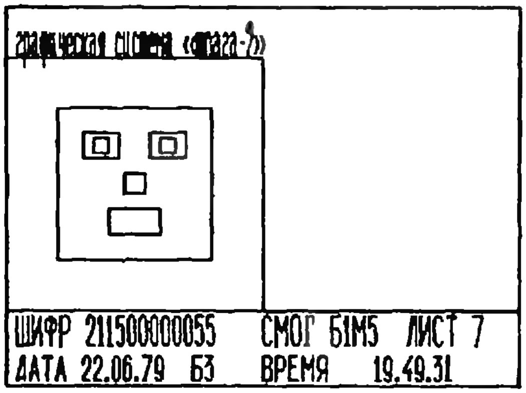
Если процедура имеет не более одного параметра, ее можно вызвать вторым способом: поставить перед именем процедуры *точку*. Значение параметра, если он есть, указывается перед точкой:

```
СБРОС; 5. КРУГ;
```

В Рапире предусмотрено большое число *стандартных процедур*, которые можно вызывать в любой программе. К их числу принадлежит, в частности, процедура ПЕЧАТЬ, у которой может быть любое число параметров. В результате исполнения этой процедуры значения всех параметров будут отпечатаны на новой строке, вплотную друг к другу (точно так же, как в предписании ОТПЕЧАТАТЬ языка Робик). Стандартными являются и все процедуры графической системы Шпага, описанной в статье А. Салиховой и Н. Соколовой в предыдущем номере журнала.

Рассмотрим некоторые примеры:

1°. Предположим, что нам нужно составить программу на Рапире, используя процедуры системы Шпага, *для изображения вот такого робота:*



Можно, разумеется, сделать это при помощи одних только лучей и подводов. Однако в этом случае программа получится довольно-таки большой. Ее можно существенно сократить, если заметить, что на рисунке многократно повторяется одна и та же фигура — прямоугольник. Поэтому достаточно один раз описать процедуру ПРЯМ, чтобы затем нарисовать любой нужный прямоугольник. У приведенной ниже процедуры четыре параметра: X, У, В и Д. X и У — это координаты левого нижнего угла, В — высота и Д — длина прямоугольника:

```
ПРОЦ ПРЯМ X У В Д;
П(X;У); Л(X+Д,У); Л(X+Д; У+В);
Л(X,У+В); Л(X,У); КНЦ;
```

Теперь программа, выполняющая рисунок, может быть записана очень просто:

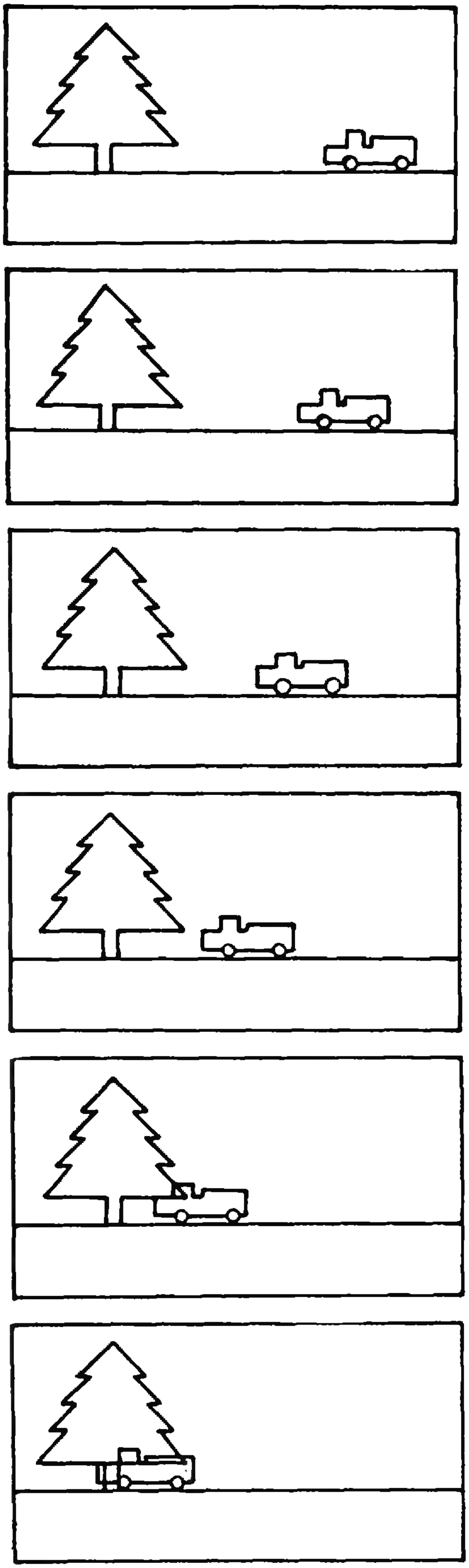
```
Р(50,50);              ПРЯМ(10,10,30,30);
ПРЯМ(20,15,5,10);      ПРЯМ(23,23,4,4);
ПРЯМ(15,30,5.7):       ПРЯМ(28,30,5,7);
ПРЯМ(17,31,3,3);       ПРЯМ(30,31,3,3):
.КОНЕЦ;
```

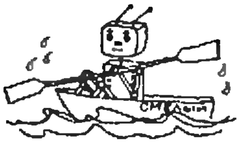
2°. Следующая задача — *заполнить рамку размером 100 на 100 мм прямоугольной сеткой с шагом 5 мм по вертикали и по горизонтали* (такая сетка может служить, например, координатной сеткой). Здесь удобно использовать цикл:

```
Р(100,100); 5-->А; ПОКА А=<100::
П(А,0); Л(А,100); П(0,А); Л(100,А),
А+5—>А ВСЕ; .КОНЕЦ;
```

3°. Другой пример использования цикла — *печатание таблицы умножения:*

```
2—>А; 2—>В;
ПЕЧАТЬ ('ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ'),
ПОКА А=<10:: ПОКА В=<10::
```





```
ПЕЧАТЬ (А, '*',В,'=',А*В); В+1—>В
ВСЕ;
2—>В; А+1—>А
ВСЕ;
```

4°. Одно из интересных применений машинной графики — *автоматизация изготовления мультфильмов.* Отдельно кинокадры, конечно, удобно рисовать в цикле. Как правило, в кадре есть несколько неподвижных предметов и один или несколько движущихся. Каждый движущийся предмет можно задавать отдельной процедурой, параметры которой определяют его размеры и положение в кадре.

Приведем очень простой пример: нужно изобразить *движущийся грузовик на фоне неподвижного дерева.*

Программу для такого мини-мультфильма составил второклассник В. Фишелев:

```
ПРОЦ МАШИНА Х У; П(Х,У);
Л(Х,У+15);              Л(Х+15,У+15);
Л(Х+15,У+25);           Л(Х+30,У+25);
Л(Х+30,У+15);           Л(Х+35,У+15);
Л(Х+35,У+20);           Л(Х+70,У+20);
Л(Х+70,У); Л(Х+65,У);
П(Х+57.5,У); К(7.5);      П(Х+50,У);
Л(Х+30,У); П(Х+22.5,У);
К(7.5); П(Х+15,У); Л(Х,У); КНЦ;
43—>У; 100—>Х; 0—>А;
ПОКА А/=6::   Р(170,90);    П(0,27);
Л(170,27); П(35,27);
Л(35,37.5);     Л(10,37.5);     Л(20,50);
Л(15,50); Л(25,60);
Л(20,60);   Л(30,70);            Л(25,70);
Л(37.5,82.5); Л(50,70);
Л(45,70); Л(55,60); Л(50,60); Л(60,50);
Л(55,50); Л(65,37.5);
Л(40,37.5);  Л(40,27.5);       МАШИНА
(Х,У);  Х—10—>Х;  А+1—>А  ВСЕ;
.КОНЕЦ;
```

Задание 6.1. *Составить программу для заполнения рамки 100 на 100 мм прямоугольной сеткой с шагом 2 мм по оси абсцисс и 5 мм по оси ординат.*

Задание 6.2. *Составить программу для печати таблицы значений выражения*

$$\frac{X(X^2+1)+(X+2)(X^2-1)^2}{(X^3+4)^2}$$

для натуральных X от 1 до 25.

Задание 6.3. *Составить программу для рисования мультфильма, изображающего два перегоняющих друг друга самолета.*

Г. Звенигородский

Советуем купить

Математика

Антонов Н. П. и др. Сборник задач по элементарной математике. (Пособие для самообразования.) Цена 90 к.

Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. Цена 25 к.

Коксетер Г. С. Новые встречи с геометрией. Цена 50 к.

Физика

Козел С. М. и др. Сборник задач по физике. Цена 30 к.

Маковецкий П. В. Смотри в корень! (Сборник любопытных задач и вопросов.) Цена 80 к.

Образованный ученый. (Сборник переводов, посвященных вопросам подготовки молодых физиков в Великобритании.) Цена 30 к.

Полищук В. Р. Как разглядеть молекулу. Цена 90 к.

Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 6. Электродинамика. Цена 1 р. 54 к.

Фейнмановские лекции по физике. Выпуски 8, 9. Квантовая механика. Цена 2 р. 40 к.

Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. Цена 2 р. 30 к.

Шкловский И. С. Вселенная, жизнь, разум. Цена 1 р. 08 к.

Заказы (открытками) направляйте по адресу: 103031, Москва, Петровка 15, Магазин № 8 «Техника».

На пути в большую науку

В начале октября 1979 года во всероссийском пионерском лагере «Орленок» проходил IV Всесоюзный слет юных астрономов и космонавтов. На слет приехали 560 учащихся 6—8 классов из всех союзных республик — члены кружков астрономии и космонавтики при дворцах и домах пионеров и школьников, планетариях и народных обсерваториях, дворцах и домах культуры, станциях юных техников и средних школах, а также при различных отделениях Всесоюзного астрономо-геодезического общества (ВАГО).

Характерная особенность современных астрономических кружков и кружков юных космонавтов — их тесная связь с учеными. Активное участие в деятельности кружков принимают Сибирское отделение АН СССР, Государственный астрономический институт имени Штернберга, Одесская и Шемахинская астрономические обсерватории, Лаборатория космических исследований Ужгородского университета, Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ и другие научные учреждения и организации. Это позволяет кружковцам не только углубленно изучать астрономию и космонавтику, строить различные приборы и модели, знакомиться с методикой научных наблюдений и исследований, но и самим выполнять ряд научных наблюдений, представляющих интерес для астрономии и космонавтики.

Так, члены юношеской секции ВАГО из Томска с 1963 года осуществляют интересную программу наблюдений серебристых облаков. Эти облака, открытые в 1885 году русским астрономом В. Цераским, образуются на высоте 70—95 километров. Их изучение может дать ценную информацию о физических процессах, протекающих в верхних слоях земной атмосферы. За 16 лет наблюдений кружковцы зарегистрировали 162 случая появления серебристых облаков, в том числе 10 случаев — летом 1979 года. В процессе этих наблюдений было проверено высказанное одним из специалистов по серебристым облакам предположение о связи между частотой образования серебристых облаков и солнечной активностью. Оказывается, число появлений серебристых облаков через 1—2 года после очередного максимума солнечной активности сильно убывает, а через 1—2 года после минимума — возрастает.

На протяжении ряда лет систематические метеорные наблюдения проводят юные кружковцы Крымского общества любителей астрономии. Только в 1979 году было зарегистрировано 14 тысяч метеоров, в том числе 2300 из метеорного потока Персеид. Наблюдения кружковцев подтвердили прогноз американских ученых о предстоящем в 1979 году повышении активности этого потока (активность потока Персеид в 1979 году возросла приблизительно в 2 раза по сравнению с 1978 годом).

Интересную программу наблюдений искусственных спутников Земли, по заданию местной станции слежения за искусственными спутниками, выполнили члены астрономического кружка дворца пионеров Ужгорода. В частности, была выявлена определенная зависимость между отклонениями от расчетного времени прохождения спутников через меридиан и высотой кульминации: чем ниже эта высота, тем больше отклонение от расчетных данных. Отсюда следует важный практический вывод — при низких прохождениях искусственных спутников через меридиан необходимо значительно увеличивать время, в течение которого ведется их поиск.

Очень насыщенной была программа очередного слета юных астрономов и космонавтов. В течение шести дней участники слета выступали с докладами и сообщениями о своей работе, принимали участие в диспутах о жизни во Вселенной и космическом будущем человечества, в конкурсе астрономов-наблюдателей и в астрономической олимпиаде.

Впервые на слете была проведена научно-фантастическая игра «Звездный десант». Все участники игры были разбиты на «экипажи звездолетов», которым предстояло совершить рейсы в далекий космос. На линейке открытия игры «Руководитель полетов» летчик-космонавт СССР Н. Н. Рукавишников вручил командирам экипажей полетные задания и объявил 10-часовую готовность. Три часа спустя была объявлена 7-часовая готовность, и командиры получили бортжурналы. При объявлении 4-часовой готовности «звездолетчикам» раздали запасы космической пищи и...«путешествие» началось. А в последний день слета на заседании «Ученого совета 2007 года» (состоявшего из ученых, приехавших в гости к ребятам) экипажи представили отчеты о своих «космических экспедициях». В них вошли описания хода полета, придуманного экипажем космического эксперимента, а также предъявление вещественных доказательств пребывания на других планетах.

Без сомнения, эта оригинальная игра произвела самое яркое впечатление на всех участников и гостей слета.

В. Комаров

II Всероссийский слет актива НОУ

В июле 1979 года в г. Челябинске Министерство просвещения РСФСР, ЦК ВЛКСМ, Всесоюзный совет научно-технических обществ и Челябинский областной совет народных депутатов провели II Всероссийский слет актива научных обществ учащихся *). Напомним, что первые НОУ появились в 1964 году. В 1975 году в Москве был проведен первый Всероссийский слет актива НОУ. В марте 1977 года ЦК ВЛКСМ, Министерство просвещения СССР, ВС НТО и Правление Всесоюзного общества «Знание» утвердили Примерное положение о НОУ. В результате этих мер число НОУ за последнее время значительно выросло, и ныне успешно действуют уже около 300 НОУ.

Место второго слета было выбрано не случайно — Челябинское НОУ, одно из первых в стране, является лауреатом премии Ленинского комсомола, в его 73 секциях и 37 филиалах занимается более 5 тысяч школьников. На счету членов Челябинского НОУ около 2 тысяч творческих работ, около 200 из них опубликованы.

На слете работали 11 секций, на которых было заслушано по 6—15 докладов. Характерным для слета было отличное руководство работой секций. В жюри были представители научных учреждений Москвы, Ленинграда, Челябинска и других городов, и каждый докладчик сразу на секции получал подробный квалифицированный отзыв о достижениях и промахах, допущенных им в работе, о возможных дальнейших усовершенствованиях и изменениях созданного им прибора, о научной ценности поданных им идей.

Итак, всероссийский слет. Собрались лучшие из лучших. Какие же доклады привезли они на слет? Очень разные по тематике и, к сожалению, по качеству. Были доклады, отражающие большую самостоятельную работу ребят, создавших что-то свое, новое, нужное школе, колхозу или заводу. Но были и рефераты по опубликованным в популярной литературе статьям, для «создания» которых достаточно было прочитать статью, даже не решая приведенных в ней задач. Председатель совета кураторов Челябинского НОУ Н. Н. Михайлов, выступая на закрытии слета, отметил следующие четыре критерия, которыми руководствовалось жюри слета при оценке работ.

Первый — полезность. Начиная исследование, прямо и мужественно спросите себя — кому это нужно? Что даст ваше исследование? Когда пятиклассник решает занимательные головоломки или изобретает занимательные поделки — этому можно и нужно радоваться. Он играет. Но когда в науку начинает играть старшеклассник, когда он берет для исследования задачу, решение которой удовлетворяет лишь его собственное любопытство, но не представляет ни малейшего интереса для науки и практики,— это досадно. Любопытство, интуиция, воображение — необходимые качества исследователя. Но хотелось бы, чтобы эффективность и качество — два слова, ставшие девизом десятой пятилетки — стали девизом и юношеской науки, чтобы результаты ваших исследований, какими бы скромными они ни были, оказались бы полезными. Поэтому жюри очень высоко оценивало исследования, имеющие выход в производство, в школьную жизнь, в решение реальных проблем вашей собственной жизни — учебы, досуга, быта, отдыха. Хотелось бы, чтобы таких исследований было больше, чтобы союз «школа + наука + производство» был крепче.

Второй критерий — серьезность работы. Здесь жюри решительно выступило против верхоглядства. Когда человек берется за решение глобальных проблем, не усвоив знаний, содержащихся в школьном учебнике, это производит удручающее, даже комическое впечатление. Ему кажется, что он высказывает гениальные откровения, а он неуч. Он хочет поразить, а оказывается смешным. Помните слова К. Маркса о том, что в науке нет широкой столбовой дороги и что только тот сможет достичь ее сияющих вершин, кто, не боясь усталости и трудностей, карабкается по ее каменистым тропам. Карабкается, а не перепрыгивает, не взлетает! Надо много читать, заниматься самообразованием, надо терпеливо овладевать тем богатством знаний, которое накоплено наукой, надо уметь делать большую, трудную, иногда скучную, но необходимую подготовительную работу. А гениальные, глобальные, масштабные открытия не уйдут. Они только приблизятся.

Третий критерий — самостоятельность, творческий характер работы. Ряд работ, представленных на слет, к сожалению, носил слишком общий, реферативный характер. Школьник добросовестно прочитал и систематизировал то, что написано по заинтересовавшей его проблеме. Это совершенно необходимо. Исследователь должен знать историю вопроса. Но эрудиция — это еще не научное творчество. Жюри особо приветствовало тех авторов, в работах которых отчетливо присутствует эвристическое начало, где присутствует пусть небольшой, но собственный вклад в науку.

Четвертый критерий — культура работы. Любая, самая плодотворная, идея может «не прозвучать», если докладчик не умеет доносить ее до слушателей. Культура умственного труда — это и

---

*) О НОУ см. «Квант», 1975, № 9, 1977, № 9, 1979, №№ 2, 3.

умение работать с литературой, пользоваться словарями и справочниками, это и знание основ библиографии и умение работать в библиотеке, это владение навыками научного анализа и даже умение оформить свою работу надлежащим образом, в частности, указать использованную литературу. Небрежности, неряшливости не должно быть места.

Какие же работы были отмечены жюри?

По математике таких работ было около десяти. Среди них работа Т. Вайнштейн и А. Величко (Новосибирск, школа № 130, 8 класс) «Система анализа первичной структуры белков». Эта работа выполнялась по заказу отдела биохимии НИОХ АН СССР в лаборатории проектирования прикладных систем вычислительного центра. Ребята разработали справочно-информационную систему «Бельчонок-1», позволяющую быстро находить информацию о данном белке *).

И. Нестерова и И. Щербакова (Магнитогорск, школа № 28, 9 класс) в докладе «Опыт применения математических методов для определения уровня развития дошкольников и школьников» рассказали о проведенной ими работе в подготовительной группе детского сада № 137 и с первоклассниками своей школы. Девочки предложили анкету из 5 вопросов и затем обработали ее математическими методами (даже без ЭВМ). Оказалось, что общее развитие дошкольников больше всего характеризуется умением отгадывать загадки и осуществлять классификацию, а первоклассников — умением решать задачи («оперативное мышление»). Эту работу магнитогорские школьницы намерены продолжить далее.

Кафедре химической кибернетики Казанского химико-технологического института передал для использования результаты своей работы О. Максимов (Казань, школа № 18, 9 класс). В своем докладе «Использование уравнений с лимитирующими факторами при моделировании микробиологических процессов» он рассказал о математической модели роста дрожжевых клеток в условиях лимитирования поступающего азота и углерода, по которой была составлена и программа для ЭВМ «Наири-К». Работа эта была выполнена в кружке программирования клуба юных химиков и механиков, члены которого занялись математическим обеспечением научно-исследовательской работы, проводимой студентами и сотрудниками на кафедре химической кибернетики КХТИ.

По секции физики также было немало интересных работ. Так, Л. Майстренко (Волгоград, школа № 111, 9 класс) в докладе «Исследование токов электрохимической коррозии и разработка измерителя скорости коррозии» рассказала о работе, выполненной группой учащихся ее школы совместно с кафедрой физики Волгоградского инженерно-строительного института. А. В. Шильников, зав. кафедрой физики ВИСИ, дал о ней такой отзыв: «Новый способ, исследованный авторами, после всесторонней проверки должен быть предложен для внедрения в практику». Эта работа выполнялась по теме «Разработка и внедрение электрохимической защиты нефтяных резервуаров от коррозии» для объединения «Нижневолжскнефть».

По поручению научно-исследовательской лаборатории Московского института радиотехники, электроники и автоматики выполнял свою работу «Отработка метода регистрации инфракрасных спектров пропускания для изучения зонной структуры твердых тел» А. Михин (Москва, школа № 7, 9 класс). Родному колхозу поможет измеритель влажности почвы, созданный К. Магдой (Городовиковская школа № 1 Калмыцкой АССР, 9 класс).

Не забывают ребята и про школы,— на слет был представлен ряд приборов, которые можно использовать на уроке. Это и установка для демонстрации силы Лоренца с помощью телевизора и сильного магнита, сделанная С. Безвительных (Глазов, школа № 13, 8 класс), и учебно-наглядное пособие «Работа радиолампы», изготовленное О. Тишковым (Орджоникидзе, школа № 7, 8 класс), и демонстрационный ламповый генератор релаксационных колебаний, в процессе создания которого А. Михайлов (Уфа, школа № 62, 8 класс) по заданию учителя физики самостоятельно разобрался в литературе, выбрал схему, «доработал» ее, собрал прибор и определил его характеристики. Назовем еще стенд для исследования законов колебаний маятника, представленный Д. Быховцевым, С. Нечаевым и П. Скобелевым (Куйбышев, школа № 81, 9 класс), и целый конструктор по курсу физики 6 класса, созданный из самых доступных материалов И. Котырло (Шахты, школа № 43, 9 класс).

Из реферативных работ по обеим секциям жюри отметило доклады О. Шильникова (Ленинград, школа № 496, 9 класс) «Шарм» (об элементарных частицах), А. Коваля и Л. Мецгера (Челябинск, школа № 31, 10 класс) «Удержание заряженных частиц переменным магнитным полем», А. Коваля «Сфера в нормированных пространствах» и другие.

Но не только работой секций жил слет. За неделю, проведенную в Челябинске, ребята познакомились со сверстниками, побывали на промышленных предприятиях, в институтах и вузах Челябинска, даже сыграли партию в шахматы с ЭВМ в вычислительном центре политехнического института, осмотрели Всероссийскую выставку творчества школьников. Домой ребята увезут массу впечатлений, новые знания, опыт общения с учеными. И можно быть уверенным, что на следующий слет приедет еще больше ребят, для которых творчество стало неотъемлемой частью их жизни, и, где бы они потом ни работали, кем бы ни стали, они будут творцами и исследователями.

А. Виленкин

---

*) См. «Квант», 1979, № 12.

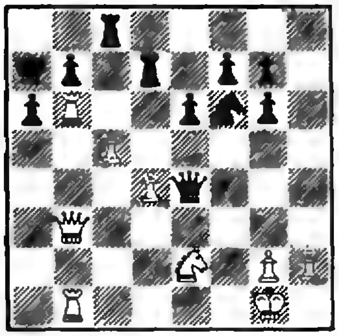
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.
Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Не успели утихнуть страсти после матча в Багио, в котором Анатолий Карпов отстоял свое чемпионское звание, и сильнейшие шахматисты планеты вновь сели за шахматные столики, чтобы в длительном марафоне выявить нового соперника чемпиона мира. В конце прошлого года закончился предпоследний этап этого марафона — два межзональных турнира (один из них проходил в СССР, другой в Бразилии).

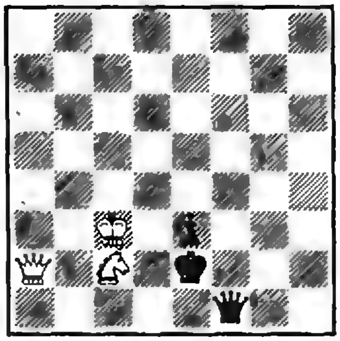
Успешнее всех в межзональных турнирах сыграл экс-чемпион мира Михаил Таль. Он набрал 14 очков из семнадцати возможных, проведя турнир без единого поражения и превзойдя результат Р. Фишера в межзональном турнире 1970 года, который считался выдающимся. Напомним, что на матче в Багио М. Таль был тренером А. Карпова, и, как мы видим, творческий союз гроссмейстеров оказался весьма удачным для обоих.

В школьные годы М. Таль обладал незаурядными математическими способностями, но в дальнейшем ради шахмат «пожертвовал» математикой. О взглядах Таля на шахматное искусство, о занятиях математикой и шахматами можно прочитать в его интервью «Когда катет длиннее гипотенузы» («Квант», 1975, № 9).

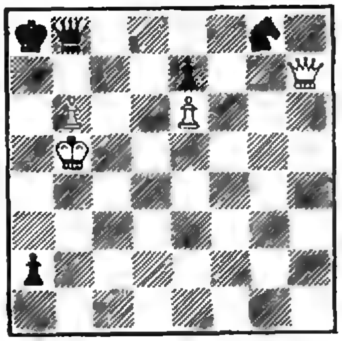
Михаила Таля часто называют волшебником комбинаций и, разумеется, среди сотен его блестящих шахматных произведений трудно выделить какое-то одно. Мы решили остановиться на партии, сыгранной М. Талем в самом памятном для него соревновании — матче с М. Ботвинником, в котором он завоевал титул сильнейшего шахматиста мира. Интересно, что в этом году исполняется ровно 20 лет со времени того матча.



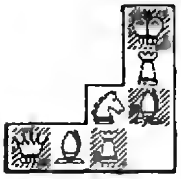
1. М. Таль — М. Ботвинник. Белые выигрывают.



2. М. Таль, Э. Погосянц. Белые выигрывают.



3. И. Клинг. Мат в 14 ходов.



4. В. Шинкман. Поменять местами короля и ферзя.

В позиции № 1 найдите победную комбинацию М. Таля, которой он завершил 17-ю партию матча (ход белых).

Редко случается, чтобы сильные шахматные практики являлись одновременно и шахматными композиторами. Они охотнее решают задачи и этюды, чем составляют их. Тем интереснее вам будет ознакомиться с единственным этюдом М. Таля (№ 2), составленным им совместно с международным мастером по шахматной композиции Э. Погосянцем (кстати говоря, математиком по образованию). Любопытно, что решение этого этюда содержит геометрические мотивы.

Приведем теперь две необычные шахматные задачи. В № 3 все 14 ходов делает белый ферзь. Если вы нарисуете путь, который проходит ферзь в процессе решения, то обнаружите, что он имеет довольно забавный вид.

Задача № 4 относится к жанру сказочных шахмат и напоминает известную игру С. Лойда «15». В ней требуется поменять местами короля и ферзя так, чтобы остальные фигуры обязательно вернулись на первоначальные места.

Решение этой задачи, принадлежащее ее автору, состоит из 107 (!) перемещений. Об этом было указано в книге «Математика на шахматной доске». Однако двум читателям «Кванта» — В. Герасеву из Ленинграда и А. Смулько из Пинска удалось почти втрое ускорить необходимую перестановку — 45 ходов вместо 107. Предлагаем вам найти это рекордное решение (а, может быть, и еще более быстрое!).

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $\{1\}$.

2. $[\log_3 0{,}9;\ 2[$. Указание. Данное неравенство равносильно неравенствам

$$\frac{x+2-\log_3(9-3^x)}{\log_3(9-3^x)-3}\leqslant 0,$$

$$x+2-\log_3(9-3^x)\geqslant 0.$$

(поскольку в области определения $\log_3(9-3^x)-3<0$).

$$\log_3(9-3^x)\leqslant\log_3 3^{x+2},$$
$$0<9-3^x\leqslant 3^{x+2}.$$

3. $x=\frac{5}{4}\pi+2\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.

Указание. $\pi<5-\frac{\pi}{4}<2\pi$.

4. $\frac{5}{8}a$. Решение. Пусть R — радиус окружности и $\widehat{ABC}=\alpha$ (рис. 1). Из $\widehat{BAP}=\frac{\pi}{2}-\alpha$ и $\widehat{QAB}=\widehat{QCB}=\frac{\pi}{2}-\alpha$ вытекает $\widehat{PAQ}=\pi-2\alpha$.
Имеем $|AC|=a=2R\cdot\sin\alpha$, $|PQ|=\frac{6}{5}a=2R\cdot\sin(\pi-2\alpha)=2R\cdot\sin 2\alpha$. Отсюда $\frac{|PQ|}{|AC|}=\frac{6}{5}=2\cos\alpha$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

Тогда $R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{5}{8}a$.

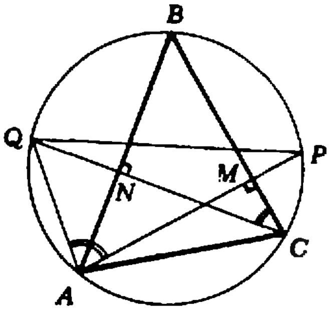


Рис. 1.

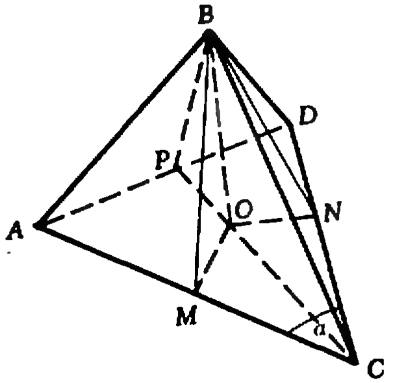


Рис. 2.

5. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Решение. Из того, что плоскости (ABC) и (DBC) перпендикулярны плоскости (ADB), следует, что $(BC)\perp(ADB)$. Высота конуса, о котором говорится в условии, совпадает с высотой тетраэдра, и основанием этой высоты является центр окружности, вписанной в ту грань, на которую опущена высота. Высоты тетраэдра, проведенные из вершин A, D и C, лежат в плоскостях граней; следовательно, вершина конуса может находиться только в вершине B тетраэдра. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ACD (рис. 2), тогда $[BO]$ — высота конуса и тетраэдра. Пусть M, N и P — точки касания этой окружности со сторонами треугольника ACD. Тогда $[BM]\perp(AC)$, $[BN]\perp(DC)$ (по теореме о трех перпендикулярах) и $[BM]\cong[BN]$ (как образующие конуса). Отсюда следует, что прямоугольные треугольники BMC и BNC конгруэнтны и, в частности, $\widehat{BCA}=\widehat{BCD}$. Последнее означает, что прямоугольные треугольники ABC и DBC также конгруэнтны. Но тогда $|AC|=|DC|$, то есть треугольник ACD — равнобедренный, а значит, точка O лежит на отрезке $[CP]$, который является высотой, медианой и биссектрисой треугольника ACD, проведенной из вершины C. Положим $|CO|=a$, тогда $|OP|=|OM|=a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. Отрезок $[BO]$ является высотой в прямоугольном треугольнике CPB, поэтому $|BO|=\sqrt{|PO|\cdot|OC|}=a\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Если β — угол в осевом сечении конуса, то $\widehat{PBO}=\frac{\beta}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{|OP|}{|BO|}=\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Отсюда $\beta=2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

6. $\frac{15}{4}$ км. Решение. Введем систему координат с началом в точке N, как показано на рисунке 3. Точка M имеет координаты $(a;\ 1)$, где a — искомое расстояние, точка K, в которой перевозчик ожидает рыбака, имеет координаты $(x;\ 1)$, причем $x<a$. (Здесь и далее расстояния выражены в километрах, время — в часах, скорости — в км/час.) Пусть $\vec{v}_т$, $\vec{v}_c$, $\vec{v}$ — векторы скорости течения, скорости лодки относительно воды и скорости лодки относительно берега. Вектор $\vec{v}_т$ имеет координаты $(1;\ 0)$, координаты векторов $\vec{v}_c$ и $\vec{v}$ обозначим, соответственно, $(v_{cx};\ v_{cy})$ и $(v_x;\ v_y)$. Из $\vec{v}=\vec{v}_c+\vec{v}_т$ следует $v_x=v_{cx}+1$ и $v_y=v_{cy}$. Пусть T_1 — время движения лодки

из N в K. Тогда $v_x = \frac{x}{T_1}$, $v_y = \frac{l}{T_1}$ и, следовательно, $v_{cx} = \frac{x}{T_1} - 1$, $v_{cy} = \frac{l}{T_1}$. Но $v_{cx}^2 + v_{cy}^2 = v_c^2 = 16$; поэтому $\left(\frac{x}{T_1} - 1\right)^2 + \frac{l}{T_1^2} = 16$, откуда

$$T_1 = \frac{-x + \sqrt{16x^2 + 15}}{15}.$$

Рассмотрев движение лодки из точки K в точку N, аналогично найдем время T_2 этого движения:

$$T_2 = \frac{x + \sqrt{16x^2 + 15}}{15}.$$

Время T_3 движения рыбака от точки M до точки K равно $\frac{a-x}{4}$. По условию $T_1 < T_3$. Множество решений этого неравенства есть интервал $]x_1; x_2[$, где $x_{1,2} = \frac{-11a \mp 4\sqrt{16a^2-9}}{9}$.

Заметим, что $x_1 < 0$, а $x_2 = \frac{-11a + 4\sqrt{16a^2-9}}{9} > \frac{-11a + 4\sqrt{15}a}{9} > 1$, поскольку $a > 3$.

Для $x \in]x_1; x_2[$ время $T(x)$ от отплытия до возвращения лодки определяется формулой $T(x) = T_2 + T_3$.

Находим критическую точку функции T: $x_0 = \frac{11}{12}$. Значит, $x_0 \in]x_1; x_2[$. Поскольку $T'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $T'(x) > 0$ при $x > x_0$, $T(x_0)$ — наименьшее значение функции T на интервале $]x_1; x_2[$. Следовательно, $T(x_0) = \frac{9}{8}$, откуда $a = \frac{15}{4}$.

Вариант 2

1. $]-\infty; -1[$.

2. $\{(3; 2)\}$. Указание. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} y^2 = xy - 2, \\ x(x-y) = 3, \\ x > y > 0. \end{cases}$$

3. $\frac{4\sqrt{5}}{3} R^2$. Решение. Поскольку $\widehat{ABC} = 90°$, диагональ AC трапеции является диаметром окружности, то есть $|AC| = 2R$. Треугольники MND и ACD (рис. 4) имеют общий угол ADC и $|MD| : |AD| = |ND| : |CD|$, поэтому эти треугольники подобны. Отсюда $\widehat{MND} = \widehat{ACD}$, а значит, $[MN] \parallel [AC]$. Но тогда дуги NC и MA, и следовательно, и хорды NC и MA конгруэнтны, то есть $|AM| = |CN|$. Пусть $|AM| = a$, тогда $|BC| = a$, $|AD| = 3a$, $|MD| = 2a$, $|CD| = 3a$. Из прямоугольного треугольника CMD $(\widehat{CMD} = 90°)$ $|CM| = \sqrt{5}a$. Из прямоугольного треугольника AMC $6a^2 = 4R^2$.

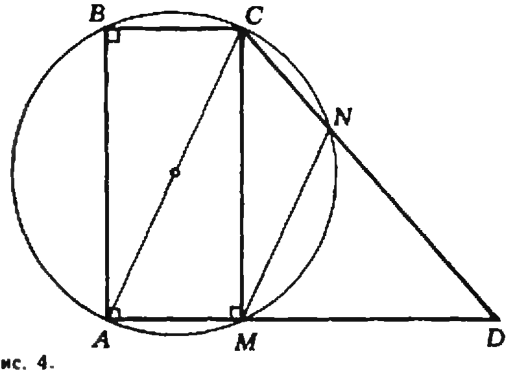


Рис. 4.

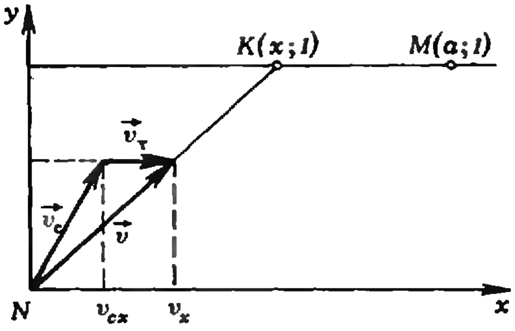


Рис. 3.

4. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + (-1)^l \times \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x\,(1 + \cos x) + \cos x\,(1 - \sin^2 x) = 0.$$

Уравнение $\sin x + \cos x - \sin x \cdot \cos x = 0$ равносильно уравнению $(\sin x + \cos x)^2 - 2(\sin x + \cos x) - 1 = 0$.

5. $\frac{9}{7}$. Решение. Графики скоростей поездов как функций времени изображены на рисунке 5. Здесь T_1, T_2 — время равноускоренного движения поездов, T_0 — момент встречи, T — время прохождения всего пути, v_1, v_2 — скорости равномерного движения поездов. По условию $\frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{3}$, отсюда для искомого отношения ускорений получаем

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{T_2}{T_1}. \qquad (1)$$

Из равенства скоростей в момент T_0 следует, что $v_1 = \frac{v_2}{T_2} \cdot T_0$, то есть

$$T_0 = \frac{3}{4} T_2. \qquad (2)$$

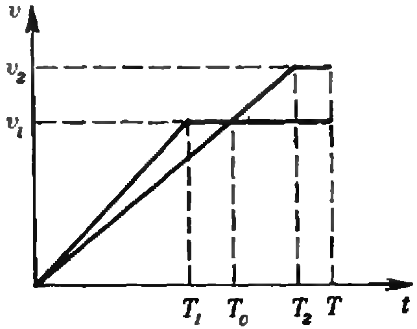


Рис. 5.

Обозначим через S_1, S_2 — пути, пройденные поездами к моменту встречи, а через S — весь путь. Для первого поезда $S_1=\frac{1}{2}v_1T_1+$ $+v_1(T_0-T_1)$, $S=\frac{1}{2}v_1T_1+v_1(T-T_1)$. Для второго $S_2=\frac{1}{2}v_1T_0$, $S=\frac{1}{2}v_2T_2+v_2(T-$ $-T_2)=\frac{4}{3}v_1\left(T-\frac{1}{2}T_2\right)$. Приравнивая выражение для S_1+S_2 к каждому из двух выражений для S и подставляя значение T_0 из (2), получаем два уравнения:

$$\frac{9}{8}T_2-\frac{1}{2}T_1=T-\frac{T_1}{2}=$$

$$=\frac{4}{3}\left(T-\frac{1}{2}T_2\right).$$

Отсюда $T_1=\frac{14}{27}T$, $T_2=\frac{8}{9}T$. Тогда из (1) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{9}{7}$.

6. $\arcsin\frac{1}{3}$. Решение. Обозначим через α угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1. По определению $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Пусть $|BC|=$ $=a$, $|CC_1|=b$. Поместим начало координат в точку C, а оси x, y, z направим по векторам $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CC_1}$. Имеем $\overrightarrow{BD_1}=(-a;\ a;\ b)$. Плоскость (BDC_1) задается уравнением $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b}=1$. Тогда вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к этой плоскости, имеет координаты $\left(\frac{1}{a};\ \frac{1}{a};\ \frac{1}{b}\right)$. Следовательно,

$$\sin\alpha=\cos\left(\widehat{\vec{n},\ \overrightarrow{BD_1}}\right)=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\cdot\sqrt{2a^2+b^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]+5}}.$$

Легко проверить, что $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2>2$, причем $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=2$ только при $a=b$ (напоминаем, что $a>0$, $b>0$). Следовательно, $\sin\alpha<\frac{1}{3}$ при $a\neq b$ и $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ при $a=b$.

Итак, $\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$ при $a=b$; поскольку sin возрастает на $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, при $a\neq b$ имеем $\alpha<\arcsin\frac{1}{3}$. Значит, $\arcsin\frac{1}{3}$ — наибольшее возможное значение для α.

Замечание. $\sin\alpha$ можно найти и чисто геометрически. Очевидно, $\sin\alpha=\frac{h}{|BD_1|}$, где

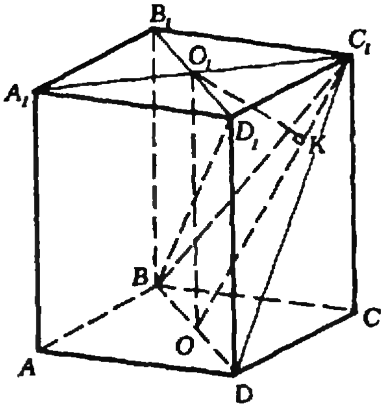


Рис. 6.

h — расстояние от точки D_1 до плоскости BDC_1 (на рисунке 6 $h=|O_1K|$).

Физика

Вариант 1

1. $r=4R$; $|\overrightarrow{v_2}|=|\overrightarrow{v_0}|\cos 30^\circ=|\overrightarrow{v_0}|\sqrt{3}/2$; $|\overrightarrow{v_3}|=$ $=|\overrightarrow{v_0}|\sin 30^\circ=|\overrightarrow{v_0}|/2$; направления скоростей $\overrightarrow{v_2}$ и $\overrightarrow{v_3}$ очевидны из рисунка 7.

2. $\frac{V}{V_0}=\frac{Q}{nC_pT_0}+1\approx 4$;

3. В любой момент времени после замыкания ключа напряжение на сопротивлении R равно по модулю ЭДС индукции на концах катушки: $Ri_R=L\left|\frac{\Delta i_L}{\Delta t}\right|$. Отсюда заряд, протекший через сопротивление R за время Δt, равен $\Delta Q=i_R\Delta t=L/R|\Delta i_L|$. При постоянных значениях L и R полученное соотношение между изменением тока в катушке и зарядом через сопротивление остается справедливым в течение всего времени t установления стационарного режима в цепи. За время t ток через катушку возрастет от нуля до величины $\mathscr{E}/r$. Следовательно, полный заряд, прошедший через сопротивление, равен $Q=\frac{L}{R}\frac{\mathscr{E}}{r}$.

4. $F=2$ см.

Вариант 2

1. $\frac{E_n}{E}=\frac{m_{He}}{m_{He}+m_n}=0{,}8$.

2. $n=\frac{p_1V}{5/6p_0V_0}=333$. Указание. Количество заполненных трубок лимитируется гелием.

3. По закону сохранения энергии $\frac{Q^2}{2C}=$ $=\frac{L_1I_1^2}{2}+\frac{L_2I_2^2}{2}$, где Q — первоначальный заряд на конденсаторе, I_1 и I_2 — максимальные значения силы тока через первую и вторую катушки соответственно. Связь между I_2 и I_1 можно найти двумя способами. 1) В любой момент токи через катушки *1* и *2* обратно пропорциональны индуктивным сопротивлениям катушек: $i_1\sim 1/L_1\omega$ и $i_2\sim 1/L_2\omega$, где ω — частота колебаний контура. Отсюда $i_1/i_2=L_2/L_1$, и $I_1/I_2=L_2/L_1$. 2) В любой

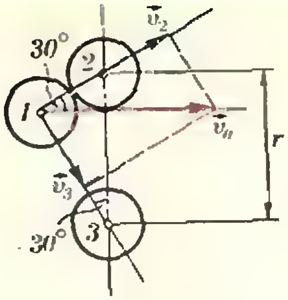


Рис. 7.

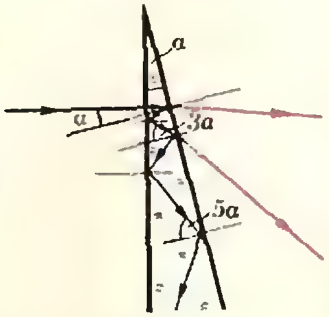


Рис. 8.

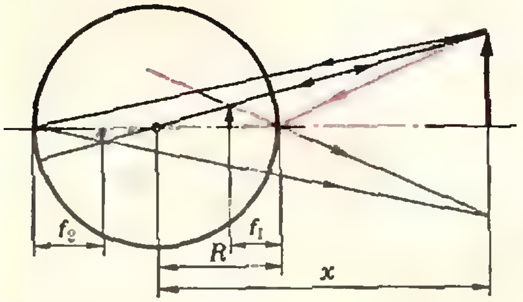


Рис. 9.

момент времени ЭДС индукции на концах обеих катушек одинаковы: $L_1\Delta i_1/\Delta t = L_2\Delta i_2/\Delta t$. Следовательно, $\Delta(L_1i_1-L_2i_2)=0$, или $L_1i_1-L_2i_2=\mathrm{const}$. Но в начальный момент $i_1=i_2=0$, поэтому $L_1i_1-L_2i_2=0$, и $L_1I_1=L_2I_2$. Таким образом, $I_2=I_1L_1/L_2$, и

$$Q=I_1\sqrt{CL_1(L_1+L_2)/L_2}.$$

4. На экране будет видно 2 светлых пятна. Указание. Число лучей, выходящих из клина, ограничивается углом полного отражения (рис. 8).

Вариант 3

1. $T=2\pi\sqrt{2R/g}\approx 7150$ с ≈ 2 ч.

2. $\tau=\tau_{1/2}\log_2\dfrac{\Delta t_0}{\Delta t_1}\approx 2$ ч. Указание. Изменение температуры воздуха пропорционально скорости радиоактивного распада.

3. $U_0=\dfrac{3mL^2}{4e\tau^2}=19{,}5$ В;

$E=\dfrac{1}{4}eU_0\approx 4{,}9$ эВ.

4. $x=10R=20$ см. Указание. Увеличение мнимого изображения, полученного в результате отражения от передней стенки шарика (от выпуклого зеркала радиусом R), равно (рис. 9) $\Gamma_1=\dfrac{f_1}{x-R}=\dfrac{R}{2x-R}$. Аналогично, увеличение действительного изображения, полученного отражением от задней стенки шарика (от вогнутого зеркала радиусом R), равно $\Gamma_2=\dfrac{f_2}{x+R}=\dfrac{R}{2x+R}$.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 1)

1. После **1. Лf5!!** выяснилось, что черные гибнут на поле f7, находящемся на пересечении двух линий — вертикали f и диагонали a2 — g8. Пока что на f7 напала ладья (грозит 2.Ф:f7×), а при взятии ее пешкой — 1... ef в игру неожиданно вступает слон b3. После вынужденного **1... Ф:b3+** последовало **2. cb ef 3. Кf4 Лd8 4. Фh6+ Крe8 5. К:g6 fg 6. Ф:g6+ Крe7 7. Фg5+ Крe8 8. ef Лc8 9. Фg8+ Крe7 10. Фg7+**, и черные сдались, так как решает марш пешки f.

2. **1. Крg7! h4 2. Крf6! Крb6** (2... h3 3. Крe6 h2 4. c7 Крb7 5. Крd7 с ничьей) **3. Крe5 Кр:c6** (3... h3 4. Крd6 h2 5. c7 с ничьей) **4. Крf4 h3 5. Крg3 h2 6. Кр:h2** ничья. Этот парадоксальный этюд построен на «геометрических» свойствах шахматной доски — кратчайшее расстояние на ней измеряется не обязательно по прямой. В данном примере путь короля от h8 до h2 занимает 6 ходов как при прямолинейном движении, так и при зигзагообразном; однако во втором случае черные вынуждены потратить два темпа, и их «неудержимую» пешку удается догнать.

3. Задача называется «Погони любви». После **1. Фf1!** белый ферзь всюду преследует черного слона. В случае 1... Сb2 или при движении пешки h решает 2. Фb1! с неизбежным матом Ф:h7× или Ф:a1× (при 2... g6). Аналогично на 1... Сc3 (Сd4) следует 2. Фd3!, а на 1... Сe5 (Сf6) — 2. Фf5!; в обоих случаях с двойным нападением на слона и пешку h7. Наконец, 1...g3 (1... g6, g5 2. Ф:a1×) 2. Кg6+! hg 3. Фh3×.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 1)

2.18.

3. Поскольку каждый раз количество листочков увеличивается на $4n$, мы можем получить только числа, представимые в виде $4n+1$. Значит, 1980 листочков получить нельзя.

4. Общая масса гирь может достигать 30 кг — если мы возьмем 3 гири по 10 кг. Покажем, что больше 30 кг общая масса гирь не может быть. Предположим противное — пусть общая масса больше 30 кг. Возьмем одну из гирь и будем добавлять к ней по одной гире. Остановимся в тот момент, когда масса получившейся кучки впервые превысит 10 кг. В этот момент масса кучки не может быть больше 20 кг, поскольку на предыдущем шаге она была меньше 10 кг, а масса одной гири не превосходит 10 кг. Поскольку общая масса гирь больше 30 кг, масса остальных гирь также больше 10 кг.

Итак, мы получили разбиение на две кучки, масса каждой из которых больше 10 кг. Противоречие.

5. $16^2=256$.

6. Поскольку B^2 — четырехзначное число, $B>31$. Поскольку kB — двузначное число и $B>31$, $k<4$. Кроме того, $B<50$.

Вычитая равенства

$$\begin{cases}(kB)^2=\overline{dcba},\\ B^2=\overline{abcd},\end{cases}$$

получаем

$$B^2(k^2-1)=9(111d+10c-10b-111a).$$

Отсюда следует, что B делится на 3.

Складывая те же два равенства, получаем

$$B^2(k^2+1)=11(91a+10b+10c+91d),$$

откуда B делится на 11.

Поэтому $B=33$.

7. Нет, не имеет. Докажите это, рассмотрев два возможных случая: а) все числа x, y, z — четные; б) два из этих чисел — нечетные, и одно — четное.

Арифметика по-рыбацки

(см. «Квант» № 1, 3-ю страницу обложки)

1. $4\cdot 18324=73296$.
2. $561092:7=80156$.
3. $10295\cdot 8=82360$.
4. $\begin{cases}408\cdot 22=8976,\\ 8976\cdot 2=17952.\end{cases}$
5. $(128)^2=16384$.
6. $\begin{cases}3612\cdot 6=21672,\\ 3612:6=602.\end{cases}$
7. $69730+69730=139460$.
8. $\begin{cases}6804\cdot 6=40824,\\ 6804:36=189.\end{cases}$

Поговорим о дифференциальных уравнениях

(см. «Квант» № 1)

1. $y=2+3e^{-2t}$.

2. $t=\dfrac{30\ln 100}{\ln 2}\approx 199$ (дней).

3. Дифференциальное уравнение $T'(t)=-k(T(t)-20)$; начальное условие $T(0)=100$; решение $T(t)=20+80e^{-kt}$.
Ответ. Через 40 минут.

4. В 729 раз.

5. Искомая высота равна $h=\dfrac{b\ln 2}{g}\approx 5{,}45$ км.

6. Дифференциальное уравнение $V'=-kV$; начальное условие $V(0)=2$; решение $V(t)=2e^{-kt}$; так как $V(4)=1$, $k=\dfrac{\ln 2}{4}$ и $V(t)=2^{1-\frac{1}{4}t}$. Следовательно, $V(t)=0{,}25$, если $1-\frac{1}{4}t=-2$, то есть при $t=12$ с. Длина пути дается формулой

$$S(t)=\int_0^t V(u)\,du=\frac{8}{\ln 2}\left(1-2^{-\frac{1}{4}t}\right),$$

поэтому лодка может пройти путь, не больший $\dfrac{8}{\ln 2}\approx 11{,}5$ м.

7. Так как $\omega^2\cdot 1$ м $=4$ м/с^2, $\omega=2c^{-1}$ и период $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi\approx 3{,}14$ с; так как $\omega^2=g/l$, $l=g/\omega^2\approx 2{,}45$ м.

8. Для функции $z=y\dfrac{a}{\omega^2}$ получаем дифференциальное уравнение $z''=-\omega^2 z$, поэтому $y=\dfrac{a}{\omega^2}+A\cos(\omega t+\varphi)$.

В чем дело?

(см. «Квант» № 1, с. 17)

Васин способ доказывает только, что *если* $a<5$, *то уравнение* (1) *не имеет решений*, но он не доказывает обратного утверждения: *если уравнение* (1) *не имеет решений, то* $a<5$, а без него ответ: *уравнение* (1) *тогда и только тогда не имеет решений, когда* $a<5$ — не получается.

Заочная школа программирования

Ответы к урокам 4 и 5 будут опубликованы в следующих номерах журнала.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Т. Кольченко, Г. Красиков,
Э. Назаров, И. Смирнова

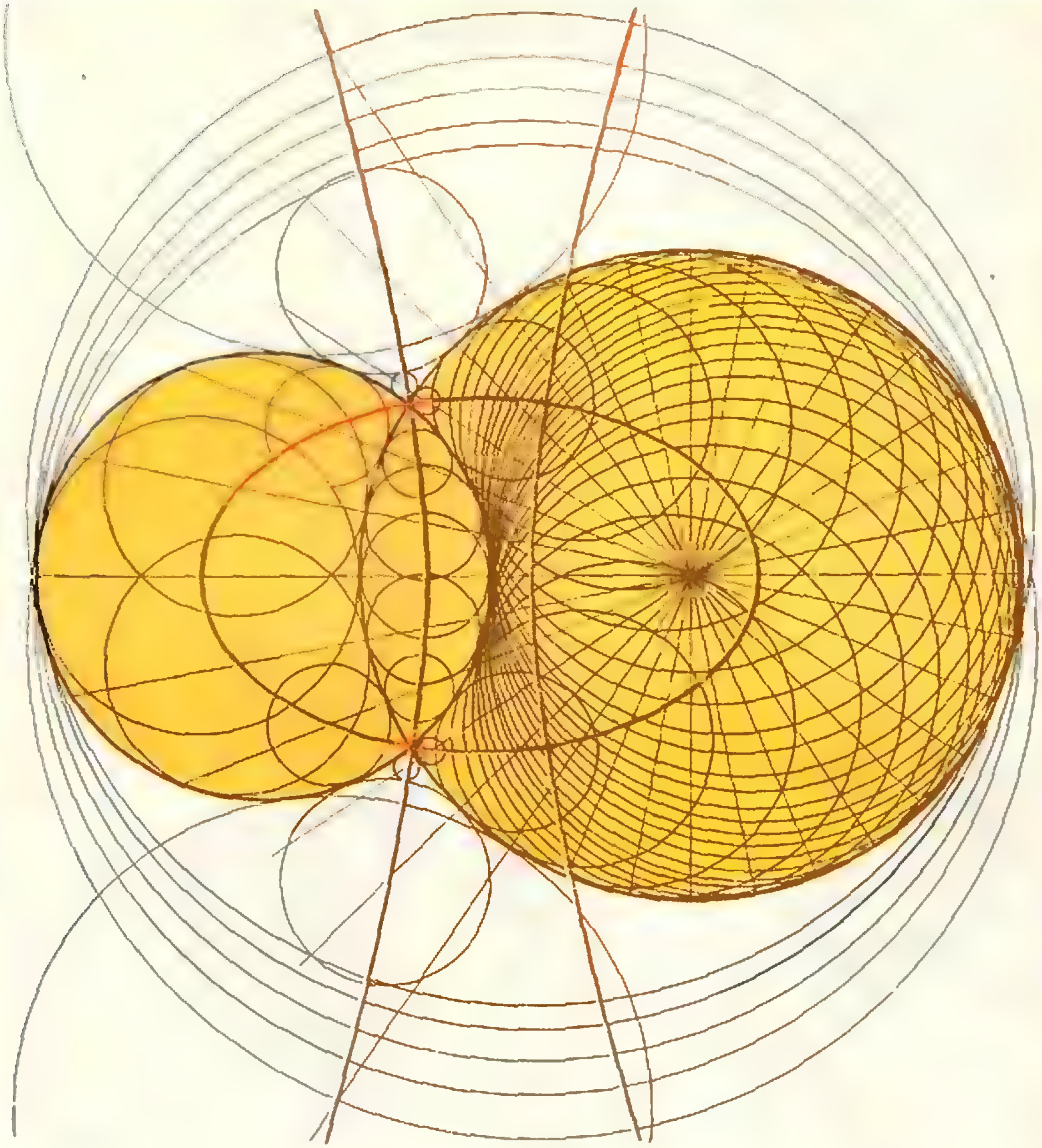
Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

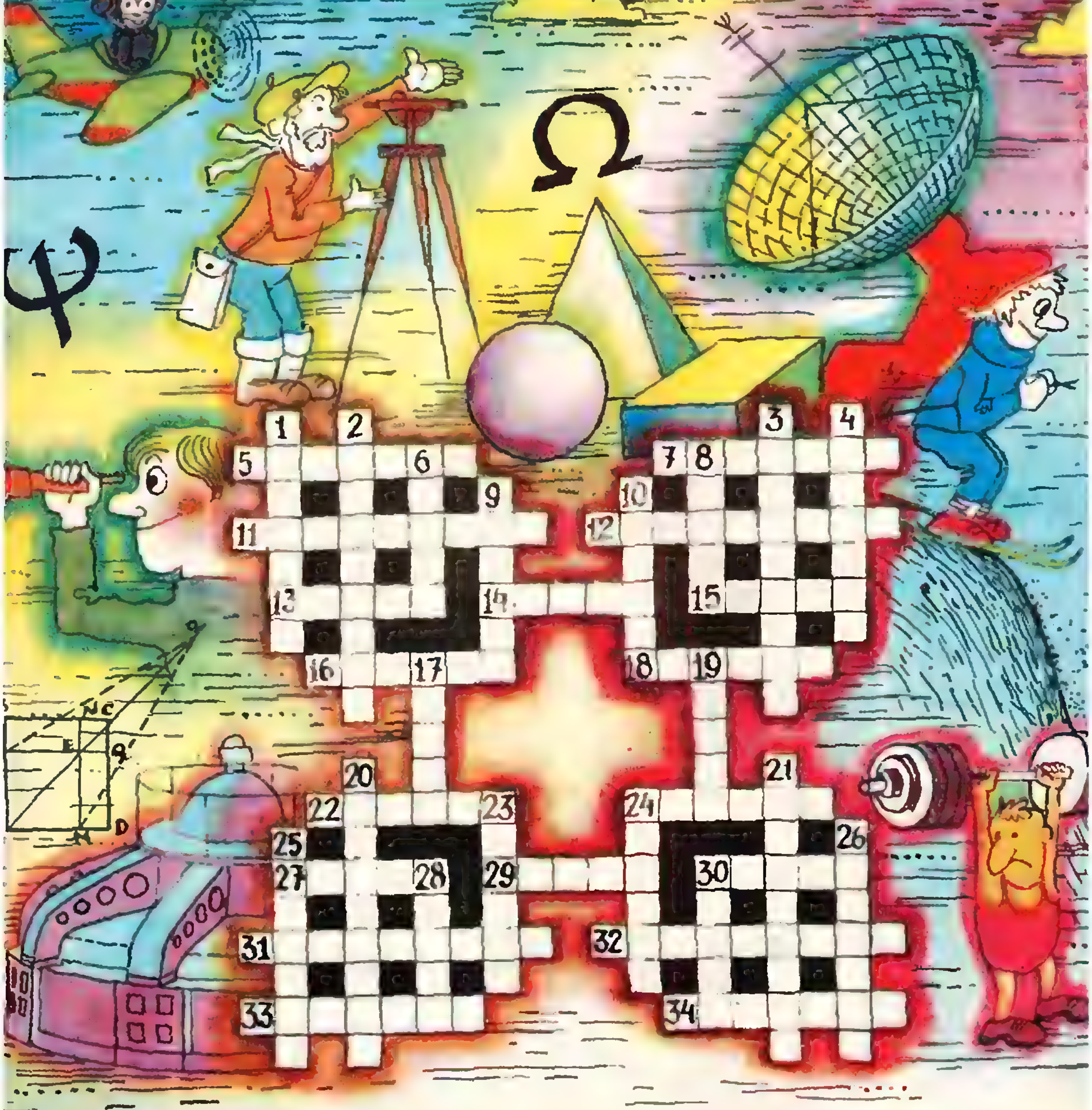
Корректоры О. Кривенко, Т. Панькова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 19.12.79. Подписано в печать 24.01.80.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,03. Т-01115.
Цена 30 коп. Заказ 3010.
Тираж 265 682 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области



Красные линии: эллипс и гипербола — проходят через центры двух семейств окружностей. Окружности этих семейств (они обозначены тонкими черными линиями) касаются двух пересекающихся кругов, закрашенных желтым цветом. Получившаяся конфигурация — не просто причудливая выдумка художника; она тесно связана с математической «классикой»: коническими сечениями и задачей Аполлония. Подробнее см. с. 33.



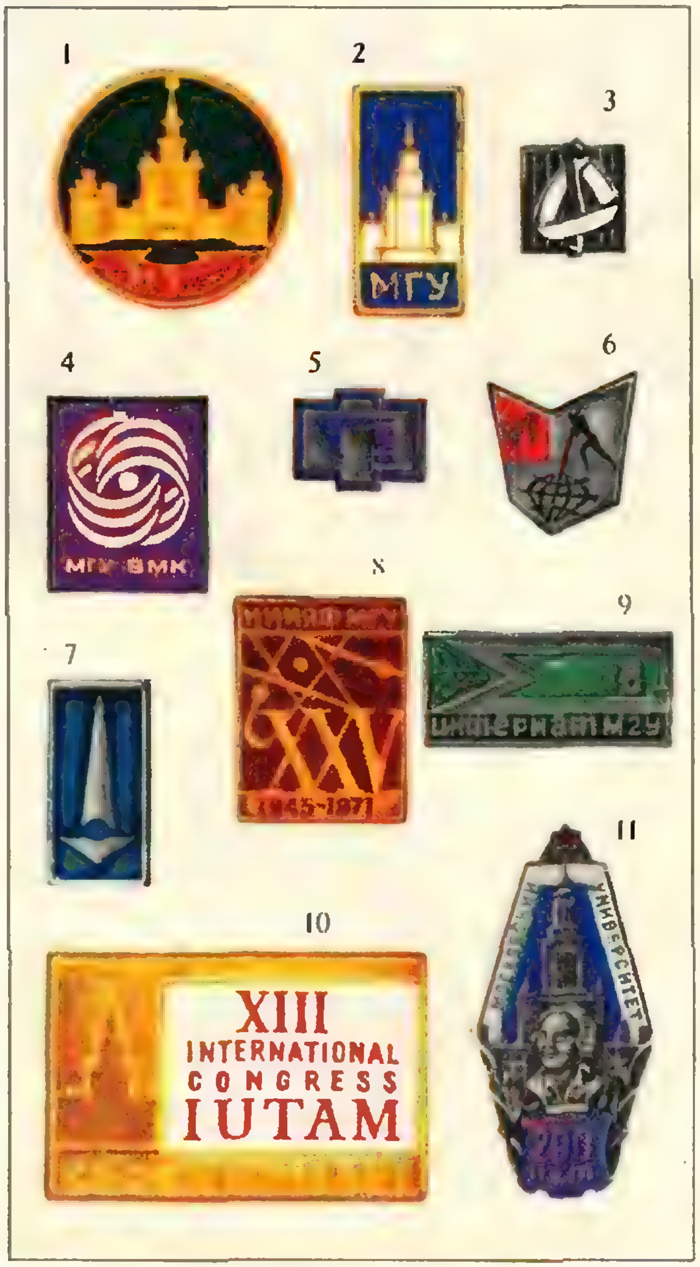
КРОССВОРД

По горизонтали: 5. Магнитоэлектрический генератор переменного тока. 7. Французский математик и механик XVIII—XIX вв. 11. Отрезок прямой, соединяющий две вершины многоугольника, не лежащие на одной стороне. 12. Прибор для измерения расстояний. 13. Одно из основных исходных понятий геометрии. 14. Французский физик и математик, один из основателей электродинамики. 15. Норвежский математик XIX в. 16. Тригонометрическая функция. 18. Простейшее устройство для фиксации направления на предмет. 22. Немецкий астроном, открывший законы движения планет. 24. Американский математик XX в. 27. Диффузия растворителя через полупроницаемую мембрану, разделяющую раствор и растворитель. 29. Английский физик—теоретик, один из основателей квантовой механики. 30. Французский физик, в честь которого названа единица количества электричества в международной системе единиц. 31. Наибольшее или наименьшее значения функции. 32. Искусственно полученный радиоактивный элемент семейства актиноидов. 33. Математический знак для обозначения действия извлечения корня. 34. Определение местоположения объекта по отражению от него звука.

По вертикали: 1. Французский физик XVII в. 2. Выражение вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_{n-1}x+a_n$, где x — переменная. 3. Точка пересечения высот треугольника. 4. Польский физик—теоретик. 6. Единица массы. 8. Первая буква греческого алфавита. 9. Один из языков программирования. 10. Место, занимаемое цифрой при письменном обозначении числа. 17. Сокращенное название ряда языков программирования. 19. Химический элемент VIII группы периодической системы Менделеева. 20. Раздел математики, изучающий пространственные отношения и формы. 21. Прямая, пересекающая заданную прямую под острым углом. 23. Отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром. 24. Общее название частиц, образующих атомные ядра. 25. Гидравлический механизм для подъема тяжелых штучных грузов. 26. Гипотетический мир, состоящий из антивещества. 28. Замкнутая поверхность, все точки которой одинаково удалены от одной точки. 30. Французский физик, один из основателей термодинамики.

А. Жуков

Индекс 70465
Цена 30 коп.



МГУ НА ЗНАЧКАХ

Главное здание Московского университета на Ленинских горах, замечательное произведение архитектуры, ставшее символом советской науки и высшей школы, неоднократно изображалось на художественных значках (1,2). Интересны «профессиональные» значки факультетов и научных подразделений МГУ. Вот некоторые из них: (3) — механико-математический факультет, (4) — факультет вычислительной математики и кибернетики, (5) и (6) — физический факультет (на первом — стилизованное изображение популярного среди студентов-физиков символа $\sqrt{!}$, идею второго подсказала известная фраза Архимеда «Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю!»), (7) — научно-исследовательский институт механики, (8) — научно-исследовательский институт ядерной физики (значок выпущен к 25-летию НИИЯФ). При МГУ создана специализированная физико-математическая школа-интернат № 18; ее выпускники получают специальный значок (9). В МГУ проходят всесоюзные и международные научные конференции и конгрессы. На членских значках участников этих форумов часто можно видеть силуэт главного здания МГУ (10) — значок участника конгресса Международного союза теоретической и прикладной механики). Последний значок (11) был выпущен в связи с 200-летним юбилеем Московского университета.

Н. Розов

НОМЕР
3

Основан в 1970 году

Квант

3
1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *В. Болтянский.* Перемещения плоскости

9 *В. Фабрикант.* Физика люминесцентных ламп

Лаборатория «Кванта»

18 *В. Майер.* Оптические опыты с глазом

Математический кружок

21 *М. Шкапенюк.* Выпуклость функций и доказательство неравенств

Задачник «Кванта»

25 Победители конкурса «Кванта»

26 Задачи М611—М615; Ф623—Ф627

28 Решения задач М557—М561; Ф568—Ф572

36 Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

«Квант» для младших школьников

37 Задачи

38 *Ф. Бартенев.* Блуждающие фишки

Практикум абитуриента

41 *В. Можаев.* Закон всемирного тяготения

44 *Н. Болотина, В. Вильке, С. Кротов.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Искусство программирования

48 Заочная школа программирования. Уроки 7 и 8

54 Олимпиада по программированию

Рецензии, библиография

57 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги

59 *Н. Розов.* Прикладная математика: интересно, актуально, перспективно!

Наша обложка

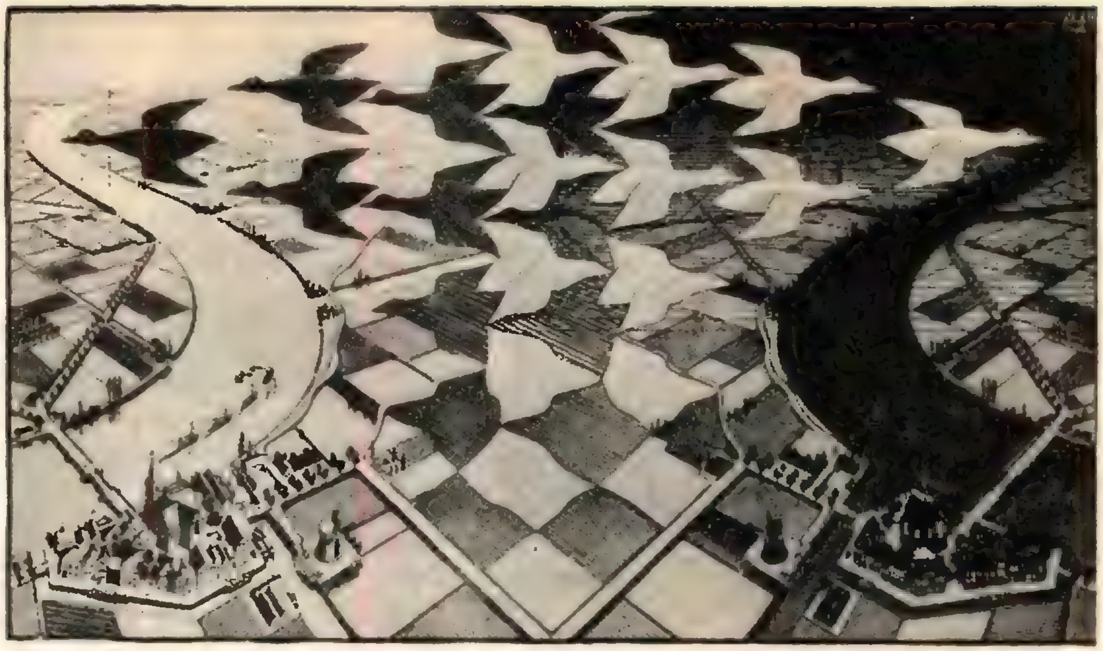
61 **Шахматная страничка**

62 **Ответы, указания, решения**

Смесь *(8, 17, 40)*

Повторяющийся узор
голландского
художника Эшера,
изображенный
на первой странице обложки,
самосовмещается
многими
перемещениями плоскости.
О перемещениях плоскости
вы можете
прочитать на с. 2

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1980



В. Болтянский

Перемещения плоскости

Перемещение плоскости естественно представлять с точки зрения механики как движение одного нерастяжимого листа по другому. Оказывается, такие движения бывают только четырех типов. Об этом и о свойствах перемещений, полезных для решения задач, рассказано в этой статье.

1. Наглядное описание перемещений

Пусть g — произвольное отображение плоскости на себя. Отображение g называется *перемещением плоскости*, если оно сохраняет расстояния, то есть для любых точек A, B этой плоскости справедливо равенство

$$|g(A)g(B)| = |AB|.$$

Наглядно перемещение плоскости можно описать следующим образом. Будем представлять себе плоскость в виде двух наложенных один на другой листов, верхний из которых прозрачен. На нижнем листе отмечены несколько точек; те же точки отмечены и на верхнем листе. Переложив прозрачный лист в новое положение, мы увидим как первоначальные положения точек (на нижнем, непрозрачном листе), так и новые их положения (на прозрачном листе). При этом (если материал листов нерастяжим) расстояние между любыми двумя точками в первоначальном положении равно расстоянию между точками, в которые они перешли в результате перекладывания прозрачного листа в новое положение. Таким образом, это перекладывание сохраняет расстояния, то есть оно представляет собой наглядную модель перемещения.

Заметим, что описанное перекладывание не обязательно осуществлять *с помощью «непрерывного скольжения»* прозрачного листа по непрозрачному. Мы можем также снять прозрачный лист, перевернуть

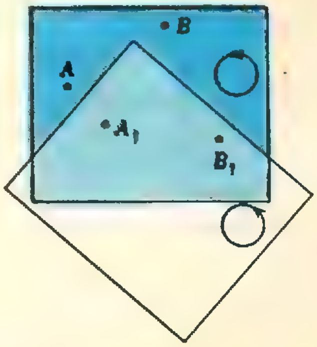


Рис. 1.

его на другую сторону («изнанку») и снова наложить на непрозрачный.

Пусть теперь в плоскости заданы две пары точек A, B и A_1, B_1, причем $|AB|=|A_1B_1|\neq 0$. Описанная выше наглядная модель перемещения подсказывает, что существуют ровно два перемещения плоскости, переводящие точку A в A_1 и точку B в B_1.

В самом деле, при помощи скольжения прозрачного листа по непрозрачному можно найти только одно положение прозрачного листа, при котором отмеченные на нем точки A, B совпадут соответственно, с точками A_1, B_1 на непрозрачном листе (рис. 1). Можно поступить и иначе: сначала перевернуть прозрачный лист на обратную сторону, а затем совместить отмеченные на нем точки A, B с точками A_1, B_1 на непрозрачном листе. Других перемещений (кроме двух указанных), переводящих точки A, B соответственно в A_1, B_1, не существует. Мы видим, что:

Если $|AB|=|A_1B_1|$ *(причем* $A\neq B$*), то существуют ровно два перемещения плоскости, переводящие точки* A, B *соответственно в* A_1, B_1.

Разумеется, проведенный «мысленный эксперимент» с описанной наглядной моделью нельзя считать математическим доказательством сформулированного утверждения — это можно считать лишь опытным подтверждением. В математике же сформулированное утверждение принимается (в рамках школьной геометрии) без доказательства, т. е. представляет собой аксиому; ее называют *аксиомой подвижности* *) плоскости.

2. Классификация перемещений плоскости

Три вида перемещений известны еще из курса 5 класса: *осевая симметрия, центральная симметрия* и *параллельный перенос*. Центральная симметрия является частным случаем *поворота* (она представляет собой поворот на 180°), который изучается в 6 классе.

Нам понадобится еще один вид перемещений — так называемая скользящая симметрия. Именно, пусть l — некоторая прямая на плоскости, s — симметрия относительно прямой l, а t — параллельный перенос в направлении прямой l, не являющийся тождественным отображением. Композиция $s\circ t$ этих перемещений и называется *скользящей симметрией* с осью l. Заметим, что перемещения s и t перестановочны: $s\circ t=t\circ s$. Заметим также, что l — единственная прямая, которая при скользящей симметрии $s\circ t$ переходит сама в себя.

Итак, мы имеем четыре частных случая перемещений: поворот, параллельный перенос, осевая симметрия, скользящая симметрия. Следующая теорема показывает, что этими частными случаями и исчерпываются все перемещения плоскости:

Теорема 1. *Произвольное перемещение плоскости представляет собой либо поворот, либо параллельный перенос, либо осевую симметрию, либо скользящую симметрию.*

Доказательство. Пусть g — перемещение плоскости, отличное от тождественного (тождественное перемещение можно считать параллельным переносом на нулевой вектор). Тогда существует такая точка A, что $g(A)\neq A$. Положим $B=g(A)$, $C=g(B)$. Рассмотрим теперь три возможных случая:

а) Точки A, B, C не лежат на одной прямой, то есть являются вершинами треугольника ABC. Обо-

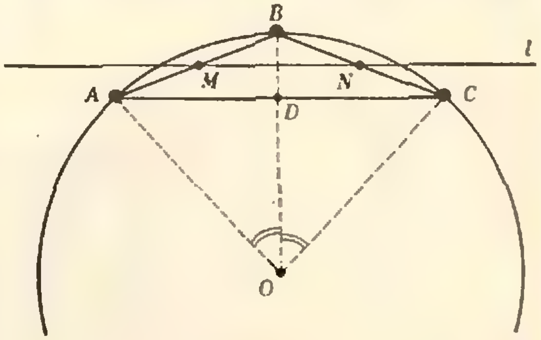


Рис. 2.

---

*) В учебнике «Геометрия 6—8» (М., «Просвещение», 1979) эта аксиома сформулирована несколько иначе (с. 374): предоставляем читателю убедиться, что приведенная здесь формулировка равносильна имеющейся в учебнике.

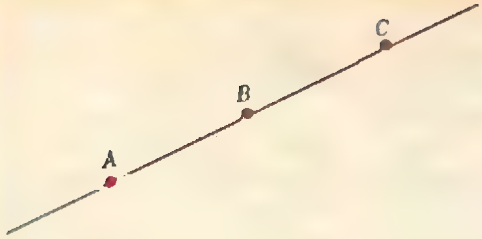


Рис. 3.

значим через O центр окружности, описанной около этого треугольника (рис. 2), а через l — прямую, проходящую через середины M, N сторон $[AB]$ и $[BC]$. Треугольник ABC — равнобедренный (перемещение g переводит точки A, B в B, C, поэтому $|AB| = |BC|$. Следовательно, поворот r с центром O, переводящий точку A в B, переводит точку B в C. Далее, обозначим через s симметрию относительно прямой l, через t — параллельный перенос, переводящий точку M в N. Тогда скользящая симметрия $h = s \circ t$ переводит точку A в B, а точку B в C. Итак, мы нашли два перемещения r и h, каждое из которых переводит точки A, B соответственно в B, C. Третьего такого перемещения не существует (согласно аксиоме подвижности плоскости). Следовательно, перемещение g, которое тоже переводит A, B соответственно в B, C, должно совпадать либо с r, либо с h, то есть в рассматриваемом случае g является либо поворотом, либо скользящей симметрией.

б) Точки A, B, C лежат на одной прямой, причем $A \neq C$. Так как $|AB| = |BC|$, то B — середина отрезка AC (рис. 3). Обозначим через s_1 симметрию относительно прямой (AC), а через t_1 — параллельный перенос, переводящий точку A в B. Каждое из перемещений t_1 и $h_1 = s \circ t_1$ переводит точки A, B соответственно в B, C. Как и в случае а), отсюда следует, что g совпадает либо с t_1, либо с h_1, то есть в рассматриваемом случае g является либо параллельным переносом, либо скользящей симметрией.

в) Точки A и C совпадают, то есть $g(A) = B$, $g(B) = A$ (рис. 4). Обозначим через r_2 центральную симметрию относительно середины O отрезка AB, а через s_2 — симметрию относительно прямой l_2, проходящей через O и перпендикулярной (AB). Каждое из перемещений r_2, s_2 переводит точки A, B соответственно в B, A. Отсюда, как и в предыдущих случаях, вытекает, что g совпадает с одним из перемещений r_2, s_2, то есть в этом случае g является либо центральной симметрией (и, значит, поворотом), либо осевой симметрией. Теорема доказана.

3. Перемещения и ориентация

Продолжим наглядные рассуждения, связанные с моделью, рассмотренной в начале статьи. Условимся считать, что на плоскости задано положительное направление отсчета углов. (Обычно на чертежах за положительное направление принимают направление против часовой стрелки.) Чтобы не забыть об этом соглашении, можно в уголке чертежа изобразить окружность, на которой стрелкой указано положительное направление отсчета углов.

Если некоторое перемещение описывается в нашей наглядной модели как результат скольжения плоско-

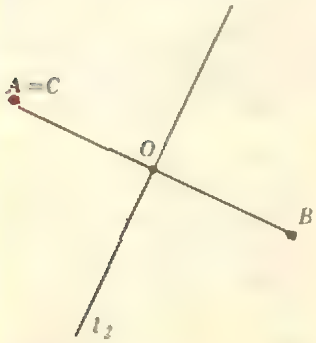


Рис. 4.

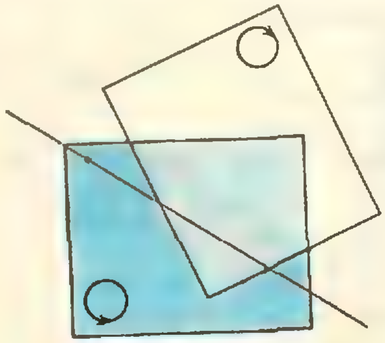


Рис. 5.

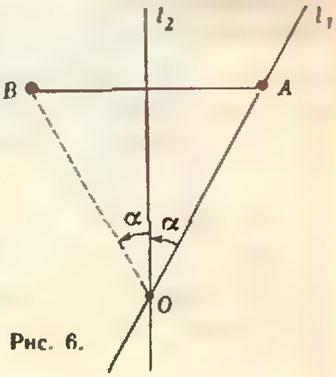


Рис. 6.

сти по себе, то положительное направление отсчета углов при таком перемещении не меняется (рис. 1). В этом случае говорят, что произведено перемещение, *сохраняющее ориентацию.* Например, поворот и параллельный перенос могут быть осуществлены в результате скольжения плоскости по себе, то есть они являются перемещениями, сохраняющими ориентацию.

Если же для осуществления перемещения мы перекладываем верхний (прозрачный) лист на обратную сторону, то окружность, на которой вначале было изображено направление обхода против часовой стрелки, перейдет в окружность с изображенным на ней направлением обхода по часовой стрелке. В этом случае говорят, что произведено перемещение, *меняющее ориентацию.* Например, осевая симметрия является перемещением, меняющим ориентацию (рис. 5).

Легко понять, что если каждое из перемещений f, g сохраняет ориентацию, то и их композиция $g \circ f$ будет перемещением, сохраняющим ориентацию. В самом деле, окружность l, на которой отмечено направление обхода против часовой стрелки, перейдет при перемещении f в окружность l_1 с направлением обхода также против часовой стрелки (так как f сохраняет ориентацию). В свою очередь при перемещении g окружность l_1 перейдет в окружность l_2 с направлением обхода также против часовой стрелки (так как g сохраняет ориентацию). При перемещении $g \circ f$ окружность l (с имеющимся на ней направлением обхода против часовой стрелки) перейдет в окружность l_2 с тем же направлением обхода. Таким образом, перемещение $g \circ f$ сохраняет ориентацию. Рассуждая аналогично, мы получим следующее утверждение:

Теорема 2. *Если каждое из перемещений f, g сохраняет ориентацию или если каждое из них меняет ориентацию, то их композиция $g \circ f$ является перемещением, сохраняющим ориентацию. Если же одно из перемещений f, g сохраняет, а другое меняет ориентацию, то $g \circ f$ является перемещением, меняющим ориентацию.*

Чтобы проще было запомнить эту формулировку, условимся считать перемещения, сохраняющие ориентацию, «положительными», а перемещения, меняющие ориентацию, — «отрицательными». Тогда для композиции перемещений будет действовать то же правило знаков, что и для умножения действительных чисел: если f и g имеют одинаковые «знаки», то результат «положителен», а если разные — «отрицателен».

Заметим, что скользящая симметрия (она определялась, как композиция осевой симметрии и параллельного переноса) является, согласно теореме 2, перемещением, меняющим ориентацию. Таким образом, из всех перемещений плоскости, которые перечислены в теореме 1, поворот и параллельный перенос сохраняют ориентацию, а осевая и скользящая симметрия меняют ориентацию.

4. Задачи о композиции перемещений

Применим сказанное в предыдущем пункте к вопросу о нахождении композиции разных перемещений: двух осевых симметрий, поворота и параллельного переноса и т. д. Мы решим три задачи такого рода, а другие задачи предложим читателю для самостоятельного решения.

Задача 1. *Найти композицию $s_2 \circ s_1$ симметрий s_1, s_2 относительно двух пересекающихся прямых l_1, l_2.*

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых l_1 и l_2 (рис. 6). Через α обозначим угол, на который нужно повернуть прямую l_1, чтобы она перешла в l_2. Возьмем точку $A \in l_1$, отличную от O, и положим $B = s_2(A)$. Мы имеем $s_1(O) = O$, $s_2(O) = O$, и потому перемещение $g = s_2 \circ s_1$ переводит точку O в себя. Далее, $s_1(A) = A$, $s_2(A) = B$, то есть $g(A) = B$. Ясно, что поворот r с центром O на угол 2α переводит точку A в B, а точку O в себя. Итак, мы имеем два перемещения r, s_2, каждое из которых переводит точки O, A соответственно в O, B. Так как перемещение $g = s_2 \circ s_1$ тоже пере-

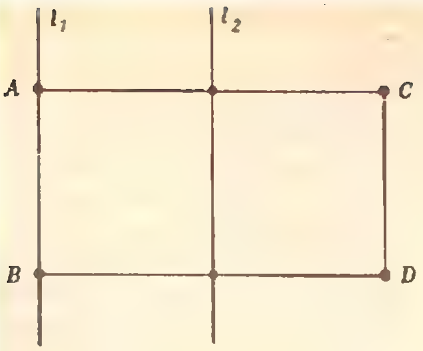


Рис. 7.

водит O, A в O, B, в силу аксиомы подвижности) g совпадает либо с r, либо с s_2. Но с s_2 перемещение g совпадать не может, так как s_2 меняет ориентацию, а g сохраняет (по теореме 2). Следовательно, $g=r$, то есть $s_2 \circ s_1$ есть поворот на угол 2α вокруг точки O.

Задача 2. *Найти композицию $s_2 \circ s_1$ симметрий s_1, s_2 относительно двух параллельных прямых l_1, l_2.*

Решение*). Возьмем две точки $A, B \in l_1$ (рис. 7) и положим $C=s_2(A)$, $D=s_2(B)$. Тогда $ABDS$ — прямоугольник. Обозначим через t параллельный перенос, переводящий точку A в C. Тогда $t(A)=C$, $t(B)=D$. Итак, мы имеем два перемещения t, s_2, каждое из которых переводит точки A, B соответственно в C, D. Так как $g=s_2 \circ s_1$ тоже переводит A, B в C, D, g совпадает либо с t, либо с s_2. Так как при этом g сохраняет ориентацию, то $g=t$. Итак, $s_2 \circ s_1$ есть параллельный перенос.

Задача 3. *Найти композицию поворота и параллельного переноса.*

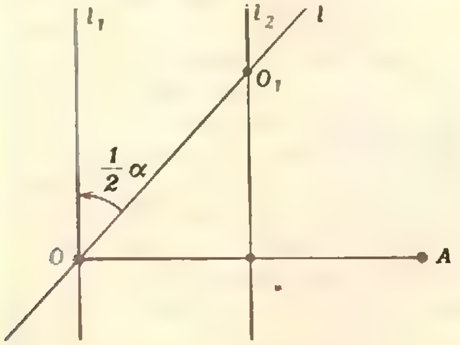


Рис. 8.

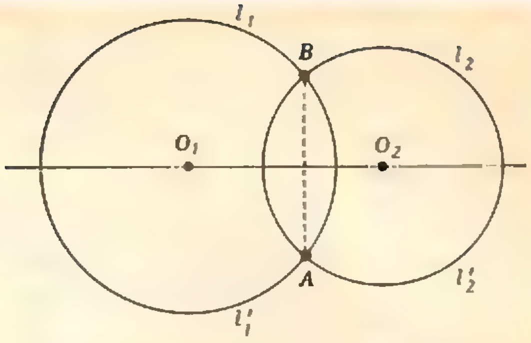


Рис. 9.

Решение. Пусть r — поворот с центром O на угол α (рис. 8), а t — параллельный перенос. Положим $A=t(O)$. Далее, проведем прямые l_1, l_2, перпендикулярные (OA), первая из которых проходит через точку O, а вторая — через середину отрезка OA. Симметрии относительно прямых l_1, l_2 обозначим через s_1, s_2. Тогда из задачи 2 следует $s_2 \circ s_1 = t$. Далее, через l обозначим прямую, проходящую через точку O, из которой l_1 получается поворотом на угол $\frac{1}{2}\alpha$, а через s обозначим симметрию относительно прямой l. Тогда из задачи 1 следует $s_1 \circ s = r$. Значит,

$$t \circ r = (s_2 \circ s_1) \circ (s_1 \circ s) = \\ = s_2(s_1 \circ s_1) \circ s = s_2 \circ s,$$

откуда следует (в силу задачи 1), что $t \circ r$ есть поворот на угол α вокруг точки O_1, в которой пересекаются прямые l_2 и l.

Заметим, что при решении мы воспользовались, во-первых, ассоциативностью операции композиции перемещений (то есть возможностью произвольно расставлять скобки; это свойство справедливо не только для перемещений, но и для любых отображений) и, во-вторых, тем, что для осевой симметрии s_1 обратное отображение совпадает с s_1, в связи с чем $s_1 \circ s_1$ есть тождественное отображение. Этот прием — разложение перемещений на осевые симметрии, оси которых выбираются так, чтобы в окончательном результате произошло «сокращение» — применяется и при решении других задач на отыскание композиции перемещений *).

---

*) Другое решение этой задачи см. в «Кванте», 1980, № 1, с. 44.

* Подробнее об этом см. «Квант», 1980, № 1 с. 42.

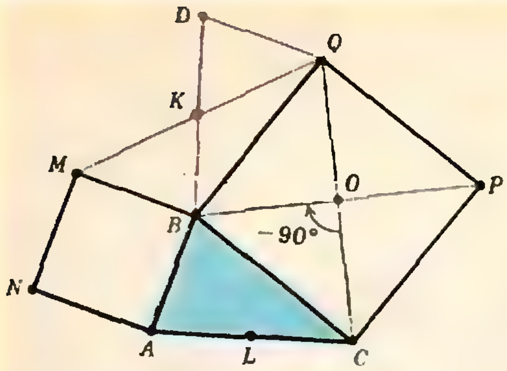


Рис. 10.

5. Применение перемещений к решению задач

Задача 4. *Две окружности с центрами O_1, O_2 пересекаются в точках A и B. Доказать, что прямая O_1O_2 перпендикулярна отрезку AB и делит его пополам.*

Решение. Обозначим через l_1, l_2 полуокружности, лежащие по одну сторону прямой O_1O_2, через l'_1, l'_2 — полуокружности, лежащие по другую сторону (рис. 9), а через s — симметрию относительно (O_1O_2). Тогда $l'_1=s(l_1)$, $l'_2=s(l_2)$. Так как $s(l_1\cap l_2)=s(l_1)\cap s(l_2)=l'_1\cap l'_2$, получаем $s(A)=B$, то есть точки A и B симметричны относительно (O_1O_2). Отсюда и вытекает требуемое утверждение.

В этом решении мы воспользовались тем, что для любого перемещения f и любых фигур M, N справедливо соотношение $f(M\cap N)=f(M)\cap f(N)$. Докажите это самостоятельно.

Задача 5. *На сторонах AB и BC произвольного треугольника ABC построены вне его квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Точка K — середина отрезка MQ. Доказать, что отрезок BK перпендикулярен основанию AC и вдвое короче его.*

Решение. Пусть L — середина отрезка AC (рис. 10). Надо доказать, что отрезки BK и CL перпендикулярны друг другу и конгруэнтны. Для этого удобнее всего установить, что первый отрезок получается из второго поворотом на ±90° вокруг некоторой точки. Итак, нам желательно найти точку, поворот на 90° или −90° вокруг которой переводит точку C в B, а точку L в K. Но ясно, что поворот r на −90° вокруг центра квадрата $BCPQ$ переводит точку C в B. Значит, остается установить, что $r(L)=K$.

Мы имеем $r(C)=B$, $r(B)=Q$; положим $r(A)=D$. Тогда $r([BA])=[QD]$, то есть отрезки AB и DQ перпендикулярны и конгруэнтны. Значит, отрезки BM и QD параллельны и конгруэнтны, то есть $BMDQ$ — параллелограмм. Следовательно, точка K (середина диагонали MQ) является также серединой отрезка BD. Так как $r([CA])=[BD]$, получаем $r(L)=K$. Итак, $r(C)=B$, $r(L)=K$, то есть $r([CL])=[BK]$, и потому отрезки CL и BK перпендикулярны и конгруэнтны.

Задача 6. *Восстановить пятиугольник, зная точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, являющиеся серединами последовательных его сторон.*

Решение. Пусть $ABCDE$ — искомый пятиугольник (рис. 11). Обозначим через s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 центральные симметрии относительно точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Тогда $s_1(A)=B$, $s_2(B)=C$, $s_3(C)=D$, $s_4(D)=E$, $s_5(E)=A$, то есть перемещение $f=s_5\circ s_4\circ s_3\circ s_2\circ s_1$ переводит точку A в себя. Но композиция $s_5\circ s_4\circ s_3\circ s_2\circ s_1$ пяти перемещений,

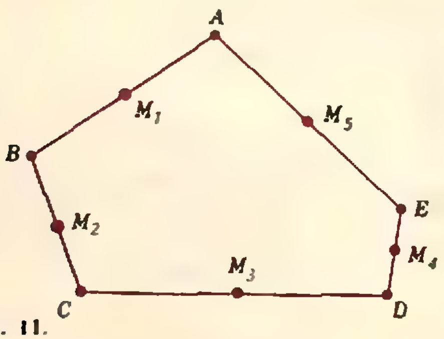


Рис. 11.

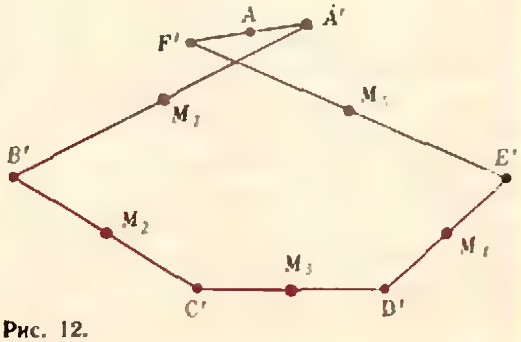


Рис. 12.

каждое из которых есть центральная симметрия, то есть поворот на 180°, представляет собой поворот на $180° \cdot 5 = 2 \cdot 360° + 180°$ (см. ниже задачу 9). Следовательно, f есть центральная симметрия, и потому A есть центр этой симметрии. Как же найти точку A? Берем произвольную точку A' и строим точки $B' = s_1(A')$, $C' = s_2(B')$, $D' = s_3(C')$, $E' = s_4(D')$, $F' = s_5(E')$. Тогда $f(A') = E'$, то есть точки A' и F' симметричны относительно искомой точки A (рис. 12), и потому A есть середина отрезка $A'F'$. Найдя A, легко затем отыскать и остальные вершины искомого пятиугольника.

Задачи

1. Сколько существует перемещений плоскости, переводящих данный отрезок AB в себя?

2. Докажите следующее уточнение аксиомы подвижности: если $|AB| = |A_1B_1|$, причем $A \neq B$, то существует ровно одно сохраняющее ориентацию перемещение, переводящее точки A, B соответственно в A_1, B_1, и ровно одно меняющее ориентацию перемещение, переводящее точки A, B соответственно в A_1, B_1.

3. Сколько существует перемещений, переводящих правильный n-угольник в себя? Сколько из них сохраняют ориентацию? меняют ориентацию? Указание. Воспользуйтесь тем, что каждое из этих перемещений переводит центр описанной окружности в себя.

4. Точка A называется *неподвижной точкой* перемещения f, если $f(A) = A$. Сколько неподвижных точек имеет каждое из перемещений, перечисленных в теореме 1?

5. Прямая l называется *неподвижной прямой* перемещения f, если $f(l) = l$. Сколько неподвижных прямых имеет каждое из перемещений, перечисленных в теореме 1?

6. Докажите, что любое перемещение плоскости можно представить в виде композиции нескольких осевых симметрий.

7. Докажите, что перемещение в том и только в том случае сохраняет ориентацию, если оно может быть представлено в виде композиции четного числа осевых симметрий; перемещение в том и только в том случае меняет ориентацию, если оно может быть представлено в виде композиции нечетного числа осевых симметрий.

8. Найдите композицию $f_2 \circ f_1$, если:

а) f_1 — параллельный перенос, f_2 — поворот;

б) f_1 — поворот вокруг точки O_1 на угол α_1, f_2 — поворот вокруг точки O_2 на угол α_2;

в) f_1 и f_2 — скользящие симметрии с параллельными осями;

г) f_1 и f_2 — скользящие симметрии с пересекающимися осями;

д) f_1 — скользящая симметрия, f_2 — параллельный перенос;

е) f_1 — поворот, f_2 — скользящая симметрия.

9. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — повороты (с некоторыми центрами) на углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ соответственно. Докажите, что $f_k \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1$ есть поворот на угол $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$, если α не кратно 360, и параллельный перенос, если α кратно 360.

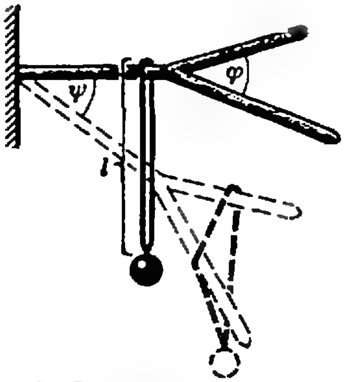
10. Докажите, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

11. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежит в данной точке, а две другие — на данных окружностях.

12. Даны две точки M, N, не лежащие на окружности l, и хорда AB этой окружности. Постройте для окружности l такую хорду CD, конгруэнтную хорде AB, что $(CM) \parallel (DN)$.

13. В окружности l даны две хорды AB и CD; M — внутренняя точка отрезка CD. Постройте на окружности l такую точку N, что вписанный угол ANB высекает на прямой CD отрезок, имеющий точку M своей серединой.

Задачи наших читателей



1. Какие значения может принимать сумма $S = \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n}$, где все числа a_i положительны и $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$?

А. Ермилов

2. Если число $2^{2k} + 2^k + 1$ простое, то оно — делитель числа $2^{2k+1} - 1$. Докажите.

Г. Карнаух

3. Докажите равенства:

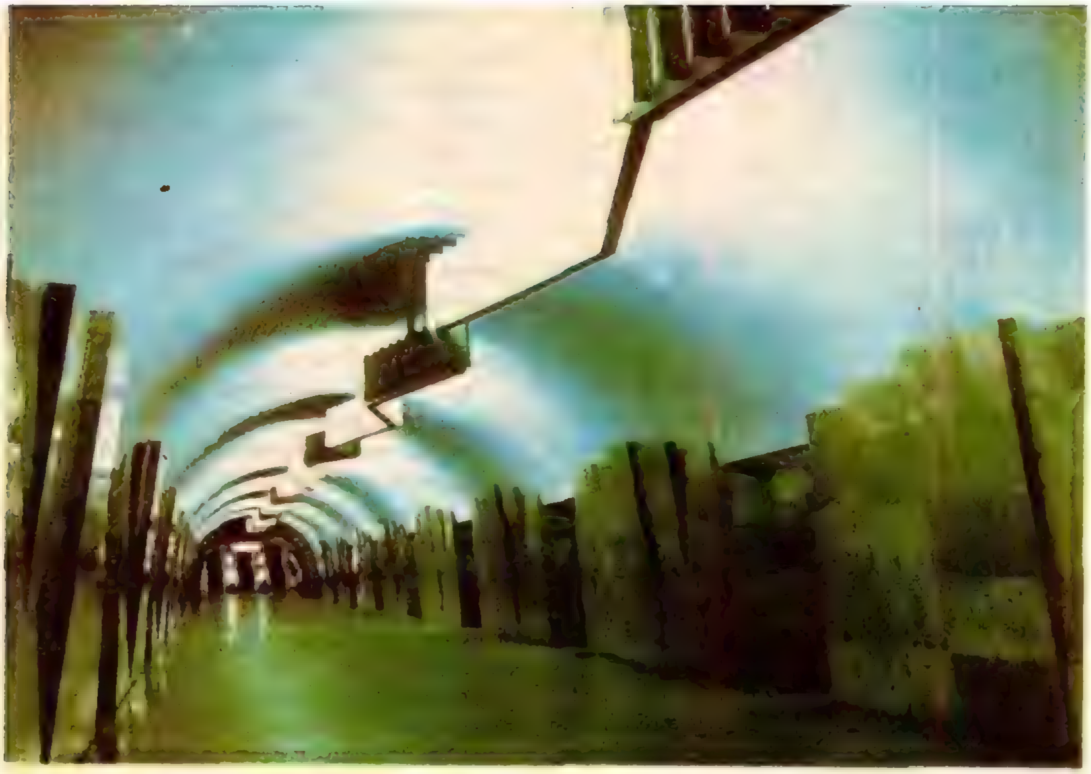
а) $\cos\frac{2\pi}{21} + \cos\frac{8\pi}{21} + \cos\frac{10\pi}{21} = \frac{\sqrt{21}+1}{4}$.

б) $\cos\frac{8\pi}{35} + \cos\frac{12\pi}{35} + \cos\frac{18\pi}{35} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5} + \frac{\sqrt{7}}{2}\sin\frac{\pi}{5}$.

М. Розенберг

4. На рогатку подвешен груз (рис. 1). Широкий конец рогатки медленно опускают. Определите, при каком угле наклона ψ груз соскользнет с рогатки. Угол развода рогатки φ, длина нити, на которой подвешен груз, l.

М. Ваксман



В Фабрикант

Физика люминесцентных ламп

И свет, и жар

Мы так привыкли к электрическому освещению, что порой не ценим его должным образом и забываем его историю.

Первой появилась электрическая *лампа накаливания.*

«Вынимает
паршивую
запаянную склянь.
«Это,— говорит,—
электрическая лампа»..
Вижу —
склянка.
В склянке —
волос.
Но, между прочим,
не из бороды и не из усов...
Сверху
из склянки
и свет,
и жар —
солнце,
ей-богу, солнце!»

— так писал Маяковский в стихотворении «Горящий волос».

Поэт прав, указывая, что «из склянки и свет, и жар», но, как и положено поэтам, он преувеличивает, сравнивая лампу накаливания с Солнцем. Между светом лампы накаливания и солнечным светом имеются очень важные различия. Прежде всего, свет лампы накаливания гораздо желтее солнечного света. Кроме того, в излучении лампы накаливания «жар» гораздо сильнее по отношению к «свету», чем в излучении Солнца. Оба отличия вызваны одной и той же причиной: температура нити («волоса») лампы накаливания (3000°C) примерно в два раза ниже температуры поверхности Солнца (6000°C).

Перейдем от поэзии к цифрам, и мы натолкнемся на интересный парадокс. Лампа накаливания представляет почти идеальный преобразователь электрической энергии в энергию излучения (с коэффициентом полезного действия близким к единице) и вместе с тем лампа накаливания — очень неэкономичный источник света. Как же такое возможно?

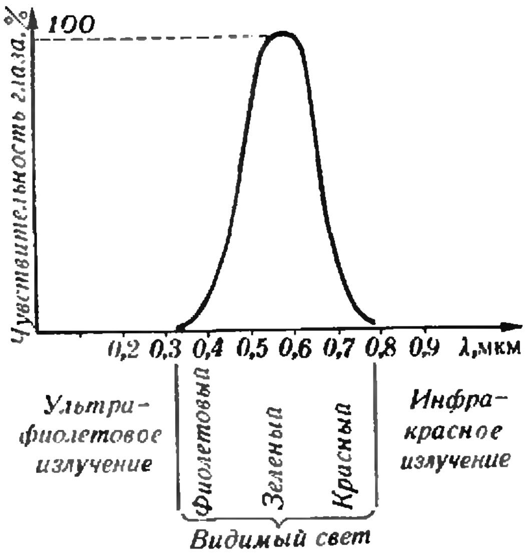


Рис. 1. Кривая чувствительности глаза человека.

Оказывается, все дело в том, что человеческий глаз реагирует не на любое излучение, а только на узкий участок спектра электромагнитных волн (рис. 1) с длинами волн от 0,4 мкм до 0,8 мкм (от фиолетовых до красных лучей). Только такое излучение является светом в точном смысле этого слова.

На рисунке 2 показан баланс энергии современной лампы накаливания. Мы видим, что, хотя лампа накаливания превращает в излучение 86% подводимой к ней электроэнергии, только 12% превращается в видимый свет. В невидимое тепловое излучение (инфракрасные лучи), то есть в «жар» по Маяковскому, превращается 74%! Как источник лучистого «жара» лампа накаливания близка к идеалу. Это было учтено, и сейчас на производстве широко применяют быструю сушку окрашенных изделий (например, корпусов автомобилей) с помощью инфракрасных лучей, испускаемых лампами накаливания.

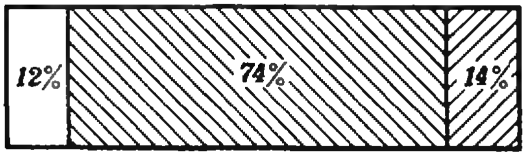


Рис. 2. Баланс энергии в лампе накаливания: 12% — световое излучение, 74% — инфракрасное излучение, 14% — тепловые потери через вводы и держатели и через газ.

Холодный свет

Недостатки лампы накаливания как источника видимого света заставили ученых искать новые источники света, более экономичные в смысле преобразования электрической энергии в световую и дающие свет, более близкий к солнечному по цветовым свойствам. Таким образом, задача состояла как в увеличении светоотдачи, так и в улучшении качества света.

У С. И. Вавилова возникла идея использовать в этих целях явление холодного свечения, называемое *люминесценцией* (см., например, «Физику-10», с. 210—212). Если Солнце или лампа накаливания представляют тепловые источники, в которых излучение возникает за счет нагрева до высокой температуры, то свечение люминофора (люминесцирующего тела) не связано, как правило, с его нагревом.

Нас будут интересовать так называемые *фотолюминофоры,* свечение которых вызывается облучением их светом от внешнего источника. Фотолюминофоры преобразуют излучение с одними длинами волн в излучения с другими длинами волн. Многие органические красители (например, оранжевая краска родамин) обладают яркой люминесценцией под действием дневного света.

Современное учение о фотолюминесценции многим обязано С. И. Вавилову. В частности, С. И. Вавилов показал, что люминофоры — как преобразователи энергии излучения — могут обладать очень высоким коэффициентом полезного действия. Это свойство, очевидно, очень важно для практического применения люминофоров.

Принцип действия люминесцентной лампы

Казалось бы, можно улучшить характеристики лампы накаливания, нанеся на стенки ее колбы слой люминофора и превратив с помощью фотолюминесценции инфракрасное излучение раскаленной нити в видимый свет. К сожалению, такой путь нереален. Существует закон (так называемое правило Стокса), согласно которому люминофоры, как правило, преобразуют более короткие волны в более длинные, а длины волн инфракрасных лучей всегда больше, чем длины волн видимого света (>0,8 мкм).

Следовательно, для возбуждения свечения во всем диапазоне видимой части спектра необходимо использовать ультрафиолетовое излучение, обладающее меньшими длинами волн (<0,4 мкм). Тогда задача распадается на две: 1) отыскание экономичного источника ультрафиолетового излучения; 2) создание люминофора, эффективно преобразующего ультрафиолетовое излучение в видимый свет (при этом нельзя забывать и о цветовых свойствах видимого света).

Исследования показали, что подходящим источником ультрафиолетового излучения является электрический разряд в парах ртути. Правда, состав излучения ртутного разряда очень сильно зависит от давления паров.

При высоком давлении (равном или превышающем атмосферное давление 10^5) Па преобладает длинноволновое ультрафиолетовое излучение (>0,3 мкм). Кроме него возникает также видимое излучение, состоящее из желтых, зеленых и синих лучей. Так происходит, в частности, в ртутных кварцевых лампах, применяемых для медицинских целей. Свет этих ламп имеет мертвящий сине-зеленый оттенок, объясняемый составом видимого излучения ртутного разряда. Превратив с помощью люминофора ультрафиолетовое излучение в красное, можно частично смягчить недостатки цветовых свойств света ртутных ламп высокого давления и использовать эти лампы для уличного и частично для промышленного освещения.

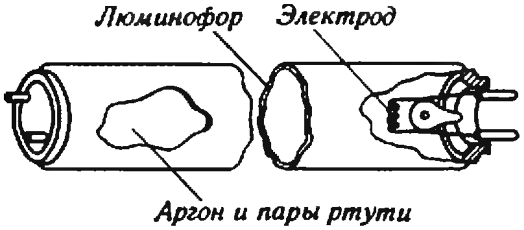


Рис. 3. Разрез люминесцентной лампы.

При низком давлении ртутных паров основную роль играет коротковолновое ультрафиолетовое излучение (с длиной волны ≈0,25 мкм), а видимое излучение очень слабое. Такой разряд в сочетании с люминофорами может обеспечить высокие цветовые свойства видимого света. Именно так и устроены так называемые *люминесцентные лампы* (рис. 3). Основным источником видимого света в люминесцентной лампе служит люминофор, который наносится на внутреннюю поверхность стеклянной колбы лампы. Оптимальное давление паров ртути равно примерно 1,33 Па. По причинам, которые станут ясны позднее, в колбе, кроме паров ртути, содержится также инертный газ аргон при давлении 5,32 Па.

В люминесцентной лампе происходят два последовательных преобразования энергии. Сначала подводимая электроэнергия в парах ртути превращается в энергию коротковолнового ультрафиолетового излучения (около 60%), затем энергия этого излучения в люминофоре превращается в энергию видимого светового излучения.

На рисунке 4 изображен баланс энергии такой лампы. Если сравнить рисунки 2 и 4, можно подумать, что световая эффективность люминесцентной лампы менее чем в два раза превышает световую эффективность лампы накаливания (21/12). Оказывается, это не так. Благодаря свойствам глаза отношение световых эффективностей значительно превышает отношение энергетических коэффициентов полезного действия.

Любопытно, что тепловые потери в обеих лампах приблизительно одинаковы (79% и 88%). Однако имеется различие в составе этих потерь — доля лучистого тепла в люминесцентной лампе в три раза меньше, чем в лампе накаливания. Поэтому при люминесцентном освещении легче избежать нагрева освещаемых предметов («жар» и свет идут по разным путям).

Рассмотрим по отдельности, как возникает ультрафиолетовое излу-

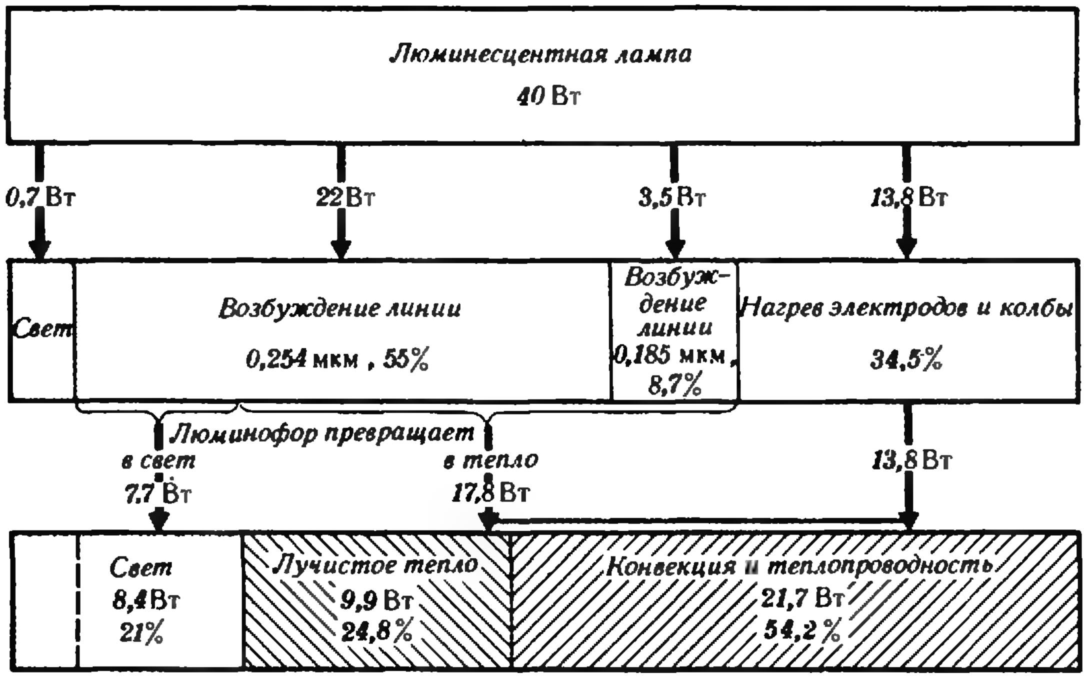

Люминесцентная лампа
40 Вт
0,7 Вт
22 Вт
3,5 Вт
13,8 Вт
Свет
Возбуждение линии
0,254 мкм, 55%
Возбуждение линии
0,185 мкм,
8,7%
Нагрев электродов и колбы
34,5%
Люминофор превращает
в свет
7,7 Вт
в тепло
17,8 Вт
13,8 Вт
Свет
8,4 Вт
21%
Лучистое тепло
9,9 Вт
24,8%
Конвекция и теплопроводность
21,7 Вт
54,2%

Рис. 4. Баланс энергии 40-ваттной «белой» люминесцентной лампы.

чение и как оно преобразуется в видимый свет.

Механизм генерации излучения в газовом разряде

Как уже говорилось, источником ультрафиолетового излучения в люминесцентной лампе является электрический разряд в ртутных парах при низком давлении*). Электроны, вырвавшиеся с катода и разогнанные электрическим полем, встретив на своем пути атомы ртути, испытывают с ними соударения.

Характер соударений, оказывается, зависит от энергии электронов**). Если энергия электрона меньше 4,9 эВ, соударение его с атомом ртути носит упругий характер — кинетическая энергия электрона практически не изменяется, а изменяется лишь направление его движения. При энергии, равной (или превышающей) 4,9 эВ, соударение электрона с атомом ртути становится неупругим — электрон отдает всю (или почти всю) свою энергию атому ртути. Это — одно из проявлений квантовых свойств атомов.

Согласно квантовым представлениям каждый атом может обладать лишь определенными запасами энергии, или, как говорят, он может находиться лишь на вполне определенных энергетических уровнях. Следовательно, и принимать атом может лишь определенные порции энергии. Так, для атома ртути такой минимальной порцией является энергия 4,9 эВ. Меньшую энергию атом ртути не принимает (проявляется его «квантовая гордость»). Что же происходит с атомом дальше?

На рисунке 5 изображена очень грубая схема энергетических уровней атома ртути. В результате неупругого столкновения с электроном атом переходит в возбужденное состояние, соответствующее энергетическому уровню *3*, «живет» на этом уровне примерно 10^{-7} с и возвращается обратно на уровень *1*.

Заметим, что атомы аргона, хотя их число превышает число атомов ртути в сотни раз, совершенно не возбуждаются. Связано это с тем, что минимальная энергия возбуждения атомов аргона значительно выше, чем у атомов ртути.

---

*) О том, как возникает такой разряд, см., например, «Физику-9», с. 184.

**) Подробнее об этом см., например, статью А. Левашова «Опыты Франка и Герца» («Квант», 1979, № 6).

Возникает вопрос: почему для генерации излучения с длиной волны 0,25 мкм выгодно использовать низкое давление ртутных паров? Ведь с увеличением давления растет число атомов ртути и, как будто, должно расти число неупругих столкновений электронов с атомами. Однако это не так. Рассмотрим более подробно судьбу возбужденного атома и испускаемого им фотона.

Жизнь возбужденного атома чревата опасностями. При столкновениях с другими частицами (электронами, атомами) или со стенками колбы атом может потерять свою энергию и перейти в нормальное (невозбужденное) состояние. Такие безызлучательные («тушащие») переходы бесполезны с точки зрения генерации излучения. Очевидно, что с ростом давления число безызлучательных переходов растет. Этому же способствует явление «пленения» излучения, связанное со своеобразной фотонной «эстафетой». Фотон, испущенный возбужденным атомом в объеме газа, как правило, не вылетает сразу наружу. Его перехватывает какой-либо нормальный атом и переходит при этом в возбужденное состояние. Через 10^{-7} с этот атом возвращается в нормальное состояние, испуская новый фотон, который опять может быть поглощен другим нормальным атомом, и так далее. В среднем происходит несколько сот актов переизлучения фотонов. При каждом акте меняется направление полета фотонов, что делает их путь в газе зигзагообразным (рис. 6). Это, естественно, увеличивает вероятность безызлучательных переходов, которые могут происходить только во время «остановок» фотонов в атомах. Ясно, что число «остановок» растет с ростом концентрации атомов, то есть с ростом давления газа.

Механизм преобразования излучения в люминофоре

Преобразование невидимого ультрафиолетового излучения в видимый свет происходит в люминофоре. Характер свечения люминофора определяется его составом.

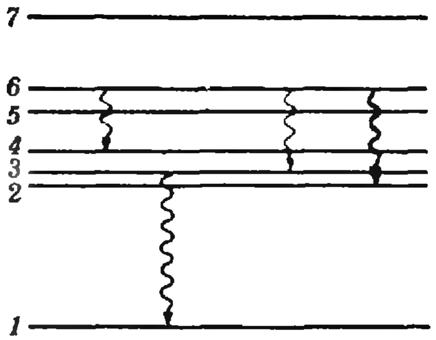


Рис. 5. Схема энергетических уровней атома ртути. Переход *3→1* дает ультрафиолетовую линию с длиной волны 0,25 мкм; переход *6→2* дает фиолетовую линию с длиной волны 0,40 мкм; переход *6→3* дает синюю линию с длиной волны 0,45 мкм; переход *6→4* дает зеленую линию с длиной волны 0,55 мкм; переход *7→5* дает желтую линию с длиной волны 0,58 мкм.

В современных люминесцентных лампах чаще всего применяются галофосфаты кальция. Это сложные соединения, сходные с апатитами ($3Ca(PO_4)_2CaF_2$), в которых часть атомов фтора заменена атомами хлора и, главное, в которые введены активаторы. *Активаторами* называют атомы примесей, вызывающие свечение люминофора. Концентрация атомов активатора очень невелика — порядка процента, иногда даже долей процента, но без активатора люминофор мертв и свечения не дает.

В качестве активаторов в галофосфаты вводятся одновременно атомы сурьмы и марганца. В кристалле галофосфата эти атомы превращаются в ионы. Поглотив ультрафиолетовое излучение, ионы возбуждаются, а возвращаясь в исходное нормальное состояние, высвечивают поглощенную энергию в виде

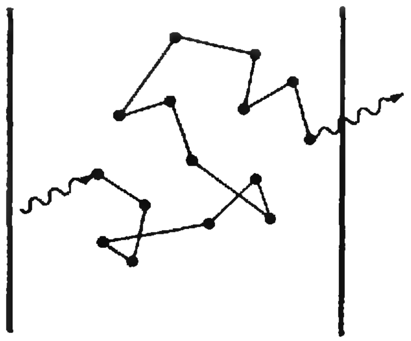


Рис. 6. Путь фотона в объеме разряда.

света. При этом в спектре излучения такого люминофора наблюдаются две широкие полосы, соответствующие излучению ионов сурьмы и марганца. Широкие полосы возникают за счет воздействия на ионы активаторов атомов окружающей среды, прежде всего — атомов хлора, без этого они испускали бы узкие линии. Часть ионов сурьмы, возбужденных в результате поглощения ультрафиолетового излучения, передают свою энергию ионам марганца, побуждая их к свечению. Варьируя концентрацию активаторов и содержание хлора в люминофоре, можно в широких пределах изменять спектральный состав свечения.

Надо откровенно сказать, что далеко не все детали процесса преобразования излучения в люминофорах типа галофосфатов уже выяснены. Однако следует помнить замечание известного математика О. Хевисайда: «Стану ли я отказываться от своего обеда только потому, что я не полностью понимаю процесс пищеварения?»

В последнее время для повышения светоотдачи люминесцентных ламп все шире стали применять люминофоры, активированные редкоземельными элементами (такими как европий, тербий, церий). Спектральные полосы излучения ионов редкоземельных элементов довольно узки, поэтому для заполнения видимого спектра приходится применять смесь из двух или даже трех люминофоров. Высокая цена редкоземельных элементов и усложненная технология нанесения смеси люминофоров приводит к повышению стоимости ламп, но считается, что повышение светоотдачи ламп с лихвой компенсирует эти недостатки.

Схема включения люминесцентной лампы

Для включения люминесцентной лампы в сеть применяется остроумная, но довольно сложная схема, что, конечно, является недостатком этой лампы. Необходимость специальной схемы включения объясняется двумя обстоятельствами: 1) большой длиной лампы, 2) падающей вольтамперной характеристикой электрического разряда.

Большая длина лампы необходима для получения высокой светоотдачи, поскольку источником излучения служит положительный столб разряда и потери энергии в приэлектродных частях разряда имеют тем меньший удельный вес, чем длиннее разрядная трубка. Так, сороковаттная лампа имеет длину 110 см. Вместе с тем зажечь электрический разряд в длинной трубке, когда расстояние между электродами велико, не так просто.

Как видно из рисунка 3, на концах лампы имеется по два штырька, к которым приварены вольфрамовые спирали. Если такую спираль нагреть, она начинает испускать электроны, что облегчает зажигание разряда. Однако когда разряд возник, надобность в постороннем нагреве спиралей отпадает — спирали нагреваются за счет их бомбардировки положительными ионами. Так как лампы обычно работают на переменном токе, каждая спираль один полупериод служит катодом, а другой — анодом. Как же осуществляется предварительный нагрев спиралей?

На рисунке 7 изображена схема включения люминесцентной лампы: как видно из схемы, параллельно лампе *Л* включен стартер *С*, а последовательно с лампой — дроссель *Д*. Стартер представляет собой миниатюрную лампу тлеющего разряда, наполненную неоном, с электродами, сделанными из биметаллических пластинок (рис. 8). Когда подается напряжение, в стартере возникает разряд (расстояние меж-

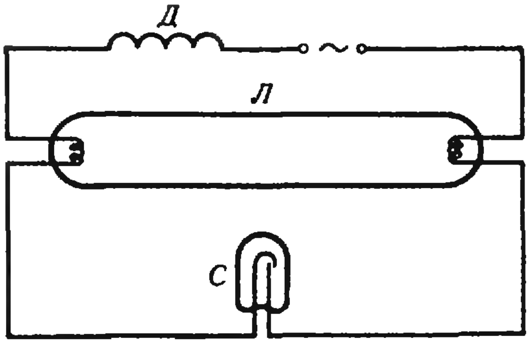


Рис. 7. Схема включения люминесцентной лампы.

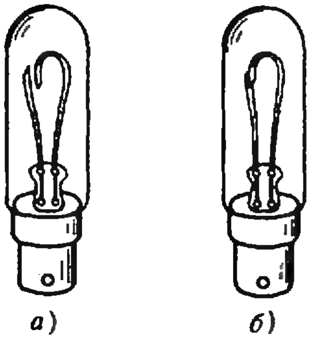


Рис. 8. Стартер: *а*) электроды холодные; *б*) электроды нагреты.

ду электродами стартера порядка миллиметра). Электроды стартера нагреваются, изгибаются навстречу друг другу и закорачивают разрядный промежуток. В цепи возникает большой ток, достаточный для нагрева спиралей люминесцентной лампы. Пока спирали ламп нагреваются, электроды стартера, наоборот, охлаждаются (ведь разряда в стартере нет). Охлаждаясь, электроды стартера выпрямляются, контакт между ними нарушается, и цепь разрывается. Теперь опять имеются два конкурирующих между собой разрядных промежутка — в лампе и в стартере. Но ситуация резко отличается от начальной: электроды лампы накалены и дают большую эмиссию электронов, поэтому разряд возникает не в стартере, а в лампе.

Заметим, что зажигание разряда в люминесцентной лампе сильно облегчено присутствием аргона: возбужденные электронами атомы аргона при столкновении с атомами ртути ионизуют их и тем самым увеличивают число свободных носителей зарядов.

Зачем в схеме включения нужен дроссель? Отличительной особенностью электрического разряда в газе при низком давлении является его падающая вольтамперная характеристика — с ростом тока напряжение на лампе уменьшается. Чтобы ограничить рост тока, последовательно с лампой надо включить сопротивление. Применение с этой целью дросселя энергетически более выгодно, чем включение омического сопротивления (гораздо меньше тепловые потери). Правда, наличие дросселя снижает коэффициент мощности электрической цепи, но при установке большого числа люминесцентных ламп для компенсации этого недостатка в сеть питания дополнительно включают специальные конденсаторы. Важно отметить также, что благодаря индуктивности дросселя при размыкании цепи стартером на электродах лампы возникает напряжение, превышающее напряжение от источника, что весьма благоприятно для зажигания разряда в лампе.

Применение люминесцентных ламп

Чернобелые телевидение и кино наглядно показывают, насколько было бы обеднено наше восприятие мира в отсутствие цветного зрения. Замечательная способность человеческого глаза различать цвета не только является источником эстетического наслаждения, но имеет и важное практическое значение.

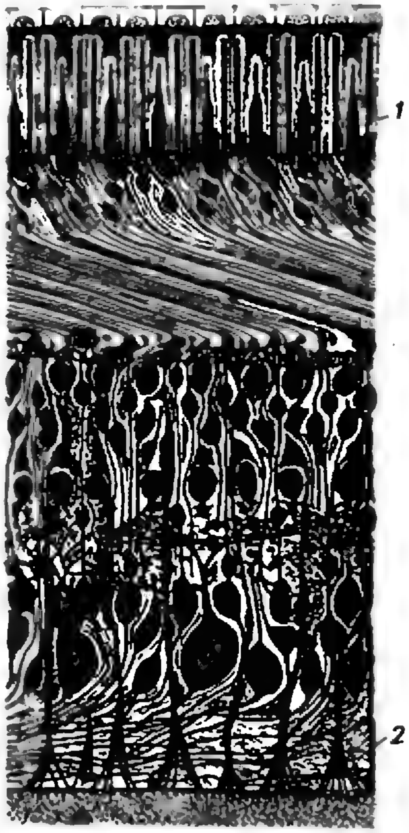


Рис. 9. Строение сетчатки глаза человека: 1 — слой палочек и колбочек; 2 — слой волокон зрительного нерва.

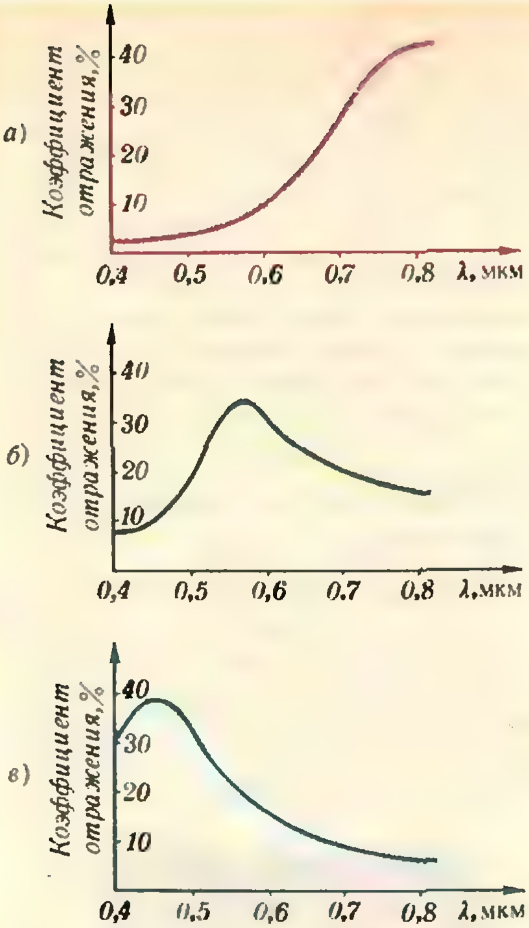


Рис. 10. Спектральные кривые коэффициента отражения красителей: *а*) красного; *б*) зеленого; *в*) синего.

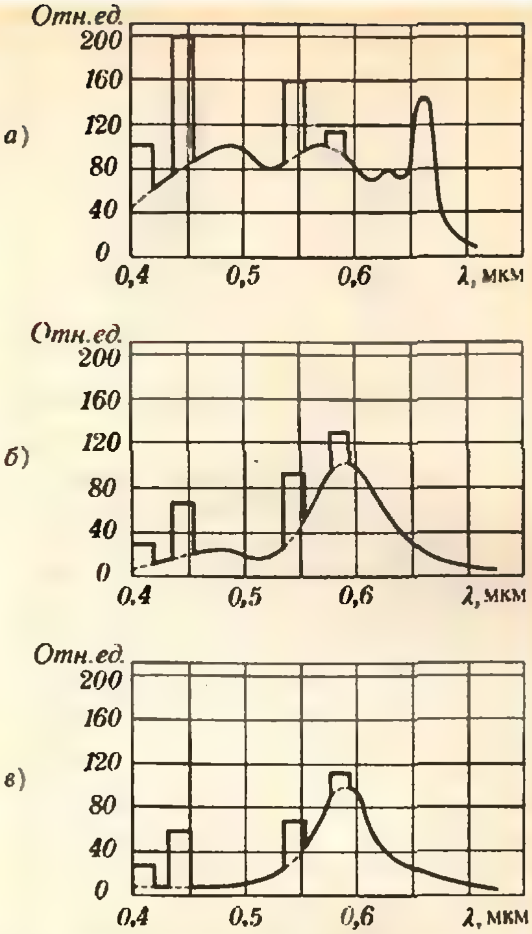


Рис. 11. Распределение энергии в спектре люминесцентных ламп: *а*) «дневного» света; *б*) «белого» света; *в*) «теплобелого» света.

Цветовое зрение связано со сложной структурой сетчатки человеческого глаза. В ее состав входят *палочки* и *колбочки* — светочувствительные клетки, связанные с окончаниями разветвленного в сетчатке зрительного нерва (рис. 9). Палочки более чувствительны и работают даже в условиях слабой освещенности (ночное зрение), но при этом цвета практически не различаются («ночью все кошки серы»). Колбочки менее чувствительны и работают только при достаточно большой освещенности (дневное зрение), но зато обеспечивают различение цветов. Для сравнения укажем, что у сов имеются только палочки, поэтому днем они должны щурить глаза. У кур, наоборот, — только колбочки, вот почему они ложатся спать с заходом солнца.

Считается, что в человеческом глазу имеется три типа колбочек. При поглощении света колбочкой одного из этих типов возникает ощущение синего цвета, другого — зеленого цвета и третьего — красного цвета. Воспринимаемый нами цвет предмета зависит от соотношения интенсивностей возбуждения трех указанных типов колбочек. Это соотношение в свою очередь зависит от спектрального состава света, отраженного от предмета и попадающего в глаз. А спектральный состав отраженного света определяется зависимостью коэффициента отражения предмета от длины волны (рис. 10) и спектральным составом падающего на предмет света. Так, многие ткани при дневном свете и при свете ламп накаливания имеют совсем разные цвета. Поэтому опытные покупатели в магазине часто подносят покупку к окну, чтобы избежать неожиданностей в дальнейшем. Неприятны изменения цвета при свете ламп накаливания на производстве окрашенных изделий (в текстильной промышленности, при цветной печати в типографии). То же относится и к картинным галереям.

С помощью люминесцентной лампы можно получить искусственный дневной свет довольно высокого качества. На рисунке 11 изображены кривые распределения энергии в спектре люминесцентных ламп различных типов. К сожалению, ртутный разряд испускает видимые линии спектра (их интенсивность на рисунке изображена прямоугольниками). Наиболее яркие линии — желтая, зеленая и синяя — несколько портят цветовые свойства люминесцентных ламп.

Спектральные кривые люминесцентных ламп показывают, что в их излучении гораздо больше зеленых лучей, чем в излучении ламп накаливания. Это дает дополнительный выигрыш, так как максимум чувствительности глаза лежит именно в зеленой части спектра (см. рис. 1). В результате светоотдача люминесцентных ламп в 3—4 раза выше светоотдачи ламп накаливания.

Когда были сделаны первые советские люминесцентные лампы, С. И. Вавилов предложил испытать эти лампы в Третьяковской галерее. Помню, когда мы вместе с известным художником и искусствоведом И. Э. Грабарем впервые приехали в Третьяковку, я поймал себя на мысли — откуда вечером здесь дневной свет? — хотя знал, что незадолго до этого была смонтирована специальная установка. Потом мы брали картины, и И. Э. Грабарь оценивал качество цветопередачи при свете люминесцентных ламп. Много хлопот нам доставил известный портрет Мусоргского работы Репина — отвороты его халата имеют сиреневый оттенок, очень чувствительный к освещению.

В настоящее время на всех предприятиях, где нужна высокая освещенность и хорошая цветопередача, используются люминесцентные лампы. Наряду с лампами «дневного» света (соответствующими рассеянному дневному свету без прямых солнечных лучей), имеются «белые» и «теплобелые» лампы, вполне пригодные для освещения жилых помещений. Выпуск люминесцентных ламп достиг сотен миллионов штук в год и продолжает расти. Вместе с тем продолжается совершенствование их качества — повышается светоотдача, растет срок службы и улучшаются цветовые характеристики.

Спрашивайте — отвечаем

Дорогая редакция! Напишите, пожалуйста, когда будут проводиться вступительные экзамены в вуз г. Москвы в олимпийском 1980 году. Правда ли, что прием иногородних абитуриентов будет ограничен?

А. Кушик (пос. Комсомольский Ворошиловградской обл.) и др.

Редакция попросила первого заместителя министра высшего и среднего специального образования СССР Николая Федоровича Краснова ответить на эти вопросы, интересующие многих наших читателей.

Прием на дневные отделения высших учебных заведений Москвы в 1980 году будет проводиться в следующие сроки:

прием документов от поступающих — с 20 июня по 31 июля;
вступительные экзамены — с 20 августа по 10 сентября;
зачисление — с 11 по 14 сентября;
начало 1980/81 учебного года для 1 курса — с 15 сентября, для остальных курсов — с 1 сентября.

Отдельным вузам утвержден индивидуальный график работы по новому приему. Так, в Московском инженерно-физическом институте прием документов будет осуществляться с 20 июня по 4 июля, вступительные экзамены — с 1 по 12 июля, зачисление — с 14 по 15 июля.

Никаких ограничений в приеме документов от иногородних поступающих в вузы Москвы в 1980 году не предполагается. При этом следует учитывать, что зачисление иногородних будет осуществляться, исходя из наличия мест в общежитиях.

Примечание редакции. Как нам сообщили в Московском физико-техническом институте (г. Долгопрудный Московской области), вступительные экзамены в МФТИ в 1980 году будут проводиться в обычные сроки (прием документов — с 20 июня по 10 июля, вступительные экзамены 1-го потока — с 1 июля)

В. Майер

Оптические опыты с глазом

> *Если рассуждение это покажется слишком длинным для прочтения за один раз, то его можно разделить на шесть частей.*
>
> Декарт. Рассуждение о методе

Введение

Пожалуй, самое трудное в предлагаемых ниже экспериментах — найти достаточно терпеливого партнера. Нам кажется, вы сумеете уговорить кого-нибудь побыть «подопытным кроликом», если пообещаете ему доказать, что ваши глаза светятся в темноте, как у кошки (правда, не зеленым, а красным светом).

Обсуждение проблемы

Посмотрите на кончик карандаша, расположенного на расстоянии 15—30 см от глаза, при этом более удаленные предметы вы будете видеть нерезко. Переведите взгляд на далекие предметы — нерезким станет кончик карандаша. Обычно мы не замечаем этого: все предметы, на которые мы смотрим, кажутся нам вполне резкими. Это означает, что глаз сам, независимо от нашего сознания, как бы настраивается на резкость. Такой процесс называют *аккомодацией* глаза. Как же она осуществляется?

Оптическая система глаза (рис. 1) состоит из роговицы *2*, водянистой жидкости *3*, хрусталика *6* и стекловидного тела *8*. Ясно, что глаз обладает регулирующейся оптической системой, иначе аккомодация была бы невозможна: на сетчатке глаза *9* получились бы резкими изображения предметов, расположенных лишь на вполне определенном расстоянии от глаза, и нерезкими — изображения всех остальных предметов.

Исследования показали, что за аккомодацию ответствен хрусталик глаза. Если на сетчатке глаза появляется нерезкое изображение наблюдаемого предмета, соответствующий сигнал по зрительному нерву поступает в мозг, обрабатывается там и подается на так называемую циллиарную мышцу *7*, которая, сокращаясь или растягиваясь, изменяет кривизну поверхностей хрусталика до тех пор, пока на сетчатке не получится резкое изображение.

Можно ли экспериментально доказать, что именно хрусталик осуществляет аккомодацию? Как удостовериться в том, что аккомодация вызывается изменением кривизны поверхностей хрусталика?

Наверное, прежде всего нужно убедиться, что хрусталик действительно существует. Возьмите зеркало и посмотрите в него на свой глаз. Вы легко обнаружите в нем белую плотную оболочку — склеру *1*, прозрачный участок этой оболочки — роговицу *2*, радужную оболочку *4* (которая служит регулятором светового потока, создающего изображение, и определяет цвет глаз че-

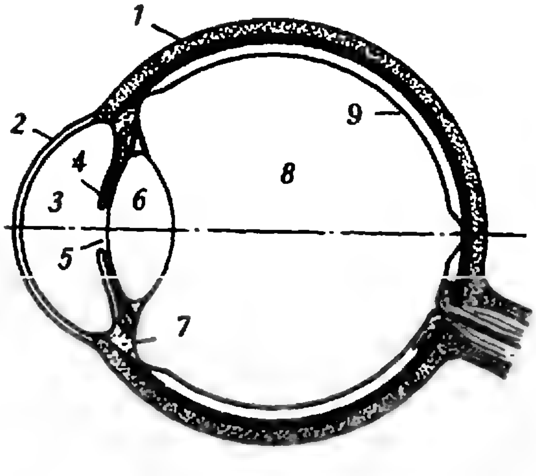


Рис. 1. Схема устройства глаза человека: *1* — склера; *2* — роговица; *3* — водянистая жидкость; *4* — радужная оболочка; *5* — зрачок; *6* — хрусталик; *7* — циллиарная мышца; *8* — стекловидное тело; *9* — сетчатка.

ловека), зрачок *5* — отверстие в радужной оболочке. Но хрусталика вы не увидите! Как же быть?

Поскольку оптическая система глаза создает на сетчатке изображения предметов, показатели преломления элементов системы должны отличаться от показателя преломления окружающей среды. (И действительно, согласно измерениям показатели преломления роговицы, хрусталика, водянистой жидкости и стекловидного тела равны соответственно $n_р = 1{,}376$, $n_{хр} = 1{,}386$, $n_{в.ж} = n_{с.т} = 1{,}336$.) При переходе света из одной среды в другую, помимо преломления, наблюдается и отражение света. Это означает, что, поместив перед глазом источник света, можно надеяться увидеть его изображение в отраженном свете. В первом приближении границы раздела различных сред в глазу представляют собой сферические поверхности. Следовательно, они должны действовать как сферические зеркала.

Итак, мы приходим к выводу, что оптическая система глаза не только формирует изображение предмета на сетчатке, но еще и создает несколько побочных изображений за счет отражения света от поверхностей роговицы и хрусталика. Обнаружив эти изображения на опыте, вы сумеете доказать существование хрусталика. А исследовав изменение этих изображений при «наводке» глаза на резкость, сможете уяснить оптическую сущность аккомодации.

Модельные опыты

Прежде чем приступить к экспериментальному исследованию самого глаза, попробуйте смоделировать его роговицу и хрусталик.

В качестве модели хрусталика глаза можно использовать двояковыпуклую лупу с увеличением 2—3,5 (она называется часовой и продается в магазинах фототоваров). На расстоянии 10—20 см от лупы расположите подключенную к батарейке лампочку для карманного фонаря. Глядя на лупу со стороны лампочки, вы увидите два ее изображения: прямое и перевернутое (рис. 2). Попробуйте перемещать лампочку перпендикулярно оптической оси лупы — вы заметите, что изображения смещаются в разные стороны.

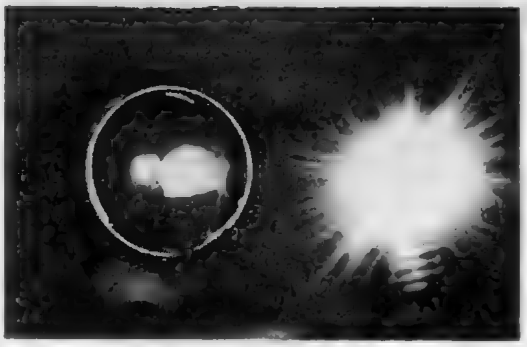


Рис. 2.

На рисунке 3 представлен ход лучей при образовании изображений l_1 и l_2 предмета l поверхностями лупы (построение проведено без учета преломления в лупе). Прямое изображение l_1 создает передняя поверхность *1* лупы, действующая как выпуклое зеркало, а перевернутое изображение l_2 — задняя поверхность *2*, представляющая собой вогнутое зеркало.

Как правило, в опыте одно изображение источника получается больше другого. Попробуем объяснить, почему.

Для сферических зеркал справедливы все те же самые соотношения, что и для тонкой линзы. Увеличение предмета, даваемое передней поверхностью лупы (выпуклым зеркалом), равно (см. рис. 3)

$$\Gamma_1 = \frac{l_1}{l} = \frac{f_1}{d_1}.$$

Расстояние d_1 от предмета до зерка-

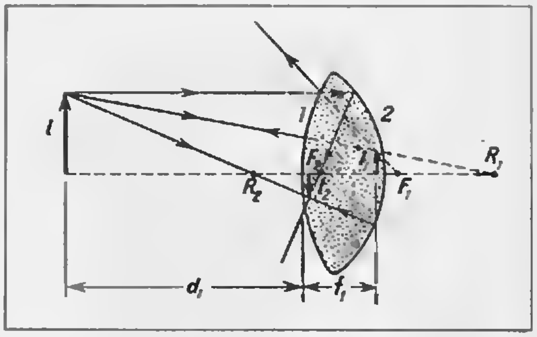


Рис. 3.

ла и расстояние f_1 от зеркала до изображения связаны соотношением

$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=-\frac{1}{F_1}.$$

Учитывая, что фокусное расстояние зеркала равно половине радиуса кривизны R_1 первой сферической поверхности лупы, получим

$$\Gamma_1=\frac{F_1}{F_1+d_1}=\frac{R_1}{R_1+2d_1}.$$

Если предмет находится на большом расстоянии от зеркала по сравнению с его радиусом кривизны ($d_1 \gg R_1$), в знаменателе предыдущей формулы первым слагаемым по сравнению со вторым можно пренебречь и считать, что увеличение выпуклого зеркала равно

$$\Gamma_1=\frac{R_1}{2d_1}.$$

Аналогично, увеличение предмета, даваемое задней поверхностью лупы (вогнутым зеркалом), выражается такой же формулой, только вместо R_1 должно быть R_2, а вместо d_1 — d_2:

$$\Gamma_2=\frac{R_2}{2d_2}.$$

Поскольку лупа — тонкая линза, то есть ее толщина мала по сравнению с радиусами кривизны, различием в расстояниях d_1 и d_2 можно пренебречь. Тогда для увеличений предмета, даваемых поверхностями лупы, имеем

$$\Gamma_1=\frac{l_1}{l}=\frac{R_1}{2d} \quad \text{и} \quad \Gamma_2=\frac{l_2}{l}=\frac{R_2}{2d},$$

где $d=d_1=d_2$ — расстояние от предмета до лупы.

Следовательно, если изображения l_1 и l_2 получаются разных размеров, то различны радиусы кривизны лупы. Зная расстояние от предмета до лупы и измерив увеличения, даваемые поверхностями лупы, можно определить радиусы кривизны ее поверхностей.

Советуем вам провести еще один опыт с моделью хрусталика глаза.

Слепите из пластилина небольшую прямоугольную камеру, в боковую стенку камеры вставьте лупу. Получите изображения горящей лампочки в отраженном от поверхностей лупы свете и обратите внимание на их яркость. Теперь налейте в камеру воду — яркость изображения, создаваемого задней поверхностью лупы, заметно уменьшится. Оказывается, интенсивность света, отраженного от границы раздела двух сред, зависит от показателей преломления этих сред *). В данном случае при замене воздуха на воду интенсивность отраженного света уменьшилась.

Мы достаточно подробно разобрали, что должно было бы наблюдаться в отраженном свете, если бы оптическая система глаза состояла из одного хрусталика. Однако глаз имеет еще и роговицу, и две камеры, заполненные водянистой жидкостью и стекловидным телом.

Смоделировать действие роговицы можно, поместив перед лупой, на расстоянии 2—4 мм от нее, очковое стекло, имеющее оптическую силу +1 диоптрия (продается во всех аптеках). На получившуюся оптическую систему направьте свет от лампочки для карманного фонаря. Проводя наблюдения со стороны лампочки, вы увидите четыре ее изображения, три из которых прямые и одно перевернутое. Обратите внимание на то, что изображения, образованные отражением света от поверхностей очкового стекла, расположены очень близко друг от друга.

Заполните водой полость между очковым стеклом и лупой, а также пластилиновую камеру за лупой. Пронаблюдайте, как при этом изменяются яркости изображений, создаваемых различными сферическими поверхностями вашей оптической системы.

Советуем вам ни в коем случае не торопиться при постановке модельных опытов. Чем тщательнее вы их проведете, тем лучше будете представлять, что должны наблюдать в живом глазу, и тем легче сможете обнаружить нужные изображения.

---

*) Строгий расчет для коэффициента отражения света k от границы раздела двух сред дает $k=\frac{(n_1-n_2)^2}{(n_1+n_2)^2}$, где n_1 и n_2 — показатели преломления граничащих сред.

М. Шкапенюк

Выпуклость функций и доказательство неравенств

В этой статье исследуются свойства выпуклых функций. В частности, устанавливается неравенство между средним арифметическим значений выпуклой функции в n точках и ее значением в среднем арифметическом этих точек. Из этого неравенства легко получаются классические соотношения между средним гармоническим, средним геометрическим, средним арифметическим и средним квадратическим.

Выпуклые функции

Рассмотрим функцию f, дифференцируемую в любой точке отрезка $[a; b]$, и обозначим через Γ часть графика функции f, отвечающую этому отрезку:

$$\Gamma=\{(x;\ y) \mid x \in [a;\ b] \quad \text{и} \quad y=f(x)\}.$$

Функция f называется *выпуклой вверх* на отрезке $[a; b]$ («Алгебра и начала анализа 10», п. 79), если для любой точки $T \in \Gamma$ кривая Γ лежит ниже касательной к Γ в точке T (рис. 1 *а*). Аналитически, как легко видеть (рис.2), это условие записывается в виде неравенства

$$f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1), \quad (1)$$

которое должно выполняться при любых (различных) x_1, $x_2 \in [a; b]$. Аналогично определяется *выпуклость вниз* на отрезке (рис. 1, *б*); для нее знак $<$ в неравенстве (1) нужно заменить на $>$.

В том же пункте учебника формулируется достаточный **признак выпуклости** функции: *если на промежутке вторая производная положительна (отрицательна), то график обращен выпуклостью вниз (вверх)*. Геометрически первому случаю отвечает ускоренное возрастание или замедленное убывание, а второму — замедленное возрастание или ускоренное убывание.

Примеры. 1) *Функция $f(x)=x^2$ выпукла вниз на любом отрезке $[a; b]$*. 2) *Функция $f(x)=\lg x$ выпукла вверх на $[a; b]$, если $0<a<b$*. 3) *Функция $f(x)=\sin x$ выпукла вверх на $[0;\ \pi]$ и выпукла вниз на $[\pi;\ 2\pi]$*.

Рассмотрим теперь несколько простых свойств выпуклых функций; мы их формулируем для случая функций, выпуклых вверх, оставляя читателю их переформулировки для функций, выпуклых вниз.

I. *Если f выпукла вверх на $[a; b]$, то для любых (различных) точек*

$$f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right) > \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

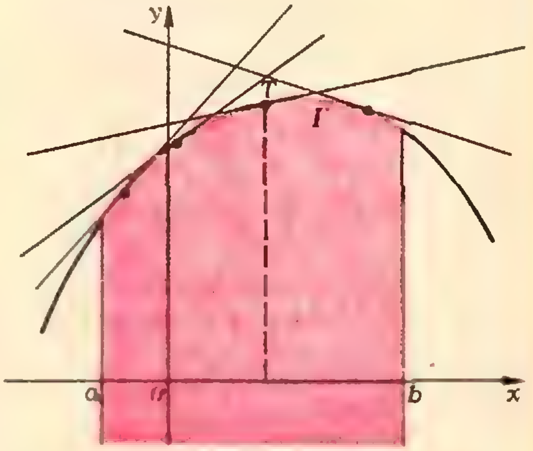


Рис. 1 а

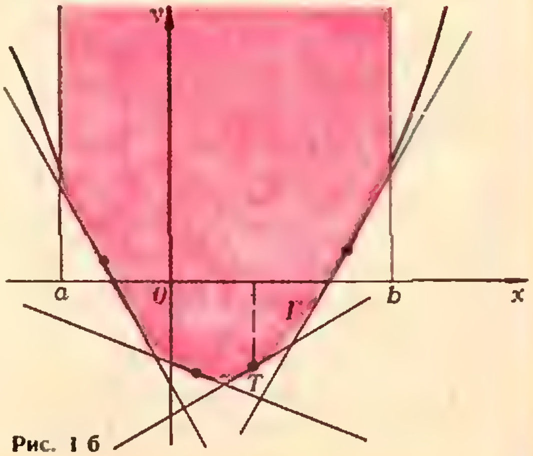


Рис. 1 б

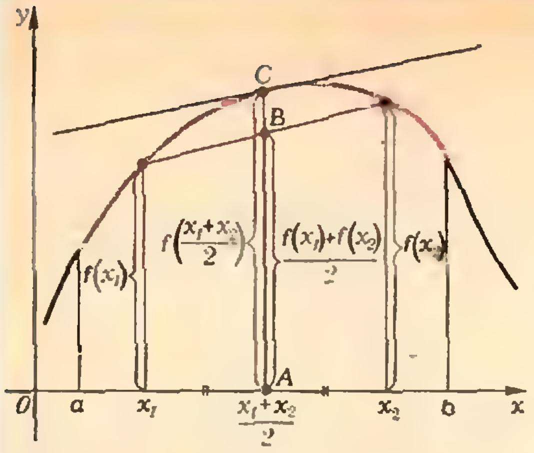


Рис. 2.

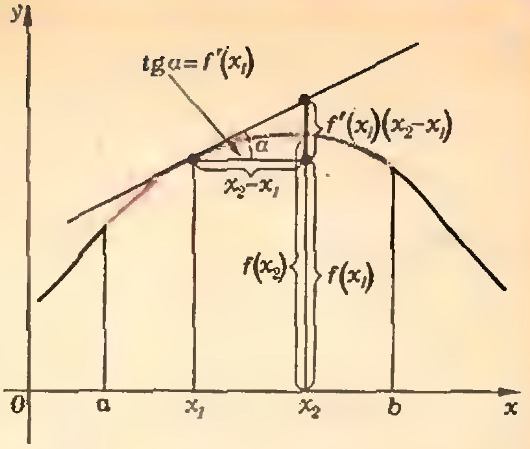


Рис. 3.

Доказательство очевидно: достаточно провести касательную к графику функции в точке $\frac{1}{2}(x_1+x_2)\in[a;b]$ и заметить, что длина отрезка $|AB|$ равна $\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$ (рис. 3).

Можно показать, что *дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ функция, обладающая свойством I, обязательно будет выпуклой вверх.* Нам этот факт не потребуется, поэтому доказательство мы не приводим.

II. *Если функции $f(x)$, $g(x)$ выпуклы вверх на $[a;b]$, то их сумма $h(x)=f(x)+g(x)$ тоже выпукла вверх на $[a;b]$.*

Действительно, складывая неравенства (1) для f и g и пользуясь тем, что $h'(x)=f'(x)+g'(x)$, мы сразу получим неравенство (1) для функции h.

III. *Если функция $f(x)$ выпукла вверх на $[a;b]$, то функция $h(x)=-f(x)$ выпукла вниз на $[a;b]$.*

Это сразу следует из определения выпуклости функции. Из свойств II и III сразу вытекает следующее свойство:

IV. *Если функция $f(x)$ выпукла вверх на $[a;b]$, а функция $g(x)$ выпукла вниз на этом отрезке, то функция $h(x)=f(x)-g(x)$ на нем выпукла вверх.*

А вот и обещанное основное неравенство.

Теорема. *Если функция выпукла вверх на $[a;b]$ и числа $x_1, x_2, \ldots, x_n\in[a;b]$ $(n\geqslant 2)$ не все равны между собой, то*

$$f\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>\frac{1}{n}[f(x_1)+\ldots+f(x_n)]. \qquad (*)$$

Эта теорема — неиссякаемый источник неравенств: достаточно подставить любую конкретную выпуклую вверх функцию вместо функции f в (*) и... неравенство готово! Например, взяв вместо f функцию sin, получим, что для любых (различных) $x_1, \ldots, x_n\in[0;\pi]$ выполняется такое неравенство:

$$\sin\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>\frac{1}{n}(\sin x_1+\ldots+\sin x_n).$$

Мы отложим доказательство теоремы до конца статьи, а сейчас посмотрим, как из нее получаются

Классические неравенства

Напомним несколько определений, часто встречающихся в математике и играющих важную роль в ее приложениях (теории вероятностей, математической статистике и т. д.).

Средним гармоническим положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется число

$$P_{-1}=\left(\frac{1}{n}(x_1^{-1}+x_2^{-1}+\ldots+x_n^{-1})\right)^{-1}=n/(x_1^{-1}+x_2^{-1}+\ldots+x_n^{-1}).$$

Средним геометрическим положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется число

$$P_0=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

Средним арифметическим чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется число

$$P_1=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ \ldots\ +x_n).$$

Средним квадратическим чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется число

$$P_2=\sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\ \ldots\ +x_n^2)}\,.$$

Оказывается, эти четыре величины связаны следующими неравенствами:

$$P_{-1}\leqslant P_0\leqslant |P_1|\leqslant P_2. \qquad (2)$$

Здесь в первых двух неравенствах предполагается, что числа $x_1, \ldots, x_n$ положительны (для последнего они могут быть любыми), причем знаки равенства будут иметь место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Читателям мы советуем эти неравенства написать в развернутом виде.

Докажем сперва второе неравенство — его часто называют неравенством Коши,— утверждающее, что *среднее геометрическое положительных $x_1, \ldots, x_n$ не больше их среднего арифметического.*

Для этого рассмотрим функцию $f(x)=\lg x$, которая, как мы видели, выпукла вверх на любом отрезке $[a;\ b]$, $0<a<b$. Согласно (*), если не все x_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ совпадают,

$$\lg\left(\frac{1}{n}(x_1+\ \ldots\ +x_n)\right)>$$
$$>\frac{1}{n}(\lg x_1+\ \ldots\ +\lg x_n)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lg\left(\frac{1}{n}(x_1+\ \ldots\ +x_n)\right)>$$
$$>\lg\sqrt[n]{x_1\cdot\ \ldots\ \cdot x_n}.$$

Так как функция $\lg x$ возрастает, отсюда следует

$$\frac{1}{n}(x_1+\ \ldots\ +x_n)>\sqrt[n]{x_1\cdot\ \ldots\ \cdot x_n},$$

т. е. второе из неравенств (2).

Для доказательства третьего применим основную теорему (в ее варианте для выпуклости вниз) к функции $f(x)=x^2$. Получим

$$\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)^2<\frac{1}{n}(x_1^2+\ldots+x_n^2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{1}{n}|x_1+\ldots+x_n|<\sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2+\ldots+x_n^2)}.$$

Для доказательства первого из неравенств (2) следует вновь взять $f(x)=\lg x$ и применить основную теорему к числам $x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$. Детали предоставляем читателю.

То, что равенства в (2) достигаются только при совпадении всех x_i, проверить совсем просто, и эту проверку мы тоже оставляем читателю.

Доказательство основной теоремы

Пусть даны числа $x_1, x_2, \ldots, x_n\in[a;\ b]$, не все совпадающие между собой, и функция f, выпуклая вверх на $[a;\ b]$. Так как $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots$ $\ldots+x_n)$ заключено между наименьшим и наибольшим из этих чисел (докажите это самостоятельно), $f((x_1+\ldots+x_n)/n)$ имеет смысл.

Сначала докажем справедливость неравенства (*) при $n=2^k\ (k\in\mathbf{N})$. Доказательство проведем индукцией по k.

При $k=1$ справедливость формулы (*) вытекает из свойства I.

Пусть формула (*) верна при $k=p$ $(p\in\mathbf{N})$. Тогда

$$f\left(\frac{1}{2^p}(x_1+x_2+\ldots+x_{2^p})\right)>$$
$$>\frac{1}{2^p}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^p})\right).$$

Докажем справедливость утверждения при $k=p+1$, т. е. докажем, что

$$f\left(\frac{1}{2^{p+1}}(x_1+\ldots+x_{2^p}+x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)>$$
$$>\frac{1}{2^{p+1}}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_{2^p})+f(x_{2^p+1})+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+f(x_{2^{p+1}})\right).$$

Рассмотрим левую часть неравенства:

$$f\left(\frac{1}{2^{p+1}}(x_1+\ldots+x_{2^p}+x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)=$$
$$=f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^p}(x_1+\ldots+x_{2^p})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2^p}(x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)\right).$$

Ввиду того, что неравенство справедливо при $k=1$, получим

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^p}(x_1+\ldots+x_{2^p})+\frac{1}{2^p}(x_{2^p+1}+\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots+x_{2^{p+1}})\right)\right)>\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2^p}(x_1+\ldots+x_{2^p})\right)+\right.$$
$$\left.+f\left(\frac{1}{2^p}(x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)\right)$$

В силу предположения индукции

$$f\left(\frac{1}{2^p}(x_1+\ldots+x_{2^p})\right)>\frac{1}{2^p}\left(f(x_1)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+f(x_{2^p})\right),\ f\left(\frac{1}{2^p}(x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)>$$
$$>\frac{1}{2^p}(f(x_{2^p+1})+\ldots+f(x_{2^{p+1}})).$$

Таким образом, окончательно имеем

$$f\left(\frac{1}{2^{p+1}}(x_1+\ldots+x_{2^p}+x_{2^p+1}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+x_{2^{p+1}})\right)>\frac{1}{2^{p+1}}(f(x_1)+\ldots+f(x_{2^p})+$$

$$+f(x_{2^p+1})+\ldots+f(x_{2^{p+1}})),$$

т. е. при $n=2^k$ теорема доказана.

Теперь докажем теорему для любого $n\in\mathbf{N}$. Очевидно, всегда найдется такое число $k_0\in\mathbf{N}$, что $n<2^{k_0}$. Положим $m=2^{k_0}-n$ и рассмотрим числа

$$x_1,\ldots,\quad x_n,\quad \underbrace{\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n),\ldots,\quad \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)}_{m}.$$

Легко видеть, что все они принадлежат $[a;\ b]$. В силу того, что их количество равно 2^{k_0}, по доказанной первой части теоремы

$$f\left(\frac{1}{n+m}(x_1+\ldots+x_n+\overbrace{+\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)+\ldots+\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n))}^{m}\right)>$$

$$>\frac{1}{n+m}(f(x_1)+\ldots+f(x_n)+$$

$$+mf\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)\Bigg)\Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{n(n+m)}(n(x_1+\ldots+x_n)+m(x_1+\ldots+x_n))\right)>$$

$$>\frac{1}{n+m}\Bigg(f(x_1)+\ldots+f(x_n)+$$

$$+mf\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)\Bigg)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>\frac{1}{n+m}(f(x_1)+\ldots$$

$$\ldots+f(x_n)+mf\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)\Bigg)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n+m}nf\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>$$

$$>\frac{1}{n+m}(f(x_1)+\ldots+f(x_n)),$$

$$f\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>\frac{1}{n}(f(x_1)+\ldots+f(x_n)).$$

Теорема доказана.

Разобрались ли вы с выпуклостью?

Теперь сформулируем ряд контрольных вопросов. Несмотря на их кажущуюся простоту, с ответом не спешите.

Можно ли утверждать, что:

а) произведение положительных и выпуклых вверх на $[a;\ b]$ функций — выпуклая вверх на $[a;\ b]$ функция?

б) если функция $f(x)$ положительная и выпукла вниз на $[a;\ b]$, то функция $g(x)=1/f(x)$ выпукла вверх на $[a;\ b]$?

в) если $f(x)$ выпукла вниз на $[a;\ b]$ и имеет обратную функцию $g(x)$, то $g(x)$ выпукла вверх на $E(f)$ ($E(f)$ — множество значений функции $f(x)$)?

г) если $f(x)$ выпукла вверх на $[a;\ b]$, то $g(x)=f(-x)$ выпукла вверх на $[-b;\ a]$?

Упражнения

Докажите следующие утверждения:

1. Если к выпуклой вверх на $[a;\ b]$ функции прибавить линейную функцию $kx+b$, то полученная сумма выпукла вверх на $[a;\ b]$.

2. Функция $f(x)=ax^2+bx+c$ выпукла вниз при $a>0$ и выпукла вверх при $a<0$.

3. Функция $f(x)=k/x$ при $k<0$ выпукла вверх на $]0;\ +\infty[$ и выпукла вниз на $]-\infty;\ 0[$.

4. Функция $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ выпукла вниз на $]-\infty;\ \infty[$.

5. Функция $f(x)=\cos x$ выпукла вверх на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ и выпукла вниз на отрезках $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, где $k\in\mathbf{Z}$.

6. Функция $f(x)=\operatorname{tg} x$ выпукла вниз на $\left[k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ и выпукла вверх на $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\pi\right]$, где $k\in\mathbf{Z}$.

7. Функция $f(x)=(3x+1)/(x-2)$ выпукла вниз на $]2;\ +\infty[$ и выпукла вверх на $]-\infty;\ 2[$.

8. Функция $f(x)=x^{-2}$ выпукла вниз на $]0;\ +\infty[$.

9. При неотрицательных значениях x_1, $x_2,\ldots,\ x_n$ справедливо неравенство

$$n(x_1+\ldots+x_n)^2>(\sqrt{x_1}+\ldots+\sqrt{x_n})^2,$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

10. Если $x_1,\ldots,x_n$ — положительные числа, то справедливо неравенство

$$n^3/(x_1+\ldots+x_n)^2<\frac{1}{x_1^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2},$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Победители конкурса «Кванта»

Ниже публикуется список школьников — победителей нашего конкурса. В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников победители конкурса «Кванта» получают право участвовать в четвертом (республиканском) этапе Всесоюзной олимпиады 1980 года.

Математика

А. АГАЕВ — с. Покровка АзССР, 10 кл.
Р. АРДАН — Львов, с. ш. № 11, 10 кл.
Л. АРУШАНОВ — Баку, с. ш. № 151, 10 кл.
А. БАЛИНСКИЙ — Львов, с. ш. № 11, 10 кл.
А. БАРГ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.
С. БЕСПАМЯТНЫХ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
А. БРАГИНСКИЙ — Волгодонск, с. ш. № 13, 10 кл.
Я. БРЕГМАН — Киев, с. ш. № 208, 10 кл.
С. ВАХРИН — Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ, 9 кл.
М. ГАЙСИНСКИЙ — Ташкент, с. ш. № 103, 9 кл.
Л. ГИТЛИН — Витебск, с. ш. № 3, 10 кл.
А. ЕРМОЛИН — Петрозаводск, с. ш. № 30, 10 кл.
А. ЖИЛИНСКИЙ — пос. Крупки Минской обл., с. ш. № 2, 10 кл.
А. КАПЛАН — Сумгаит, с. ш. № 11, 10 кл.
А. КЕЛАРЕВ — Свердловск, с. ш. № 141, 10 кл.
И. КУЗЬ — Львов, с. ш. № 11, 10 кл.
А. МЕГРЕЦКИЙ — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
Р. НАБОКОВ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
С. НОВАКОВСКИЙ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
А. ПАВЛЫЧЕВ — Рига, с. ш. № 1, 10 кл.
В. ПИДСТРИГАЧ — Львов, с. ш. № 11, 10 кл.
К. ПОДДУБНЫЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. ПОПЕЛЮХИН — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
В. РАДЧЕНКО — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
И. РОЙЗМАН — пос. Калиновка Винницкой обл., с. ш. № 2, 10 кл.
С. СТАДНИЧЕНКО — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Л. ТЕПЕР — с. Ялтушков Винницкой обл., 10 кл.
В. ТИТЕНКО — д. Блужа Минской обл., 8 кл.
В. ЦЕКАНОВСКИЙ — Донецк, с. ш. № 17, 9 кл.

Физика

А. БЕССАРАБСКИЙ — пос. Запрудня Московской обл., 10 кл.
И. БЕССОНОВ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Б. ВЕЙЦМАН — Одесса, с. ш. № 53, 8 кл.
И. ДАНИЛОВСКИЙ — Горький, с. ш. № 82, 10 кл.
Н. ЖИТЕНЕВ — пос. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
Е. КОГАН — Днепропетровск, с. ш. № 23, 10 кл.
А. ЛЯПИН — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.
Г. МОЛЧАНОВ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Д. ОВСЯННИКОВ — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
О. ПАНАЩЕНКО — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
В. СЕРЕДА — Львов, с. ш. № 1, 10 кл.
Г. СОЛДАК — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
М. СТРЕШИНСКИЙ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
И. ФОМЕНКО — Днепропетровск, с. ш. № 23, 10 кл.
В. ШАБЛИНСКИЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
И. ШВЕЦ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.

задачник Кванта

Задачи

М611—М615; Ф623—Ф627

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М611, М612» или «Ф623». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М611. На хорде AB окружности с центром O берется произвольная точка M. Через точки A, M и O проводится окружность, пересекающая первую окружность в точках A и C. Докажите, что $|MB| = |MC|$.

С. Колпаков,
ученик 10 класса

М612. Возрастающая последовательность натуральных чисел (a_n) такова, что $a_{n+1} \leqslant 10a_n$. Докажите, что если все числа a_n записать рядом (без пробелов и запятых), то полученная последовательность цифр не будет периодической.

А. Карагулян

М613. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники

$$ADB,\ BEC \text{ и } CFA\ (|AD|/|DB| = |BE|/|EC| = |CF|/|FA| = k;$$
$$\widehat{ADB} = \widehat{BEC} = \widehat{CFA} = \alpha).$$

Докажите, что:

а) середины отрезков AC, DC, BC и EF — вершины параллелограмма;
б) у этого параллелограмма два угла имеют величину α, а отношение длин сторон равно k.

Л. Купцов

М614. Для каждого натурального n через $S(n)$ обозначим сумму цифр всех натуральных чисел от 1 до n (в десятичной записи):

$$S(1) = 1,\ S(2) = 3,\ S(3) = 6,\ \ldots,\ S(9) = 45,$$
$$S(10) = 46,\ S(11) = 48,\ S(12) = 51,\ \ldots$$

а) Найдите $S(100)$.
б) Докажите, что $S(10^k - 1) = 45k \cdot 10^{k-1}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$
в) Докажите, что для двузначного числа $\overline{ab}$

$$S(\overline{ab}) = 5a^2 + ab + 41a + b(b+1)/2.$$

г) Найдите аналогичную формулу для трехзначных чисел.

д) Вычислите $S(1980)$.

Анджей Пашевич
(Польша)

М615. Докажите, что периметр любого сечения треугольной пирамиды плоскостью не превосходит наибольшего из периметров ее граней.

В. Сендеров

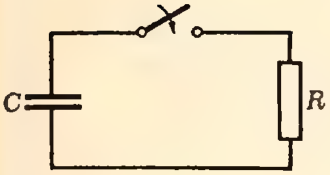


Рис. 1.

Ф623. Переменный конденсатор с начальной емкостью C_0, заряженный до напряжения U, замыкают на резистор с сопротивлением R (рис. 1). Как нужно изменять со временем емкость конденсатора, чтобы в цепи шел постоянный ток? Какую мощность развивают внешние силы, благодаря которым изменяется емкость конденсатора?

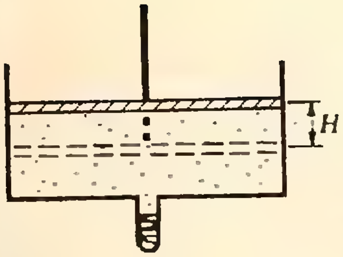


Рис. 2.

Ф624. В отростке сосуда, закрытого плоским поршнем диаметра $D=5$ см, имеется небольшое количество воды (рис. 2). Диаметр отростка $d=2$ мм. Если при постоянной температуре $t=20°C$ поршень опустить на $H=10$ см, то уровень воды в отростке повысится на $h=1$ мм. Найти давление насыщенных паров воды при температуре $t=20°C$.

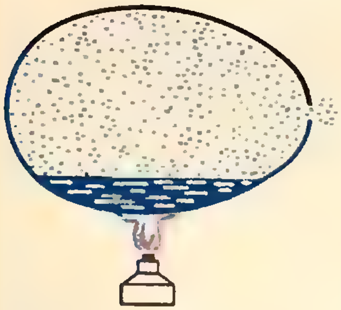


Рис. 3.

Ф625. Из яичной скорлупы сделан реактивный двигатель, показанный на рисунке 3. Площадь отверстия в скорлупе $s=3$ мм². Какова наибольшая сила тяги такого двигателя, если температура воды в скорлупе поддерживается равной 100°C?

Ф626. Гимнаст падает с высоты $H=12$ м на горизонтальную натянутую упругую сетку, которая прогибается при этом на величину $h=1$ м. Оценить, во сколько раз максимальная сила, действующая на гимнаста со стороны сетки, больше силы тяжести, если размеры сетки много больше h и масса сетки мала по сравнению с массой человека.

Ленинградская городская олимпиада. 1979 г.

Ф627. Пока вы решали задачи из «Кванта», картошка, которая варилась на плите, сварилась, вода выкипела и кастрюля изнутри пригорела. Куда надо лить холодную воду, чтобы нагар легче отскочил — внутрь кастрюли или на ее внешнюю поверхность?

Л. Ашкинази

Решения задач

M557—M561; Ф568—Ф572

M557. *Дано n попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$. Докажите, что среди них обязательно встретится простое число.*

Утверждение задачи докажем методом «от противного». Допустим, что все данные числа $a_1, a_2, \dots a_n$ — составные. Сопоставим каждому из них его минимальный простой делитель: $a_i \to q_i$. Пусть $q = \max\limits_{1<i<n} \{q_i\}$. Тогда $q > p_n$, где p_n — n-е простое число (поскольку числа $a_1, \dots, a_n$ попарно взаимно просты).

Индукцией по k легко доказывается неравенство $p_k > 2k-1$. (Действительно, оно верно для $p_2 = 3$. Далее $p_{k+1} > p_k + 2$ при $k > 2$.) Тем самым $q > 2n-1$. Следовательно, для того a_j, для которого $q_j = q$,

$$a_j > q_j^2 > (2n-1)^2$$

— противоречие. Значит, среди данных чисел обязательно встретится простое.

А. Колотов

◆

M558. *В круге расположено $k > 1$ черных секторов, угол каждого из которых меньше $180°/(k^2-k+1)$. Докажите, что круг можно повернуть вокруг центра O так, что все черные секторы перейдут в белую часть круга.*

Пусть вместе сложены два круга, на одном из которых отмечено r черных секторов с центральными углами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, на другом — s синих с углами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ (рис. 1). Попробуем найти достаточные условия, при которых круг с синими секторами можно повернуть на такой угол φ $(0 < \varphi < 2\pi)$, чтобы ни один из синих секторов не пересекался с черным.

Углы поворота φ удобно отмечать на специальной окружности c длины 2π с данной на ней точкой 0 (нулем). «Повернем» задачу иначе. Отметим на c все запретные углы φ — такие, при повороте на которые какой-то синий радиус совпадает с каким-то черным. Каждая пара (черный сектор с углом α_i, синий сектор с углом β_j) дает интервал запретных φ длиной $\alpha_i + \beta_j$. Поэтому, *если**)

$$\sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) = s\sum_i \alpha_i + r\sum_j \beta_j < 2\pi, \qquad (1)$$

то множество запретных углов не покрывает всю окружность c $(0 < \varphi < 2\pi)$, и заведомо найдется «незапретный» угол φ.

Нужное достаточное условие (1) найдено. Но прямо применить его к нашей задаче (когда множества черных и синих секторов совпадают, $r = s = k$, $\alpha_i = \beta_i$) можно, лишь если $\sum\limits_i \alpha_i < \pi/k$, в частности, если каждое $\alpha_i < \pi/k^2$. Доказать утверждение и для секторов с углами $\alpha_i < \gamma = \pi/(k^2-k+1)$ можно, слегка уточнив в этом случае оценку

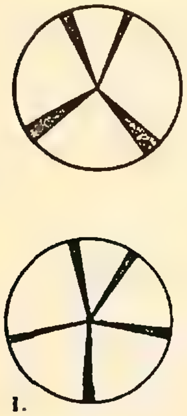
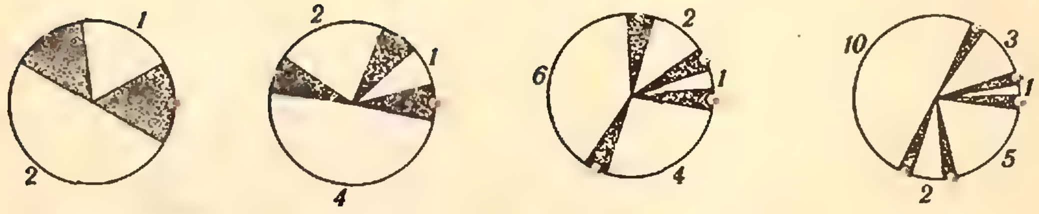


Рис. 1.

---

*) Суммирование $\sum\limits_{i,j}$ производится по всем $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$.



а) $k=2$ б) $k=3$ в) $k=4$ г) $k=5$

Рис. 2.

длины «запретного» множества. Все «запретные» интервалы, соответствующие парам совпадающих секторов (α_i, α_i), содержатся в одном интервале длины 2γ с центром O. А сумма всех остальных величин запретных углов

$$\sum_{i,\,j,\,i\neq j} (\alpha_i+\alpha_j) = 2(k-1)\sum_i \alpha_i$$

меньше $2(k-1)k\gamma = 2\pi - 2\gamma$, так что и в этом случае найдется «незапретное» значение φ.

Задача решена, но возникает вопрос, нельзя ли еще поднять границу для α_i? Утверждение задачи, вообще говоря, не сохранится, если углы всех k секторов взять по величине равными $\gamma = \pi/(k^2-k+1)$. Опровергающие примеры для $k=2, 3, 4, 5$ весьма любопытны (рис. 2): красные точки — концы биссектрис секторов — должны быть расположены в k вершинах правильного (k^2-k+1)-угольника, выбранных так, что для любого $m=1, 2, \ldots, k^2-k$ найдется пара красных точек, между которыми расположено (в ту или иную сторону по окружности) m сторон (k^2-k+1)-угольника. Проверьте, что тогда «запретное множество» — все $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Сама по себе комбинаторная задача: *при каких k можно расположить k красных точек на окружности длины $2C_k^2+1 = k^2-k+1$ так, чтобы для любого $m=1, 2, \ldots, k^2-k$ нашлась дуга длины m с красными концами?* — видимо, очень трудна, и решение ее в общем виде нам неизвестно. Для $k=6$, например, существует 5 различных примеров (они найдены с помощью ЭВМ *Б. Ходулевым*, рис. 3), а для $k=7$ их вообще не существует, и вот почему.

Пусть для некоторого k такое красное множество $П_0$ существует. Тогда $П_0$ и его образы $П_m$ $(m=1, 2, \ldots, k^2-k)$ при поворотах на углы $m\gamma$, $\gamma=\pi/(k^2-k+1)$, обладают такими свойствами:

1°. Для любых $i \neq j$ пересечение $П_i \cap П_j$ состоит из одной точки.

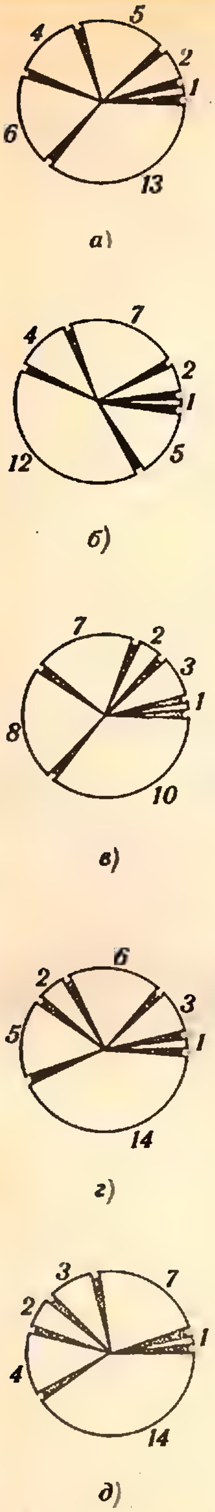
2°. Любые две из точек множества $П = \bigcup_m П_m$ (вершин правильного (k^2-k+1)-угольника) принадлежат ровно одному из $П_m$.

3°. Существуют четыре точки множества $П$, не содержащиеся в одном $П_i$.

Множество $П$ с такой системой подмножеств $П_m \subset П$ называется *конечной проективной плоскостью**). Известно, что конечные проективные плоскости существуют для $k=p^r+1$, где p — простое, r — натуральное числа (например, $k=3, 4, 5, 6, 8, 9$) и не существует, если $k=7, 15$; понятно теперь, что в последнем случае не может существовать и опровергающего примера в задаче М558 (так что, например, для семи секторов с углами $\pi/43$ ее утверждение верно). Но уже для $k=10$ вопрос пока не удается решить даже с помощью ЭВМ.

Отметим, что конечная проективная плоскость не обязана иметь такую «циклическую» нумерацию точек, при которой прямые $П_m$ получаются друг из друга сдвигом номеров — это дополнительное требование, возможно, облегчит доказательство отсутствия таких «циклических плоскостей» для некоторых k. (Заметим, что все проективные плоскости над конечным полем из p^r элементов имеют такую циклическую нумерацию; см. об этом в главе «Разностные множества» книги М. Холла.)

Н. Васильев, Г. Гальперин, В. Произволов



а)

б)

в)

г)

д)

Рис. 3.

---

*) Мы уже встречались в «Кванте» с тем, что разные по содержанию задачи затрагивают это понятие — см., например, задачи М5, («Квант», 1970, № 1) и М335 («Квант», 1975, № 7). Число $n=k-1$ называется «порядком» проективной плоскости; здесь $k=n+1$ — число точек на «прямой» $П_n$ (и число «прямых», проходящих через данную точку; эти числа всегда одинаковы для всех точек и «прямых»). Про конечные проективные плоскости см. в книге Э. Артина *«Геометрическая алгебра»* (М., «Наука», 1969) и книге М. Холла *«Комбинаторика»* (М., «Мир», 1970).

М559. *Докажите, что если x, y, z — длины сторон треугольника, то*

$$\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-\frac{y}{x}-\frac{z}{y}-\frac{x}{z}\right|<1.$$

Левую часть удобно разложить на множители:

$$B=\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-\frac{y}{x}-\frac{z}{y}-\frac{x}{z}\right|=$$
$$=\frac{|z(x^2-y^2)+x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)|}{xyz}=$$
$$=\frac{|(y-z)(z-x)(x-y)|}{xyz}.$$

$B<1$, поскольку $|y-z|<x$, $|z-x|<y$ и $|x-y|<z$.

Уменьшить оценку 1 нельзя: например, при $x=\varepsilon$, $y=1+\varepsilon^2$, $z=1+\varepsilon$ (ε — малое положительное число) B будет больше $(1-\varepsilon)^3$.

В. Сендеров

◆

М560. *В дне ящика имеется дырка. Нужно сделать выпуклую заслонку наименьшей площади, при любом положении которой на дне ящика дырка будет закрыта. Решите эту задачу, если:*

а) дно ящика — квадрат 4×4, и дырка расположена так, как показано на рисунке 1.

б) дно ящика — квадрат $n\times n$ (n — нечетно), а дырка расположена в центре (рис. 2).

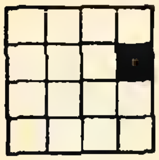


Рис. 1.

а) Если заслонка покрывает единичный квадрат A_1 при любом положении внутри квадрата 4×4, то она покрывает и образы A_1 при симметриях относительно диагоналей и средних линий большого квадрата и при поворотах на 90°, 180° и 270° относительно его центра — квадраты A_2, A_3, ..., A_8 на рисунке 3. Поскольку заслонка выпуклая, она покрывает при этом и треугольники B_1, B_2, B_3, B_4, и центральный квадрат P со стороной длины 2 (рис. 3). Так как площадь заслонки не меньше суммарной площади покрываемых ею фигур, она не меньше 14. Очевидно, заслонка площади 14 в форме выпуклого восьмиугольника, составленного из перечисленных выше квадратов и треугольников (он выделен на рисунке 3), всегда покрывает квадрат A_1. Следовательно, она является искомой.

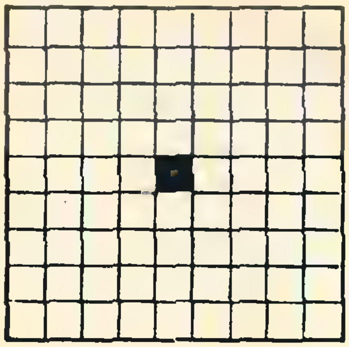


Рис. 2.

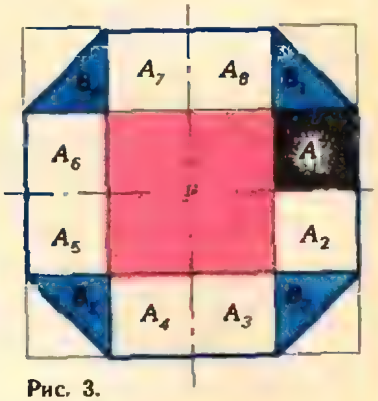


Рис. 3.

б) Допустим, что у нас есть выпуклая заслонка, при любом положении которой на дне ящика $n\times n$ дырка A полностью закрыта.

Рассмотрим наименьший прямоугольник $П$ со сторонами, параллельными сторонам квадрата, содержащий нашу заслонку. Пусть его размеры $(n-x)\times(n-y)$. Параллельно сдвигая $П$ вместе с заслонкой, легко убедиться, что весь прямоугольник, получаемый переносом клетки A на расстояние не более x влево-вправо и y — вверх-вниз, должен принадлежать заслонке; длины сторон этого прямоугольника $u=1+x$, $v=1+y$. Кроме того, на каждой стороне $П$ должна быть точка заслонки; поэтому заслонка должна включать еще по крайней мере четыре треугольника (рис. 4) общей площадью $(n-u-x)v/2+(n-v-y)u/2$. Итак, площадь заслонки не меньше

$$uv+(n-u-x)v/2+(n-v-y)u/2=$$
$$=(n-x)(1+y)/2+(n-y)(1+x)/2=$$
$$=n+x(n-y-1)/2+y(n-x-1)/2\geqslant n.$$

(ведь, очевидно, x и y не превосходят даже $(n-1)/2$).

На рисунке 5 изображена фигура M, которая всегда покрывает центральный квадрат A. Площадь ее, очевидно,

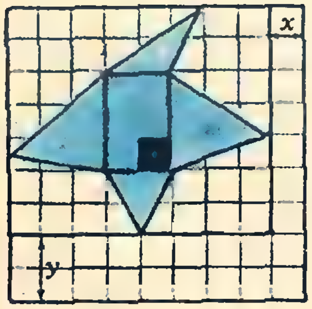


Рис. 4.

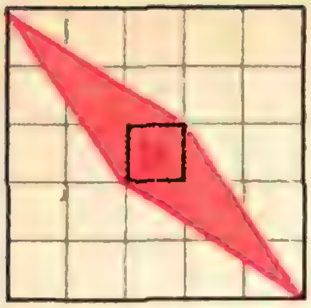


Рис. 5.

М561. *Два треугольника* $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$, площади которых равны S_0 и S_1, расположены так, что лучи A_0B_0 и A_1B_1, B_0C_0 и B_1C_1, C_0A_0 и C_1A_1 параллельны, но противоположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1.

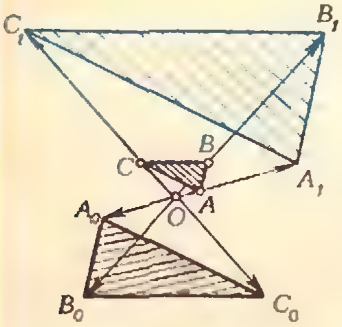


Рис. 1.

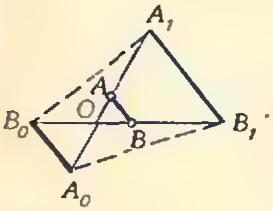


Рис. 2.

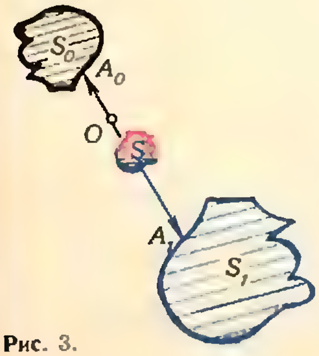


Рис. 3.

равна n, то есть минимально возможная. Таким образом, это — искомая заслонка.

Заметим, что в решении не использовалось, что сторона квадрата n — целое число, важно лишь, что $n>1$.

Было бы интересно решить эту задачу для других пар фигур; например, вполне правдоподобно, что если «дыра» и «дно ящика» — концентрические круги радиусов r и R, то выпуклая заслонка наименьшей площади — наименьшая выпуклая фигура, содержащая меньший круг и диаметр большего круга (ее площадь равна $2r\sqrt{R_2-r^2}+2r^2\arcsin r/R$).

В. Батырев

◆

Ответ. Искомая площадь

$$S=\left(\frac{\sqrt{S_0}-\sqrt{S_1}}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

Из условий задачи следует, что треугольники $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ гомотетичны (рис. 1), причем коэффициент гомотетии отрицателен и по модулю равен

$$k=\frac{|A_1B_1|}{|A_0B_0|}=\frac{|B_1C_1|}{|B_0C_0|}=\frac{|C_1A_1|}{|C_0A_0|}=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_0}}.$$

Пусть O — центр этой гомотетии, то есть

$$\overrightarrow{OA_1}=-k\overrightarrow{OA_0},\ \overrightarrow{OB_1}=-k\overrightarrow{OB_0},\ \overrightarrow{OC_1}=-k\overrightarrow{OC_0}.$$

Тогда, если A, B, C — середины отрезков A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 соответственно, то

$$\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1})/2=\overrightarrow{OA_0}(1-k)/2$$

и аналогично

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_0}(1-k)/2,\qquad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC_0}(1-k)/2.$$

Следовательно, треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_0B_0C_0$, и коэффициент гомотетии по модулю равен $\frac{|1-k|}{2}$; поэтому

$$\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_0}}=\frac{|1-k|}{2}=\frac{\left|1-\sqrt{\frac{S_1}{S_0}}\right|}{2}=\frac{|\sqrt{S_0}-\sqrt{S_1}|}{2\sqrt{S_0}}.$$

Отсюда следует формула (1).

Замечания. 1°. Треугольники $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ могут лежать в параллельных плоскостях; им будет параллельна и плоскость треугольника ABC. Все приведенные выше рассуждения и ответ (1) остаются в силе.

2°. Наше решение тесно связано с таким полезным фактом: отрезок AB, соединяющий середины диагоналей A_0A_1 и B_0B_1 трапеции с основаниями A_0B_0 и A_1B_1, параллелен основаниям и равен по длине полуразности их длин (рис. 2).

3°. Пусть точки A_t, B_t, C_t делят отрезки A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 в одном и том же заданном отношении; пусть, например,

$$\frac{\overrightarrow{A_0A_t}}{\overrightarrow{A_0A_1}}=\frac{\overrightarrow{B_0B_t}}{\overrightarrow{B_0B_1}}=\frac{\overrightarrow{C_0C_t}}{\overrightarrow{C_0C_1}}=t.$$

Тогда площадь S_t треугольника $A_tB_tC_t$ будет выражаться формулой

$$S_t=(t\sqrt{S_1}-(1-t)\sqrt{S_0})^2, \qquad (2)$$

обобщающей формулу (1) (соответствующую случаю $t=1/2$).

Подумайте, что получается при $t=\frac{\sqrt{S_0}}{\sqrt{S_0}+\sqrt{S_1}}$.

4°. То обстоятельство, что в задаче даны треугольники, не является существенным; треугольники могут быть замене-

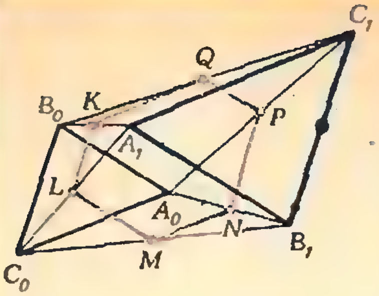


Рис. 4.

ны другими фигурами, гомотетичными относительно некоторого центра O. Более точно: пусть дана точка O и точка A_0 описывает некоторую замкнутую несамопересекающуюся кривую, охватывающую фигуру площади S_0 (см. рис. 3). Одновременно точка A_1, определяемая вектором $\overrightarrow{OA_1}=-k\cdot\overrightarrow{OA_0}$, $k=\sqrt{S_1/S_0}$, описывает другую кривую (охватывающую фигуру площади S_1). Тогда середина A отрезка A_0A_1 опишет кривую, охватывающую фигуру площади (1). Аналогично точка A_t такая, что $\overrightarrow{A_0A_t}=t\overrightarrow{A_0A_1}$ (то есть $\overrightarrow{OA_t}=t\overrightarrow{OA_0}+(1-t)\overrightarrow{OA_1}=(t-k+kt)\overrightarrow{OA_0}$; t — фиксированное число), опишет кривую, охватывающую фигуру площади, определяемой по формуле (2).

5°. Интересен следующий факт: в условиях задачи М561 площадь шестиугольника $KLMNPQ$, где K, L, M, N, P, Q — середины отрезков B_0A_1, A_1C_0, C_0B_1, B_1A_0, A_0C_1, C_1B_0 соответственно (рис. 4), равна

$$S_{KLMNPQ}=\left(\frac{\sqrt{S_0}+\sqrt{S_1}}{2}\right)^2$$

(ср. с формулой (1))*).

Л. Купцов

Ф568. *При бомбардировке литиевой мишени протонами с энергией не меньше 1,88 МэВ может происходить ядерная реакция*

$$^7\mathrm{Li}+p\rightarrow{}^7\mathrm{Be}+n.$$

При какой энергии протонов образующиеся в реакции нейтроны могут лететь назад от литиевой мишени?

◆

Согласно законам сохранения энергии и импульса

$$E_p=E_{Be}+E_n+Q, \qquad (1)$$

$$\vec{p}_p=\vec{p}_{Be}+\vec{p}_n, \qquad (2)$$

где E_p, E_{Be}, E_n — соответственно энергии протона, ядра бериллия и нейтрона, $\vec{p}_p$, $\vec{p}_{Be}$, $\vec{p}_n$ — импульсы этих частиц. При энергии протона $E_p=E_0=1{,}88$ МэВ суммарная энергия E ядра бериллия и нейтрона минимальна. Найдем ее.

Для этого рассмотрим процесс в системе отсчета, движущейся со скоростью центра масс системы протон — ядро лития. В этой системе протон и ядро лития движутся навстречу друг другу. При минимально возможной энергии взаимодействующих частиц (протона и ядра лития) энергия образовавшихся в процессе реакции ядра бериллия и нейтрона равна нулю — эти частицы покоятся.

Теперь перейдем к системе отсчета, в которой литиевая мишень неподвижна. В этой системе ядро бериллия и нейтрон, образовавшиеся в результате бомбардировки мишени протоном с энергией $E_p=E_0$, движется как одно целое со скоростью, равной скорости центра масс системы протон — ядро лития. Их суммарная энергия E, согласно закону сохранения энергии, определяется равенством

$$E_0=E+Q, \qquad (1')$$

а их суммарный импульс $\vec{p}$, согласно закону сохранения импульса, равен

$$\vec{p}=\vec{p}_0 \qquad (2')$$

($\vec{p}_0$ — импульс протона с энергией E_0). Учитывая, что импульс частицы и ее энергия связаны соотношением $p=|\vec{p}|=\sqrt{2mE}$ $\left(E=\frac{mv^2}{2}=\frac{(mv)^2}{2m}=\frac{p^2}{2m}\right)$, равенство (2') мы можем переписать так:

$$\sqrt{2mE_0}=\sqrt{2(m+M)E}$$

(здесь m обозначены масса протона и масса нейтрона, M — масса ядра лития и масса ядра бериллия). Отсюда находим $E=\frac{m}{m+M}E_0$. Подставив это значение в (1'), находим значение Q:

---

*) Прим. ред. О далеко идущих обобщениях подобных формул рассказывалось в статье «Семейство параллельных n-угольников» («Квант», 1974, № 11).

$$Q=\frac{M}{m+M}E_0$$

Таким образом, при энергии протона $E_p>E_0$ закон сохранения энергии (1) мы можем записать так:

$$E_p=E_{\mathrm{Be}}+E_n+\frac{M}{m+M}E_0 \qquad (3)$$

Если образовавшийся в результате реакции нейтрон летит назад от литиевой мишени, то закон сохранения импульса (2) можно записать так:

$$p_p=p_{\mathrm{Be}}-p_n \quad (p=|\vec{p}|),$$

или

$$\sqrt{2mE_p}=\sqrt{2ME_{\mathrm{Be}}}-\sqrt{2mE_n}\,. \qquad (4)$$

Из равенства (4) найдем

$$E_{\mathrm{Be}}=\frac{m}{M}\left(E_p+E_n+2\sqrt{E_pE_n}\right)$$

и подставим это значение в (3). В результате получим

$$E_p=E_n+\frac{m}{M}\left(E_p+E_n+2\sqrt{E_pE_n}\right)+\frac{M}{m+M}E_0.$$

Из последнего равенства видно, что E_p минимально при $E_n=0$. При этом

$$E_p=\frac{M^2}{M^2-m^2}E_0\approx 1{,}92 \ (\text{МэВ})$$

Таким образом, при $E_p\approx 1{,}92$ МэВ образующийся в реакции нейтрон покоится. При $E_p>1{,}92$ МэВ нейтрон может лететь назад от литиевой мишени

И. Слободецкий

◆

Ф569. *Электрическим кипятильником мощностью $W=500$ Вт нагревают воду в кастрюле. За две минуты температура воды увеличилась от $t_1=85$°C до $t_2=90$°C. Затем кипятильник выключили и за одну минуту температура воды упала на один градус. Сколько воды находится в кастрюле? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}19\times10^3$ Дж/(кг · К)*

Обозначим τ_1 время нагрева воды ($\tau_1=2$ мин). Из закона сохранения энергии следует, что

$$W\tau_1=cm(t_2-t_1)+Q_1, \qquad (*)$$

где m — масса воды, Q_1 — потери энергии, связанные с теплоотдачей в окружающее пространство. Q_1 пропорционально времени τ_1 и разности температур воды и окружающей среды

При остывании воды (когда нагреватель выключен) выделяемая в окружающее пространство энергия равна

$$Q_2=cm\,\Delta t,$$

где $\Delta t=1$°C — изменение температуры воды за время $\tau_2=1$ мин. Так как разность температур воды и окружающей среды меняется незначительно, а $\tau_2=0{,}5\,\tau_1$, $Q_2=0{,}5Q_1$, так что

$$Q_1=2Q_2=2cm\,\Delta t.$$

Подставив это выражение для Q_1 в равенство (*), получим

$$W\tau_1=cm(t_2-t_1+2\,\Delta t).$$

Отсюда

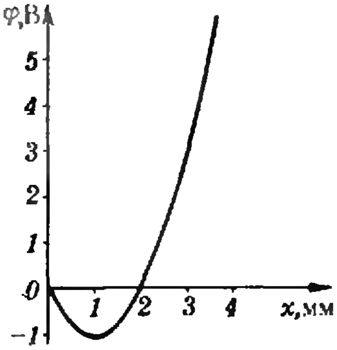
$$m=\frac{W\tau_1}{c(t_2-t_1+2\,\Delta t)}\approx 1{,}8 \text{ кг}$$

Е. Сурков

◆

Ф570. *Из-за наличия объемного заряда в межэлектродном пространстве плоского диода распределение потенциала $\varphi(x)$ между катодом и анодом имеет вид: $\varphi(x)=x^2-2x$ (x — в миллимет-*

Нарисуем график зависимости $\varphi(x)$. Из графика видно, что вначале потенциал уменьшается и отрицателен, затем начинает возрастать. Он минимален при $x=1$ мм, $\varphi_{\min}=1$ В. Это означает, что вначале (при малых x), пока потенциал убывает, электрическое поле при перемещении электрона совершает отрицательную работу, препятствуя перемещению электрона. При $x>1$ мм, когда потенциал начинает возрастать, поле *рах, φ — в вольтах). Расстояние между катодом и анодом $d = 10$ мм. Координата x совпадает с расстоянием до катода. Определить, при какой минимальной кинетической энергии электрон с поверхности катода сможет достичь анода. Каким будет максимальное ускорение электронов, которые достигнут анода?*



совершает положительную работу, разгоняя электрон. Следовательно, для того чтобы электрон попал на анод, он должен достичь точки с координатой $x = 1$ мм. Из закона сохранения энергии следует, что для этого он должен иметь энергию не меньше чем

$$W_{\min} = e\varphi_{\min} = 1 \text{ эВ}.$$

Ускорение электрона определяется действующей на электрон силой, то есть напряженностью поля. Поэтому ускорение электрона максимально в той точке, в которой максимальна напряженность электростатического поля. Так как $\Delta\varphi = E\,\Delta x$,

$$E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) - (x^2 - 2x)}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x}.$$

При малых Δx можно пренебречь Δx^2, так что

$$E(x) = 2x - 2 \quad (x \text{ — в мм, } E \text{ — в В/мм}).$$

Направлено поле от катода к аноду при $x < 1$ мм и от анода к катоду при $x > 1$ мм. Так как заряд электрона отрицателен, сила, действующая на электрон, направлена противоположно полю.

Итак, напряженность электростатического поля пропорциональна координате. Она максимальна при $x = d$ и равна при этом $E_{\max} = 18$ В/мм. Следовательно, при $x = d$ ускорение электрона максимально и равно

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} \approx 3{,}2 \cdot 10^{15} \text{ м/с}^2.$$

Ф571. *Батареи и резисторы собирают в цепь двумя способами: как на рисунке 1 и как на рисунке 2. Определить токи, текущие через резисторы в обоих случаях. Сопротивлениями источников тока и соединительных проводов пренебречь. Как изменятся токи в первом случае, если разрезать провода в точках A и B?*

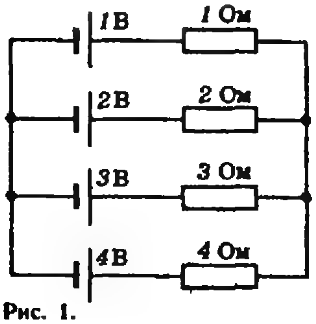


Рис. 1.

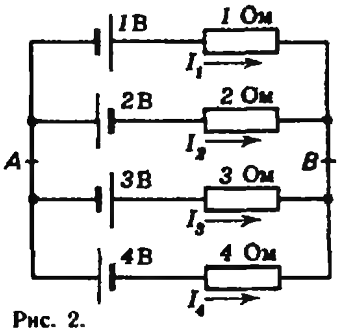


Рис. 2.

◆

1) Примем направления токов через резисторы такими, как показано на рисунке 1, и обозначим U напряжение между точками A и B. Тогда

$$U = -\mathscr{E}_1 + I_1R_1, \qquad (1)$$
$$U = \mathscr{E}_2 + I_2R_2, \qquad (2)$$
$$U = -\mathscr{E}_3 + I_3R_3, \qquad (3)$$
$$U = \mathscr{E}_4 + I_4R_4. \qquad (4)$$

Так как сумма токов, приходящих в точку B, равна нулю (заряд не накапливается в точке B), то

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \qquad (5)$$

Из системы уравнений (1)—(5) нетрудно найти токи и напряжение U. Для этого подставим в уравнения (1)—(4) известные значения ЭДС (в вольтах) и сопротивлений (в омах):

$$U = -1 + I_1,$$
$$U = 2 + 2I_2,$$
$$U = -3 + 3I_3,$$
$$U = 4 + 4I_4,$$
$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

Решая эту систему, найдем

$$U + \frac{1}{2}U + \frac{1}{3}U + \frac{1}{4}U = 0 \Rightarrow U = 0.$$

Поэтому

$$I_1 = 1\text{А};\ I_2 = -1\text{А};\ I_3 = 1\text{А};\ I_4 = -1\text{А}.$$

(Токи I_2 и I_4 направлены противоположно стрелкам.)

Если провода разрезаны в точках A и B, то

$$-\mathscr{E}_1 + I_1'R_1 = \mathscr{E}_2 + I_2'R_2,$$

$$I_1' + I_2' = 0,$$

так что

$$I_1' = 1\text{А},\ I_2' = -1\text{А};$$

аналогично

$$-\mathcal{E}_3+I'_3R_3=\mathcal{E}_4+I'_4R_4,$$
$$I'_3+I'_4=0,$$

так что

$$I'_3=1\text{А},\ I'_4=-1\text{А}.$$

2) В случае схемы, приведенной на рисунке 2, решение аналогично.

◆

Ф572. *Перрен исследовал зависимость от высоты числа шарообразных частиц особой смолы — гуммигута — во взвеси этих частиц в воде. Для частиц радиусом $r_1=0{,}13$ мкм он получил зависимость, график которой показан на рисунке 1 (n — концентрация частиц на высоте h, n_0 — их концентрация у дна кюветы). Такой же график получается для частиц с радиусом $r_2=0{,}065$ мкм, только картина растянута по высоте в 8 раз. В то же время известно, что плотность кислорода в земной атмосфере убывает с высотой так, как показано на рисунке 2 (ϱ — плотность кислорода на высоте H, ϱ_0 — у поверхности кюветы). Определить массу молекулы кислорода*

Плотность гуммигута $\varrho_г=1{,}194$ г/см³. Из рисунка 1 видно, что число частиц гуммигута с радиусом r_1 уменьшается вдвое каждый раз при уменьшении высоты на $\Delta h_1=30$ мкм Число частиц гуммигута с радиусом r_2 уменьшается в 8 раз медленнее, то есть число частиц уменьшается вдвое при уменьшении высоты на $\Delta h_2=240$ мкм. Но $r_2={}^1/_2r_1$, и $\Delta h_2=8\Delta h_1$ Отсюда можно заключить, что

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

Так как кубу радиуса пропорциональна масса частицы,

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}=\frac{m_2}{m_1}$$

(m_1, m_2 — массы частиц гуммигута с радиусами r_1 и r_2 соответственно)

Изменение с высотой плотности кислорода в атмосфере аналогично изменению с высотой числа частиц гуммигута Из рисунка 2 видно, что плотность кислорода уменьшается вдвое при изменении высоты на $\Delta H=5{,}5$ км. Поэтому

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta H}=\frac{m}{m_1},$$

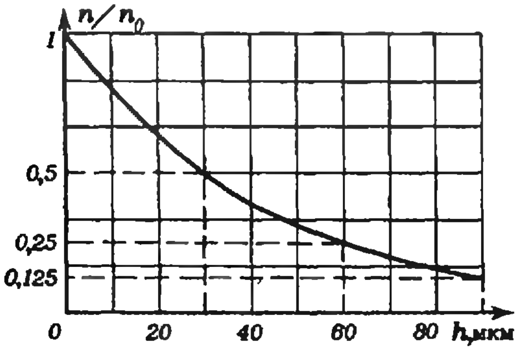


Рис. 1.

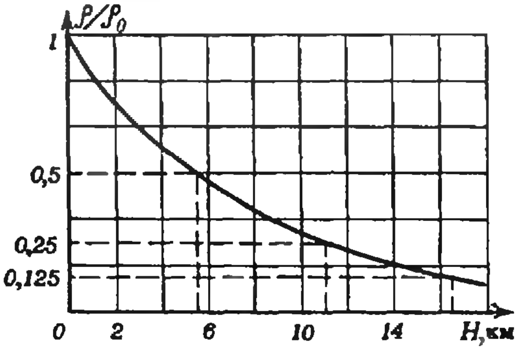


Рис. 2.

где m — масса молекулы кислорода. Отсюда

$$m=m_1\frac{\Delta h_1}{\Delta H}=\frac{4}{3}\pi r_1^3\varrho_г\frac{\Delta h_1}{\Delta H}\approx 5{,}8\cdot 10^{-26}\ \text{кг}$$

И Слободецкий

СПИСОК ЧИТАТЕЛЕЙ, ПРИСЛАВШИХ ПРАВИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗ ЗАДАЧНИКА «КВАНТА»

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М546—М565 и Ф558—Ф572 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших письма в редакцию, успешно справились с задачами **М559—М561.** Остальные задачи решили: *Е. Абрамочкин* (Куйбышев) **55а), 56**; *С. Августинович* (Львов) **53, 56**; *А. Авербах* (Донецк) **48а), 49, 53, 54, 57, 58, 60а), 64**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **46, 47, 48а), 53, 54, 57, 60а), 64**; *В. Александров* (Саратов) **64**; *А. Андреасян* (с. Бюрегаван АрмССР) **47, 56**; *Р. Ардан* (Львов) **54, 56—58, 60а), 62**; *Л. Арушанов* (Баку) **64**; *А. Ахметхозин* (Андижан) **53**; *П. Ахметьев* (Москва) **46, 48а), 51, 54, 55, 58, 60а), б)**; *Б. Баасандорж* (МНР) **47, 49, 57**; *А. Бабакулов* (Термез) **47**; *К. Бакланов* (Тула) **47**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **46—54, 55а), 56—58, 62, 63, 65**; *А. Барг* (Николаев) **47, 51, 52, 55, 57, 60а), 62, 64**; *Д. Батуров* (Орел) **54**; *А. Безпалко* (Рига) **46, 47**; *И. Бекшиев* (Киев) **60а)**; *А. Белозеров* (Одесса) **51, 52, 60а)**; *А. Белюга* (Кривой Рог) **53, 55а)**; *Н. Березовский* (Черновцы) **54**; *С. Беспамятных* (Артемовский Свердловской обл.) **46—54, 55а), 57, 58, 60а), 64, 65**; *В. Бобов* (Ленинград) **53, 55а)**; *А. Боричев* (Ленинград) **62, 63**; *А. Боровских* (Воронеж) **47**; *О. Бохонов* (Кобрин) **57, 63**; *А. Брагинский* (Волгодонск) **46, 47, 50, 56, 57, 64**; *Я. Брегман* (Киев) **46—49; 51—54; 56—58; 60а), 62, 64**; *Г. Бродская* (Донецк) **47, 49, 51, 57**; *С. Буленова* (Алма-Ата) **47**; *А. Бурин* (Москва) **46—48, 50—52, 55а), 60б)**; *Э. Вайслер* (Киев) **46, 47, 51, 52, 57, 60а)**; *С. Василовский* (Ашхабад) **47, 48а), 49, 50, 56—58**; *С. Вахрин* (с/х Бобровский КазССР) **57**; *И. Владимиров* (Москва) **46, 53, 54, 55а), 57, 60а), 64**; *А. Влэдеску* (СРР) **46, 48**; *Х. Воктор* (Днепродзержинск) **47**; *А. Вольнов* (Киев) **57**; *А. Воронов* (Москва) **46, 47, 48а), 51, 54—56, 60а); 62—64**; *М. Гайсинский* (Ташкент) **47, 52, 62**; *П. Ганелин* (Москва) **62**; *Н. Гасилов* (Баку) **46, 47, 49, 50, 53, 54**; *Х. Гафуров* (Ура-Тюбе) **51**; *В. Гельфанд* (Могилев) **57, 58**; *Л. Гитлин* (Витебск) **47, 48а), 50, 54, 57, 58**; *М. Гликман* (Кишинев) **46, 47, 48а), 49, 50**; *О. Головинская* (Киев) **46, 47, 62**; *Д. Голуб* (Сумы) **54, 57, 58**; *О. Горбачев* (Кустанай) **47**; *С. Городько* (Днепропетровск) **47**; *Н. Гринберг* (Киев) **46—50; 57, 60а)**; *Л. Гройсман* (Харьков) **47, 51, 53—57, 60а)**; *В. Грушевский* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **57**; *В. Губа* (Вологда) **46—50**; *С. Гузов* (Львов) **47, 51, 55а)**; *Л. Гуральник* (Житомир) **64**; *В. Джалоян* (с. Урцадзор АрмССР) **53, 54**; *М. Джермакян* (Ереван) **58**; *С. Довбыш* (Москва) **46—49, 53—57, 60а), б), 62, 63**; *А. Дороговцев* (Киев) **46—48**; *С. Дорфман* (Киев) **46, 47**; *А. Дробышев* (Ленинград) **47**; *В. Дубовик* (Львов) **53, 60а)**; *Ю. Дудко* (Симферополь) **46, 47, 57, 60а)**; *Д. Дуниев* (с. Аркиван АзССР) **46, 47, 54**; *И. Елишевич* (Чернигов) **52, 64**; *А. Ермолин* (Петрозаводск) **46, 47, 48а), б), 49, 51—54, 55а), 57, 58, 60а), б), 62, 64**; *А. Жилинский* (Крупки) **51, 53, 56—58**; *Е. Жиляев* (Москва) **46—50, 54**; *А. Жоров* (Орск) **51**; *А. Забаринов* (Заволжск) **46**; *А. Золотых* (Курск) **57, 60а)**; *Е. Илларионов* (Белорецк) **46**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **46—49, 56, 60а); 63**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **46, 47, 48а), б), 49, 50, 53, 54, 63—65**; *А. Калашников* (Артемовск Донецкой обл.) **46, 60а)**; *П. Калугин* (Москва) **47, 48, 50, 52, 56—58, 62, 64**; *А. Канель* (Москва) **46—49, 62—65**; *А. Каплан* (Сумгаит) **46—50, 53, 54, 55а), 56, 57, 60а), 62—64**; *А. Келарев* (Свердловск) **47—50, 52, 56—58, 60а), б), 62, 64**; *С. Ким* (Бектемир) **51**; *А. Колдоркин* (Куйбышев) **57, 60а), 62**; *И. Колпаков* (Сочи) **46, 47, 48а), б), 49—51, 53, 54, 64, 65**; *Ю. Кондрахин* (Новосибирск) **46**; *М. Концевич* (Химки) **47—50**; *Д. Корнеев* (Саратов) **46, 47, 48а)**; *О. Крижановский* (Харьков) **46, 47, 49, 51, 52, 60а)**; *И. Кроливец* (Краматорск) **60а)**; *О. Крылов* (В. Устюг) **46, 47, 49**; *Е. Кузнецов* (Ижевск) **47, 48а), 49, 53, 57, 60а), 64**; *И. Кузь* (Львов) **47, 50, 54, 55а), 56, 57, 60а)**; *С. Курчатов* (Саратов) **51—57; 60а), 62, 64**; *В. Кухарчук* (с. Малый Шпаков Ровенской обл.) **47, 48а), 50**; *А. Кушнеров* (Москва) **46, 57, 60а)**; *А. Латифуллин* (п. Азнакаево ТатАССР) **46, 56, 57**; *Б. Лейтес* (Москва) **46—58, 60а), б), 62—64**; *А. Липин* (Ленинград) **46, 47, 49, 51, 54, 56, 57, 62, 63**; *Д. Лихачев* (Новосибирск) **46—50, 53, 55а)**; *А. Логунов* (Калининград) **46, 47, 49, 50**; *С. Логунов* (Москва) **46, 47**; *Ю. Макаров* (Ленинград) **62**; *А. Макеев* (Арзамас) **53, 64**; *А. Малах* (Казань) **62**; *Г. Малхасян* (с. Цалпа ГССР) **46, 60а)**; *Е. Мамедов* (с. Аркиван АзССР) **51—53, 57**; *Л. Маноян* (Ереван) **50, 57**; *В. Матчишин* (Целиноград) **56**; *А. Мегрецкий* (Ленинград) **51, 53—58, 60а), б), 62—65**; *Е Меденников* (Ульяновск) **56, 60а)**; *М. Меламед* (Запорожье) **46**; *В. Мельник* (Гайсин) **47, 48а), б), 49, 53, 56**; *Ш. Мирзалиев* (Сальяны) **53, 54**; *В. Мировский* (Москва) **60а), 62**; *А. Михайлов* (Москва) **46, 47, 48а), 49—54, 55а), 56, 57, 63**; *С. Мокроусов* (Ленинград) **46, 50, 51, 58, 60а), 64**; *Б. Монхоо* (МНР) **47**; *С. Морейно* (Москва) **46—50, 52—54, 55а), 56, 57, 60а), б)**; *Б. Мынбаев* (Алма-Ата) **47**; *А. Мясников* (Челябинск) **55а)**; *Р. Набоков* (Саратов) **46—49, 51—53, 55—57, 60а), б), 62**; *О. Намазов* (с. Фахрало ГССР) **47**; *Г. Непомнящий* (Винница) **60а)**; *И. Нестеров* (Пскент) **46, 47**; *С. Новаковский* (Саратов) **46—57, 60а), 64**; *С Новиков* (Херсон) **56**; *А. Нурсеитов* (Алма-Ата) **47**; *В. Оринянский* (п. г. т. Ясиполь Виницкой обл.) **63**; *А. Павлычев* (Рига) **46, 47, 48а), 49, 52, 57, 60а), 62, 63**; *Е. Палош* (Ворошиловград) **51**; *М. Пантаев* (Москва) **46, 50—54**; *А. Пашкевич* (ПНР) **46, 47, 53**; *Г Пельц* (Ленинград) **51, 53, 54**; *Г. Перельман* (Ленинград) **46, 47, 52, 54, 57, 58, 60а).**

(Продолжение см. на с. 58)

Квант для младших школьников

Задачи

1. Два школьника пришли покупать себе буквари. Одному не хватило семи копеек, другому — копейки. Они сложили свои деньги вместе, но все равно денег не хватило. Сколько стоит букварь?

2. Можно ли на черных клетках шахматной доски расставить семь белых слонов (напоминаем: слон ходит по диагонали) так, чтобы они не били друг друга? А восемь таких слонов?

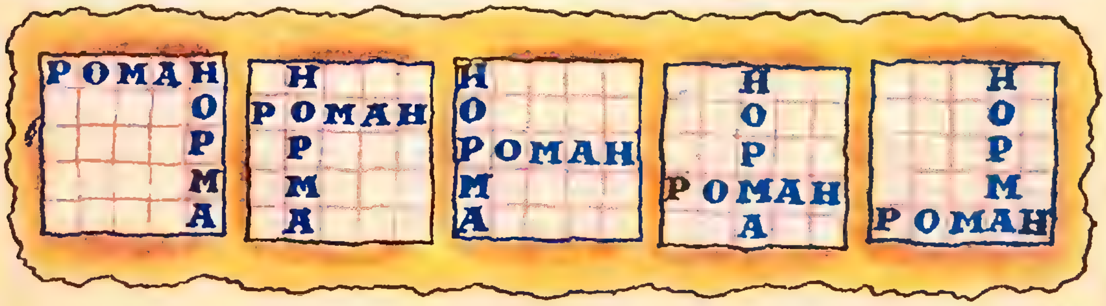
3. Прямоугольник делится прямой на два многоугольника. Затем один из них делится прямой на две части. Потом один из имеющихся трех многоугольников вновь делится на две части и т. д. Операция разрезания многоугольников повторяется 100 раз. После окончания операции подсчет показал, что полученные многоугольники содержат всего 302 вершины (вершины каждого многоугольника считаются отдельно). Может ли такое быть?

4. Вычислите $1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-11-12+13+14-\ldots+301+302$.

5. В квадратах на рисунках заполните пустые клетки буквами Н, О, Р, М, А так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух диагоналей квадрата встречались все эти буквы и каждая по одному разу.

А нельзя ли, заполнив клетки одного квадрата, получить заполнения остальных квадратов автоматически?

КНИГА ЖАЛОБ


Р О М А Н
Н О Р М А
Н
Р О М А Н
О Р М А
Н О
Р О М А Н
Р М А
Н О Р
Р О М А Н
А
Н О Р М
Р О М А Н

Ф. Бартенев

Блуждающие фишки

> *Мы часто замечаем, что люди проявляют больше всего изобретательности в играх, и потому математические игры заслуживают внимания не сами по себе, а потому, что развивают находчивость.*
>
> Лейбниц

Наверное, многие из читателей знакомы с игрой «уголки» на шахматной доске. Она является прообразом разнообразных игр, развлечений, задач с интересным и поучительным содержанием. Далее мы рассмотрим некоторые из них.

В качестве *досок* мы будем рассматривать произвольные прямоугольники, разбитые на конгруэнтные квадратики (см. рисунки). Начальные положения фишек мы будем указывать черными кружками, конечные — пунктиром.

Каждое из полей (клеток) доски имеет свое обозначение, свой «адрес», свои «координаты», как и на шахматной доске. Например, на рисунке 1 одна из фишек стоит на поле c2. Конечно, обычно эти обозначения не пишутся на полях доски, но их нетрудно определить, поскольку на рисунке всегда указываются буквенные обозначения вертикалей и номера горизонталей.

Теперь расскажем о правилах перемещений фишек. Каждая фишка может ходить на любое соседнее (по горизонтали или вертикали) поле. Например, фишка, стоящая на поле c2, может ходить на одно из следующих полей: b2; d2; c3; c1. Соответствующие ходы мы будем записывать так:

c2—b2; c2—d2; c2—c3; c2—c1.

Фишка может «перепрыгивать» через свою «соседку» (в одном из указанных направлений) на свободное поле. Например, на рисунке 1 возможен ход d6—d8. Одним ходом фишка может сделать даже несколько таких прыжков, причем направления их могут быть различными. Так, на рисунке 1 фишка с поля d6 может переместиться ходом d6—f6—f8 на поле f8 или ходом d6—f6—h6 на поле h6.

Пример 1. На рисунке 2 изображена доска 1×25, задано положение трех фишек и указано положение, в которое их нужно перевести.

Оказывается, требуемое перемещение можно осуществить за 33 хода: нужно перемещать всю конфигурацию фишек как единое целое на два поля вправо следующими тремя ходами:

1. c1—d1;
2. a1—c1—e1;
3. b1—c1.

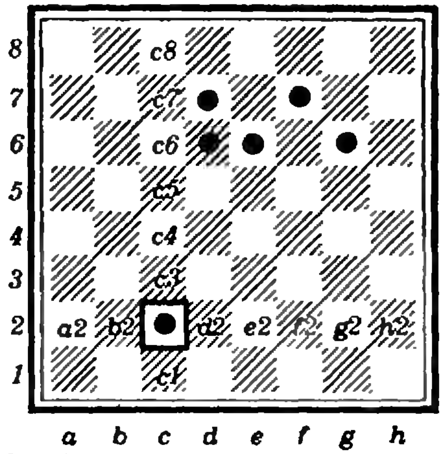


Рис. 1.

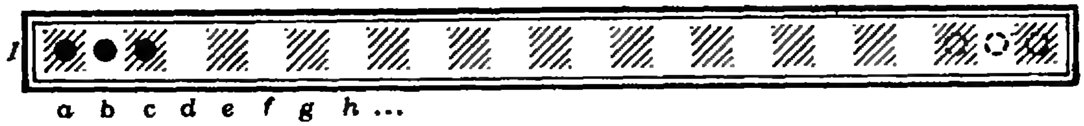


Рис. 2.

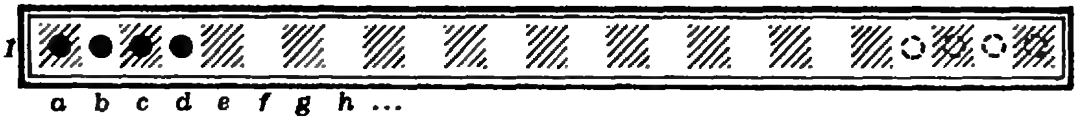


Рис. 3.

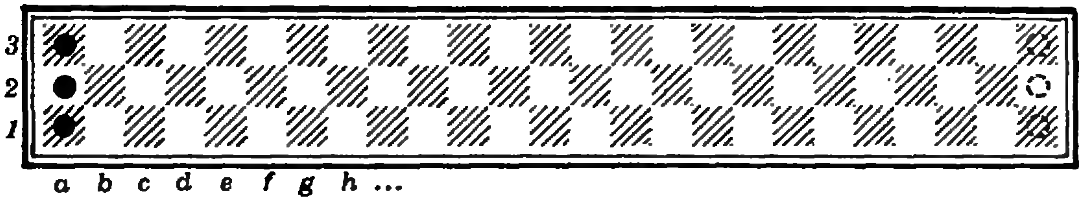


Рис. 4.

Так как конфигурацию нужно переместить на 22 поля вправо, можно 11 раз применить указанный прием, затратив на все перемещение ровно 33 хода.

Задание 1. *На той же доске* 1×25 *поставлены четыре фишки* (рис. 3). *Можно ли осуществить соответствующее перемещение меньше, чем за 33 хода?*

Задание 2. *Имеется бесконечная доска, ширина которой равна* 1. *Покажите, что всегда можно расставить на ней n фишек* ($n \geqslant 3$) *так, что, сделав три хода, можно получить первоначальную конфигурацию фишек, сдвинутую на две клетки вправо.*

Мы рассмотрели несколько примеров перемещения фишек на доске, ширина которой была равна единице. Если же рассматривать перемещения фишек на доске размером $m \times n$ $(m > 2,\ n > 2)$, появляется возможность применять более разнообразные приемы. Обратимся к примерам.

Задание 3. *Можно ли перемещение, указанное на рисунке* 4, *осуществить меньше чем за* 40 *ходов?*

Пример 2. Требуется каждую фишку переместить из центральной части доски (рис. 5) на одно из угловых полей.

Оказывается, заданное перемещение можно выполнить за 22 хода, например, следующим образом:

1. d4—d6;
2. d5—d7;
3. d6—d8;
4. d8—e8;
5. d7—d8;
6. d8—c8;
7. c8—b8;
8. b8—a8;
9. e8—f8;
10. f8—g8;
11. g8—h8;
12. e5—e3 и т. д.

Здесь мы столкнулись с необходимостью видеть шаги или этапы, на которые желательно разбить процесс решения задачи. При этом мы не ставили вопрос об определении наименьшего числа ходов, необ-

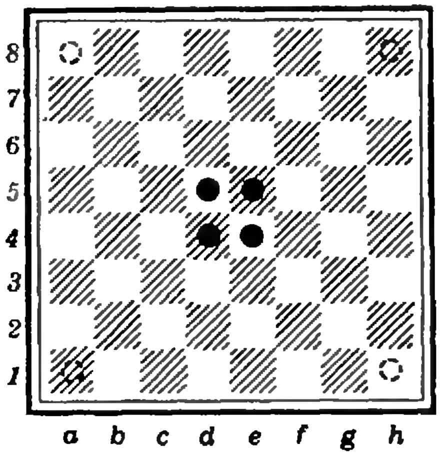


Рис. 5.

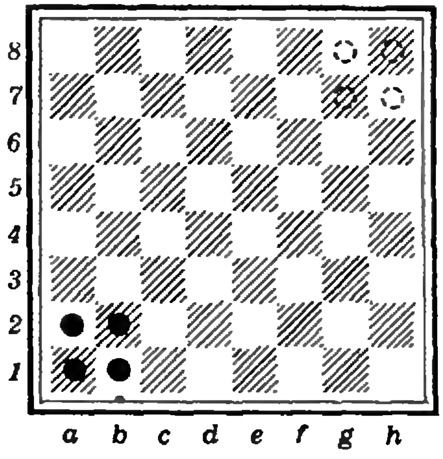


Рис. 6.

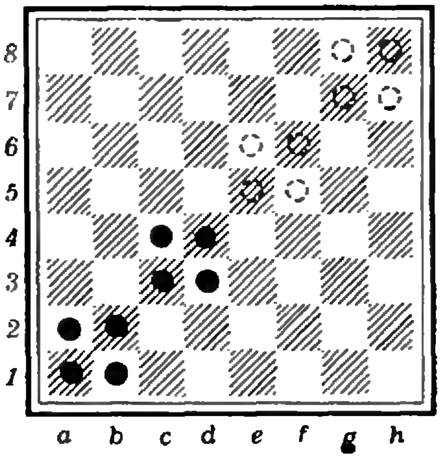


Рис. 7.

ходимого для достижения цели. «Почти» очевидно, что задание не может быть выполнено меньше чем за 22 хода, однако это требуется доказать.

Пример 3. Перемещение, указанное на рисунке 6, может быть выполнено за 13 ходов.

Укажем один из возможных вариантов:

1. a2—c2;
2. a1—c1—c3;
3. b1—b3—d3;
4. b2—d2—d4;
5. c2—c4—e4 и т. д.

В этом случае, как и в предыдущих, мы последовательно чередовали одни и те же конфигурации фишек. В следующем задании такого чередования уже не будет.

Задание 4. *Можно ли перемещение, указанное на рисунке 7, выполнить меньше чем за 18 ходов?*

Если последовательно перемещать всю конфигурацию фишек как единое целое, потребуется 18 ходов. Мы рекомендуем вначале расположить все восемь фишек по большой диагонали, а затем использовать образовавшуюся цепочку как мостик для перебрасывания фишек.

Задание 5. *Решите предыдущую задачу меньше чем за 300 ходов, если дана доска размером 100×100, а начальное положение восьми фишек относительно левого нижнего угла этой доски остается прежним.*

Приведем еще два задания, на вид почти одинаковые, но требующие для достижения поставленных целей различных приемов.

Задание 6. *Выполните не больше чем за 20 ходов перемещение трех фишек с полей a1, b1, c1 на поля f6, g6, h6.*

Задание 7. *Выполните не больше чем за 20 ходов перемещение трех фишек с полей a1, a2, b1, на поля g8, h7, h8.*

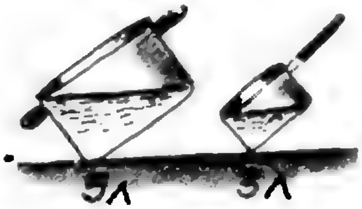
Полупустое равно полуполному

(письмо в редакцию)

В «Кванте» № 9 за 1979 г. на с. 34 есть задача: *даны две емкости: 3 литра и 5 литров — и цистерна молока; как налить 4 литра?*

Наша читательница из Улан-Удэ студентка Валя Коршунова прислала нам письмо:

«Задачу, решаемую там, можно решить во много раз легче. Для этого надо вспомнить другую задачу: "Имеется полная бочка воды. Как отлить из нее ровно половину?" В данном случае задача решается аналогично: каждой емкости надо слить ровно половину (см. рисунок). В итоге остается $\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$ литра!».



Заметим, что красивое Валино решение годится только в том случае, когда «емкости», о которых говорится в условии задачи, имеют определенную форму, например, форму цилиндра (именно так было на рисунках в «Кванте»).

О. М.

В. Можаев

Закон всемирного тяготения

Среди различных сил, действующих во Вселенной, самой фундаментальной и величественной является сила тяготения. Под действием этой силы планеты Солнечной системы, включая нашу Землю, движутся по своим орбитам вокруг Солнца. Эта сила притягивает к центру Земли все находящиеся на ней тела. Против этой силы была направлена вся мощь двигателей космического корабля, когда 4 октября 1957 года впервые в мире на околоземную орбиту был выведен первый советский искусственный спутник Земли.

Первым, кто понял роль силы тяготения, был Ньютон. Анализируя законы Кеплера, которые описывают движение планет по своим орбитам вокруг Солнца, он пришел к заключению, что для удержания планеты на орбите должна существовать сила, направленная точно от планеты к Солнцу и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. Однако главная заслуга Ньютона в том, что он сумел понять, что сила притяжения планеты к Солнцу — это частный случай силы тяготения, действующей между любыми двумя телами. Не случайно закон, открытый Ньютоном, называется законом всемирного тяготения. Это один из самых фундаментальных законов природы.

В простейшем случае, когда взаимодействующие тела можно считать материальными точками (размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними), закон всемирного тяготения формулируется так — *любые две материальные точки притягивают друг друга с силой $\vec{F}$, направленной по линии, их соединяющей, прямо пропорциональной их массам m_1 и m_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:*

$$|\vec{F}| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (*)$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ — гравитационная постоянная; впервые она была измерена Кавендишем.

Если же размерами тел пренебречь нельзя, тела нужно мысленно разбить на небольшие участки такие, чтобы их можно было считать материальными точками. Для каждой пары материальных точек нужно записать закон тяготения в виде (*) и найти соответствующую силу притяжения, а затем — все полученные результаты сложить. Оказывается, для центрально симметричных тел (например, для шара или сферического слоя) силу притяжения можно считать непосредственно по формуле (*), понимая под r расстояние между центрами масс взаимодействующих тел.

Как известно, гравитационные поля (поля тяготения) являются потенциальными, то есть работа поля по перемещению тела из точки *1* в точку *2* не зависит от формы траектории, и определяется лишь разностью потенциальных энергий тела в точках *1* и *2* соответственно:

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2}.$$

Из этого равенства ясно, что определенный физический смысл имеет лишь разность потенциальных энергий в различных точках поля. Численное же значение потенциальной энергии в отдельной точке особого смысла не имеет, оно всегда определяется с точностью до некоторой постоянной величины. Вот почему при решении конкретных задач нулевой уровень потенциальной энергии можно выбирать произвольно, в наиболее удобной точке.

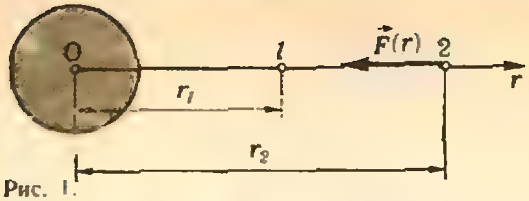


Рис. 1.

Обычно для определения потенциальной энергии тела массой m, поднятого на высоту h над нулевым уровнем, пользуются формулой

$$E_p = mgh.$$

Однако это равенство справедливо лишь для значений h, много меньших радиуса Земли $R_{\text{З}}$ ($h \ll R_{\text{З}}$). Если такое условие не выполняется, потенциальную энергию надо считать по-другому. Поясним это на конкретной задаче.

Задача 1. *Полагая в бесконечности (то есть на большом расстоянии от Земли, где сила тяготения пренебрежимо мала) потенциальную энергию тела равной нулю, найдите зависимость потенциальной энергии E_p от расстояния r от центра Земли.*

Ограничимся областью $r \geqslant R_{\text{З}}$.

Потенциальная энергия E_p тела массой m, находящегося на расстоянии r от центра Земли, равна работе, которую совершает поле тяготения, перемещая это тело из данной точки в бесконечность. Поскольку в потенциальном поле работа не зависит от формы траектории, будем считать, что тело перемещается вдоль радиального направления. При перемещении тела из точки *1*, находящейся на расстоянии r_1 от центра Земли (рис. 1), в точку *2*, отстоящую от центра Земли на расстояние r_2, поле совершает работу

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} -|\vec F(r)|\,dr = \int_{r_1}^{r_2} -G\frac{mM_{\text{З}}}{r^2}dr =$$

$$= G\frac{mM_{\text{З}}}{r_2} - G\frac{mM_{\text{З}}}{r_1}.$$

При условии, что точка *2* бесконечно удалена, первое слагаемое равно нулю (при $r_2 \to \infty$ $\frac{1}{r_2} \to 0$). Таким образом, зависимость потенциальной энергии от расстояния r от центра Земли имеет вид

$$E_p(r) = -G\frac{mM_{\text{З}}}{r},$$

где $M_{\text{З}}$ — масса Земли. График этой зависимости изображен на рисунке 2.

Разберем еще несколько задач.

Задача 2. *Определите, какую минимальную скорость надо сообщить находящемуся на поверхности Земли телу для того, чтобы оно ушло из сферы действия гравитационного поля Земли.*

Прежде всего заметим, что искомую скорость называют *второй космической скоростью* $\vec v_{2\text{к}}$. Для определения ее модуля $v_{2\text{к}}$ воспользуемся законом сохранения энергии.

Сразу же после запуска, то есть непосредственно у поверхности Земли, кинетическая энергия тела равна $mv_{2\text{к}}^2/2$, а его потенциальная энергия равна $-GmM_{\text{З}}/R_{\text{З}}$. Полная механическая энергия

$$E = \frac{mv_{2\text{к}}^2}{2} - G\frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}}.$$

Когда тело удалится от Земли на бесконечно большое расстояние (уйдет за пределы действия поля тяготения Земли), потенциальная энергия тела станет равной нулю. Очевидно, что при этом кинетическая энергия тоже обратится в нуль (мы ищем минимальную начальную скорость тела). Поскольку полная энергия тела не изменяется, получаем

$$\frac{mv_{2\text{к}}^2}{2} - G\frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}} = 0.$$

Отсюда

$$v_{2\text{к}} = \sqrt{2G\frac{M_{\text{З}}}{R_{\text{З}}}} = \sqrt{2gR_{\text{З}}} \approx 11{,}2 \text{ км/с}$$

($g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения у поверхности Земли).

Задача 3. *Искусственный спутник, используемый в системе*

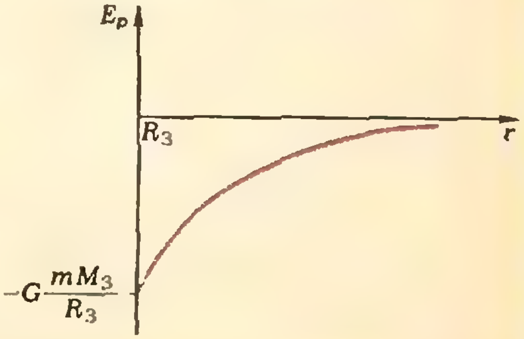


Рис. 2.

телесвязи, запущен в плоскости земного экватора так, что все время находится в зените одной и той же точки земного шара. Во сколько раз радиус R орбиты спутника больше радиуса Земли $R_З = 6400$ км? Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2.

По условию задачи спутник все время находится в зените одной и той же точки земного шара. Следовательно, спутник движется по круговой орбите радиусом R с постоянной угловой скоростью, причем его угловая скорость ω равна угловой скорости вращения Земли $\omega_З$.

На спутник массой m действует одна сила тяжести $\vec{F}$, ее модуль $|\vec{F}| = G\frac{mM_З}{R^2}$. Эта сила и сообщает центростремительное ускорение спутнику:

$$G\frac{mM_З}{R^2} = m\omega^2 R.$$

Отсюда найдем ω^2:

$$\omega^2 = G\frac{M_З}{R^3} = G\frac{M_З}{R_З^3}\frac{R_З^3}{R^3} = \frac{g}{R_З}\left(\frac{R_З}{R}\right)^3.$$

С другой стороны,

$$\omega^2 = \omega_З^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

где T — период обращения Земли вокруг собственной оси (сутки).

Приравнивая два последних выражения, получим

$$\left(\frac{R}{R_З}\right)^3 = \frac{g}{R_З}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \approx 300$$

и

$$\frac{R}{R_З} \approx 6{,}7.$$

Задача 4. *Космонавты, высадившиеся на Луну, должны возвратиться на базовый космический корабль, который летает по круговой орбите на высоте, равной радиусу Луны $R_Л = 1740$ км. Какую начальную скорость на поверхности Луны необходимо сообщить лунной кабине, чтобы стыковка с базовым кораблем стала возможной без дополнительной коррекции величины скорости кабины? Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_Л = 1{,}7$ м/с^2.*

Запишем уравнение движения космического корабля:

$$G\frac{mM_Л}{(2R_Л)^2} = \frac{mv_к^2}{2R_Л},$$

где m — масса корабля, $M_Л$ — масса Луны, а $v_к$ — линейная скорость движения корабля по круговой орбите. Из этого уравнения найдем

$$v_к^2 = G\frac{M_Л}{2R_Л} = G\frac{M_Л}{R_Л^2}\frac{R_Л}{2} = g_Л\frac{R_Л}{2}.$$

Для того чтобы стыковка лунной кабины с базовым кораблем произошла без дополнительной коррекции, скорость кабины в момент сближения с кораблем должна быть равна по модулю скорости корабля $v_к$.

Связь между начальной скоростью кабины $|\vec{v}|$ на поверхности Луны и ее скорость $v_к$ на орбите корабля можно найти из закона сохранения полной энергии кабины:

$$\frac{m|\vec{v}|^2}{2} - G\frac{mM_Л}{R_Л} = \frac{mv_к^2}{2} - G\frac{mM_Л}{2R_Л}.$$

Подставляя в это уравнение выражение для $v_к^2$, получим

$$|v| = \sqrt{^3/_2 g_Л R_Л} \approx 2{,}1 \text{ км/с}.$$

Упражнения

1. Спутник массой $M = 200$ кг движется по круговой орбите вокруг Земли. Его расстояние от поверхности Земли мало́ по сравнению с радиусом Земли. На сколько можно изменить это расстояние, если из спутника произвести выстрел? Масса пули $m = 5$ г, ее скорость $|\vec{u}| = 1$ км/с. Стреляют в направлении, противоположном полету спутника

2. Один из спутников Юпитера движется по орбите радиусом $R_1 = 4{,}22 \cdot 10^5$ км и совершает полный оборот за время $T_1 = 1{,}77$ дня Во сколько раз масса Юпитера больше массы Земли? Известно, что Луна движется по орбите радиусом $R_2 = 3{,}8 \cdot 10^5$ км с периодом $T_2 = 27{,}3$ дня.

3. На какое максимальное расстояние от Солнца удаляется комета Галлея? Период обращения ее вокруг Солнца равен $T = 76$ годам, минимальное расстояние кометы от Солнца равно $r_{min} = 1{,}8 \cdot 10^8$ км. Радиус орбиты Земли равен $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ км.

4. Искусственный спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите радиусом R. Какую минимальную дополнительную скорость $\vec{u}$ необходимо сообщить спутнику, чтобы он ушел из зоны притяжения Земли (на бесконечность)?

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика на гуманитарных факультетах

Письменный экзамен

Окончивший среднюю школу должен уметь при решении задач объединять знания различных разделов математики, то есть подходить к решению задач творчески. Практика вступительных экзаменов по математике на гуманитарных факультетах показывает, что абитуриенты еще недостаточно хорошо справляются с этим.

Ниже проводится подробный разбор одного из вариантов отделения политэкономии экономического факультета с указанием типичных ошибок и некоторой статистики: доли абитуриентов (в процентах к общему числу сдававших экзамен), решивших данную задачу полностью и не решивших ее совсем. Другие факультеты также представлены каждый — одним вариантом, но лишь с ответами и краткими указаниями.

Отделение политической экономии экономического факультета

1. *Решить уравнение*

$$\sqrt{37-48\operatorname{ctg} x}=8\operatorname{ctg} x-5.$$

Решение. Обозначим $\operatorname{ctg} x$ через z и решим вспомогательное уравнение

$$\sqrt{37-48z}=8z-5z.$$

Возведем обе его части в квадрат (при этом могут появиться посторонние корни). Решая полученное квадратное уравнение

$$16z^2-8z-3=0,$$

найдем $z_1=3/4$, $z_2=-1/4$. Корень z_2 является посторонним, так как $8z_2-5<0$, и $\sqrt{37-48z_2}>0$ (арифметическое значение корня!). Значение z_1, как показывает проверка, удовлетворяет уравнению. Решая уравнение $\operatorname{ctg} x=3/4$, находим ответ: $x=\operatorname{arctg} 3/4+\pi n$ $(n\in \mathbf{Z})$.

Основная ошибка при решении этой задачи — приобретение посторонних корней (отсутствие проверки) при неравносильном преобразовании (возведении обеих частей уравнения в квадрат). 44% абитуриентов решили эту задачу полностью, 8% не решили ее совсем.

2. *В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=|BC|=8$) точка E делит боковую сторону AB в отношении 3:1 (считая от вершины B). Найти угол между векторами $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{CA}$, если $|CA|=12$.*

Решение (рис. 1). Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\overrightarrow{CA}|},$$

где α — угол между векторами $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{CA}$. Введем систему координат так, как указано на рисунке 1; по свойству высоты равнобедренного треугольника $|OA|=|OC|$. Из $\triangle OBC$

$$|OB|=\sqrt{|BC|^2-|OC|^2}=2\sqrt{7}.$$

Поскольку $\overrightarrow{AE}=1/4\,\overrightarrow{AB}$, имеем $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+1/4\,\overrightarrow{AB}$. В системе координат Oxy: $\overrightarrow{CA}=(-12;\ 0)$, $\overrightarrow{AB}=(6;\ 2\sqrt{7})$, $\overrightarrow{CE}=(-21/2;\ 2\sqrt{7/4})$. Подставляя в выражение для $\cos\alpha$, находим

$$\cos\alpha=\frac{(-12)(-21/2)}{12\cdot\sqrt{(21/2)^2+7/4}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

Ответ. Угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CE}$ равен $\arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Практически никто из абитуриентов не использовал здесь координатный метод; отыскание угла α, как правило, производилось традиционными планиметрическими методами, в качестве ответа предлагалось выражение $\alpha=\pm\arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}+2\pi n$ $(n\in \mathbf{Z})$, что свидетельствует о механическом применении формул, без понимания смысла задачи. 27% абитуриентов решили задачу полностью, 34% не решили совсем.

3. *Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, и к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять, после перемешивания, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?*

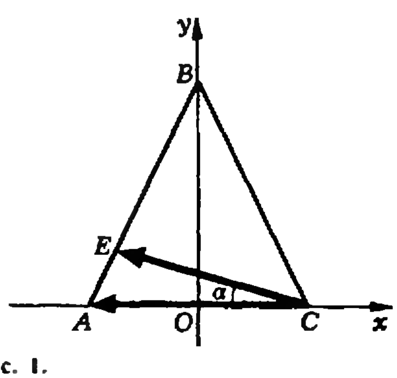


Рис. 1.

Решение. Если через V л обозначить объем сосуда, то после первой операции (замена двух литров глицерина водой) глицерин займет $\frac{V-2}{V}$ часть сосуда. Отлив 2 литра смеси, получим $(V-2)\frac{V-2}{V}$ литров глицерина в сосуде и после доливания воды глицерин будет занимать $\left(\frac{V-2}{V}\right)^2$ часть сосуда. После третьей операции глицерин займет $\left(\frac{V-2}{V}\right)^3$ часть сосуда, а количество глицерина в сосуде будет равно $V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3$ литров. По условию задачи воды в сосуде на 3 литра больше, то есть $V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3+3$. Складывая эти количества, приходим к уравнению $2V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3+3=V$, откуда $V^3-9V^2+24V-16=0$; левую часть этого уравнения легко разложить на множители; уравнение примет вид

$$(V-1)(V-4)^2=0.$$

Отсюда следует, что $V=4$ л, так как $V=1$ л не подходит по смыслу задачи; значит, объем глицерина равен $V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3=0{,}5$ л.

Ответ. Объем глицерина равен 0,5 л, объем воды — 3,5 л. Эта задача оказалась наиболее трудной из пяти задач, предложенных абитуриентам. Хотя, как видите, она решается очень просто, лишь 7% абитуриентов решили ее, а 80% не знали, что с ней делать.

4. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции* $y=|x^2+2x-3|+\frac{3}{2}\ln x$ *на отрезке* $[1/2;\ 4]$.

Решение. Прежде всего заметим, что один из корней квадратного трехчлена x^2+2x-3, а именно $x=1$, принадлежит отрезку $[1/2;\ 4]$. Тогда справедлива запись

$$y=\begin{cases}-x^2-2x+3+3/2\ln x, & x\in[1/2;\ 1];\\ x^2+2x-3+3/2\ln x, & x\in[1;\ 4].\end{cases}$$

Производную функции $y(x)$ можно написать в виде

$$y'=\begin{cases}-2x-2+\dfrac{3}{2x}, & x\in[1/2;\ 1[,\\[2mm] 2x+2+\dfrac{3}{2x}, & x\in]1;\ 4].\end{cases}$$

(Обратите внимание на скобки: в точке $x=1$ производная не определена) Так как $\frac{-4x^2-4x+3}{2x}<0$ при $x\in]1/2;\ 1[$ (это следует из рассмотрения корней квадратного трехчлена $-4x^2-4x+3$), на отрезке $[1/2;\ 1]$ функция $y(x)$ убывает. Аналогично при $x\in]1;\ 4[$ $y'(x)>0$. Это означает (см. «Алгебра и начала анализа 9» п. 54), что на отрезке $[1;\ 4]$ функция $y(x)$ возрастает. Кроме того, как легко видеть, функция y непрерывна при $x=1$. Значит, наименьшее значение функции на $[1/2;\ 4]$ достигается при $x=1$ и равно $y(1)=0$, а наибольшее значение может достигаться только на концах отрезка $[1/2;\ 4]$. Но $y(4)=21+3\ln 2>y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\ln 2$.

Ответ. Наименьшее значение функции равно 0, наибольшее равно $21+3\ln 2$.

Характерные ошибки: многие абитуриенты не заметили критической точки $x=1$ (где производная $y'(x)$ не существует), другие приняли максимум функции при $x=1/2$ ($y'(1/2)=0$) за наибольшее значение (не исследовав функцию на другом конце отрезка). Почти никто из абитуриентов не попытался нарисовать график этой функции, что избавило бы многих от неверных ответов. 17% абитуриентов справились с этой задачей, 38% не решили ее совсем.

5. *Решить уравнение*

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\\+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=0.$$

Решение. Прежде всего заметим, что $9+12x+4x^2=(2x+3)^2$ и $6x^2+23x+21=(2x+3)(3x+7)$. Если обозначить $\log_{3x+7}(2x+3)$ через z, исходное уравнение можно переписать в виде $2z+1+\frac{1}{z}=4$; умножая на z, находим $2z^2-3z+1=0$, откуда $z_1=1/2$, $z_2=1$. Имеем

$$z_1=1/2\Rightarrow\sqrt{3x+7}=2x+3,$$
$$z_2=1\Rightarrow 3x+7=2x+3.$$

Возводя первое уравнение в квадрат, приходим, к квадратному уравнению, корни которого $x_1=1/4$, $x_2=-2$. Корень второго уравнения $x_3=-4$. При наших преобразованиях множество корней могло расшириться, поэтому нужно сделать проверку; она показывает, что значения $x_2=2$ и $x_3=-4$ — посторонние.

Ответ. $\{-1/4\}$.

Типичные ошибки: многие запутались при попытке привести логарифмы к общему основанию, неверно преобразовали логарифмические выражения, приобретали посторонние корни и затем не делали проверки. Эту задачу правильно решили 39% абитуриентов. «Решения» 47% абитуриентов были признаны полностью ошибочными.

Отметим, что весь вариант без ошибок решили лишь 6% абитуриентов.

Отделение экономической кибернетики планирования и экономического факультета

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}4\sin y-6\sqrt{2}\cos x=5+4\cos^2 y,\\ \cos 2x=0.\end{cases}$$

2. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина диагонали равна 10. На плоскости, в которой расположен прямоугольник, выбрана точка O так, что $|OB|=|OD|=13$. Найти расстояние от точки O до наиболее удаленной от нее вершины прямоугольника.

3. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной

670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально 5/6 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 денежным единицам.

В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

4. Найти значения параметра a $(a>1)$, при которых площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=1$, $y=2$ и кривыми

$$y=ax^2,\ x>0,$$
$$y=\frac{1}{2}ax^2,\ x>0,$$

будет наибольшей, и найти эту площадь.

5. Решить неравенство

$$\frac{\log_5(x^2-4x+11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}>0.$$

Факультет психологии

1. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{2+\sqrt{6}-(6\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sin x}=2\sin x-\sqrt{2}.$$

2. При каком значении параметра $a>0$ площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=a\sqrt{x}$ и $y=2-\sqrt{x}$ и осью OY, будет равна числу b? При каких b задача имеет решение?

3. Решить неравенство

$$\frac{4}{|x+1|-2}>|x-1|.$$

4. Точка M равноудалена от вершин A, B, C правильного тетраэдра $ABCD$: $|MA|=|MB|=|MC|=2\sqrt{\frac{3}{2}}$. Известно, что отрезок MA перпендикулярен высоте треугольника BCD, опущенной из вершины B. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$.

5. Найти все тройки целых чисел $(x;\ y;\ z)$ для которых выполняется соотношение

$$5x^2+y^2+3z^2-2yz=30.$$

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. Даны две пересекающиеся окружности. К ним проведены две общие касательные, которые пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей. Радиус меньшей окружности равен R. Расстояние от точки A до центра окружности большего радиуса равно $6R$. Точка A делит длину отрезка касательной, заключенного между точками касания, в отношении 1:3. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных и большими дугами окружностей, соединяющими точки касания.

2. Решить уравнение

$$\sin\left(2x+\frac{5}{2}\pi\right)-3\cos\left(x-\frac{7}{2}\pi\right)=1+2\sin x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/2}(4-x)>\log_{1/2}2-\log_{1/2}(x-1).$$

4. Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют различную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 часа 48 минут быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 часа быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.

5. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

Н. Болотина, В. Вильке

Физика на естественных факультетах

Задачи устного экзамена

Химический факультет и отделение геофизики геологического факультета

1. Проволока изогнута так, что она состоит из двух дуг (рис. 1). Радиусы этих дуг $R_1=1$ м и $R_2=2R_1$. Дуги расположены в одной вертикальной плоскости так, что их центры O_1 и O_2 лежат на одной вертикальной прямой с точкой A сопряжения этих дуг. На проволоку надета бусинка B, которая может скользить по ней без трения. Бусинку помещают на небольшое по сравнению с R_1 расстояние от точки A и отпускают. Найти время t, которое потребуется бусинке, чтобы достигнуть наибольшей высоты по другую сторону точки A.

2. Человек перемещает куб с длиной ребра $a=1{,}8$ м вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=45°$ с горизонтом, прикладывая силу $\vec{F}$ перпендикулярно грани куба и обеспечивая равномерное поступательное движение куба. На каком расстоянии x от наклонной плоскости он может прикладывать силу, чтобы основание куба не отрывалось от наклонной плоскости? Коэффициент трения между поверхностями куба и наклонной плоскости $\mu=0{,}2$.

3. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится газ при температуре $t=20°$ С. Газ занимает объем $V=1$ л. При увеличении температуры газа на величину $\Delta t=10°$ С поршень поднимается. Найти работу A, совершенную газом. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, трение поршня о стенки сосуда отсутствует.

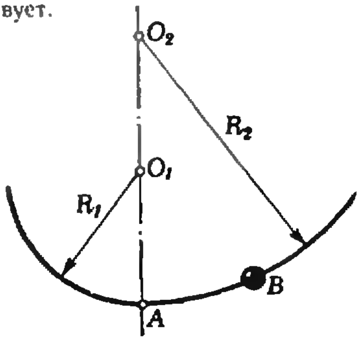


Рис. 1.

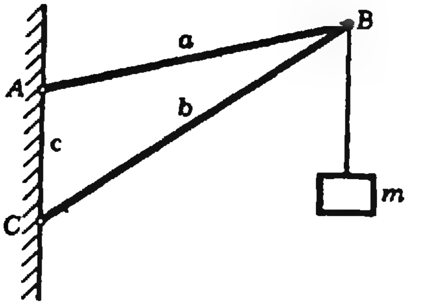


Рис. 2.

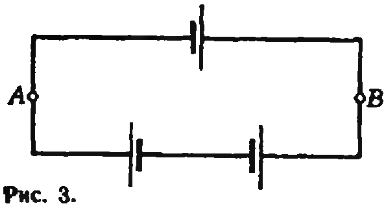


Рис. 3.

4. Источник постоянного тока замкнут на сопротивление $R=2$ Ом. Мощность, выделяемая во внешней цепи, не изменяется, если параллельно сопротивлению R подключить еще одно такое же сопротивление. Найти внутреннее сопротивление r этого источника.

5. Тело имеет форму конуса, у которого угол между осью и образующей равен $\alpha=60°$. Его погрузили целиком в прозрачную жидкость вершиной вниз. При этом оказалось, что боковую поверхность конуса нельзя видеть ни из одной точки пространства над поверхностью жидкости. Каково должно быть минимальное значение n показателя преломления жидкости, чтобы выполнялось это условие?

Географический факультет, отделение общей геологии геологического факультета и факультет почвоведения

1. Груз массой $m=10$ кг висит на кронштейне, состоящем из двух стержней AB и CB, концы которых заделаны в стену. Устройство кронштейна показано на рисунке 2. Длины стержней AB и CB равны соответственно $a=0{,}8$ м и $b=1{,}0$ м. Расстояние AC между концами стержней, заделанными в стену, равно $c=0{,}4$ м. Найти силы $\vec{F}_a$ и $\vec{F}_b$, действующие на стержни.

2. Маленький шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной $l=1{,}1$ м, выводят из положения равновесия так, что нить составляет с вертикалью малый угол, а затем отпускают без толчка. Через какой промежуток времени t угол между нитью и вертикалью уменьшится вдвое?

3. На какую величину Δm уменьшится масса воздуха в открытом сосуде, если его нагреть от температуры $t_1=0°$ С до температуры $t_2=100°$ С? Начальная масса воздуха $m_1=100$ г. Изменением объема сосуда при нагревании пренебречь.

4. Три одинаковых источника постоянного тока, ЭДС которых равны $\mathcal{E}=6$ В, соединены, как указано на рисунке 3. Определить разность потенциалов между точками A и B. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

5. Посередине плоского экрана находится точечный источник света. Параллельно экрану расположено плоское зеркало в форме равностороннего треугольника со стороной $a=20$ см. Центр зеркала находится напротив источника. Определить площадь S светлого пятна, образованного на экране отраженными от зеркала лучами.

С. Кротов

Наша обложка

Закрученные многоугольники

Узор, изображенный на второй странице обложки, составлен из «закрученных многоугольников». Закрученный многоугольник состоит из цепочки правильных многоугольников: каждый последующий многоугольник M' вписан в предыдущий M (вершины M' лежат на сторонах M), причем M' подобен M (коэффициент подобия фиксирован для данной цепочки).

Такие цепочки выглядят особенно эффективно, если они построены на семействе одинаковых многоугольников; покрывающих плоскость (без перекрытий и пробегов), скажем, на семействе квадратов, правильных треугольников или шестиугольников

Каким образом ЭВМ, нарисовавшая наш узор, строит закрученные многоугольники? Машине «дается» исходный многоугольник $P_1P_2 \ldots P_n$ (назовем его многоугольником первого ранга), то есть список вершин, заданных своими координатами

$$P_1(x_1;\ y_1),\ P_2(x_2;\ y_2),\ldots \\ \ldots,\ P_n(x_n;\ y_n).$$

Далее, пользуясь графопостроителем, машина рисует стороны многоугольника, последовательно соединяя вершины отрезками. Затем она находит координаты вершин $P'_1, P'_2,\ldots, P'_n$ следующего многоугольника (второго ранга) по такому правилу:

$$(x'_i;\ y'_i)=(x_i;\ y_{i-1})+ \\ +k(x_{i+1}-x_i;\ y_{i+1}-y_i)$$
$(i=1, 2,\ldots, n-1)$.

(Мы советуем читателю сделать чертеж, например, для $n=6$, и убедиться в том, что коэффициент k в предыдущей формуле равен

$$k=\frac{|P_iP'_i|}{|P_iP_{i+1}|}.)$$

Далее машина последовательно соединяет вершины $P'_1, P'_2,\ldots, P'_n, P'_1$, получая тем самым рисунок многоугольника второго ранга Из многоугольника второго ранга ЭВМ получает многоугольник третьего ранга И так далее.

Чтобы избежать кляксы (которая получится при скоплении мелких многоугольников к центру многоугольника первого ранга), в программе число многоугольников в цепочке ограничивается.

Учащимся Заочной школы программирования мы предлагаем составить программу на Рапире (с использованием Шпаги) для построения узора такого типа и прислать ее нам в качестве необязательного задания.

В Усов, А Чубарев

Заочная школа программирования

Урок 7: Функции, графики, локальные имена и тексты на Рапире

Функции и графики

На уроке 6 («Квант», № 2) мы изучали описание процедур на языке Рапира. При этом мы рассматривали только такие процедуры, в которых не указывается имя-результат. Однако синтаксической диаграммой предусмотрен вариант описания процедуры, в котором используется имя-результат. Такими процедурами мы сейчас и займемся.

Процедура, в описании которой указано имя-результат, называется на языке Рапира *функцией*. *Значением* функции считается то значение, которое присваивается имени-результату (т. е. имени, стоящему вслед за знаком =>) после исполнения функции. Это значение, вообще говоря, зависит от значений параметров, указанных в заголовке процедуры.

Посмотрим сперва, что делает ЭВМ, когда ей впервые сообщают описание функции. Например, если в программе написано:

```
ПРОЦ КВАТ X => РЕЗ;
2*X!  2—5*X+10 —> РЕЗ;   КНЦ;
```

ЭВМ выберет у себя блок памяти, даст ему имя КВАТ и напишет в этом блоке

```
X => РЕЗ;  2*X!2—5*X+10  —>
РЕЗ; КНЦ;
```

Теперь посмотрим, как машина будет вызывать хранящуюся в памяти функцию. Важно помнить, что, в отличие от обычной процедуры, вызов функции может встречаться внутри выражения. Например, если в той же программе встретились такие предписания

```
28.5 — > А;
5*(А+КВАТ(2)) —> С;
```

ЭВМ сперва запишет число 28.5 в блок памяти с именем А (то есть присвоит имени А значение 28.5). Чтобы выполнить второе предписание, ЭВМ должна сложить значение выражений А и КВАТ(2). Первое из них ЭВМ просто прочитает в блоке памяти с именем А. Второе выражение — это вызов функции. Чтобы узнать его значение, ЭВМ должна найти в памяти описание этой функции, присвоить значения ее параметрам (в нашем случае параметру X будет присвоено значение 2), выполнить все операторы и *прочитать значение имени-результата*. Легко подсчитать, что имя РЕЗ получит значение 8. Это число и будет использовано в качестве значения выражения КВАТ(2). В конце концов имя С получит значение 182.5.

Возможны и более сложные выражения с функциями: КВАТ(2+ +КВАТ(1*(—КВАТ(2))

Задание 7.1. *Вычислить значение этого выражения.*

В языке Рапира есть стандартные функции SIN (X), COS (X), EXP (X), LN (X), ARCTAN (X) и некоторые другие. Значением показательной функции EXP (X) будет e^X, где $e \approx 2.71828$, словом ARCTAN обозначен арктангенс, LN обозначает натуральный логарифм. Учащиеся шестого и седьмого классов пока не

знакомы с этими функциями, но это сейчас не важно: пока нам достаточно знать, что эти функции определены для всех $X \in \mathbf{R}$ (кроме функции LN, которая определена лишь для X>0).

Задание 7.2. *Составить программу, которая отпечатает таблицу значений тригонометрических функций* (SIN (*X*) и COS (*X*)) *для значений X от* 0 *до* 2π *с шагом* 0.1.

Параметрами и результатами функций могут быть не только числа, но и тексты, описания функций и процедур и некоторые другие объекты. Опишем, например, функцию, значением которой будет название школьной отметки:

```
ПРОЦ ОТМ А => В;
ЕСЛИ  А=5  ТО  'ОТЛИЧНО' —>
В ВСЕ; ЕСЛИ А=3 ТО
'УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО' —>В
ВСЕ; ЕСЛИ А=2 ТО
'НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО'
—> В ВСЕ, ЕСЛИ А= 1 ТО
'ПЛОХО'—> В ВСЕ;
КНЦ;
```

Выполняя предписание

```
ПЕЧАТЬ ('ВАША ОЦЕНКА—',
ОТМ (5));
```

ЭВМ отпечатает:

```
ВАША ОЦЕНКА — ОТЛИЧНО.
```

Несколько позже мы вернемся к этой функции и опишем ее в более компактном виде.

Графики числовых функций с одним параметром очень удобно строить при помощи процедур графической системы Шпага. Например, если функция ФУН — имя такой функции, то программа

```
Р(100, 100); П(0, 0); 0 —> X;
ПОКА  X=<100::  Л(X, ФУН(X));
X+1 —> X
ВСЕ; КОНЕЦ;
```

будет строить график этой функции на отрезке [0; 100] с шагом 1 мм.

Задание 7.3. *Выполнить вручную эту программу, пока параметр X не примет значение 20, считая, что* ФУН (*X*) *описана так:*

```
ПРОЦ ФУН X => У;
ЕСЛИ X<10 ТО X+2 —> У ИНА-
ЧЕ X!2—3 —> У ВСЕ;
КНЦ;
```

Задание 7.4. *Описать на Рапире функцию от времени t, равную высоте камня в момент времени t, если камень брошен вертикально вверх со скоростью V при t=0. Составить программу для вычерчивания графика этой функции с одновременной печатью ее значений. Шаг 0.1 сек.**).

Процедуры и функции в Рапире могут быть рекурсивными, то есть могут вызывать сами себя. Например, функцию с целым параметром *X*, вычисляющую произведение всех целых чисел от 1 до значения параметра *X* (так называемый *факториал* $X! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot X$), можно описать так:

```
ПРОЦ ФАКТ X=> РЕЗ;
ЕСЛИ X=1 ТО 1 —> РЕЗ;
ИНАЧЕ  X*ФАКТ  (X—1)—> РЕЗ
ВСЕ;
КНЦ;
```

Постарайтесь сами разобраться в этом описании и убедитесь, что если параметр этой функции — натуральное число, то ее результатом действительно будет факториал этого числа.

Локальные имена

При составлении больших программ очень часто бывает так, что процедуру, написанную одним программистом, должен использовать другой. Если при этом случайно оказалось, что одно или несколько имен использовалось ими обоими, то может возникнуть очень неприятная ситуация.

Предположим, что один программист описал такую процедуру:

```
ПРОЦ КВАКУБ X=>У;
X!2 —>А; X!3 —>В;
ЕСЛИ  А>В  ТО  А—>У  ИНАЧЕ
В—>У ВСЕ; КНЦ;
```

Эту процедуру попытался использовать другой программист в такой программе:

---

*) Учащимся 6—7 классов сообщаем, что такой функцией будет $h(t) = Vt - 4{,}9t^2$

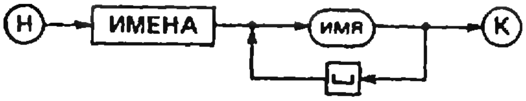
```
5.21*3 —>A; 2*A—>B;
КВАКУБ (2)—>C;
ПЕЧАТЬ ('A=', A, 'B=', B, C=',
C);
```

Вероятно, он будет очень удивлен, когда ЭВМ отпечатает:

```
A=4 B=8 C=8,
```

ведь он хотел присвоить именам А и В совсем другие значения!

Чтобы избежать таких неприятностей, можно *объявить имена*, используемые в процедуре, с помощью такого предписания (знак ␣ обозначает пропуск):



Например, процедура КВАКУБ с объявленными именами выглядела бы так:

```
ПРОЦ КВАКУБ X=>У;
ИМЕНА А␣В;
X!2 —> A; X!3 —> B;
ЕСЛИ A>B ТО A—>У ИНАЧЕ
B—>У ВСЕ; КНЦ;
```

Объявленные имена известны только внутри процедуры и не влияют на другие части программы. Это значит, во-первых, что после исполнения процедуры значения этих имен прочитать невозможно. Во-вторых, если в программе встречаются другие имена с такими же обозначениями, то их значения не изменятся при исполнении процедуры. Например, если приведенная выше программа будет исполняться с новым вариантом процедуры КВАКУБ, то ЭВМ отпечатает

```
A=15.63 B=31.26 C=8,
```

то есть именно то, что требовалось второму программисту.

Такими же свойствами, как объявленные имена, обладают параметры процедуры и имя-результат, поэтому объявлять их не нужно.

Имена, известные только внутри процедуры, называются *локальными* (то есть местными, внутренними) *именами*. Если какая-либо процедура должна использоваться много раз в большой программе, то все имена в ней стоит сделать локальными — тогда можно не опасаться случайных совпадений в обозначениях имен. Именно так организованы все стандартные процедуры и функции.

Работа с текстами

Если слово «караул» хорошенько отредактировать, получится «ура».

В состав выражений языка Рапира могут входить не только числа, но и тексты, а также имена, значениями которых являются тексты. Разумеется, обычные арифметические операции — сложение, вычитание, умножение, деление и т. д.— к ним не применимы. В то же время существуют специальные операции для работы с текстами:

1. *Конкатенация* («склеивание») *текстов*. Эта операция обозначается знаком +, как и сложение. Например, после выполнения предписаний

```
'ИЛ'—>A; 'КОД'—>B;
'КРО'+B+A—>C;
```

значением имени С станет текст 'КРОКОДИЛ'.

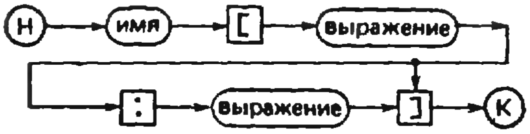
2. *Определение длины текста*, то есть количества символов в нем. Эта операция обозначается знаком ≠. Например:

```
≠'КРОКОДИЛ'—>A;
'ЗАЙЧИК'—>B;
≠B+≠'БЕЛКА'—>K;
ПЕЧАТЬ('A=', A,' K=', K);
```

по этой программе ЭВМ отпечатает:

```
A=8 K=11
```

3. *Вырезание участка текста*. Это, пожалуй, самая интересная операция над текстами. Ее можно описать такой диаграммой:



Значением **имени** должен быть текст, а значениями выражений, стоящих в квадратных скобках,— натуральные числа. Эти числа считаются номерами начального и конечного символов вырезаемого участка. Если в скобках указано одно выражение, вырезается один символ с соответствующим номером. Пусть, например, выполнены такие присваивания:

'КРОКОДИЛ'—>К; 'ЛАНЬ'—>Л;
'СОВА'—>С;
'ЕЛКА'—>Е;

тогда значением выражения К [4:6] будет текст 'КОД', значением выражения Л [2] будет текст 'А', а значением выражения К [4:5] + К [2:3] + + С [3:4] будет текст, 'КОРОВА'.

Задание 7.5. *Найти значение выражения*

С [1] + Л [2] + К [2] + К [6] + Е [1:2] + + Л [4] + Е [3:4]

Выражения над текстами можно использовать и в условном предписании. Попробуем, например, описать функцию, параметром которой будет текст, а результатом количество букв 'А' в этом тексте:

```
ПРОЦ БУКВА ТЕК=>РЕЗ;
ИМЕНА НОМЕР;
0—>РЕЗ; 1—>НОМЕР;
ПОКА НОМЕР=<(≠ТЕК)::
ЕСЛИ  ТЕК  [НОМЕР]='А'  ТО
РЕЗ+1—>РЕЗ ВСЕ;
НОМЕР +1—>НОМЕР;
ВСЕ;
КНЦ;
```

Операция вырезания участка текста, в отличие от большинства других операций, может использоваться справа от стрелки присваивания. Таким способом можно изменять значения отдельных букв и участков текста. Пусть, например, значение имени К — текст 'КРОКОДИЛ'. Тогда после присваивания

'Я'—> К[3]

значением этого имени будет текст 'КРЯКОДИЛ', а после следующего присваивания

К [1:3] —> К[4:6];

значением этого имени станет текст 'КРЯКРЯИЛ'.

Задание 7.6. *«Отредактировать текст* 'КАРАУЛ' *так, чтобы получилось* 'УРА'.

Урок 8: Множества и кортежи на Рапире

В статье о IV Всесоюзной летней школе юных программистов («Квант», 1979, № 2) мы уже писали, для чего нужны множества, кортежи и другие сложные типы данных. Восьмой урок заочной школы посвящен описанию средств работы с множествами и кортежами в языке Рапира.

Задание множеств

Значениями любых имен в языке Рапира, наряду с числами, текстами и описаниями процедур, могут быть сложные структуры данных: *множества* и *кортежи*.

Множество обозначается угловыми скобками со звездочками: ⟨* и *⟩. Внутри скобок перечисляются через запятую все элементы множества. Например, после выполнения предписания

⟨*1, 'ЮНЫЙ ПРОГРАММИСТ',
2, 'КВАНТ' *⟩ —> А;

значением имени А станет множество. Элементы этого множества — числа 1 и 2 и тексты 'ЮНЫЙ ПРОГРАММИСТ' и 'КВАНТ'.

Все, что может быть значением имени в Рапире, может быть и элементом множества. В частности, элементами одних множеств могут быть другие множества:

⟨*1, 2, ⟨*4, 5, ТЕКСТ*⟩*⟩ —>В;

В этом примере значение имени В — это множество из трех элементов: двух чисел и одного множества.

Если в списке элементов множества указано имя или более сложное выражение, то элементом множества станет значение такого выражения; например, после выполнения предписаний

5 —>А; 10 —> В;
'КАРАУЛ' —> С;
⟨*А, 4, 40*А+В, С [5] +
С [3:4] *⟩ —> А;

значением имени А станет множество

⟨*5, 4, 210, 'УРА'*⟩

Задание 8.1. *Чему будут равны значения имен А и В после выпол-*

нения программы:

```
'КРОКОДИЛ'+ '' +'ГЕНА'—> А;
=А—> В;
⟨*А[(В+1)/2—3]+А[(В—1)/2+1]+
      А[≠А—1]+А[3]+А[В]+
     А[6]+А[2], А[4]+А[11]+
    А[2*3]+А[8/4], А[2*2+2]+
      А[1+1]+А[В]+А[4:5]+
            А[В—1]*⟩—> А;
           ⟨*А, В+1, В+10*⟩—> В;
```

Сравнение множеств и проверка принадлежности

Множества и их имена можно использовать в условиях (в циклических и условных предписаниях). В частности, два множества можно сравнивать при помощи знака =. Как известно из школьного курса математики, два множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, независимо от порядка, в котором перечисляются эти элементы: множества

⟨*'НЕЗНАЙКА', 'ВОРЧУН', 'ЗНАЙКА'*⟩,
⟨*'ЗНАЙКА', 'НЕЗНАЙКА', 'ВОРЧУН'*⟩

равны между собой, а множества ⟨*1, 2, 3*⟩ и ⟨*1 ⟨*2, 3*⟩*⟩ не равны.

Процедура ПЕЧАТАТЬ печатает множество в таком же виде, в каком оно записывается в программе (то есть все элементы печатаются в уголковых скобках со звездочками через запятую, при этом тексты будут напечатаны без кавычек). Порядок элементов при печати может быть произвольным, так что заранее нельзя предсказать, например, будет ли множество КВАРТЕТ из задания 8.2, приведенного ниже, напечатано как

```
⟨*ОСЕЛ, КОЗЕЛ, МАРТЫШКА, МИШКА*⟩
```

или

```
⟨*МИШКА, ОСЕЛ, КОЗЕЛ, МАРТЫШКА*⟩
```

или как-нибудь еще.

Задание 8.2. *Что отпечатает машина, исполняя такую программу:*

```
⟨*1, 2*⟩—> Х; ⟨*'МАРТЫШКА',
'ОСЕЛ', 'КОЗЕЛ', 'МИШКА'*⟩—>
КВАРТЕТ; ⟨*Х, КВАРТЕТ*⟩—>
СМЕСЬ1; ⟨*КВАРТЕТ, ⟨*1+1, 1*⟩,
КВАРТЕТ*⟩—> СМЕСЬ2; ЕСЛИ
СМЕСЬ1 = СМЕСЬ2 ТО ПЕЧАТЬ
('КАК ВЫ НИ САДИТЕСЬ...')
ИНАЧЕ ПЕЧАТЬ ('2*2=4') ВСЕ;
ЕСЛИ КВАРТЕТ = СМЕСЬ2
ТО ПЕЧАТЬ ('ОТ ПЕРЕМЕНЫ
МЕСТ СЛАГАЕМЫХ') ИНАЧЕ
ПЕЧАТЬ ('ПРОИЗВЕДЕНИЕ
НЕ МЕНЯЕТСЯ') ВСЕ;
```

Условие принадлежности элемента множеству записывается с помощью ключевого слова ИЗ, которое соответствует символу ∈ в обычных математических обозначениях. Например, условие

'МИШКА' ИЗ КВАРТЕТ

будет истинным только в том случае, если среди элементов множества КВАРТЕТ есть текст 'МИШКА'.

Операции над множествами

Операция объединения множеств обозначается в Рапире знаком +, и пересечение множеств — знаком *. Например, по программе ⟨*17, 1, 8, 27, 36, 5*⟩—> ТИРАЖ1; ⟨*5, 25, 11, 17, 35, 4*⟩—>ТИРАЖ2; ПЕЧАТЬ ('ОБЪЕДИНЕНИЕ=', ТИРАЖ1+ТИРАЖ2); ПЕЧАТЬ ('ПЕРЕСЕЧЕНИЕ=', ТИРАЖ1 * ТИРАЖ2); ЭВМ отпечатает:

```
ОБЪЕДИНЕНИЕ=
=⟨*17, 1, 5, 25, 11, 36, 27, 4, 35, 8*⟩
  ПЕРЕСЕЧЕНИЕ=⟨*5, 17*⟩
```

Знак — обозначает разность множеств: из первого множества удаляются все элементы, присутствующие во втором множестве; например, по программе:

```
⟨*'ЛЕВ', 'ВОЛК', 'ЛИСА',
'ЗАЯЦ'*⟩ — ⟨*'БЕЛКА', 'ЗАЯЦ',
'КРОЛИК'*⟩—> ХИЩНИК;
ПЕЧАТЬ (ХИЩНИК);
```

будет отпечатано:

```
⟨*ВОЛК, ЛИСА, ЛЕВ*⟩
```

Число элементов множества обозначается значком ≠, как и для текстов. Напомним, что одинаковые элементы в множестве учитываются только один раз, так что мощность множеств

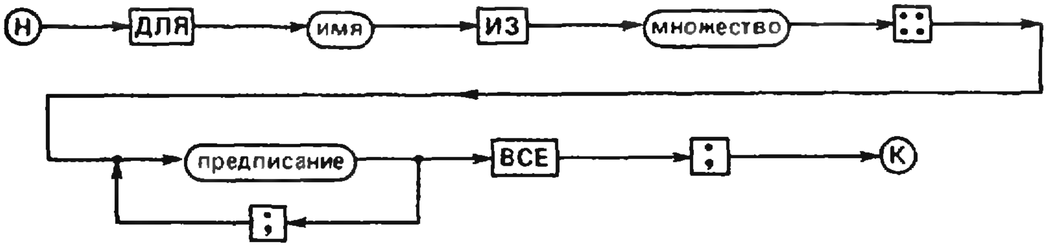
⟨*'КРОКОДИЛ', 'ГЕНА'*⟩,
⟨*1, 1, 2, 1, 2, 1+1,
1, 1, 3—1, 3—2*⟩

одинакова и равна 2.

Задание 8.3. *Указать, что отпечатает ЭВМ по программе:*

```
  (*'ВИННИ-ПУХ',  'ПЯТАЧОК'*)
—>ГОСТИ; (*'КРОЛИК'*)—>
КРОЛИК;(*'КЕН'+'ГА',  'Р',  'У',
'РУ',  'КЕ'+'Н'+'ГА',  'КЕНГА'*)
—> КЕНГУРУ; ПЕЧАТЬ
('≠КЕНГУРУ=',  ≠КЕНГУРУ);
ГОСТИ+КРОЛИК —> ДОМ;
ДОМ+КЕНГУРУ —> ВСТРЕЧА;
ВСТРЕЧА — (*'КЕНГА',
'ПЯТАЧОК'*)—> ИГРА;
ПЕЧАТЬ(ИГРА);
ЕСЛИ 'ПЯТАЧОК' ИЗ ИГРА
ТО ПЕЧАТЬ ('ВСЕ НА МЕСТЕ')
ИНАЧЕ ПЕЧАТЬ ('КУДА
УБЕЖАЛ ПЯТАЧОК?') ВСЕ;
```

Для работы с множествами есть специальная форма циклического предписания:



Имя, указанное после слова ДЛЯ, принято называть *переменной цикла,* а множество, записанное между ИЗ и ::, — *базовым множеством цикла.* Все действия, выполняемые над переменной цикла, на самом деле будут выполнены над каждым элементом базового множества поочередно. Например, по программе

```
(*5, 3, 7*)—>А; ДЛЯ Х ИЗ А
:: Х+2—>Х ВСЕ; ПЕЧАТЬ (А);
```

будет отпечатано

```
(*7, 9, 5*)
```

а по программе

```
(*'ЗАЯЦ', 'ЛИСА', 'ЗЕБРА',
'БЕЛКА'*)—> ЛЕС;
ДЛЯ ЗВЕРЬ ИЗ ЛЕС
:: ЕСЛИ ЗВЕРЬ[1] = '3'
ТО ПЕЧАТЬ(ЗВЕРЬ) ВСЕ ВСЕ;
```

будет отпечатано:

```
ЗЕБРА ЗАЯЦ
```

Задание 8.4. *Что будет отпечатано по той же программе, если циклическое предписание записать так:*

```
ДЛЯ ЗВЕРЬ ИЗ ЛЕС :: ЕСЛИ
ЗВЕРЬ[2] = 'Е' ТО ПЕЧАТЬ
(ЗВЕРЬ) ВСЕ ВСЕ;
```

Кортежи и операции над ними

Кортеж, в отличие от множества, это упорядоченный набор данных: каждый элемент кортежа имеет порядковый номер, при помощи которого можно прочитать или изменить этот элемент. По форме записи кортеж в Рапире очень напоминает множество, только скобки используются другие — угловые без звездочек:

```
('ТАНЯ', 'ВИТЯ', 'САША', 'ОЛЯ'
'САША')—> ЗВЕНО;
```

Значением имени ЗВЕНО стал кортеж из пяти элементов. Для обращения к одному элементу используются квадратные скобки: при исполнении предписания ПЕЧАТЬ (ЗВЕНО)[1])будет напечатано*) ТАНЯ. Значение элемента кортежа можно изменить:

```
'ПЕТЯ' —> ЗВЕНО[2];  'ТОЛЯ'
ЗВЕНО[3];  ПЕЧАТЬ(ЗВЕНО);
```

Результат: ('ТАНЯ', 'ПЕТЯ', 'ТОЛЯ', 'ОЛЯ', 'САША')

Элементы кортежа всегда печатаются в порядке возрастания номеров.

Для кортежей, как и для множеств, можно использовать операции =, ≠, +, ИЗ и цикл ДЛЯ. Нужно только иметь в виду, что два кортежа считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, расположенных в том же порядке. Кортежи (1, 2, 1) и (2, 1, 1) не равны между собой. Обратите внимание, что мощность кортежа (1, 1, 1, 1, 1) равна 5 (сравните с множествами!).

Операцию + для кортежей, как и для текстов, называют *конкатенацией* или *приписыванием*; в результате получается новый кортеж. По программе

---

*) Так же, как для множеств, при исполнении процедуры ПЕЧАТЬ для кортежей кавычки, окаймляющие тексты, пропадают.

```
⟨5, 7⟩+⟨1, 3⟩—> A;
    ПЕЧАТЬ(A);
```

будет отпечатано: ⟨5, 7, 1, 3⟩

В заключение приведем простой пример совместного использования множеств и кортежей для хранения в памяти ЭВМ списка учащихся школы. Для каждого школьника нужно помнить фамилию, имя и отчество, дату рождения и класс.

Сведения об одном школьнике можно хранить в кортеже такого вида:

⟨ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО, ДЕНЬ, МЕСЯЦ, ГОД, КЛАСС⟩

например:

⟨'ОШИБОЧКИНА', 'СВЕТЛАНА', 'ИГОРЕВНА', 1, 4, 1969, '3-Б'⟩

Множество ШКОЛА, элементами которого являются такие кортежи, содержит весь список учащихся. Теперь для получения любой справки по этому списку достаточно составить очень несложную программу: например, чтобы отпечатать фамилии и инициалы всех учеников 6-Г класса, достаточно написать:

```
ДЛЯ УЧ ИЗ ШКОЛА :: ЕСЛИ
УЧ[7] = '6-Г' ТО ИМЯ = УЧ[2];
ОТЧ = УЧ[3]; ПЕЧАТЬ (УЧ[1],
ИМЯ [1], '.', ОТЧ [1], '.') ВСЕ;
ВСЕ;
```

⇨ Задание 8.5. *Составить программу, печатающую список всех учеников из множества ШКОЛА, которые родились в 1969 году, с указанием фамилии, имени, класса и даты рождения.*

Г. Звенигородский

Олимпиада по программированию

Редакция журнала «Квант» и Вычислительный центр Сибирского отделения Академии наук СССР проводят олимпиаду по программированию. Участвовать в ней могут учащиеся Заочной школы программистов и другие школьники, изучавшие программирование в школе, на кружках, факультативах или самостоятельно.

Программы для решения задач олимпиады желательно, но не обязательно, составлять на Рапире; они могут быть составлены на любом распространенном языке программирования или в системе команд любой стандартной ЭВМ. Нужно только обязательно указать в комментарии, на каком именно языке составлена программа.

Знаком + отмечены задачи, решение которых обязательно для учащихся Заочной школы. Для перевода на второй курс школы необходимо решить не менее 5 таких задач.

Знаком * отмечены задачи повышенной трудности. Для участия в конкурсе достаточно решить одну-две задачи повышенной трудности и несколько обычных задач. ***Не старайтесь решить все задачи!***

Решения должны быть отправлены не позднее 20 апреля 1980 г. по адресу: 630090, Новосибирск 90, Проспект Науки 6, ВЦ СОАН, Отдел информатики, Олимпиада юных программистов. Условия задач переписывать не нужно: достаточно указать номер решаемой задачи.

Участников олимпиады, которые не выполняли заданий Заочной школы, просим указать фамилию, имя, отчество, место учебы и домашний адрес и сообщить, где и когда они изучали программирование, с какими языками и системами команд знакомы, на каких ЭВМ работали.

25 победителей Олимпиады по программированию будут премированы участием во Всесоюзной летней школе юных программистов, которая будет проходить с 25 июля по 10 августа 1980 года в Новосибирском академгородке.

Имена победителей будут опубликованы в «Кванте».

Кроме того, на эту Летнюю школу будут приглашены 15 лучших школьников, активно участвовавших в работе Заочной школы программирования на протяжении всего учебного года и регулярно присылавших правильные ответы. Все приглашенные на Летнюю школу получат уведомление об этом по почте.

Желаем вам удачи!!

Оргкомитет

Задачи олимпиады

Задача 1. Пусть *А* — множество, элементами которого являются положительные числа.

+ а) Доказать, что программа на Рапире

```
0 —> МАКС;
ДЛЯ ЧИС ИЗ А::
ЕСЛИ ЧИС > МАКС
ТО ЧИС —> МАКС ВСЕ
ВСЕ;
ПЕЧАТЬ (МАКС);
```

отпечатает *наибольшее* из этих чисел.

+ б) Составить программу, которая отпечатает все числа из множества А в столбик в порядке убывания (рис. 1).

Задача 2. Допустим, что в программе описана функция с одним параметром ФI(*М*). Значениями функции могут быть целые числа от 0 до 100. Составить программы для решения таких задач:

+ а) Отпечатать таблицу значений функции для целых значений параметра *М*, лежащих на отрезке [0; 100].

б) Найти и отпечатать целые корни уравнения ФI(*М*) = 0, лежащие на том же отрезке.

+ в) Построить с помощью процедур системы Шпага график функции.

* г) Найти и отпечатать площадь под графиком функции (рис. 2).

* Задача 3. Составить программу для изображения правильного 16-угольника, в котором проведены все диагонали, не проходящие через центр (рис. 3).

Задача 4. В памяти вычислительных машин можно хранить газетные и журнальные статьи, документы, книги и другие печатные материалы в виде текстов. Составить программы для решения следующих задач:

+ а) Подсчитать, сколько раз встречаются буквы 'А' и 'О' в тексте с именем ОБРЫВ.

+ б) Подсчитать, сколько раз встречается слово 'СИНЕГЛАЗКА' в тексте с именем НЕЗНАЙКА.

* в) Всюду в тексте с именем ПРИКАЗ заменить слова 'КАПИТАН ИВАНОВ' на 'МАЙОР ИВАНОВ'.

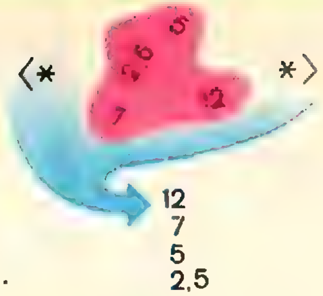


Рис. 1.

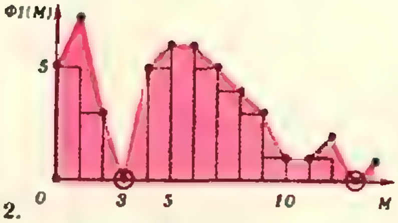


Рис. 2.

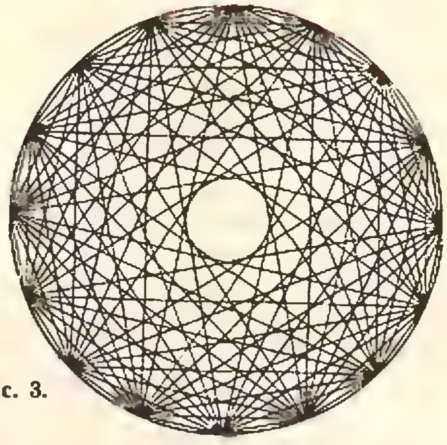


Рис. 3.

*г) Разбить текст с именем ЧАПАЕВ на строки по 60 символов и составить из них кортеж. Если какое-либо слово попадает на границу строки, то его нужно «передвинуть» в начало следующей строки, добавив в текст нужное число пробелов.

**д) В условиях предыдущей задачи предусмотреть автоматическое «растягивание» строк: если в конце строки есть пробелы, то их необходимо ликвидировать, увеличив для этого интервалы между словами внутри строки (по возможности равномерно).

Задача 6. Межпланетная станция движется параллельно оси ОХ в некоторой координатной плоскости ОХУ с постоянной скоростью *V*. К ней в автоматическом режиме летит транспортный корабль с постоянной по величине скоростью *V*1, которая в каждый момент времени направлена на станцию (рис. 4).

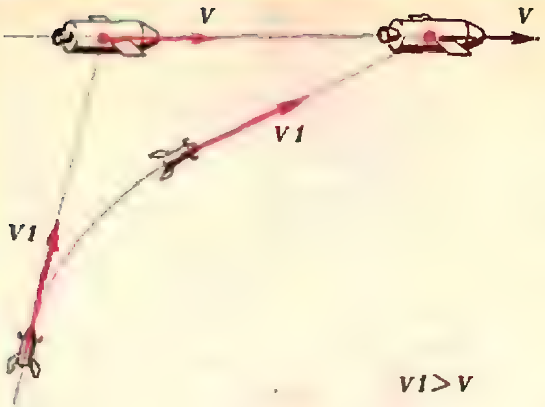


Рис. 4.

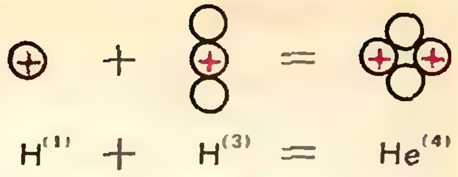


Рис. 5.

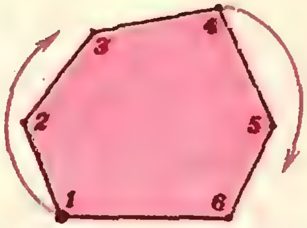


Рис. 6.

В начальный момент T=0 станция находится в точке (0, H), а корабль — в начале координат (0, 0). Составить программы, решающие следующие задачи:

* а) Нарисовать траекторию полета корабля.

* б) Нарисовать кадры мультфильма, изображающие приближение корабля к станции (скорость проекции — 24 кадра в секунду).

* в) Определить время полета корабля до встречи со станцией.

* г) Решить задачи а) — в) для случая, когда в начальный момент корабль находится в точке (A, 0), где A>0, то есть корабль летит навстречу станции.

* д) Решить предыдущие задачи, когда корабль совершает маневр, то есть его ордината У(T) является известной функцией времени T, а составляющая скорости по оси OX остается постоянной.

Указание. При составлении программ можно считать, что скорость корабля меняет направление не непрерывно, а через равные промежутки времени T1, например T1=1/24 с.

Задача 7. Придумать способ хранения в памяти ЭВМ (желательно с использованием множеств и кортежей) следующей информации:

а) таблицы планет Солнечной системы (название, среднее расстояние от Солнца, радиус, масса, состав атмосферы).

+ б) таблицы Менделеева (обозначение, название, атомный номер, атомный вес каждого элемента).

С использованием этих таблиц составить программы для решения следующих задач:

в) Отпечатать список планет в порядке возрастания их радиусов.

г) Отпечатать список планет, в атмосфере которых имеется углекислый газ.

+ д) Отпечатать список химических элементов, атомный вес которых меньше, чем у кислорода.

* е) Определить название и обозначение химического элемента, ядро которого может быть получено при слиянии ядер двух заданных элементов (рис. 6).

Указание. Программу для пункта е) удобно оформить как процедуру, параметрами которой будут обозначения элементов, ядра которых участвуют в реакции.

Задача 8. Точку на плоскости удобно представлять в виде кортежа из координат: <X, У>. Выпуклый многоугольник можно представить в виде множества таких кортежей. Пусть M — такое множество, а T — кортеж координат некоторой точки. Составить программы для решения следующих задач:

* а) Построить по множеству M кортеж K, в котором вершины многоугольника будут расположены в том порядке, в каком они встречаются при обходе контура многоугольника по часовой стрелке, начиная с самой «нижней» вершины (если таких вершин две, начиная с самой левой из них).

* б) Проверить, находится ли точка T внутри многоугольника, определяемого множеством M.

** в) Проверить, находится ли точка T внутри невыпуклого многоугольника, заданного кортежем K.

Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. В этом номере мы рассказываем о книгах, выходящих в первом квартале 1980 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Берман Г. Н. *Циклоида.* Издание 3-е. Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

Циклоидой называется кривая, которую описывает точка окружности, катящейся без скольжения по прямой. Изучению свойств этой замечательной кривой и некоторых родственных ей кривых и посвящена эта книга.

Чем же так замечательна циклоида? Прежде всего — своим исключительным значением для техники. По их практической ценности циклоидальные кривые можно поставить рядом с эллипсом, параболой, баллистической траекторией.

Во-вторых, циклоидальные кривые были пробными камнями, на которых испытывались новые математические идеи, новые приемы вычислений, возникшие в XVII веке и сформировавшиеся к концу этого века в дифференциальное и интегральное исчисления. С изучением циклоиды связаны имена, известные любому школьнику: ею занимались Галилей, Торричелли, Гюйгенс.

Изложение в книге совершенно элементарное, рассуждения близки к рассуждениям великих итальянских и французских математиков, которые занимались циклоидой. Например, приводя рассуждения Гюйгенса, который ответил на вопрос, *по какой кривой должна двигаться точка, чтобы период ее колебаний не зависел от амплитуды* (этой кривой оказалась циклоида), автор пишет: «Мы излагаем рассуждения Гюйгенса, несколько упрощая их и выражаясь современными терминами. При этом наше изложение более доступно, но очень теряет в выразительности, — это лишь «...с живой картины список бледный».»

Яркая, талантливая книга Георгия Николаевича Бермана, помимо интересных математических и физических фактов, содержит много исторических сведений. Безусловно, ее читатели получат удовольствие.

2. Понтрягин Л. С. *Математический анализ для школьников.* Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 25 к.

Эта брошюра включает в себя материал, охватывающий все разделы математического анализа, изучаемые в школе. В ней рассматриваются производные многочленов, тригонометрических функций, показательной и логарифмической функций. Интеграл определяется как операция, обратная к дифференцированию, как площадь под графиком и как предел конечных сумм. В конце каждого параграфа даются упражнения. В книге делается упор не на строгость изложения, а на технику вычислений.

Издательство «Мир»

3. Лойд С. *Математическая мозаика.* Перевод с английского. Объем 18 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 30 к.

Сборник занимательных математических задач и головоломок составлен из двух книг, принадлежащих классику этого жанра, знаменитому американскому математику Сэму Лойду. Его головоломки пользуются большой популярностью во всем мире. Известны они и любителям занимательной математики в нашей стране (некоторые головоломки публиковались в «Кванте»), хотя и без имени автора — книги Лойда до сих пор на русский язык не переводились.

Собрал лучшие задачи и головоломки Сэма Лойда и отредактировал их известный американский популяризатор математики Мартин Гарднер.

Физика

«Атомиздат»

1. Имянитов И., Тихий Д. *За гранью законов науки.* Издание 2-е, переработанное. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 40 к.

Шаровая молния — это редкое метеорологическое явление — всегда привлекала внимание человека. Почему она возникает? Каковы ее свойства? Как она взаимодействует с окружающей средой?

На пути изучения этого явления стоит много трудностей, и самая основная из них — недостаточность достоверных, научных сведений.

Книга ставит своей целью заинтересовать читателя проблемой, описать условия возникновения шаровых молний, рассказать о теориях, их объясняющих, включить читателей в круг поисков решении увлекательной и трудной задачи.

Издательство «Просвещение»

2. Зигель Ф. Ю. *Звездная азбука.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 50 к.

В книге изложены основные сведения о Земле и небесной сфере, о планетах, кометах и метеорах. Дано описание простейших астрономических приборов и способов проведения наблюдений.

И. Клумова,
М. Смолянский

Список читателей...

(Начало см. на с. 36)

б), 64; *Д. Пивоваров* (Солнцево) **46**; *И. Пиковский* (Киев) **46, 47, 57, 60а)**; *К. Поддубный* (Желтые Воды) **54—57, 60а)**; *В. Подстригач* (Львов) **46—50, 54, 55а), 58, 60а), 62, 63**; *А. Поезд* (Москва) **46, 47, 50, 51, 53, 55а), 62**; *М. Пономаренко* (Рудный Кустанайской обл.) **60а)**; *А. Попелюхин* (Киев) **46, 47, 54, 55а), 56, 57, 60а), 62, 64**; *Е. Попов* (Белорецк) **63**; *В. Потапов* (Новосибирск) **46—48, 52, 53, 57**; *Л. Потемкин* (Донецк) **47, 50—52, 57, 58**; *М. Привороцкий* (Киев) **57**; *Ю. Прохоров* (Орехово-Зуево) **47**; *Ю. Прохоров* (Новосибирск) **47**; *В. Радченко* (Киев) **47, 50, 52—54, 57, 60а), 62, 64**; *Ф. Ратников* (Ленинград) **62**; *И. Ройзман* (п. г. т. Калиновка Вининцкой обл.) **46, 47, 51, 52, 54, 56, 60а), 62, 64**; *Н. Рыбалко* (Новосибирск) **53, 62**; *С. Савченко* (Киев) **51, 54**; *Н. Салахов* (Сумгаит) **55а)**; *И. Сафаров* (с. Кергелян АзССР) **46, 47, 53**; *Н. Севастьянов* (Саратов) **46, 48а)**; *М. Семенченко* (Новочеркасск) **57**; *С. Семенякин* (Киев) **46**; *Н. Сивакова* (Макеевка) **47**; *А. Сивацкий* (Ленинград) **46—49**; *А. Сивенцев* (Свердловск) **47**; *В. Скребенкова* (Киев) **46, 47**; *А. Смирнов* (Курган) **56, 60а)**; *О. Софьянов* (Пенза) **46**; *А. Сромин* (Ленинград) **47, 49, 50**; *С. Стадниченко* (Пенза) **46, 47, 48а), 49, 50, 52, 53, 57, 64**; *С. Стешенко* (п/о Малоданиловское Харьковской обл.) **55а)**; *П. Страдынь* (Рига) **56**; *М. Стрешинский* (Донецк) **56**; *С. Танкеева* (Кокчетав) **53**; *В. Тарунин* (Пермь) **55, 62**; *С. Тарутин* (Пенза) **46**; *Я. Твилдис* (Каунас) **51, 55а)**; *Л. Тепер* (с. Ялтушков Винницкой обл.) **53, 56, 57, 62**; *Л. Тимофеев* (Клин) **46, 56, 57**; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) **51, 54, 57**; *В. Трофимов* (Москва) **54**; *Ю. Трофимчук* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) **46**; *Д. Тураев* (Горький) **46, 47, 49**; *Р. Угриновский* (Хмельник) **46, 51, 56**; *А. Уливанов* (Горький) **47**; *В. Ушаков* (Харьков) **46**; *Д. Файнгауз* (Ленинград) **51, 53, 55а), 56—58**; *В. Фарбер* (Баку) **47**; *Н. Федин* (Омск) **46, 47, 55**; *Д. Фурман* (Мозырь) **56**; *А. Харитонов* (Горький) **53, 54**; *А. Харитонский* (Киев) **46, 47**; *С. Хомич* (Ангарск) **48а)**; *О. Хоружий* (Черновцы) **46**; *И. Хускутдинов* (Термез) **60а)**; *В. Цекановский* (Донецк) **53, 54, 56, 57, 60а), 62, 63**; *З. Цихистави* (Телави) **46, 47**; *С. Чеботарев* (Москва) **56, 57, 60а)**; *И. Черная* (Ленинград) **46—49, 53, 54, 63, 64**; *М. Черкецкий* (Москва) **56—58, 60а)**; *О. Чечель* (Москва) **51—54, 55а), 57, 60б)**; *Н. Читашвили* (Тбилиси) **46, 48а)**; *А. Чулков* (п. Мучкап Тамбовской обл.) **46, 47**; *Н. Шаромет* (Москва) **51, 56, 57, 60а), 64**; *А. Шихкеримов* (Сумгаит) **47**; *Ю. Школьников* (Киев) **47**; *С. Шмелев-Агинский* (Москва) **46, 47, 48а), 51, 52, 54—58, 60а), 62, 64**; *А. Эльберт* (Киев) **46**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф558—Ф572**, справились с задачами **Ф563, Ф565, Ф567** и **Ф569**. Остальные задачи правильно решили: *А. Абрамочкин* (Киев) **71**; *А. Азаркевич* (Фаниполь) **70**; *М. Алексеев* (Обнинск) **60**; *И. Аполонский* (Жуковский) **58, 60**; *А. Аржанова* (Сызрань) **72**; *А. Астахов* (Железнодорожный Московской обл.) **71**; *Р. Бабаев* (Баку) **66**; *В. Байран* (Александровский р-н Херсонской обл.) **59**; *М. Белая* (Москва) **71**; *В. Белоус* (Днепропетровск) **64, 66**; *А. Беляев* (Витебск) **70**; *М. Беркинбаев* (Шуманайский р-н УзССР) **66, 68, 71, 72**; *А. Бессарабский* (п. Запрудня Московской обл.) **64, 66, 68, 70, 72**; *И. Бессонов* (Реутов) **64, 66, 72**; *А. Божко* (Алма-Ата) **71**; *Л. Брагинский* (Волгодонск) **64, 71**; *С. Вагнер* (Джезказган) **72**; *А. Велько* (п. Сахарный Завод Минской обл.) **66, 68**; *Е. Велько* (п. Сахарный Завод Минской обл.) **68**; *Е. Войтенко* (Киев) **61, 72**; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) **58, 59, 61, 62, 64, 66, 70—72**; *С. Глушко* (Дрогобыч) **58, 59, 61**; *А. Глушков* (Йошкар-Ола) **66**; *И. Голубцов* (Елгава) **71**; *С. Городько* (Днепропетровск) **60**; *Д. Григорьев* (Москва) **64, 70**; *И. Грузберг* (Пермь) **66, 71**; *С. Грязнов* (Киев) **64**; *А. Гуляев* (Москва) **62, 70, 71, 72**; *И. Даниловский* (Горький) **58, 61, 62, 64**; *И. Деребас* (Магнитогорск) **71**; *В. Джалоян* (с. Урцадзор АрмССР) **66**; *В. Дидух* (Львов) **59, 62, 64, 66**; *С. Довбыш* (Москва) **58—62, 64, 66, 70—72**; *А. Дремин* (п. Черноголовка Московской обл.) **70—72**; *А. Егоров* (Осинники) **64, 66**; *И. Елишевич* (Чернигов) **64**; *Е. Желиговская* (Москва). **71, 72**; *Н. Житенев* (п. Черноголовка Московской обл.) **58, 61, 62, 64, 66, 70—72**; *В. Жордочкин* (Орск) **71**; *Г. Заславский* (Тбилиси) **64, 66, 71**; *И. Зильберберг* (Алма-Ата) **64, 70, 71**; *Е. Зудин* (Александров) **58—61, 64, 66**; *И. Иванов* (Саратов) **59, 62**; *В. Израилит* (Днепропетровск) **64, 70**; *О. Исупова* (Оренбург) **64**; *Р. Камалян* (Ереван) **64**; *В. Катин* (Житомир) **70, 72**; *И. Кечов* (Сухуми) **62, 64**; *Е. Коган* (Днепропетровск) **58, 59, 61, 62, 64, 66**; *Г. Кожаридзе* (Телави) **70, 71**; *А. Кожевников* (Днепропетровск) **62, 70, 71**; *В. Колевзон* (Харьков) **64**; *Г. Коломойцев* (Сумгаит) **62**; *В. Комов* (Александров) **59—61, 64, 66**; *Ю. Кондрахин* (Новосибирск) **60**; *И. Красиков* (Киев) **60, 61, 66, 70**; *Р. Крис* (Киев) **64, 66, 72**; *Е. Кузнецов* (Кишинев) **66, 72**; *А. Кузьмин* (Алма-Ата) **71**; *С. Курчатов* (Саратов) **64, 66, 68, 71, 72**; *А. Кушнеров* (Москва) **62**; *В. Ланских* (Бобруйск) **58**; *А. Левинштейн* (Запорожье) **64**; *М. Левитин* (Москва) **64**; *В. Лемберг* (Одесса) **66**; *В. Леонов* (Воронеж) **58, 60, 62, 66, 71**; *Е. Лисянская* (Харьков) **64**; *С. Логунов* (Москва) **62, 64**; *И. Лукьянчук* (Киев) **66, 72**; *Д. Людмирский* (Киев) **58**; *Л. Ляпин* (Гомель) **58, 60—62, 68, 70, 71**; *С. Маломанов* (Ленинград) **62, 66**; *Е. Матчишин* (Целиноград) **71**; *Е. Меденников* (Ульяновск) **70, 71**; *М. Межуева* (Челябинск) **59, 66**; *А. Минаев* (Саратов) **61, 71**; *В. Мирзоев* (п. Ярдымлы АзССР) **70, 72**; *А. Михайлов* (Москва) **59, 60, 62, 64, 66, 72**; *И. Михайлов* (Кемерово) **64**; *С. Михайловский* (Виноградовский р-н Архангельской обл.) **61, 64, 66, 70**; *Г. Молчанов* (Саратов) **58—60, 62, 66, 68, 71, 72**; *С. Надточий* (Москва) **64, 71**; *А. Назаренко* (Киев) **62, 64, 70, 71**; *В. Наталич* (Ашхабад) **59, 61**; *Г. Нечаева* (Курск) **70**; *А. Новиков* (с. Шарлык Оренбургской обл.) **58, 62**; *Д. Овсянников* (Ленинград) **58, 60, 71**; *О. Одинцов* (Курск) **58, 62**; *А. Орлов* (п. Черноголовка Московской обл.) **64, 66, 70—72**; *О. Панащенко* (Киев) **58, 62, 64, 66, 70, 72**; *И. Педак*

(Окончание см. на с. 60)

Прикладная математика: интересно, актуально, перспективно!

В книге А. Н. Тихонова и Д. П. Костомарова «Рассказы о прикладной математике» (М., «Наука», 1979) раскрывается содержание работы математика-прикладника, той его профессиональной, творческой деятельности, которая предшествует машинному счету задачи и делает этот счет возможным. Сами авторы видят цель своей книги в том чтобы «в популярной форме рассказать широкому кругу читателей и прежде всего учащейся молодежи о прикладной математике, об идеях, методах, трудностях исследований, связанных с применением математических методов и вычислительной техники к изучению законов природы и их использованию в практической деятельности людей».

Теперь юный читатель получит информацию о специальности «прикладная математика», что называется, из первых рук. Ведь один из авторов книги, академик А. Н. Тихонов, директор Института прикладной математики АН СССР, был инициатором создания факультета вычислительной математики и кибернетики Московского университета и является его бессменным деканом, а другой автор, Д. П. Костомаров,— профессор этого факультета, видный специалист по вычислительной математике и математической физике. Совсем, к сожалению, не часто авторы такого ранга считают необходимым и, главное, находят время написать книгу, адресованную школьникам.

Такая книга нужна была уже давно. По крайней мере с начала семидесятых годов, когда в различных университетах нашей страны открылись факультеты прикладной (вычислительной) математики. Ведь для юного любителя математики, выбирающего свой путь после школы, очень важен конкретный, заинтересованный и компетентный рассказ о современной науке.

...Нельзя сказать, что для широкого круга читателей про электронно-вычислительные машины написано недостаточно. Имеется довольно большое число научно-популярных книг и брошюр, где рассказывается о принципах внутреннего устройства компьютеров, об их широком использовании в различных областях науки и техники, о том, какие практически важные результаты они «выдавали», решая многочисленные народнохозяйственные задачи. Часто материалы об ЭВМ публикуют газеты и журналы, но, как правило, в этих материалах лишь в самых общих фразах говорится, что реально дают ЭВМ, насколько много они могут.

Во всех этих рассказах об ЭВМ остается за кадром деятельность математика, не объясняется, как фактически «заставить» компьютер решить нужную задачу. Именно поэтому у многих юношей и девушек (да и не только у них) создается впечатление, что вычислительная машина в состоянии (или не сегодня-завтра будет в состоянии) сама справиться с любой задачей, а работа специалиста по прикладной математике состоит лишь в том, чтобы изложить на языке машины («запрограммировать») условие задачи и нажать кнопку «Пуск».

Чем же, прежде всего, занимается прикладная математика? Авторы книги отвечают так: современная прикладная математика «включает круг вопросов, связанных с использованием математических методов и вычислительной техники... в самых различных областях человеческой деятельности». И этот круг вопросов непрерывно расширяется — на наших глазах бурно протекает процесс, который называют математизацией науки и производства. Сегодня невозможно достаточно полно познавать закономерности как неживой, так и живой природы, обеспечивать прогресс техники, управлять производственными процессами и развитием народного хозяйства без широкого и систематического привлечения математического аппарата и электронно-вычислительных машин.

Совершенно ясно, что математические методы непосредственно применить к исследованию реального объекта (явления природы, работы машины, технологического процесса, составления экономического плана) невозможно. Сначала интересующей нас задаче надо придать математическую форму — описать наиболее существенные черты и свойства объекта на языке математических понятий и соотношений. Вот почему первым основным элементом прикладной математики является, как говорят, формализация исследуемого объекта, построение соответствующей математической модели. Построение такой модели требует сочетания глубоких знаний о реальном объекте с высокой математической культурой. Именно поэтому прикладной математик должен обладать не только всесторонней математической подготовкой, но и по-настоящему разбираться в той области знаний или производства, задачами которой он занимается.

В книге приведено несколько конкретных примеров построения математических моделей (использующих доступные школьникам математические понятия и факты). Читатель имеет возможность подробно познакомиться с различными аспектами этой работы, в частности с проблемой выяснения степени соответствия модели реальному объекту. Одна из задач (о движении тела, которому сообщили начальную скорость под углом к поверхности Земли) — к ней авторы возвращаются несколько раз — дает возможность рассказать, как процесс изменения требований практики, углубления человеческого знания влечет за собой последовательное уточнение математической модели, все глубже и всесторонне описывающей реальный процесс.

Но допустим, что математическая модель уже построена. Тогда перед нами возникает типично математическая задача, которая, грубо говоря, заключается в том, чтобы по известным исходным данным и определенным соотношениям найти интересующий нас ответ. Поиск метода решения сформулированной математической задачи — дело человека. Если этот метод неизвестен, то наивно думать, что его может найти машина.

Что же нового в таком случае в прикладной математике по сравнению с математикой классической? Ведь и классическая математика (ее иногда очень неудачно пытаются называть «чистой») возникла из практических потребностей людей, имела дело с математическими моделями, решала математические задачи.

В прошлом при решении задач основной метод состоял в получении нужных следствий из данных посылок с помощью законов формальной логики, а главная цель виделась в выводе «точной формулы», явно связывающей искомые величины с заданными. Между тем в подавляющем большинстве задач найти явную формулу, точный ответ по разным причинам нельзя в принципе. Тогда естественно попытаться указать правило выполнения бесконечной последовательности вычислительных операций, позволяющей за конечное число шагов получить приближенное решение с требующейся точностью. Однако такой подход применялся раньше очень редко — не потому, что математики считали вычисления недостойным занятием, а из-за чрезвычайной их трудоемкости и даже практической неосуществимости на имевшихся вычислительных средствах.

Создание современных ЭВМ кардинально изменило ситуацию: сейчас имеется реальная возможность проводить исчерпывающий анализ широких классов математических задач не только путем формально-логических умозаключений, но и на основе фактического осуществления вычислений. Вторым основным элементом прикладной математики как раз и является разработка алгоритмов — точных описаний последовательностей вычислительных операций, позволяющих получить с помощью ЭВМ приближенные решения задач. Выбрав несколько достаточно типичных задач, авторы прослеживают весь путь от предварительного осмысления задачи и возникновения идеи, положенной в основу численного метода, до окончательной формулировки алгоритма, его обоснования и сравнения с другими алгоритмами решения той же задачи. Этот материал представляет несомненный интерес для юного любителя математики, поскольку содержит строгое и одновременно вполне посильное для понимания изложение важных математических вопросов. Особое внимание хочется привлечь к главе, содержащей введение понятия определенного интеграла и описание алгоритмов численного интегрирования.

Авторы книги убедительно показывают, что задачи прикладной математики — это сложные и серьезные математические задачи, требующие широких познаний в самых различных разделах теоретической математики и умения учитывать все возможности вычислительной техники.

Третьему основному элементу прикладной математики — электронно-вычислительным машинам — посвящена небольшая, но ярко написанная глава. Здесь рассказывается об истории вычислительной техники, о принципах действия ЭВМ (но без описания технической стороны дела), о проблеме общения человека с машиной, о самых разнообразных применениях компьютеров.

Электронно-вычислительные машины — одно из наиболее значительных творений науки и техники XX века, открывающее огромные возможности прогресса. Однако сами по себе ЭВМ ни одной задачи решить не могут, они не работают без направляющего воздействия человека. Поэтому сегодня особенно актуально привлечь к прикладной математике внимание и интерес талантливой молодежи — тех, кто через несколько лет сможет превратить возможности прогресса в реальность жизни. Замечательная книга А. Н. Тихонова и Д. П. Костомарова как раз и служит этой высокой цели.

Н. Розов

Список читателей...

(*Начало см. на с. 36, 58*)

(Запорожье) **59**; *А. Перов* (Москва) **60, 62, 70, 72**; *А. Полисский* (Киев) **60, 66**; *Ф. Ратников* (Ленинград) **58, 59, 62, 68, 70—72**; *С. Рафонов* (Киев) **72**; *И. Рзаев* (Гардимлинский р-н АзССР) **70**; *Е. Рудь* (Грозный) **64**; *А. Рыбин* (Талды-Курган) **64**; *Г. Рыбкин* (Смоленск) **71**; *А. Сагаутдинов* (Алма-Ата) **58, 60, 62**; *А. Сагура* (Запорожье) **66**; *С. Сафонов* (Киев) **60**; *В. Семенов* (Киев) **62**; *Т. Сергейцев* (Челябинск) **68, 70—72**; *В. Середа* (Львов) **62, 64, 66, 71, 72**; *Ю. Сиренко* (Киев) **58, 59, 62**; *А. Скок* (Талгар) **64**; *Ю. Скосарев* (Новоузский р-н Ярославской обл.) **66**; *Е. Смирнов* (Александров) **64**; *С. Смирнов* (Ташкент) **72**; *А. Смычкович* (Минск) **71**; *Г. Солдак* (Минск) **64, 66, 71, 72**; *Д. Соляков* (Курчатов) **59, 66**; *Д. Сорока* (Запорожье) **62, 70, 71**; *А. Сромин* (Ленинград) **58, 62, 68**; *С. Стешенко* (с. Малоданиловское Харьковской обл.) **59, 66**; *А. Стрешинский* (Донецк) **58, 72**; *Д. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) **60, 64, 66, 71, 72**; *С. Суров* (Оренбург) **66**; *А. Тагаев* (Новосибирск) **60**; *Д. Файнгауз* (Ленинград) **64, 70—72**; *А. Фарбер* (Баку) **64, 70—72**; *Н. Федин* (Омск) **58—60, 62, 64, 66, 68, 70, 71**; *А. Флеров* (Рига) **64, 70—72**; *И. Фоменко* (Днепропетровск) **60, 62, 64, 66**; *М. Фурман* (Мозырь) **70, 71**; *О. Хоружий* (Череповец) **62**; *В. Целиков* (Череповец) **58, 59, 64, 66, 68, 70, 72**; *Ю. Цыганков* (Дрожжановский р-н ТаССР) **64, 72**; *В. Чебоксаров* (Владивосток) **64, 66**; *Е. Чулкин* (п. Рябово УдАССР) **60, 64**; *А. Чумадин* (Баку) **64, 70**; *В. Шаблинский* (Киев) **58—60, 62, 64, 66, 70, 72**; *А. Шайхулов* (Ижевск) **72**; *С. Шарый* (Семипалатинск) **62, 70, 71**; *И. Швец* (Желтые Воды) **60, 64, 68, 70, 71**; *В. Шехетов* (Караганда) **71**; *А. Шимановский* (Гомель) **64, 66, 68**; *В. Шиков* (Боготол) **64**; *С. Шишков* (Москва) **66**; *И. Шкрадюк* (Ногинск) **64, 71**; *М. Эргашов* (Фергана) **70**; *М. Яковлев* (Кемерово) **62**; *А. Яценко* (Тбилиси) **60**.

Консультирует чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

В марте должны закончиться четвертьфинальные матчи претендентов и претенденток. На рисунках 1, 2 приведены схемы, на которых вы можете отмечать результаты этих матчей. К концу года знаки вопросов будут сняты, и тогда мы узнаем, с кем в матчах на первенство мира в 1981 году предстоит отстаивать свои чемпионские звания Анатолию Карпову и Майе Чибурданидзе.

Заметим, что из всех этапов борьбы за первенство мира только соревнования претендентов проходят по кубковой (олимпийской) системе. Зональные и межзональные турниры проводятся по круговой системе, при которой все шахматисты играют друг с другом. В статье «Кто поедет в Рио?» («Квант», 1972, № 8) рассматривался ряд интересных задач про кубковые турниры в предположении, что верен «принцип транзитивности»: если А играет сильнее Б, а Б играет сильнее С, то А играет сильнее С. К сожалению, на практике этот принцип не всегда выполняется. Так, любой неудачник третьей пары (см. рис. 1) имеет более высокий коэффициент Эло, чем участники второй пары, но, увы, борьбу за мировую корону после четвертьфинала продолжит только один из двух выдающихся шахматистов — М. Таль или Л. Полугаевский.

Предлагаем вам теперь решить четыре задачи — одну про кубковый турнир, одну про круговой и две на шахматной доске.

1. В розыгрыше кубка города участвуют n шахматистов. Предварительно пройдут кубки районов (в городе p районов с числом шахматистов $n_1, n_2, \dots, n_p$), и победители уже разыграют главный кубок города. Оба этапа соревнования проводятся по такой системе: еще не выбывшие шахматисты жеребьевкой разбиваются на пары и противники играют одну партию, проигравший выбывает из розыгрыша кубка (в случае ничьей борьбу продолжают черные; если одному игроку нет пары, то он выходит в следующий круг без игры) и т. д.

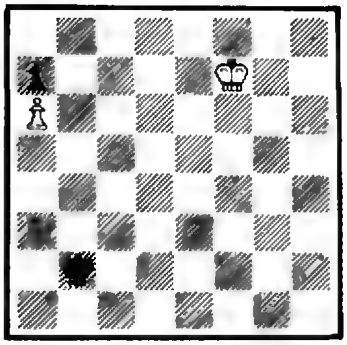


Рис. 3. И. Майзелис. Белые начинают и выигрывают.

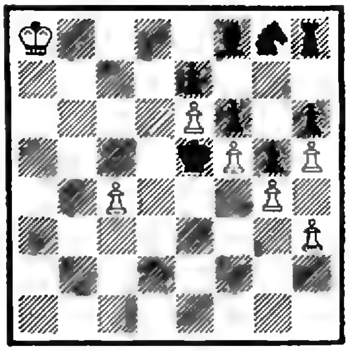


Рис. 4. Б. Гургенидзе, В. Корольков. Белые начинают и выигрывают.

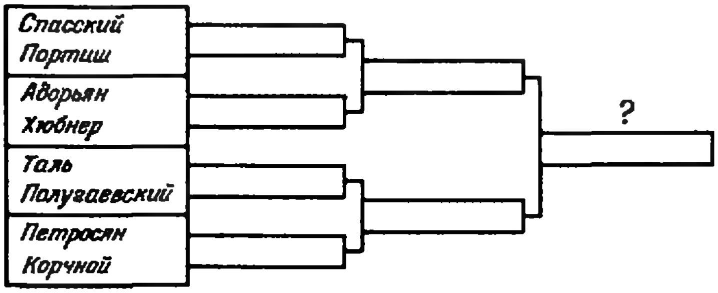


Рис. 1. Матчи претендентов среди мужчин.

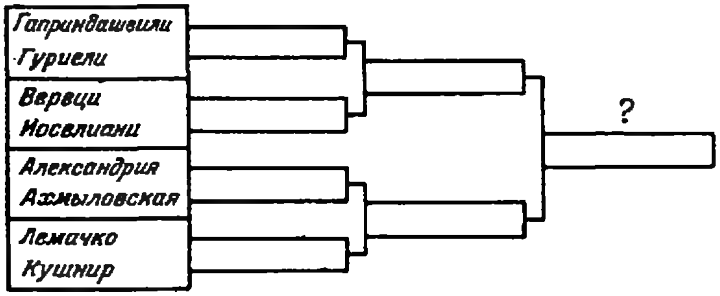


Рис. 2. Матчи претендентов среди женщин.

Организаторам кубка предстоит заказать бланки для записи каждым участником каждой своей партии, и они оказались в затруднительном положении. Сколько бланков нужно заказать, чтобы все партии были записаны?

2. В круговом турнире всего было сыграно 55 партий. Два участника по болезни выбыли из него, причем один успел сыграть 10 партий, а другой только одну. Встречались ли эти шахматисты между собой?

3.4. Этюды (рис. 3, 4) совершенно не похожи друг на друга, и решение второго намного сложнее, чем первого. Однако основная идея у них одна и та же и она является чисто геометрической.

Закон всемирного тяготения

1. $\Delta R \approx \frac{2m|\vec{u}|}{M}\sqrt{\frac{R_З}{g}} \approx 40$ м.

Указание. Изменение скорости спутника $\Delta|\vec{v}|$ и изменение радиуса его орбиты ΔR связаны соотношением $2|\vec{v}|\Delta|\vec{v}| = g\Delta R$.

2. $\frac{M_Ю}{M_З} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \approx 320$.

3. $r_{max} = 2R\left(\frac{T}{T_З}\right)^{2/3} - r_{min} \approx 52 \cdot 10^8$ км,

где $T_З = 1$ год — период обращения Земли вокруг Солнца.

Указание. Воспользуйтесь первым и третьим законами Кеплера.

4. $|\vec{u}| = (\sqrt{2}-1)\sqrt{gR_З^2/R}$, направление вектора $\vec{u}$ должно совпадать с направлением движения спутника по орбите.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика на гуманитарных факультетах

Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$

$y = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$

2. $\frac{1}{5}\sqrt{7105}$. Указание. Полезно ввести систему координат Exy так, как указано на рисунке 1.

3. 726 денежных единиц.

4. Площадь будет наибольшей и равной $\frac{2}{3}(5-3\sqrt{2})$ при $a=1$. Указание. Здесь удобнее выразить площадь S через y (а не через x), тогда площадь $S(a)$ находится сразу:

$$S(a) = \int_1^2 \left(\sqrt{\frac{2y}{a}} - \sqrt{\frac{y}{a}}\right) dy = \frac{2}{3}(5-3\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

5. $]1/3;\ 2+\sqrt{15}[$.

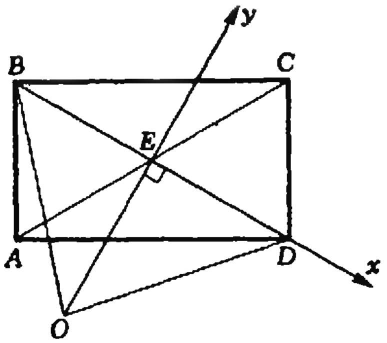


Рис. 1.

Факультет психологии

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$.

2. Площадь фигуры равна b при $a = \sqrt{\frac{8}{3b}} - 1$, задача имеет решение при $0 < b < \frac{8}{3}$.

3. $]-1-2\sqrt{2};\ -3[\ \cup\ ]1;\ 3]$.

4. $\frac{16}{3}\sqrt{2}$.

5. $\{(1;\ 5;\ 0),\ (1;\ -5;\ 0),\ (-1;\ 5;\ 0),\ (-1;\ -5;\ 0)\}$.

Указание. Полезно сделать замену $u = y - z$.

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. $10R^2(\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi)$.

2. $x_1 = \pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$;

$x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$.

3. $]1;\ 2]\ \cup\ [3;\ 4[$.

4. Первая линия выполняет сменное задание за 8 часов.

5. Дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$ можно сократить на 11.

Указание. Из условия задачи следует, что $3n-m=kp$ и $5n+2m=kq$, где p и q взаимно просты. Умножая первое уравнение на 2 и складывая со вторым, получим $11n = k(2p+q)$; умножая первое на 5, второе на 3 и складывая, получим $11m = k(-5p+3q)$. Из полученных уравнений не сложно вывести, что k делится на 11 и даже, что $k=11$.

Физика на естественных факультетах

Химический факультет и отделение геофизики геологического факультета

1. $t = \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2}\sqrt{\frac{R_1}{g}} \approx 1{,}2$ с.

2. $x < \frac{a}{\sqrt{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 1{,}5$ м.

3. $A = p_0 V\Delta t/T \approx 3{,}46$ Дж.

4. $r = R/\sqrt{2} \approx 1{,}4$ Ом.

5. $n_{min} = 1/\sin\alpha \approx 1{,}15$.

Географический факультет, отделение общей геологии геологического факультета и факультет почвоведения

1. $|\vec{F_a}| = mga/c = 200$ Н (стержень AB растянут); $|\vec{F_b}| = mgb/c = 250$ Н (стержень CB сжат).

2. $t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 0{,}35$ с.

3. $\Delta m = m_1(t_2 - t_1)/T_2 \approx 27$ г.

4. $U_{AB} = -{}^2/_3\,\mathscr{E} = -4$ В.

5. $S = a^2\sqrt{3} \approx 692$ см².

Заочная школа программирования, урок 4

(см. «Квант», 1979, № 11)

4.1

```
ЗАПОМНИТЬ ПРОЦЕДУРУ ЧЕТВЕРКА;
10 СЛОЖИТЬ А С А И ПРИСВОИТЬ А;
```

```
20 СЛОЖИТЬ А С А И ПРИСВОИТЬ А;
ЗАКОНЧИТЬ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ;
    4.2
1 ПРИСВОИТЬ N; 0 ПРИСВОИТЬ M;
0 ПРИСВОИТЬ S;
ЗАПОМНИТЬ РЕЛЬС;
10 ПРОЕХАТЬ 24М;
20 СЛОЖИТЬ 1 С N И ПРИСВОИТЬ N;
30 СЛОЖИТЬ 24 С M И ПРИСВОИТЬ M;
40 :ПРОВЕРКА; ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ СИГНАЛ;
10 ОТПЕЧАТАТЬ 'СТЫК НОМЕР',
   N, 'НЕИСПРАВЕН';
20 ОТПЕЧАТАТЬ 'РАССТОЯНИЕ',
   M, 'МЕТРОВ';
30 СЛОЖИТЬ S С 1 И ПРИСВОИТЬ S;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ ПРОВЕРКА;
10 ЕСЛИ СТЫК НЕИСПРАВЕН
   ТО :СИГНАЛ;
20 ЕСЛИ ВПЕРЕДИ ТУПИК
   ТО ОТПЕЧАТАТЬ 'ВСЕГО
   СТЫКОВ', S, ИЗ НИХ НЕИСПРАВНО',
   N ИНАЧЕ :РЕЛЬС;
ЗАКОНЧИТЬ; :ПРОВЕРКА;
    4.3
ЗАПОМНИТЬ ДЕЛ(А, В);
10 0 ПРИСВОИТЬ ЧАСТ;
20 ПОКА А БОЛЬШЕ В ПОВТОРЯТЬ
   :СЧЕТ;
30 ОТПЕЧАТАТЬ 'ЧАСТНОЕ РАВНО',
   ЧАСТ, 'ОСТАТОК РАВЕН', А;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ СЧЕТ;
10 СЛОЖИТЬ 1 С ЧАСТ И
   ПРИСВОИТЬ ЧАСТ;
20 ВЫЧЕСТЬ В ИЗ А И ПРИСВОИТЬ А;
ЗАКОНЧИТЬ;
    4.4
ЗАПОМНИТЬ НОД(А, В);
10 ПОКА А НЕ РАВНО В ПОВТОРЯТЬ
   ЕСЛИ А БОЛЬШЕ В ТО ВЫЧЕСТЬ
   В ИЗ А И ПРИСВОИТЬ В;
   ИНАЧЕ ВЫЧЕСТЬ А ИЗ В И
   ПРИСВОИТЬ В;
20 ОТПЕЧАТАТЬ А; ЗАКОНЧИТЬ;
```

Заочная школа программирования, урок 5

(см. «Квант» № 1)

```
5.1. 15—>A; 24—>B;
     3*A+A!3*B!2+(A+B)!5—A!6/25+
     +33*A!6—>C;
     8*C+A!2*(A+B+C)!7—33+(76*A—
     —34)/58+C!9—>K;
     K!8/38+5*A/8+(A+K+B)!9—76+
     +58*C—>Л;
5.2. A=857 B=4 C=200.
5.3. (—B+(B!2—4*A*C)! 0.5)/(2*A)—>X1;
     (—B—(B!2+4*A*C)! 0.5)/(2*A)—>X2;
5.4. ЕСЛИ A>B ТО A—>МАКС;
     B—> МИН ИНАЧЕ A—>МИН;
     B—>МАКС ВСЕ;
5.5. 1—>N; 0—>СЧ;
     ПОКА N=<100 :: N! 2+СЧ—>СЧ;
     N+1—>N ВСЕ;
5.6. ПОКА A/=B :: ЕСЛИ A>B ТО
     B—A—>A ИНАЧЕ A—B—>B ВСЕ ВСЕ;
```

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. а) 24 и 26; б) 13 и 14.

2. Для страниц с однозначными номерами потребуется 9 цифр, для страниц с двузначными — 2 • 90=180 цифр. Остается 1392—189=1203 цифры — по 3 на страницу. Их хватит на 401 страницу. Всего в книге 401+90+9=500 страниц.

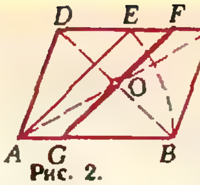


Рис. 2.

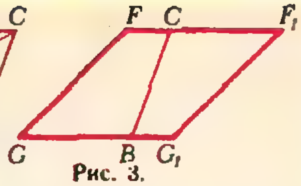


Рис. 3.

3. Аня носит белое платье, Валя — голубое, Галя — зеленое, и Надя — розовое.

4. Ответ. Да.

Решение. Пусть *«эта головоломка»* = головоломка *A*; *«головоломка, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали головоломку A»*, = головоломка *B*.

Тогда задача переформулируется так: «Если головоломка *B* была труднее, чем головоломка *A*, то была ли головоломка *B* труднее, чем головоломка *A*?»

5. См. рисунки 2 и 3: $|AE|=|AB|$, $[FG]\parallel[AE]$, $|FG|=|AE|$, $O\in[FG]$.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

1. После **1. Л:а6+!Крb8** (1...ba 2. Фb6+ Кра8 3. Ф:а6+ Ла7 4. Ф:с8×) **2. Фа4** черные сдались, так как от матовых угроз нет защиты.

2. 1. Kd4+ Кре1 2. Фh2! Крd1! 3. Фh7! (геометрические движения ферзя довольно интересны) **Кре1! 4. Фh4+** (4. Фе4? Крf2 5. Фf3+ Крg1 6. Ке2+ Крh2 7. Ф:f1 пат!). Теперь возникают два основных варианта: а) 4... Крd1 5. Фе4! Фе1+ 6. Крb3 Фf2 (6...Фd2 7. Фh1+ Фс1 8. Фh5+ е2 9. Кf3) 7. Фb1+ Крd2 8. Фс2+ Кре1 9. Фс1×; б) 4...Фf2 5. Кс2+ Кре2 6. Фh5+ Крf1 7. Фh1+ Фg1 8. Фf3+ Фf2 9. К:е3+ Крg1 10. Фd1+ Крh2 11. Кg4+.

3. Решение содержит 14 движений белого ферзя: **Фе4+, Фа4+, Фf4+, Фf8+, Фf3+, Фа3+, Фg3+, Ф:g8+, Фg2+, Ф:а2+, Фh2+, Фh8+, Фа1+** и **14. Фа6×** (все ходы черных вынужденные и поэтому не приводятся). Заметим, что такие сложные возвратно-поступательные движения ферзя (на достаточно широких просторах доски) шахматные композиторы называют виражом.

4. Будем считать, что наша необычная доска расположена в левом нижнем углу обычной шахматной доски. В этом случае 45 необходимых перемещений фигур можно записать следующим образом: **Л, С, Л3d2** (на d2 могут пойти две ладьи), **Кр, К, Кр, Л, С, Кр, С, Кр, С, Л1d2, С, К, Л, Л2d3, С, Кр, Ф, К, Ф, Кр, Ф, К, Кр, Ф, С, Л, Л4d3, К, С, Л, С, Ф, С, Ф, С, Л3d2, Ф, К, Ф, Л, С, Л.** Король и ферзь поменялись местами, все остальные фигуры вернулись на первоначальные поля.

Неожиданный ракурс

(см. «Квант» № 2)

1. а) Плоскость π, параллельная прямым *a* и *b*; б) прямая, лежащая в плоскости π. Рассмотреть две параллельные проекции: вдоль прямой *a* (или *b*) и вдоль прямой, соединяющей точки пересечения плоскости *a* с прямыми *a* и *b*.

2. Рассмотреть параллельную проекцию вдоль плоскости KLM.

3. а) Боковые ребра пирамиды; ребра SB, SD и SE делятся соответственно в отношениях 3:4, 3:11 и 3:8, считая от вершины S. б) Боковые ребра SA, SB, SC, SD и стороны основания AF и FE; ребра SB и SD делятся в отношениях 9:17 и 9:23, считая от S, ребра FA и FE — в отношениях 1:2 и 1:9, считая от F. Рассмотреть параллельную проекцию вдоль плоскости сечения на числовую ось, считая $x_K = x_L = x_M = 0$, $x_S = 1$. Зная координаты A, C и F (или E), определить координату проекции центра основания, а затем координаты остальных вершин.

4. Если точка K лежит вне трапеции, то $\frac{1}{15}S$, если внутри — то $\frac{2}{15}S$. Спроектировать трапецию вдоль прямой, параллельной основаниям на пересекающую их прямую; определить отношение высоты треугольника, опущенной из вершины K к высоте трапеции.

5. 1:2. Рассмотреть проекции вдоль (BC_1) и вдоль боковых ребер призмы.

6. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\,a$. Спроектировать пирамиду вдоль (BD) на (SAD).

7. Спроектируйте вдоль секущей плоскости.

8. 3.

9. $\frac{7}{32}$ см^3.

10. Косинус угла при ребре AA_1 равен $\frac{S_1^2 - S_2^2}{4S_1S_2}$.

Кроссворд

(см. «Квант» № 2, 3-ю с. обложки)

По горизонтали: 5. Магнето. 7. Лагранж. 11. Диагональ. 12. Дальномер. 13. Точка. 14. Ампер. 15. Абель. 16. Секанс. 18. Диоптр. 22. Кеплер. 24. Нейман. 27. Осмос. 29. Дирак. 30. Кулон. 31. Экстремум. 32. Лоуренсий. 33. Радикал. 34. Локация.

По вертикали: 1. Мариотт. 2. Многочлен. 3. Ортоцентр. 4. Инфелью. 6. Тонна. 8. Альфа. 9. Алгамс. 10. Разряд. 17. Алгол. 19. Осмий. 20. Геометрия. 21. Наклонная. 23. Радиус. 24. Нуклон. 25. Домкрат. 26. Антимир. 28. Сфера. 30. Карио.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 1, с. 55)

1. $b_n = 2 \cdot \frac{10^{6n-3} - 1}{9}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

3. Имеем: $S = 2xy$ (обозначения см. на рисунке 1). Найдем произведение xy. Построим $[O_1E] \perp [AB]$, где $|AE| = |EB|$ (рис. 1). Тогда по условию $|O_1B| = R$, $|O_2A| = r$ $(O_2 = [AO] \cap [O_1E])$. Треугольники AO_2E, O_1BE и BOC подобны, поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{z}{2r} = \dfrac{x}{z}, \\ \dfrac{z}{2R} = \dfrac{y}{z}. \end{cases}$$

Отсюда

$$z^2 = \frac{4r^2R^2}{R^2 + r^2},$$
$$xy = \frac{z^4}{4rR},$$

то есть

$$S = \frac{8r^3R^3}{(R^2 + r^2)^2}.$$

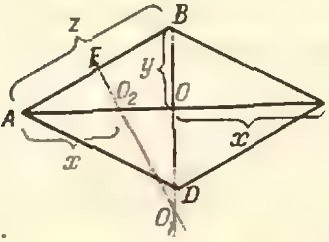


Рис. 4.

4. Доказательство проведем методом математической индукции. Для $n = 1$ утверждение задачи очевидно. Предположим, что оно верно для некоторого $n = k$. Докажем, что тогда оно верно для $n = k + 1$. Пусть имеется $3(k+1)!$ городов, для связи между которыми используется $k + 1$ видов транспорта. Возьмем некоторый город C. Он связан с $3(k+1)! - 1$ городами. Докажем, что найдется не менее $3k!$ городов, с которыми город C связан одинаковыми видами транспорта. Предположим противное: пусть таких городов менее $3k!$, т. е. не более $3k! - 1$. Так как всех видов транспорта $k + 1$, то город C будет соединен не более чем с $(3k! - 1) \cdot (k + 1)$ городами. Но $(3k! - 1) \cdot (k + 1) = 3(k+1)! - k - 1 < 3(k+1)! - 1$, т. к. $k > 1$. Получили противоречие, поскольку знаем, что город C соединен с $3(k+1)! - 1$ городами.

Итак, найдется не менее чем $3k!$ городов, с которыми город C связан одинаковыми видами транспорта. Предположим, что среди этих $3k!$ городов имеются города A и B, связанные между собой тем же видом транспорта, что и с городом C. Значит, выехав из города C, мы, не меняя вида транспорта, побываем в городах A и B и вернемся обратно в C. Если же двух таких городов не найдется, то придем к случаю, когда имеется $3k!$ городов и k видов транспорта, что дает утвердительный ответ на вопрос задачи по предположению индукции.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович
Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
И. Смирнова, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

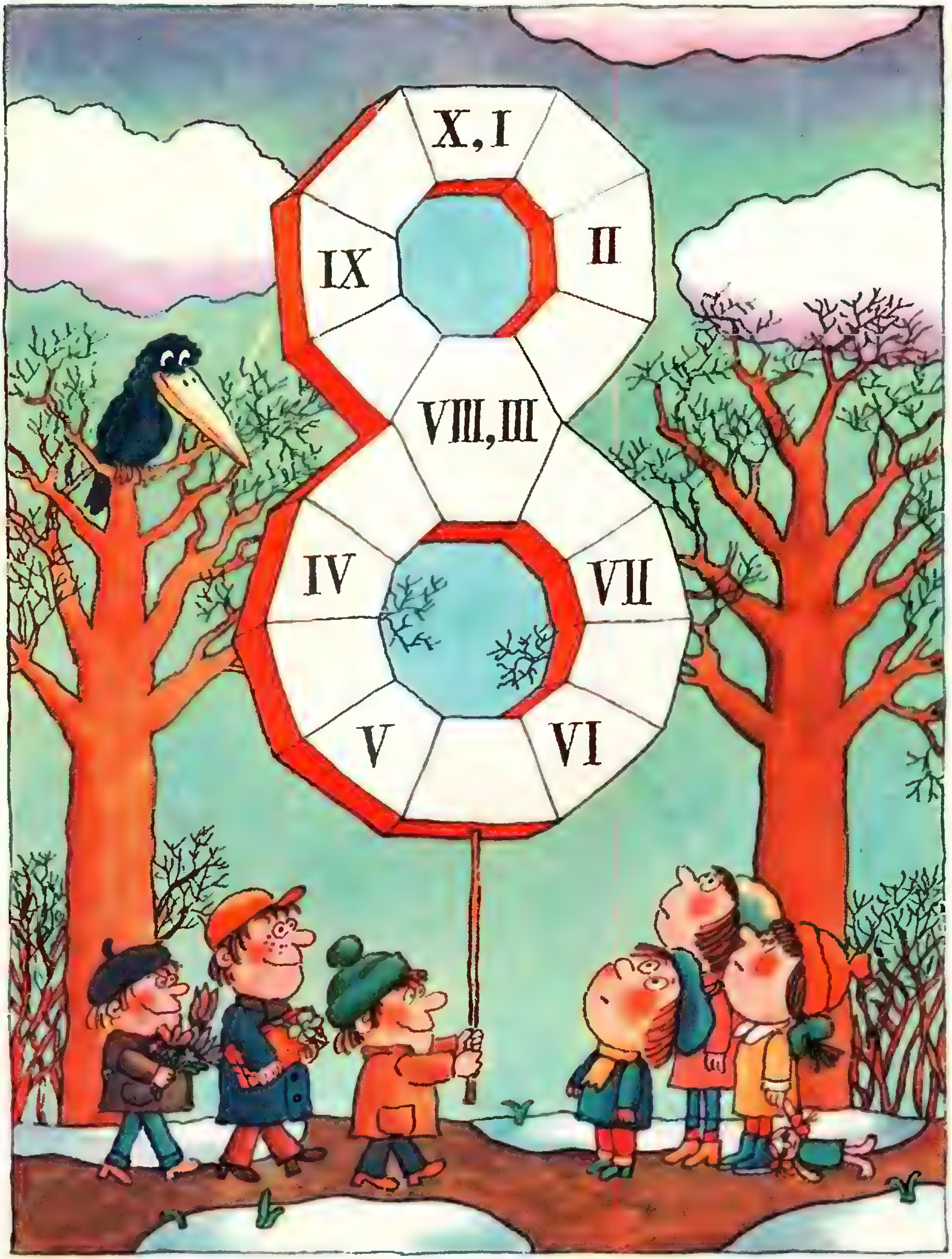
Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры О. Кривенко, Т. Панькова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 17.I.80
Подписано в печать 27.II.80
Печать офсетная

Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,02 Т-01179
Цена 30 коп. Заказ 61. Тираж 206 907 экз.

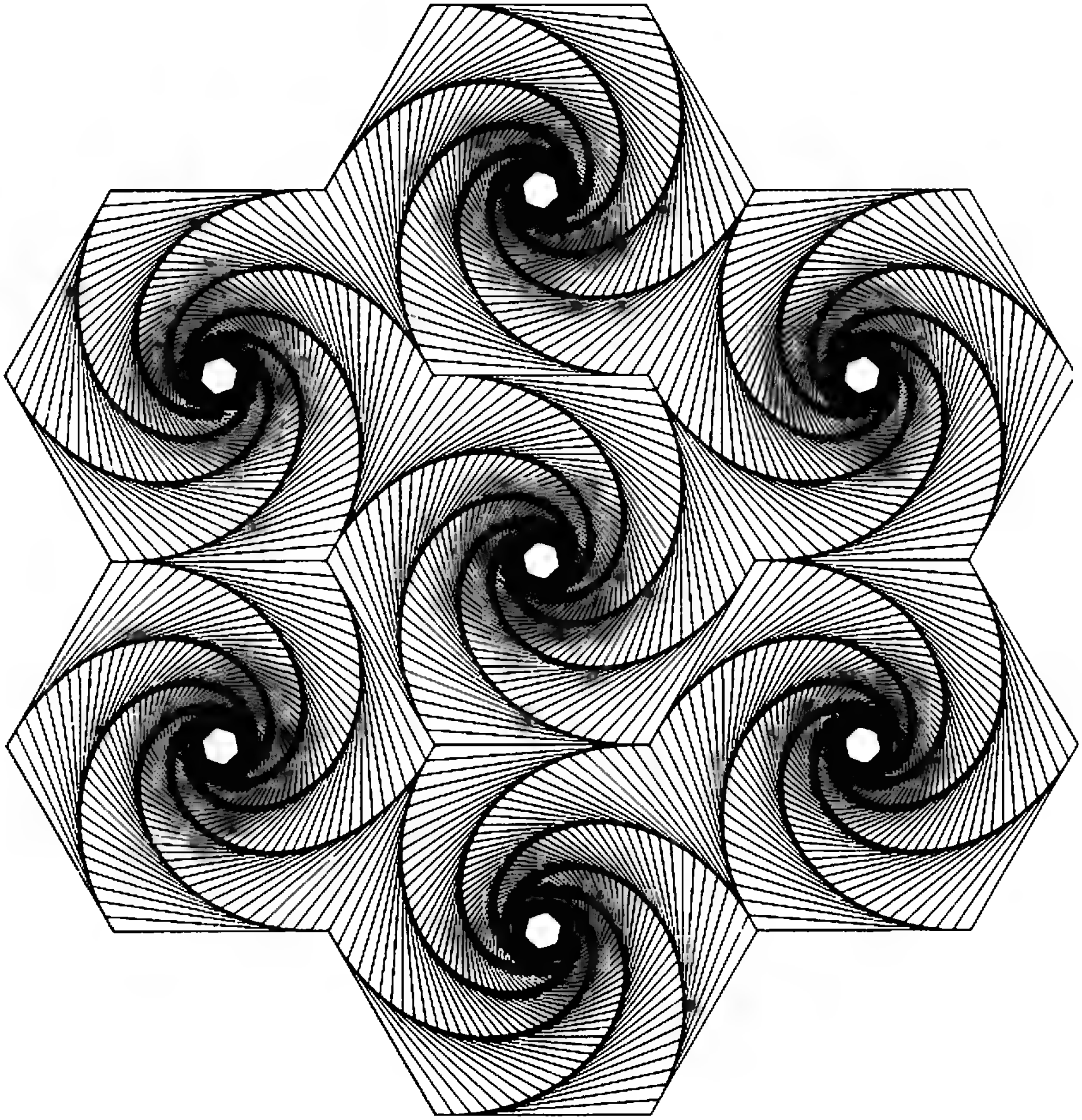
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области



ЧАЙН-НАМБЕР «ВОСЬМОЕ МАРТА»

Заполните «восьмерку» квадратами целых чисел так, чтобы каждый квадрат начинался в клетке с римской цифрой и оканчивался в клетке со следующей цифрой, причем все квадраты были различными.
Слово «чайн-намбер» происходит от английских слов chain («цепочка»), number («число»).

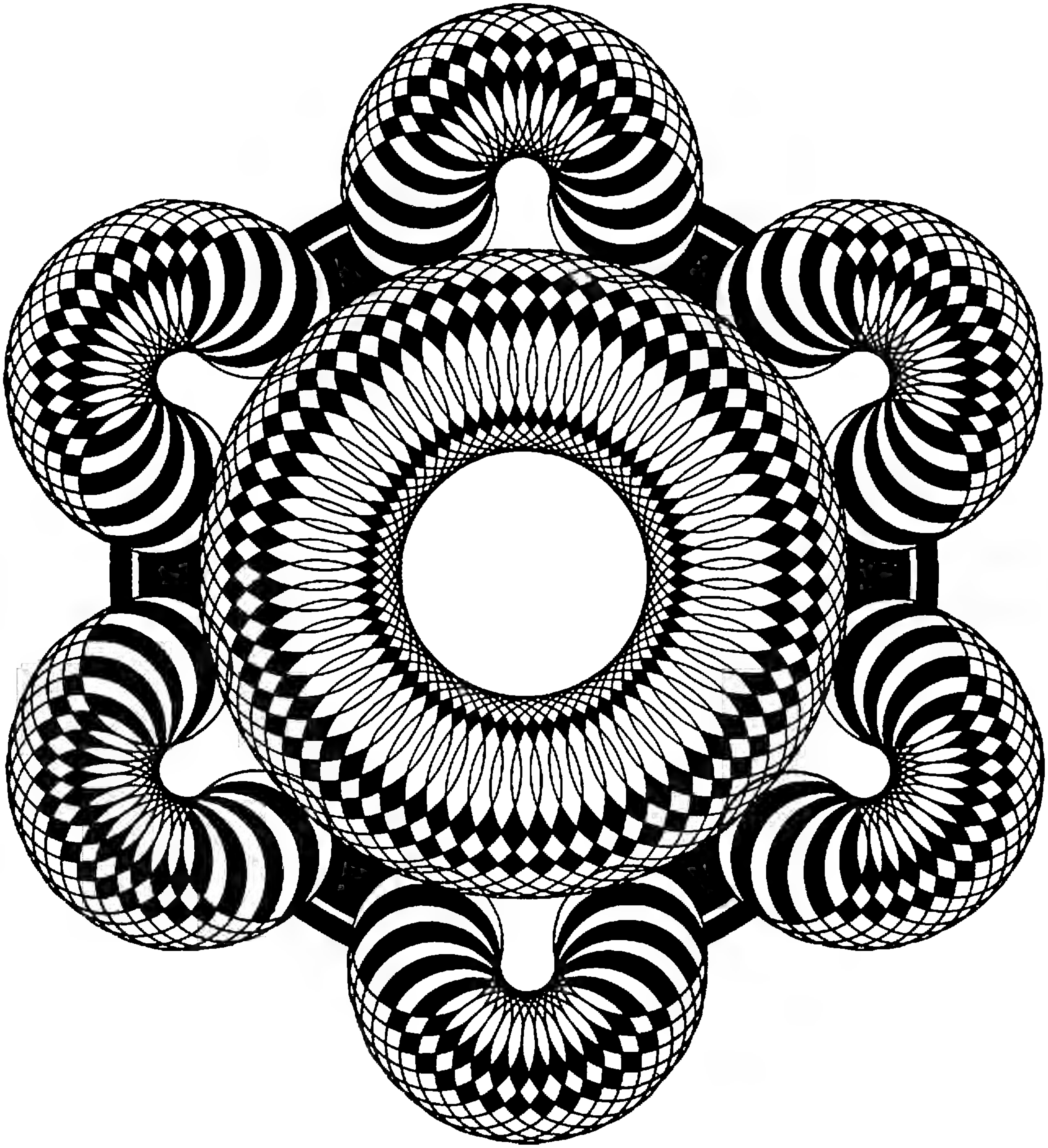
В. Радунский



Этот чертеж выполнен ЭВМ по программе, составленной учащимися Заочной школы программирования. Подробнее об этом можно прочитать на с. 47

Цена 30 коп.
Индекс 70465

На этот раз красивый геометрический орнамент, который мы предлагаем вниманию читателей, не основан ни на какой сложной математической теории. Однако он показывает, какую красоту и какое разнообразие форм можно получить из простейшей геометрической фигуры — окружности.



НОМЕР
4

Основан в 1970 году

Квант

4
1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

---

110 лет со дня рождения В. И. Ленина

2 Великий ученый и мыслитель
6 *М. Барская.* Ленин и школа
10 *С. Вавилов.* Ленин и физика
15 *А. Колмогоров.* Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики

* * *

19 *М. Смолянский.* Умножение ... точек на плоскости

Лаборатория «Кванта»

23 *В. Майер.* Оптические опыты с глазом

Математический кружок

26 *С. Александров.* Измельчающиеся узоры

Задачник «Кванта»

30 Задачи М616—М620; Ф628—Ф632
32 Решения задач М562—М565; Ф573, Ф574, Ф576, Ф577

«Квант» для младших школьников

37 Задачи
38 *Н. Михайлова.* Плоды «просвещения»

Практикум абитуриента

40 *И. Мельник.* Где расположено основание высоты?
44 *Е. Кузнецов.* Фотоаппарат на вступительных экзаменах
48 *С. Кротов, И. Мельников, Л. Михеева, Ю. Нестеренко.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Искусство программирования

54 *Ю. Первин, А. Салтовский.* Память ЭВМ

Информация

59 *А. Виленкин.* XVI лингвистическая олимпиада
61 **Шахматная страничка**
62 **Ответы, указания, решения**
Наша обложка *(26, 43)*
Смесь *(58)*

На первой
странице обложки
вверху изображен
вымпел
с барельефом В. И. Ленина
и Государственным
гербом СССР,
доставленный
на поверхность Венеры.
Внизу
изображен вымпел,
находившийся
на станции
«Луна-12».
Фото В. Германа, Ю. Никерина

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1980

В. И. Ленин произносит речь на Красной площади в день празднования 1-ой годовщины Великой Октябрьской Социалистической революции.

Великий ученый и мыслитель

110 лет отделяют нас от дня рождения Владимира Ильича Ленина — вдохновителя и руководителя поворотного события всемирной истории — Великой Октябрьской социалистической революции, создателя первого государства рабочих и крестьян.

Социализм и коммунизм строятся на научной основе. И в эту науку внес огромный вклад В. И. Ленин. Он глубоко и всесторонне разработал вопрос о роли науки в строительстве социалистического и коммунистического общества.

Ленин уделял огромное внимание развитию молодой советской науки. По его указанию в первые годы Советской власти были созданы многие научные центры, получившие затем всемирную известность. Среди них упомянем созданные в Петрограде Физико-технический, Оптический, Радиевый и Физико-математический институты, Центральный аэрогидродинамический институт в Москве, специальную радиолабораторию в Нижнем Новгороде (Горьком).

Величие гения характеризуется способностью предвидеть будущее развитие событий. Этой способностью Ленин обладал в полной мере. Так, научный анализ развития событий в России в 1917 году позволил Ленину почти с математической точностью определить момент совершения социалистической революции. Его знаменитые слова: «Промедление в восстании смерти подобно» были не просто фразой, а точной формулировкой, результатом глубокого анализа конкретной политической ситуации.

Труды гениальных ученых характеризуются еще и тем, что они с течением времени не только не утрачивают своего значения, а, наоборот, служат основой для дальнейшего развития идей, заложенных в этих трудах. Так было с трудами Ньютона, Максвелла, Эйнштейна. Это в еще большей степени относится к работам Ленина. И хотя нас отделяет от момента его смерти более полувека, вся последующая история нашей Родины, вся последующая мировая история явили бесспорные доказательства бессмертия ленинского учения. Прав был Владимир Маяковский:

«Ленин
и теперь
живее всех живых —
наше знанье,
сила
и оружие.»

Жизнь и деятельность В. И. Ленина служат для всех советских людей ярким примером мужественной борьбы за самые высокие и светлые человеческие идеалы. Его научное наследие является неисчерпаемым источником вдохновляющих идей. Отсюда — живое, неподдельное внимание к каждому событию, связанному с именем Владимира Ильича, естественное желание проникнуть в суть каждого ленинского высказывания.

Читателям «Кванта» особенно интересно и важно познакомиться с некоторыми мыслями В. И. Ленина, касающимися математики и физики, подробнее узнать о фактах его биографии, связанных с этими науками.

Математика и физика пользовались в семье Ульяновых большой любовью. Прежде всего это объяснялось тем, что отец В. И. Ленина — Илья Николаевич Ульянов — учился на физико-математическом факультете Казанского университета и потом долгие годы преподавал математику в гимназии. С уважением и теплотой И. Н. Ульянов вспоминал выдающегося русского математика Николая Ивановича Лобачевского, который во время его учебы был ректором Казанского университета. Лобачевский чутко отнесся к молодому студенту и даже рекомендовал привлечь его к работе на метеорологической станции — делу, по тому времени, сложному и ответственному. По свидетельству Анны Ильиничны Ульяновой-Елизаровой, старшей сестры В. И. Ленина, «почти благоговейное отношение к науке» отличало Илью Николаевича всю жизнь и с детства внушалось всем в семье Ульяновых.

Илья Николаевич Ульянов много времени уделял занятиям с детьми и, в частности, постоянно старался глубже разъяснять им уроки физики и математики, знакомил с астрономическими и физическими приборами, ставил интересные опыты. В доме Ульяновых увлекались составлением и решением остроумных логических задач, математических головоломок, игрой в шахматы, что безусловно способствовало развитию строгости мышления у детей. Большое влияние на Володю Ульянова оказал и его старший брат Александр, который с детства проявлял незаурядные математические способности и учился на естественном отделении физико-математического факультета Петербургского университета.

В гимназии Володя Ульянов учился отлично. Один из его товарищей впоследствии вспоминал: «Мы часто не могли разобраться во всем заданном. Тут на помощь и приходил Владимир Ильич. Он любил заниматься математикой...». Помимо обязательных занятий математикой, Володя Ульянов принимал активное участие в гимназическом математическом кружке, где решал трудные задачи и даже сам их составлял. В июне 1887 года он блестяще сдал выпускные экзамены (в том числе три экзамена по математике) и был награжден — один из всего выпуска — золотой медалью (в 1921 году Ленин передал эту медаль в фонд помощи голодающим).

В воспоминаниях о В. И. Ленине есть многочисленные свидетельства о том, что он проявлял большой интерес к математике. Например, летом 1887 года он встречался и подолгу беседовал с Г. Н. Шебуевым, который читал лекции по математике в Казанском университете. Не однажды Шебуев с увлечением уверял, что Владимиру Ильичу непременно следует поступить на математический факультет, что у него «определенно математический склад ума». Однако, несмотря на свои успехи в математике, В. И. Ленин решил продолжать образование на юридическом факультете. «Теперь такое время; нужно изучать науки права и политическую экономию. Может быть, в другое время я избрал бы другие науки...», — писал он сам.

Избрав путь профессионального революционера, В. И. Ленин прекрасно понимал, что основную теоретическую задачу русских марксистов — углубленный анализ общественного строя России и выявление роли различных классов в революции — можно решить только на твердой основе кропотливого изучения фактов и точного анализа цифр, характеризующих русскую действительность. Поэтому одновременно с углубленным изучением идей марксизма он начал усиленно заниматься статистикой — наукой, использующей математические методы для количественного выражения закономерностей социально-экономических процессов.

В. И. Ленин был крупнейшим представителем экономической и социальной статистики. С его именем связан новый этап в теории и практике экономической статистики, в ее приложении к социологии. Он мастерски умел пользоваться статистическими данными и постоянно подчеркивал необходимость их систематического использования для углубленного исследования социальных явлений. Им был выдвинут целый ряд принципиальных положений о приемах и способах статистической обработки данных, о точности цифрового анализа, о соотношении конкретного и абстрактного в статистике. Количественное описание характеристик массовых социально-экономических явлений, происходящих в обществе, В. И. Ленин всегда рассматривал в неразрывной связи с их качественной сутью. Во всех ленинских работах четко прослеживается мысль о том, что цифры, статистический материал должны наглядно раскрывать реальное положение вещей в экономической и политической жизни, в классовой борьбе, должны служить убедительным доказательством того или иного конкретного вывода.

Ленин впервые ввел в социальную статистику понятие функции распределения, которое лежит в основе физической статистики. Это и позволило ему в работе «Развитие капитализма в России» опровергнуть идею народников об особом пути развития России и научно обосновать утверждение о том, что она, как и многие другие страны, идет по капиталистическому пути. Этим же методом Ленин успешно воспользовался в работе «Империализм как высшая стадия капитализма», где он предсказал неизбежность распада мировой колониальной системы. Это гениальное предвидение осуществляется на наших глазах.

Основополагающие мысли В. И. Ленина по методологическим вопросам статистики не потеряли своего значения и в наше время, хотя математический аппарат статистики сегодня гораздо более развит, чем это было на рубеже XX века. Превосходные образцы критики В. И. Лениным субъективизма, ненаучности, фетишизации чисел в полной мере относятся к тем буржуазным исследователям, которые, прикрываясь пестротой цифр, сознательно извращают действительные факты, формально используют статистические сведения, строят математические модели, игнорирующие связь, причинность и источники изменений в обществе.

Среди огромного числа ленинских произведений нет ни одного, где бы исследовалось конкретное физическое явление. И тем не менее влияние В. И. Ленина на развитие физики трудно переоценить. По существу, Ленин заложил научные основы философии и методологии этой науки в своей знаменитой работе «Материализм и эмпириокритицизм».

В конце XIX — начале XX века в центре внимания естествоиспытателей и философов находилось большое число экспериментальных фактов, не укладывающихся в привычные рамки физических представлений (открытие радиоактивности и рентгеновских лучей, создание теории относительности и открытие вытекающей из этой теории зависимости массы электрона от его скорости). Ряд крупных ученых того времени утверждали, что эти экспериментальные факты отрицают объективность внешнего мира или, по крайней мере, объективность наших знаний об окружающем нас мире и его явлениях. Создавая «Материализм и эмпириокритицизм», Ленин поставил перед собой цель — показать ошибочность подобных взглядов, вскрыть социальные и гносеологические корни физического идеализма, указать верный выход из кризиса физики, продемонстрировать справедливость диалектико-материалистического подхода в физике и математике.

В. И. Ленин видел кризис физики «в отступлении... от прямого решительного и бесповоротного признания объективной ценности» физических теорий. Одну из причин идеализма в физике он усматривал в усилении связи физики (и вообще естествознания) с математикой. Обладая чрезвычайно умозрительным, абстрактным характером, математика создает предпосылки для возможности рассматривать математические абстракции как существующие самостоятельно, в полном отрыве от реальной действительности, независимо от нее. Отсюда и возникло идеалистическое решение основного вопроса философии теми учеными, для которых «то обстоятельство, что эти физики ограничивают свою теорию системой уравнений, есть опровержение материализма; уравнения и все тут, никакой материи, никакой объективной реальности, одни символы... «Материя исчезает», остаются одни уравнения».

И в наши дни, в период бурного процесса математизации знаний, особое значение имеет указание Ленина о том, что вопрос, отделяющий материализм от различных идеалистических направлений, состоит не в том, каким "функциональным соотношением" можно математически описать причинные связи и другие категории различных наук, «...а в том, является ли источником нашего познания этих связей объективная закономерность природы или свойство нашего ума». Человек, несомненно, познает закономерности, существующие в природе объективно, вне нашего сознания.

Философские идеи В. И. Ленина благотворно влияют на всю современную науку, они стали прочным идеологическим фундаментом физики наших дней. Это является еще одним подтверждением гениального предвидения В. И. Ленина, сделанного семьдесят лет тому назад, о том, что «Современная физика лежит в родах. Она рожает диалектический материализм». Сейчас можно утверждать, что роды состоялись именно в таком виде, как это предвидел Ленин.

Советские ученые свято чтут заветы В. И. Ленина. Выступая на торжественном заседании, посвященном 250-летнему юбилею Академии наук СССР, Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев сказал: «Советский ученый, если, разумеется, это подлинно советский ученый, во всей своей научной деятельности исходит из научного мировоззрения марксизма-ленинизма, является активным борцом за дело коммунизма, против любых сил реакции и мракобесия». Нет сомнения, что и те юные читатели нашего журнала, которые со временем придут в большую науку, с честью оправдают высокое звание советского ученого, будут успешно служить своему народу, нашей Родине.

М. Барская

Ленин и школа

«Задачи молодежи вообще и союзов коммунистической молодежи и всяких других организаций в частности можно было бы выразить одним словом «Задача состоит в том, чтобы учиться».» Эти слова, произнесенные В. И. Лениным на III Всероссийском съезде Российского Коммунистического Союза Молодежи 2 октября 1920 года, являются ключевыми для понимания отношения молодого Советского государства во главе с В. И. Лениным к делу образования. Мысли о необходимости образования народных масс были высказаны Владимиром Ильичом еще задолго до победы революции... Конец прошлого века. Повальные аресты и облавы выводят из строя марксистские кружки. А в далекой сибирской ссылке молодой революционер, которому еще нет и тридцати, пишет о невозможности построения нового общества без коренного изменения старой школы, набрасывает план создания новой системы образования.

Прошло время. В стране восторжествовала Великая Октябрьская социалистическая революция. Власть перешла в руки народа. Наступили героические годы борьбы и созидания. На всех фронтах велась ожесточенная борьба с интервентами и белогвардейскими бандами. Повсюду были разруха и голод, не хватало топлива и электроэнергии. Но даже в это трудное для страны время В. И. Ленин считал необходимым, в качестве первоочередной задачи, поднять вопрос о создании новой системы народного образования.

На II Всероссийском съезде советов 26 октября 1917 года было на-

В. И. Ленин и Н. К. Крупская среди крестьян деревни Кашино в день открытия сельской электрической станции.

◀

мечено создание комиссариата просвещения, а 9 ноября того же года был принят Декрет Государственной комиссии по народному образованию. Было создано 15 отделов народного образования. Среди них отделы по введению всеобщей грамотности, внешкольного воспитания, школьной медицины и гигиены, школьного строительства, технических школ и политического образования. Ленин пишет: «Наше дело в области школьной есть та же борьба за свержение буржуазии: мы открыто заявляем, что школа вне жизни, вне политики — это ложь и мещанство»*).

Под руководством Владимира Ильича работники комиссариата просвещения проводили большую работу в области строительства новой школы. Ленин неоднократно указывал на важность и сложность этой работы, всячески старался предостеречь своих соратников от ошибок и перегибов. Владимир Ильич постоянно говорил о необходимости умелого использования культурного наследия старого строя.

В эти годы ленинские положения о школе были организационно закреплены в «Положении об Единой трудовой школе РСФСР» от 30 сентября 1918 года.

Статья 1. *Всем школам Российской Социалистической Федеративной Советской Республики, состоящим в ведении Народного комиссариата по просвещению, присваивается наименование «Единая трудовая школа».*

Статья 2. *Единая школа разделяется на 2 ступени: 1-я — для детей от 8 до 13 лет и 2-я — от 13 до 17 лет.*

Статья 3. *Обучение в школе 1 и 2 ступеней бесплатное.*

Статья 5. *В школе 1 и 2 ступеней вводится совместное обучение.*

Статья 6. *Преподавание в стенах школы какого бы то ни было вероучения и исполнения в школе обрядов культа не допускаются.*

Статья 12. *Основой школьной жизни должен служить производительный труд не как средство оплаты издержек на содержание детей и не только как метод преподавания, но именно как производительный общественно-необходимый.*

Статья 18. *Никакие наказания в школе не допускаются.*

Статья 22. *Все школы как 1, так и 2 ступени должны состоять под регулярным наблюдением врачей.*

Статья 32. *Внутренняя жизнь школы должна строиться на началах полной свободы объединения всех членов коллектива в группы и кружки, преследующие образовательные и воспитательные цели, — например, союзы преподавателей, молодежи и т. п.*

В системе нового школьного образования большое внимание уделялось трудовому воспитанию молодежи. В статье «Перлы народного прожектерства» Ленин пишет о том, что «нельзя себе представить идеала будущего общества без соединения

В. И. Ленин — гимназист.

---

* В. И. Ленин. ПСС, т. 36, с. 77.

Семья Ульяновых. Мария Александровна, Илья Николаевич и их дети: Ольга, Мария, Александр, Дмитрий, Анна и Владимир. 1879 г.

обучения с производственным трудом молодого поколения*)».

Говоря о том вкладе, который внес В. И. Ленин в дело народного образования, нельзя не остановиться на его отношении к народному учителю. Эта тем с детства близка Владимиру Ильичу. Отец В. И. Ленина И. Н. Ульянов более 50 лет своей жизни отдал делу народного образования, и его отношение к народному учителю не могло не сказаться на взглядах Владимира Ильича. В. И. Ленин понимая, что нельзя создать новую школу без завоевания учительства на сторону Советской власти. В ноябре 1917 года был создан Союз учителей-интернационалистов. Ленин одобряя и всячески его поддерживал. На I Всероссийском съезде учителей-интернационалистов он говорил о том, что «задача новой педагогики — связать учительскую деятельность с задачей социалистической организации общества»**).

Еще не раз будет Владимир Ильич обращаться к этому вопросу. «Народный учитель должен у нас быть поставлен на такую высоту, на которой бы никогда не стоял и не стоит и не может стоять в буржуазном обществе. Это — истина, не требующая доказательства. К этому положению дел мы должны идти систематической, неуклонной, настойчивой работой и над его духовным подъемом, и над его всесторонней подготовкой к его действительно высокому званию, и главное, главное и главное, над поднятием его материального положения» — пишет В. И. Ленин в статье «Странички из дневника»*) (январь 1923 года).

Нет вопроса, связанного с народным образованием, который бы не волновал Владимира Ильича. 16 августа 1921 года В. И. Ленин подписывает декрет СНК «О порядке издания учебников». Он заботится о том, чтобы библиотеки страны были снабжены новейшей научной и технической зарубежной литературой.

Для восстановления народного хозяйства необходимо было подготовить знающих специалистов из рабочих и крестьян. Чтобы привлечь молодежь в высшие учебные заведения, нужно было создать новую высшую школу. 2 августа 1918 г.

---

*) В. И. Ленин. ПСС, т. 2, с. 185.

**) В. И. Ленин. ПСС, т. 36, с. 420.

*) В. И. Ленин. ПСС, т. 45, с. 364.

В. И. Ленин подписал декрет «О приеме в высшие учебные заведения РСФСР» и «Постановление СНК о преимущественном приеме в высшие учебные заведения представителей пролетариата и беднейшего крестьянства». Следующим шагом на пути привлечения трудящихся в высшие учебные заведения было «Постановление СНК о рабочих факультетах», принятое 17 сентября 1920 года.

Рабфаки сыграли огромную роль в преобразовании высшей школы, пополнив вузовские аудитории рабочими и крестьянами.

Все меры, принятые для перестройки системы образования, были направлены на то, чтобы воспитать молодых специалистов, которые с большим подъемом примутся за восстановление народного хозяйства и экономики, добьются успехов в социалистической науке, литературе и технике. Выступая на III Всероссийском съезде Российского Коммунистического Союза Молодежи 2 октября 1920 года, В. И. Ленин сказал: «Только преобразуя коренным образом дело учения, организацию и воспитание молодежи, мы сможем достигнуть того, чтобы результатом усилий молодого поколения было бы создание общества, не похожего на старое, то есть коммунистического общества»*).

В. И. Ленин во дворе Кремля. Москва, октябрь 1918 г.

Со дня проведения III съезда Союза Молодежи прошло почти 60 лет, но мысли, высказанные В. И. Лениным по поводу воспитания молодежи, не потеряли своей актуальности и в наши дни. Продолжая дело В. И. Ленина, Советское правительство постоянно проявляет заботу о школьниках и студентах. Школьные классы и аудитории снабжены новейшим оборудованием. С каждым годом увеличивается тираж школьных учебников, которые теперь бесплатно выдаются учащимся. Постоянно проводится большая работа по привлечению в высшие учебные заведения рабочей и крестьянской молодежи. Почти при всех вузах страны организованы подготовительные отделения.

Выступая на XXV съезде КПСС, Л. И. Брежнев сказал: «Очевидна необходимость дальнейшего серьезного совершенствования всей общеобразовательной системы и, в первую очередь, средней школы. В современных условиях, когда объем необходимых для человека знаний резко и быстро возрастает, уже невозможно делать главную ставку на усвоение определенной суммы фактов. Важно прививать умение самостоятельно пополнять свои знания, ориентироваться в стремительном потоке научной и политической информации. Тут нас ждет большая работа. Конечно, работа осмотрительная, вдумчивая, без ненужной ломки или поспешных решений. Что здесь требуется? Видимо, и улучшение подготовки преподавателей, и приведение самих методов обучения в соответствие с требованиями жизни, и обеспечение школы современными учебными пособиями, в том числе наглядными»**).

---

*) В. И. Ленин. ПСС, т. 41, с. 301.

**) Материалы XXV съезда КПСС (М., Политиздат, 1976), с. 77.

С. Вавилов

Ленин и физика

Сопоставление имени В. И. Ленина и физики не случайно и не искусственно. Великий теоретик и практик социализма, Ленин, точно так же как Маркс и Энгельс, не мог пройти мимо физики. Среди прочих естественных наук физика занимает центральное место — положение штаба, получающего сведения о периферии и посылающего свои итоги-директивы обратно на периферию. Абстрактная по существу, но опирающаяся на опыт и наблюдение, физика вследствие своей общности служит естественно-научным основанием одновременно философии и техники. Так было во времена Архимеда, Ньютона, Максвелла, и это совершенно очевидно в новой физике.

Борьба за философию диалектического материализма, продолжавшаяся Лениным, вслед за Марксом и Энгельсом, с неизбежностью должна была развертываться на материале этапов новой физики. С другой стороны, как величайший политический деятель, создавший социалистическое государство, В. И. Ленин необходимо должен был встретиться с физикой как основой техники.

Коренная техническая перестройка страны требовала прежде всего укрепления научного, физического фундамента, и, конечно, не случайно в самом начале революции,

---

Эта статья написана выдающимся советским физиком, президентом Академии наук СССР с 1945 по 1951 год академиком С. И. Вавиловым. Она была опубликована в первом номере журнала «Природа» за 1934 год. Статья перепечатывается с небольшими сокращениями.

Вице-президент Академии наук академик В. А. Стеклов, начальник Военно-медицинской академии В. Н. Тонков, непременный секретарь Академии наук академик С. Ф. Ольденбург и писатель А. М. Горький (слева направо) на приеме у В. И. Ленина 27 января 1921 года.

◄

в момент исключительно тяжелого состояния промышленности, ранее, чем многое другое, были учреждены большие физические научно-исследовательские институты в Москве и Петрограде и при живом участии В. И. Ленина было предпринято широкое физическое обследование Курской магнитной аномалии *).

До сего времени, по-видимому, еще не обработаны документы, конкретно обрисовывающие организующую роль В. И. Ленина в развитии советской физики. Значительно больше известно относительно взглядов Ленина на физику в связи с анализом основ марксистской философии. Книга «Материализм и эмпириокритицизм», опубликованная еще в 1909 году в Москве, на всем своем значительном протяжении касается физики и физиков, а предпоследняя ее часть «Новейшая революция в естествознании и философский идеализм» специально посвящена физике начала XX столетия.

Эпоха опубликования «Материализма и эмпириокритицизма» была исключительно напряженной для физики во всем мире. В эти годы на неожиданных фактах радиоактивности, на явлениях газовых разрядов и на удивительных свойствах света создавалась «новая физика». Строились первые варианты теории атомов, уточнялось понятие об электроне, шли споры о существовании положительного электрона. В это время сформулирован принцип относительности, отпугнувший своей необычностью многих самых смелых, и возникла теория квантов, встреченная в штыки почти со всех сторон, начиная от ее создателя — М. Планка. Это была эпоха фактического крушения классической физики, когда заколыхались ее, казалось, навеки несокрушимые устои — ньютоновская схема абсолютного пространства и времени, постоянство массы и непрерывность действия.

Факт зависимости массы электрона от скорости казался совершенно сокрушительным для «материи» классической физики... Еще несколько лет спустя после опубликования книги Ленина, в 1911 году, в речи на втором менделеевском съезде профессор Н. А. Умов так характеризовал положение дела: «Последующее развитие физики есть процесс против материи, окончившийся ее изгнанием. Но рядом с такой отрицательной деятельностью текла работа реформирования электромагнитной символики: она должна была оказаться способной к изображению свойств материального мира, его атомистического строя, инерции, излучения и поглощения энергии»*).

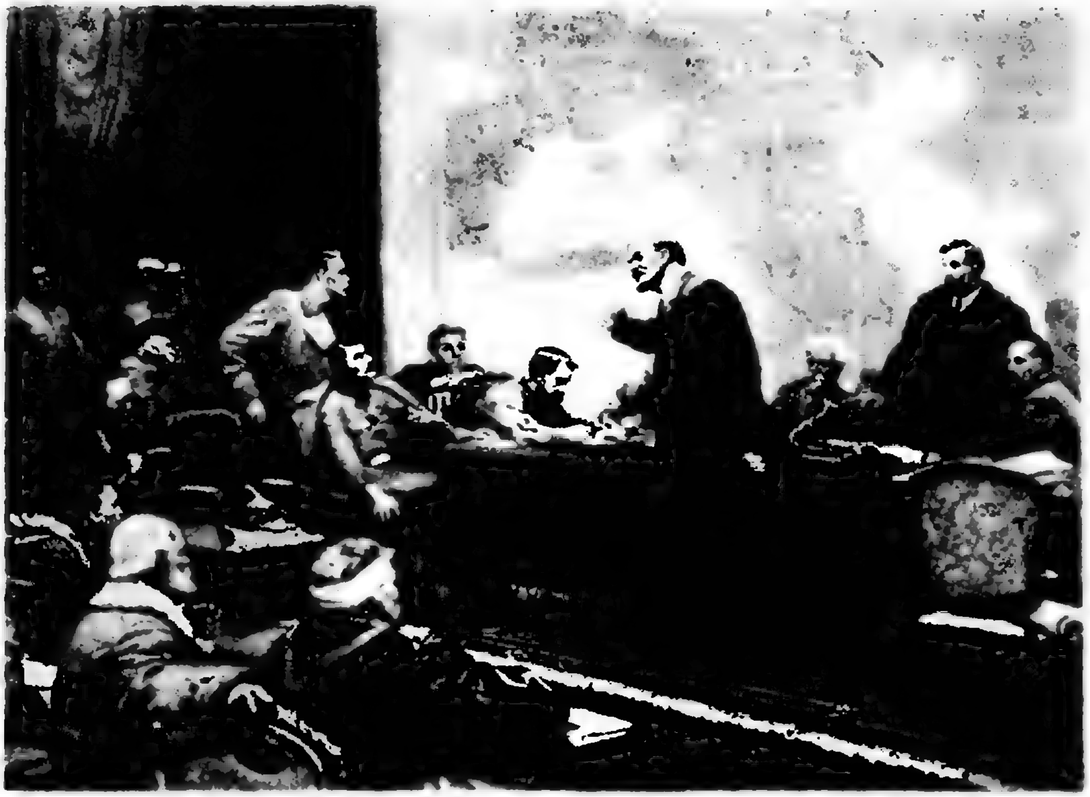
В этой речи встречаются восклицания, на которые несколькими годами раньше были направлены стрелы «Материализма и эмпириокритицизма». «Не пора ли изгнать материю?... Материя исчезла, ее разновидности заменены системами родственных друг другу электрических индивидов, и перед нами рисуется вместо привычного материального глубоко отличный от него мир электромагнитный»**). Нет сомнения, что для Н. А. Умова как физика электромагнитный мир был объективным миром, что под «исчезновением материи» мыслилось только исчезновение ньютоновской постоянной массы. Но не так воспринимались эти лозунги философами и философствующими естествоиспытателями. «Исчезновение материи» считалось экспериментальным доказательством крушения материализма.

---

*) В настоящее время Курская магнитная аномалия стала одним из основных источников железной руды в нашей стране. *(Примечание редакции.)*

*) Н. А. Умов. Сочинения, т. III, с. 408.

**) Там же, с. 403—404.



В. И. Ленин у карты ГОЭЛРО.

Разрушая основные представления классической физики, являющиеся вместе с тем привычными образами вненаучного мышления, развивающимися у каждого человека в результате обыденного опыта, новая физика порывала в нескольких пунктах с возможностью представить себе процессы наглядно, на моделях. По словам великого представителя классической, механической физики В. Томсона: «Истинный смысл вопроса: понимаем ли мы, или мы не понимаем физическое явление? — сводится к следующему: можем ли мы построить собственную механическую модель, или нет?». Новые факты были, однако, и остаются теперь в этом смысле непонятными. При таком положении дела на известной фазе развития возможен единственный путь создания физической теории — математическое описание найденных законов и дальнейшая экстраполяция полученных математических форм вплоть до нового опыта, подтверждающего или отвергающего экстраполяцию. Комбинируя опытные данные и математические формы и опираясь на классическую схему, современный физик строит свою теорию. Но на этом неизбежном пути чрезвычайно легко увлечься по ложному следу.

«Крупный успех естествознания, — пишет Ленин, — приближение к таким однородным и простым элементам материи, законы движения которых допускают математическую обработку, порождает забвение материи математиками. «Материя исчезает», остаются одни уравнения. На новой стадии развития и, якобы, по-новому получается старая кантианская идея: разум предписывает законы природе»*).

Крах механического миросозерцания и громадный рост математической символики увлекали физиков либо в сторону упорного, упрямого непризнания новой физики, безнадежных попыток механического объяснения немеханических явлений, либо к идеализму разных форм и оттенков. Иных путей, если не говорить о стихийных дорогах экспериментаторов, не задумывавшихся о методологических уроках новой физики, не было.

---

*) В. И. Ленин. ПСС, т. 18, с. 326.

Идеалистические течения, сопровождающие развитие новой физики, нашли весьма благодарную почву в России после революционных неудач 1905 года. В пессимистической и реакционной атмосфере буйно зацвели идеализм и мистика всех видов и во всех областях науки, литературы, искусства и общественных движений. Неустойчивость физического мировоззрения после великих открытий начала века получила в России несомненное общественное и даже политическое значение как идеологическое оправдание реакционных настроений.

Резко полемическая книга Ленина имела прежде всего политическую цель борьбы с реакцией. Ее стрелы направлялись главным образом в гущу идеалистических теорий со всевозможными защитными названиями, создававшимися и в среде рабочей партии под влиянием общей реакции и внешним образом опиравшимися на новую физику.

Вместе с этой политической задачей «Материализм и эмпириокритицизм» разрешал методологические затруднения новой физики. Полемизируя с идеалистическими противниками, Ленин одновременно излагает точку зрения диалектического материализма. Ленин пишет, что «Гартман правильно чувствует, что идеализм новой физики — именно *мода*, а не серьезный философский поворот прочь от естественноисторического материализма»*); даже Мах и Авенариус тайком протаскивают материализм посредством словечка «элемент». Недоразумения новой физики в значительной мере происходят от неправильного понимания философского термина «материя». «Единственное свойство» материи, с признанием которого связан философский материализм, есть свойство быть объективной реальностью, существовать вне нашего сознания. «Это определение сразу раскрывает философскую бессмыслицу утверждений об исчезновении материи».

Не являясь физиком, Ленин, естественно, не анализирует конкретных трудностей, связанных с новыми фактами, но развивает поразительно правильную общую точку зрения на положение дела, резко отмежевывающую взгляды диалектического материализма от классического механицизма.

«...Диалектический материализм, — говорится в «Материализме и эмпириокритицизме», — настаивает на приблизительном, относительном характере всякого научного положения о строении материи и свойствах ее, на отсутствии абсолютных граней в природе, на превращении движущейся материи из одного состояния в другое, по-видимому, с нашей точки зрения, непримиримое с ним и т. д. Как ни диковинно с точки зрения «здравого смысла» превращение невесомого эфира в весомую материю и обратно, как ни «странно» отсутствие у электрона всякой иной массы, кроме электромагнитной, как ни необычно ограничение механических законов движения одной только областью явлений природы и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д., — все это только лишнее *подтверждение* диалектического материализма. Новая физика свихнулась в идеализм, главным образом, именно потому, что физики не знали диалектики. Они боролись с метафизическим ...материализмом, с его односторонней «механичностью»*). «Это, конечно, сплошной вздор,— пишет Ленин в другом месте книги,— будто материализм утверждал «меньшую» реальность сознания или обязательно «механическую», а не электромагнитную, не какую-нибудь еще неизмеримо более сложную кар-

---

*) В. И. Ленин ПСС, т 18, с. 304.

*) В. И Ленин. ПСС, т. 18, с. 276—277.

В. И. Ленин на испытании первого советского электроплуга в учебно-опытном хозяйстве Московского высшего зоотехнического института 22 октября 1921 года.

тину мира, как *движущейся материи»* *). Этот ясный и простой анализ устраняет все мистические туманы, грезившиеся на путях развития новой физики. Сегодняшний «физический» идеализм «...означает только то, что одна школа естествоиспытателей в одной отрасли естествознания скатилась к реакционной философии, не сумев прямо и сразу подняться от метафизического материализма к диалектическому материализму. Этот шаг делает и сделает современная физика, но она идет к единственно верному методу и единственно верной философии естествознания не прямо, а зигзагами... Современная физика лежит в родах. Она рожает диалектический материализм» **). Таков окончательный диагноз, поставленный Лениным новой физике.

Книга Ленина, своевременно прочтенная физиками, конечно, освободила бы науку от многих последующих воображаемых «кризисов», от тех панических выводов, примеры которых приводились выше; но «Материализм и эмпириокритицизм» по-настоящему, внимательно и много стали читать только после Октябрьской революции, и теперь нет надобности подробно излагать книгу, по которой вся Советская страна, в том числе все советские физики, учится диалектическому материализму.

Не утратив для нас и сейчас своего политического значения, «Материализм и эмпириокритицизм» по-прежнему весьма актуален для новой фазы развития физики. Диалектический ход ее стремительного роста, предсказанный Лениным, оправдался с потрясающей убедительностью, и снова, как и прежде, «непримиримость» новых фактов с привычным шаблоном, противоречие хотя и несколько усовершенствовавшемуся «здравому смыслу» загоняет нередко физиков в болото идеализма... Дорога диалектического материализма доступна далеко не всем. О ней знают очень многие, но по ней еще надо научиться ходить, ленинский метод должен быть применен к конкретной работе...

---

*) В. И. Ленин. ПСС, т. 18, с. 296.

**) Там же, с. 331–332.

А. Колмогоров

Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики

Владимиру Ильичу Ленину принадлежат слова, в которых выражено первейшее требование к настоящему ученому: «...без солидного философского обоснования никакие естественные науки, никакой материализм не может выдержать борьбы против натиска буржуазных идей и восстановления буржуазного миросозерцания. Чтобы выдержать эту борьбу и провести ее до конца с полным успехом, естественник должен быть современным материалистом, сознательным сторонником того материализма, который представлен Марксом, то есть должен быть диалектическим материалистом». Эти слова в полной мере относятся и к юным читателям «Кванта», любителям физики и математики: их задача состоит не только в том, чтобы накапливать конкретные научные факты и знания, но и в том, чтобы воспитывать в себе диалектико-материалистическое мировоззрение. Вопросы, входящие в школьные курсы математики и физики, дают достаточно много возможностей для того, чтобы на элементарном уровне познакомиться с материалистическим пониманием научных проблем, с элементами диалектического мышления.

О некоторых из этих вопросов рассказывается в докладе академика А. Н. Колмогорова, прочитанном в 1977 году на IV пленуме Ученого методического совета Министерства просвещения СССР. Ниже приводится (с незначительными сокращениями) текст этого доклада. Хотя доклад не предназначался для школьников, мы уверены, что он заинтересует и их.

Обсуждая диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики, я хочу сделать ударение на более трудной стороне дела: на знакомстве с элементами диалектического мышления. К обсуждению этой темы обычно относятся с некоторым недоверием, так как часто разговор о диалектике остается очень поверхностным.

Например, ссылаются на то, что по словам Энгельса, с появлением в математике переменных величин в математику вошли движение и диалектика. Отсюда делают вывод, что раннее введение переменных в современных учебниках является достижением в смысле внедрения диалектики в школьную математику. При этом забывают о том, что переменная в этих учебниках трактуется просто как буква, вместо которой можно поставить наименование любого элемента некоторого множества. Диалектика здесь кроется глубже — за этим формальным определением. Ее понимание требует развернутого исторического подхода к делу.

Я хочу на конкретных примерах проиллюстрировать свою мысль.

1. Вы все хорошо знаете дифференциальное уравнение показательного роста или убывания («Алгебра и начала анализа 10», п. 110)

$$f'(t)=kf(t),$$

в краткой записи

$$y'=ky.$$

В качестве первого примера в учебнике приводится радиоактивный распад вещества: $f(t)$ обозначает количество распадающегося вещества, сохранившего к моменту времени t. Здесь коэффициент k отрицателен. В виде второго примера с положительным k рассмотрен рост населения страны на 2% в год. Вот этот второй пример и вызывает у многих недоумение или даже резкий протест. Как же, говорят ревнители математической строгости, дифференцировать функцию, принимающую только целые значения! Возмущение сменяется замешательством после напоминания, что в случае радиоактивного распада речь идет тоже о целом числе атомов, сохранившихся к моменту времени t.

Между тем это хороший повод для того, чтобы подчеркнуть: математическая модель явления, как правило, это явление схематизирует. Поэтому она дает правильные предсказания лишь в некоторых пределах (в нашем случае лишь при большой численности населения и для не слишком малых промежутков времени). За этими пределами математическая модель теряет реальный смысл и при ее бездумном применении приводит к ошибочным или бессмысленным результатам.

2. Общеизвестны ставшие классическими примеры: ньютоновская механика при обычных земных скоростях объективно правильно отражает реальные явления, но при скоростях, сравнимых со скоростью света, перестает быть применимой — приводит к противоречию с опытом. За пределами годности ньютоновской механики действует уже другая — механика теории относительности Эйнштейна. Но крайне важно проиллюстрировать и на более простых примерах этот диалектический процесс перехода от одних моделей, объективно правильных в некоторых пределах, к новым. Разберу подробно один пример из механики, который я разбирал со школьниками в летней школе в Пущино в этом году.

В курсе физики для VIII класса правильно говорится, что во многих задачах достаточно маленькое материальное тело можно считать «материальной точкой» — пренебрегать его размерами. Таким является подброшенный вверх мяч, двигающийся по закону

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Его скорость меняется по закону

$$v = v_0 - gt,$$

а ускорение постоянно

$$a = -g.$$

Координата z и скорость v меняются непрерывно. В учебнике говорится, что так и должно быть в общем случае движения материальной точки. Действующие на тело силы всегда конечны. Поэтому конечно и ускорение, откуда уже вытекает непрерывность зависимости от времени скорости и координаты z. Но на практике мяч, ударившись об пол, сразу меняет направление движения и подпрыгивает вверх. Так как мяч не совершенно упругий, при втором прыжке его начальная скорость будет

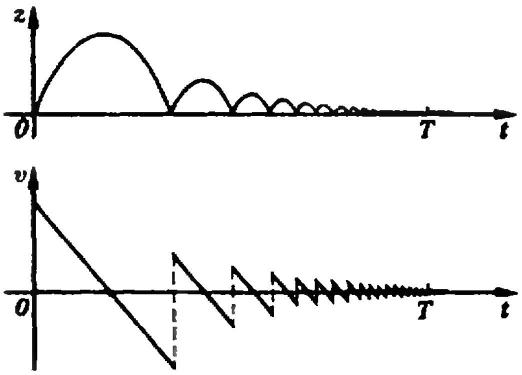
$$v_1 = kv_0,$$

где коэффициент k меньше единицы. Приняв, что коэффициент k постоянен при последовательных прыжках, можно рассчитать весь дальнейший ход процесса. Школьникам было предложено проделать расчеты и нарисовать графики зависимости z, v и a от времени при различных коэффициентах k. С этим заданием они справились самостоятельно, хотя результаты их очень удивили и вызвали много споров.

Оказалось, что последовательные моменты ударов об пол t_n при растущем n сходятся к конечному пределу T: за промежуток времени $[0;\ T]$ происходит бесконечная последовательность подскоков все уменьшающейся высоты.

Конечно, эта модель идеализирована; для подскоков на высоту того же порядка, что и диаметр мяча, она не применима. Но модель вполне реалистична. Быстрое учащение моментов удара об пол и полная остановка мяча через время T наблюдаются достаточно явственно даже просто «на слух». На рисунке представлены схематические графики зависимости z и v от времени t.

В момент удара t_n скорость меняется скачком от отрицательного значения $-v_{n-1}$ к значению $v_n = kv_{n-1}$. Ускорение все время равно $-g$, за исключением моментов удара t_n. В эти моменты мяч получает мгновенные импульсы конечной величины.



Обращение к мгновенным импульсам, сразу меняющим скорость, имеет длительную традицию. Все старые учебники физики содержат трактованные таким образом задачи о столкновении шаров и ударах бильярдных шаров о стенки. При желании говорить об ускорениях в моменты удара, приходится далеко выходить за рамки школьного курса и обращаться к так называемым «дельта-функциям».

После обсуждения мы со школьниками сделали вывод, что вообще говоря правильный тезис о конечности сил (и вытекающей из нее непрерывности зависимости скорости от времени) пришел в противоречие с рассмотрением нашего мяча как материальной точки. Но практически правильным оказался не переход к рассмотрению мяча как конечного деформируемого тела, а введение в модель мгновенных импульсов.

С точки зрения математики задача интересна тем, что дает пример употребления в реальной задаче разрывных функций: для скорости $v(t)$ точки разрыва t_n сгущаются в точке T, где функция $v(t)$ непрерывна. Функция $z(t)$ в точке T оказывается даже дифференцируемой с производной z', равной нулю.

Последние замечания интересны уже только для математика. Здесь мы исследуем построенную модель за пределами ее применимости. Это, однако, типично для подхода чистого математика.

Чтобы до конца разобраться в этом примере, предлагаю решить следующую задачу.

Задача. *Произвести полный расчет движения мяча из примера 2. Найти зависимость T от v_0 и k. Начертить графики $z(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ при различных k (например, 0,9, 0,5 и 0,2). Исследовать эти функции на непрерывность и дифференцируемость.*

Я выше употребил выражения «с точки зрения математика», «с точки зрения физика». Конечно, и математики, и физики исследуют конкретные явления природы, которые безусловно едины в своей основе. Но подход математика и физика к изучению явления различен. Это отличие хорошо видно на следующем примере. При изучении числа π — отношения длины окружности к ее диаметру — в младших классах мы, по существу, следуем подходу к делу физика: измеряем диаметр блюдца и его периметр, после деления получаем приблизительно $\pi \approx 3{,}14$. Современная наука и техника требуют знания этого отношения с много большей точностью.

Но на уроках математики учащиеся знакомятся с приемами вычисления π с любой точностью. Им рассказывают, что математики при помощи вычислительных машин нашли 2000 десятичных знаков числа π. Здесь уместно спросить учащихся, какой реальный смысл они связывают с этими достижениями математиков. Являются ли они надежным предсказанием результата каких-то будущих реальных измерений? Это элементарный подход к проблематике, которая возникает перед учащимися при обсуждении смысла неевклидовых геометрий в математике и вопроса о геометрии Вселенной в целом.

Суть различия между подходами к делу математика и физика популярно можно объяснить так. И тот и другой отправляются от некоторого запаса наблюдений, создают схематические модели реальных явлений. Математик, взявшись за изучение такой модели, изучает последовательно все следствия из положенных в основу модели допущений, хотя бы они далеко выходили за рамки исходных наблюдательных данных. Физик проверяет соответствие модели новым наблюдениям и при обнаружении расхождений переключается на создание более гибкой модели, содержащей первоначальную лишь в качестве первого приближения. Раскрыть все пути плодотворного сотрудничества математиков и физиков и является увлекательной задачей межпредметных связей. Когда-то мне случалось преподавать в одном и том же классе математику и физику. Но я при этом любил подчеркнуто делать различие, говоря, что сейчас я буду рассуждать как математик, а в другой раз выступать как убежденный физик.

3. Общеизвестно, что воспитание научного материалистического мировоззрения невозможно без ознакомления учащихся с историей науки и понимания учащимися основных этапов развития науки. Именно из этих соображений в новую программу по математике введено понятие о простейших дифференциальных уравнениях. Изучаются детально лишь три уравнения: равномерно-ускоренного движения

$$y'' = a,$$

гармонических колебаний

$$y'' = -k^2 y$$

и показательного роста или убывания

$$y' = ky.$$

Напомню, что для Ньютона существовали две основные задачи анализа: 1) нахождение по функциям их производных, 2) нахождение по соотношениям между функциями и их производными самих этих функций. Вторая задача и есть задача интегрирования дифференциальных уравнений. Задачу нахождения первообразных Ньютон рассматривал как простой частный случай.

С понятием дифференциального уравнения неразрывно связана вся идеология математического естествознания от Ньютона до Лапласа. Общий принцип детерминизма Лаплас излагал, исходя из того, что основные законы природы выражаются в форме дифференциальных уравнений, а их интегрирование позволяет по-настоящему предсказывать будущее. Интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений, как известно, представляет собой грандиозную задачу, решаемую лишь численными методами. Но ясное представление о задаче дать нетрудно. Без достаточно конкретного понимания этого этапа развития математического естествознания невозможно и понимание дальнейших этапов, появления статистической физики, квантовой физики.

4. Со времени Платона существование чистой математики с ее абсолютно достоверными выводами, выходящими за пределы эмпирической проверки, которая всегда лишь приближенна, использовалось как аргумент в пользу идеализма. Мы обязаны показать вполне конкретное, материальное происхождение математических предложений. В частности, не следовать за старыми учебниками, выдававшими аксиомы геометрии за «истины, не требующие доказательства в силу своей очевидности».

В учебниках геометрии VI и VII классов говорится об аксиомах лишь в историческом плане. Лишь в VIII классе обсуждается задача выделения небольшого числа предложений, достаточных для вывода всех остальных, то есть выбора системы аксиом. Как известно, вне такой постановки вопроса подчеркивание различия между «аксиомами» и «теоремами» лишено ясного смысла.

Отметим далее, что в вопросе взаимоотношений аксиоматической теории и действительности, математической модели и реального мира проявляется глубокая диалектическая взаимосвязь теории и практики. Слово «модель» получило широкое распространение в популярной литературе и вполне доступно учащимся. Следует подчеркнуть, что, создавая схематизированные модели действительности, мы получаем вполне реальное знание о самой действительности. Лишь за пределами своей применимости модель теряет реальное значение и должна быть заменена новой, более совершенной.

М. Смолянский

Умножение… точек на плоскости

«Умножать **точки** — разве это возможно? — спросит удивленный читатель. — Ведь умножают (и складывают) **числа**, а не точки!» Такому читателю легко возразить: во-первых, действительные числа часто рассматривают как точки на числовой оси, поэтому в этом смысле можно умножить точки; во-вторых, в современной математике умножают не то что точки, а почти все что угодно: функции, матрицы, перемещения…

В этой статье мы постараемся показать читателю, как и зачем нужно умножать точки на плоскости. На этом пути мы получим *геометрическую модель комплексных чисел* и изучим некоторые их свойства. А кроме того, мы покажем, что разумно умножать точки в пространстве уже нельзя.

Прежде чем научиться умножать точки на плоскости, будет полезно посмотреть…

Как умножаются точки на прямой

Чтобы сложить две точки на прямой, достаточно фиксировать начало O: тогда точки можно складывать как векторы. Если зафиксировать точку A и прибавить ее к каждой точке X на прямой, получим отображение $X \to X+A$ прямой на себя. Ясно, что это будет *параллельный перенос всей прямой на вектор* $\overrightarrow{OA}$ (рис. 1а). Для умножения нужно еще фиксировать единицу I: тогда точки приобретают координаты, и с их помощью точки можно перемножать (как числа); при этом, как легко видеть, *умножение всех точек прямой на фиксированную точку A — это гомотетия с центром O, переводящая точку I в точку A* (рис. 1, б).

Определим умножение на плоскости

Прежде всего выясним, какое умножение мы хотим определить на *нашей плоскости, в которой уже* выбрана числовая ось Ox с единицей I (рис. 2). (Заметим, что сложение точек уже определено: наличие начала O позволяет складывать точки как векторы, по правилу параллелограмма.) Мы, конечно, хотим, чтобы новое умножение совпадало с тем, которое уже есть на оси Ox (мы будем называть эту ось *действительной*). Поэтому мы потребуем:

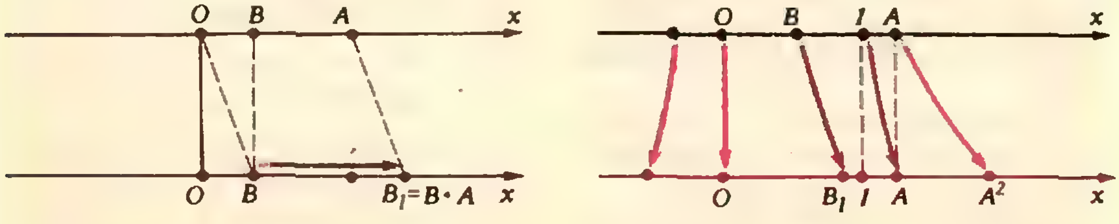
I. *Умножение на любую точку A действительной оси Ox есть гомотетия с центром O и коэффициентом x, где x — абсцисса точки A.*

Но этого, конечно, мало. Нам еще нужно, чтобы наше умножение обладало обычными свойствами арифметических операций. Именно:

II. *Умножение ассоциативно, дистрибутивно относительно сложения, и определено деление на любую точку A, отличную от O.*

Запишем эти свойства более подробно:

IIa. Ассоциативность. Для любых точек A, B, C: $A(BC)=A(BC)$.



а

б

Рис. 1.

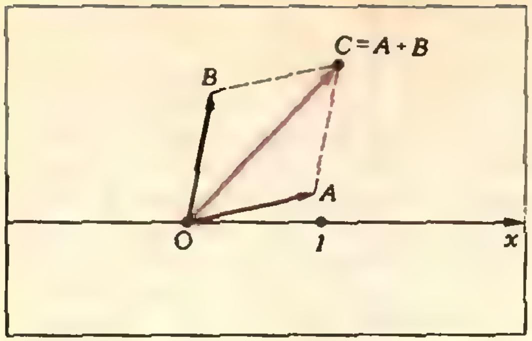


Рис. 2.

IIб. Дистрибутивность. Для любых точек A, B, C

$$A(B+C)=AB+AC,$$
$$(B+C)A=BA+CA.$$

IIв. Деление (существование обратного). Для любой (отличной от O) точки A существует точка A^{-1} такая, что

$$A^{-1}A=AA^{-1}=1.$$

Итак, нам нужно построить операцию умножения на плоскости, удовлетворяющую условиям I и II. Стоп: пока не читайте дальше, а подумайте сначала, как это сделать.

Ну как, придумали? Конечно же, проще всего определить умножение «так же», как для точек на действительной оси. Именно, *умножение на точку A — это подобие плоскости, переводящее точку 1 в точку A, оставляющее на месте точку O и сохраняющее ориентацию.* Наглядно можно себе представить, что мы поворачиваем плоскость около начала так, чтобы луч $[O1)$ совпал с лучом $[OA)$, а затем делаем гомотетию, переводящую точку 1 в точку A. Ясно, что для такого умножения выполняется условие I.

Упражнение 1. *Докажите, что выполнено также* II *и, более того, умножение коммутативно.*

Прежде чем читать дальше, разберите, как устроено умножение на конкретные точки, например, $I(0,1)$, $J(-1,0)$, $C(1,1)$.

Естественно спросить, является ли введенное нами умножение единственным, обладающим свойствами I и II.

Упражнение 2*. *Докажите, что такое умножение не единственное.*

Если это упражнение не будет получаться, то советуем вернуться к нему после прочтения дальнейшего. В следующем же разделе мы выясним...

Можно ли определить умножение в пространстве?

Как и плоскость, наше пространство снабжено числовой осью Ox с единицей 1; мы будем искать умножение, удовлетворяющее тем же условиям, что и в предыдущем разделе, то есть отвечать на такой вопрос: *можно ли в пространстве ввести умножение, удовлетворяющие условиям* I *и* II?

Окрыленные предыдущими успехами, вы скажете: конечно, можно, притом так же, как раньше: умножение на точку A — это подобие пространства, переводящее 1 в A и O в O. Но тут получится небольшая загвоздка:

Упражнение 3. *Покажите, что при A, не лежащей на действительной оси, существует бесконечно много таких подобий.*

Какое из них брать? Да возьмем любое, скажет оптимист. На это мы ему возразим, что вряд ли из этого выйдет что-либо путное: ведь умножения на разные точки должны быть согласованы (так, чтобы выполнялось условие II). Как их согласовать?

Не пробуйте — не получится. Дело в том, что *умножения в пространстве со свойствами* I *и* II *не существует!* Мы докажем это от противного.

Допустим, нам удалось определить некоторое умножение. Возьмем произвольную точку X вне оси Ox и рассмотрим ее степени X^2 и X^3 (то есть точки $X\cdot X$ и $(X\cdot X)\cdot X$).

В силу одной из аксиом геометрии, предложенных Г. Вейлем («Геометрия 9—10», с. 234), для любых четырех векторов пространства $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ можно найти такие действительные числа k, l, m, n, не все равные нулю, что выполняется равенство

$$k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}+n\vec{d}=\vec{0}.$$

Применим этот факт к четырем векторам, соединяющим точку O с четырьмя точками 1, X, X^2, X^3; тогда существуют действительные числа (в нашей терминологии —

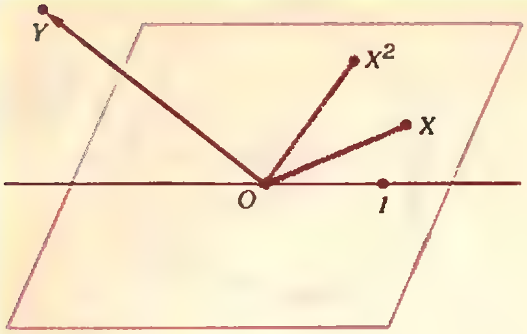


Рис. 3.

точки действительной оси) A, B, C, D такие, что выполняется равенство:

$$A+BX+CX^2+DX^3=0 \qquad (1)$$

Упражнение 4. *Объясните, почему $A\cdot 1=A$.*

Теперь нам потребуется следующий факт:

Упражнение 5*. *Любое уравнение третьей степени имеет действительный корень.*

(Если вам трудно решить это упражнение, посмотрите «Квант», 1980, № 2, с. 20.)

Обозначим этот корень (точку на действительной оси) через X_0; тогда для некоторых чисел (точек на действительной оси) C', B'

$$(X-X_0)(DX^2+C'X+B')=$$
$$=A+BX+CX^2+DX^3.$$

Так как произведение ненулевых сомножителей не может дать нуль (это следует из условий IIа, IIв: если $Q\neq 0$, $P\neq 0$ и $P\cdot Q=0$, то $0=0\cdot Q^{-1}=P\cdot Q\cdot Q^{-1}=P\cdot 1=P\neq 0$), одна из этих скобок равна нулю. Так как X — не «действительная» точка, $D\neq 0$ и точки 0, 1, X и X^2 лежат в одной плоскости. Рассмотрим теперь точку Y, не лежащую в этой плоскости (рис. 3).

Рассмотрим четыре точки 1, X, Y, YX, лежащие в пространстве; еще раз применяя (ту же) аксиому, можно подобрать такие точки B_1, B_2, B_3, B_4 на действительной оси, не все равные нулю, что

$$B_1+B_2X+B_3Y+B_4YX=0.$$

Иначе это можно записать так:

$$(B_1+B_2X)+Y(B_3+B_4X)=0. \quad (2)$$

Заметим, что в плоскости, содержащей 0, 1, X, есть точка Y_0, удовлетворяющая уравнению (2).

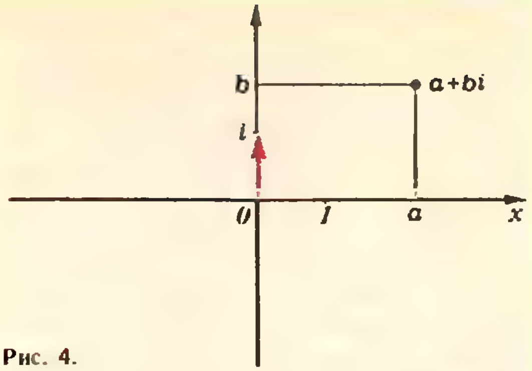


Рис. 4.

Упражнение 6. *Запишите ее в виде C_1+C_2X и найдите C_1 и C_2, воспользовавшись уравнением $DX^2+C'X+B'=0$.*

Но тогда $(Y-Y_0)(B_3+B_4X)=0$, откуда $Y=Y_0$, то есть точка Y лежит в той плоскости, вне которой она была выбрана. Противоречие. Нет нужного нам умножения в пространстве!

Для тех, кто знает, что такое четырехмерное пространство, отметим, что в нем ввести умножение (удовлетворяющее условиям I и II) можно, но это умножение не будет коммутативным. Это не просто, но попробуйте это сделать!

Вернемся теперь на плоскость. Что же мы там получили?

Точки как комплексные числа

Будем считать, что действительная прямая горизонтальна, и рассмотрим вектор единичной длины, торчащий вверх (рис. 4). Обозначим его через i. Легко видеть, что $i^2=-1$. Итак, для плоскости разрешимо уравнение $x^2+1=0$; расширив действительную прямую до плоскости, мы получили возможность решать уравнение, которое для прямой не разрешимо.

Любую точку плоскости можно записать в виде $a+bi$, где a и b — действительные точки; сложение и умножение точек, записанных таким образом, задается формулами:

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=$$
$$=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2),$$
$$(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)=$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+b_1a_2).$$

Упражнение 7. *Выведите эти формулы из геометрических определений.*

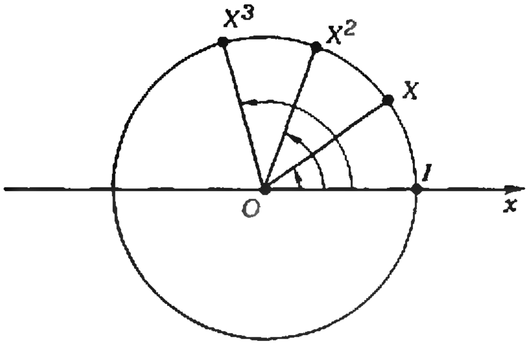


Рис. 5.

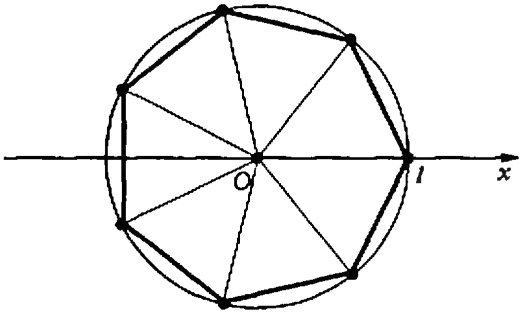


Рис. 6.

Эти формулы показывают, что наши точки, их сложение и умножение — геометрическая модель *комплексных чисел* *). Легко получить такой замечательный факт: *любое уравнение $AX^2+BX+C=0$ (где A, B, C — точки плоскости и $A\neq 0$) разрешимо* — на плоскости существует точка, обращающая его в тождество. На самом деле на плоскости разрешимо любое алгебраическое уравнение (см. «Квант», 1980, № 2, с. 17).

Упражнение 8. *Напишите формулу для решения квадратных уравнений на плоскости.*

Формулы для корней *n*-й степени

Как вы знаете, для действительных чисел, а значит и для действительной прямой, уравнение $X^n=A$ при $A\neq 0$ и четных n не всегда разрешимо. Причем оно либо неразрешимо, либо разрешимо двузначно. (Например, 1 и −1 в квадрате дают единицу.) Для плоскости ситуация намного изящней: *для каждой отличной от нуля точки A у уравнения $X^n=A$, n — натуральное число, существует ровно n корней.*

Для того чтобы доказать это, научимся сперва возводить в степени точки, лежащие на окружности Г единичного радиуса с центром в нуле (рис. 5). Эта окружность обладает таким замечательным свойством: *произведение двух точек из Г — вновь точка окружности* Г. В самом деле, умножение плоскости на точку этой окружности — просто поворот с центром в нуле. Поскольку при поворотах единичная окружность, как и все другие окружности с центром в нуле, переходит в себя, наше утверждение справедливо. Заодно мы получили новый способ записи поворота — как умножения на соответствующую точку.

Теперь ясно, что такое X^n для $X\in\Gamma$. Умножение на X^n — это композиция n поворотов на угол, соответствующий точке X, поэтому точке X^n соответствует угол в n раз больший угла XOI. Итак, X^n — это точка Г, для которой

$$X^n\widehat{O}I=n\cdot X\widehat{O}I.$$

С учетом знака угла точка X^n определяется этой формулой однозначно.

Но теперь понятно и как отыскать корень уравнения $X^n=A$, если $A\in\Gamma$: это такая точка $X\in\Gamma$, что

$$X\widehat{O}I=\frac{1}{n}A\widehat{O}I.$$

Ну, а где же обещанные n значений? Оказывается, они спрятаны в этой формуле. Действительно, мы можем определять величину угла AOI с точностью до числа радиан, кратных 2π: углам $A\widehat{O}I$, $A\widehat{O}I+2\pi$, $A\widehat{O}I+4\pi$, ..., вообще $A\widehat{O}I+2\pi k$, где k — целое, соответствует одна и та же точка. А при определении X для разных k получатся разные точки. Легко видеть, что получится как раз n разных точек, отвечающих углам величины $\frac{1}{n}A\widehat{O}I+2\pi\frac{k}{n}$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$). На рисунке 6 изображены корни седьмой степени из единицы. Видно, что они образуют вершины правильного семиугольника.

(Окончание см. на с. 29)

---

*) См. «Квант», 1980, № 2, с. 17.

В. Майер

Оптические опыты с глазом

Экспериментальное исследование

После проведения модельных опытов и их тщательного анализа (см. «Квант» № 3, с. 19) можно приступать к экспериментам непосредственно с глазом.

1. Зажгите настольную лампу с матовым колпаком (или какой-нибудь другой протяженный и довольно резко очерченный источник света) и поставьте ее на расстоянии около метра от себя. Перед глазом расположите небольшое плоское зеркало так, чтобы оно не перекрывало прямых лучей, падающих от лампы на глаз. В зеркале вы увидите изображение лампы на зрачке глаза.

Ясно, что это изображение создано отраженными от глаза лучами. Но почему оно одно? Ведь модельные опыты показали, что должно быть четыре изображения!

Сравним между собой яркости всех возможных изображений. Для этого в формулу для коэффициента отражения света k подставим конкретные значения показателей преломления роговицы, водянистой жидкости, хрусталика и стекловидного тела. Получим, что от передней поверхности роговицы отражается 2,5%, от задней поверхности роговицы — 0,02%, а от передней и задней поверхностей хрусталика — по 0,03% падающего на глаз светового потока. Это означает, что яркость первого изображения приблизительно в сто раз больше яркости остальных изображений. Вот почему в опыте видно только одно изображение — полученное отражением света от передней поверхности роговицы.

Теперь оцените радиус кривизны передней поверхности роговицы. Вплотную к глазу приставьте линейку (как показано на рисунке 1) и вместе с линейкой и зеркалом приближайтесь к лампе (или удаляйтесь от нее) до тех пор, пока ширина l_1 изображения лампы не станет равной, например, 1 мм. Измерьте расстояние d между глазом и лампой и поперечный размер l лампы. По формуле для увеличения предмета $\Gamma = \frac{l_1}{l} = \frac{R}{2d}$ вычислите радиус кривизны R передней поверхности роговицы.

В одном из наших опытов измерения дали следующее: $l = 120$ мм, $l_1 = 1$ мм, $d = 450$ мм; отсюда радиус кривизны

$$R = \frac{2dl_1}{l} = 7{,}5 \text{ мм}.$$

2. В затемненной комнате на расстоянии около полуметра от себя посадите партнера и попросите его, не отрываясь, смотреть, например левым глазом, на какой-нибудь предмет, находящийся на расстоянии нескольких метров за вами. Сбоку от его глаза на расстоянии 10—20 см поместите лампочку для карманного фонаря и зажгите ее. Своим правым глазом вы сразу увидите маленькое довольно яркое изображение нити лампочки на зрачке глаза партнера.

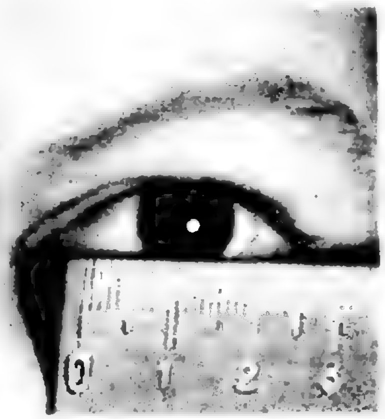


Рис. 1.

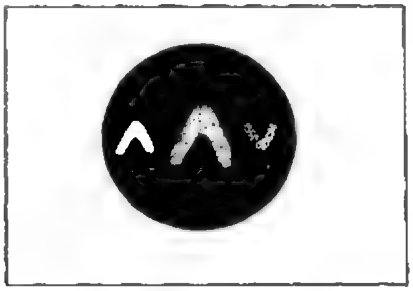


Рис. 2.

Перемещайте лампочку вверх и вниз, вправо и влево (при этом ваш партнер должен непрерывно смотреть на удаленный предмет, а не водить глазами вслед за лампочкой). При внимательном наблюдении вы заметите в зрачке еще два, правда гораздо более слабых, изображения: большее и меньшее по сравнению с первым.

На рисунке 2 схематически изображены зрачок глаза и все три изображения нити лампочки: первые два — прямые, а третье — перевернутое.

Обратите внимание, что при движении лампочки второе изображение перемещается в том же направлении, что и первое, а третье — в противоположном направлении.

Сопоставьте результат этого опыта с результатами модельных экспериментов. Очевидно, что первое — прямое и самое яркое — изображение создается передней поверхностью роговицы (как и в предыдущем опыте). Третье изображение (перевернутое) может быть создано только вогнутым зеркалом, то есть задней поверхностью хрусталика. Второе изображение (прямое, как и первое) создается либо задней поверхностью роговицы, либо передней поверхностью хрусталика. Чем же именно?

Как мы уже говорили, на самом деле в глазу должны быть четыре изображения, а в опыте наблюдаются только три. Почему? Оказывается, все дело в том, что роговица очень тонка и задняя ее поверхность имеет практически такую же кривизну, как передняя. Следовательно, изображения, создаваемые обеими поверхностями, должны находиться очень близко друг от друга. Поскольку яркость изображения, создаваемого передней поверхностью роговицы, гораздо больше яркости изображения, полученного от ее задней поверхности, увидеть последнее изображение на фоне первого практически невозможно. Точные измерения показали, что для среднего глаза толщина роговицы составляет 0,5 мм, а радиусы кривизны ее передней и задней поверхностей — 7,7 мм и 6,8 мм соответственно. (Сравните первое значение радиуса кривизны с тем, которое вы получили в опыте 1.)

Таким образом, второе изображение нити лампочки (см. рис. 2) обусловлено отражением света от передней поверхности хрусталика. Но отсюда и из того, что третье изображение получается при отражении света от задней поверхности хрусталика, следует, что хрусталик действительно существует!

3. Для проведения следующего опыта нужна предварительная подготовка. На расстоянии 20—30 см от глаза партнера поставьте небольшой предмет (например, белый бумажный диск диаметром около 1 см, закрепленный пластилином на конце карандаша). Попросите партнера посмотреть сначала на удаленный предмет, затем — на близкий предмет, а сами наблюдайте за его глазом. Если зрачок глаза и оба предмета находятся на одной прямой, при аккомодации глаза партнера сам глаз будет оставаться неподвижным. Постарайтесь добиться этого, иначе эксперимент окажется неубедительным.

На деревянной палочке (или карандаше) резиновыми колечками закрепите две лампочки для карманного фонаря на расстоянии 5—10 см друг от друга. Лампочки будут обозначать концы предмета, изображения которого вы будете наблюдать при отражении света от глаза партнера.

Попросите партнера смотреть на удаленный предмет. Перемещая горящие лампочки сбоку от глаза партнера, получите в его зрачке три изображения лампочек. На фотографии, приведенной на рисунке 3, изображены сами лампочки и их первые изображения, создаваемые роговицей глаза (остальные изображения сфотографировать не удалось, потому что они слишком слабые). На рисунке 4, а схематически показаны все три изображения лампочек в зрачке.

Теперь попросите партнера посмотреть исследуемым глазом на близкий предмет. Вы увидите, что вторые изображения лампочек, созданные передней поверхностью хрусталика, окажутся значительно ближе друг к другу (рис. 4, *б*). Первые изображения, полученные от передней поверхности роговицы, останутся практически на том же расстоянии друг от друга, а третьи изображения, созданные задней поверхностью хрусталика, слегка сблизятся.

Получается, что при аккомодации глаза на более близкое расстояние сильно уменьшается изображение предмета, созданное передней поверхностью хрусталика, слегка уменьшается изображение, созданное задней поверхностью хрусталика, и практически не изменяется изображение, образованное передней поверхностью роговицы. Отсюда можно сделать вывод: аккомодация глаза на более близкое расстояние происходит, в основном, за счет уменьшения радиуса кривизны передней поверхности хрусталика.

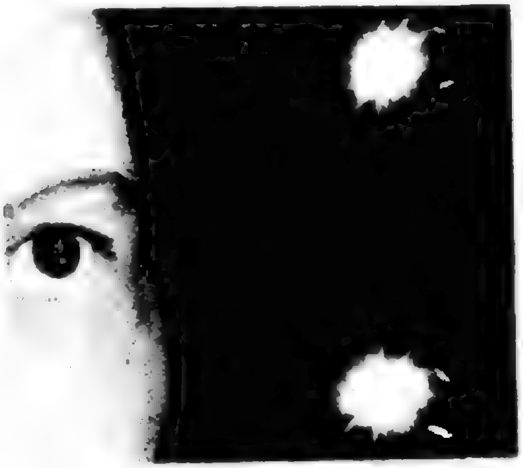


Рис. 3.

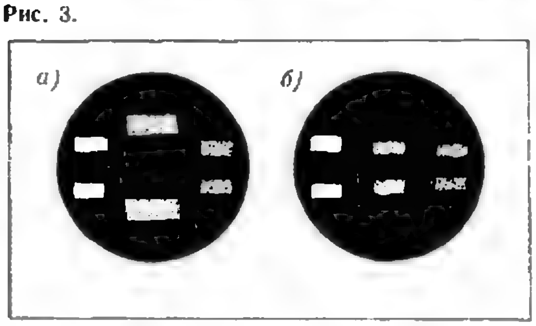


Рис. 4.

Таким образом, не видя самого хрусталика, вы не только доказали, что он существует, но и выяснили, как он действует.

Анализ полученных результатов

Подведем итоги. Что же можно доказать, проделав указанные эксперименты? Во-первых, что в глазу действительно есть хрусталик. Во-вторых, что роговица глаза очень тонкая и кривизна ее обеих поверхностей практически одна и та же. В-третьих, что показатели преломления водянистой жидкости и стекловидного тела очень мало отличаются от показателей преломления роговицы и хрусталика. В-четвертых, что аккомодация глаза обусловлена изменением кривизны поверхности хрусталика.

Заключение

Обычно в заключении выполняют то, что обещано во введении. Мы не хотим нарушать разумных традиций.

Сядьте так, чтобы настольная лампа находилась за вами, точнее — немного в стороне, на расстоянии 1,5—2 м от вашей головы. Перед собой на расстоянии около полуметра посадите вашего терпеливого партнера. Дайте ему в руку кусок старого зеркала, у которого сзади удален слой защитной краски и серебра с участка диаметром 5—7 мм. Попросите партнера смотреть в ваш глаз через отверстие в зеркальном слое и поворачивать зеркало до тех пор, пока на ваш глаз не попадет отраженный зеркалом свет лампы (вы без труда сумеете это зафиксировать). Именно в этот момент партнер и увидит, что зрачок вашего глаза светится... красным светом!

С. Александров

Измельчающиеся узоры

Посмотрите внимательно на первую страницу обложки — на ней в правильном пятиугольнике расположен бесконечный набор пятиконечных звезд, измельчающихся к его сторонам. Цель очередного занятия математического кружка — разобраться в этом красивом построении и понять, как можно строить сходные узоры.

Задача о звездной площади

Узор на обложке получен следующим образом:

Рассмотрим правильный пятиугольник, в котором проведены все 5 диагоналей (центральный «черный» пятиугольник на обложке). Концы диагоналей назовем *внешними вершинами* образовавшейся пятиконечной звезды, а точки пересечения диагоналей, лежащие внутри пятиугольника, назовем *внутренними вершинами* этой звезды.

К этой звезде (назовем ее звездой *нулевого порядка*) присоединим 5 подобных ей звезд меньшего размера (звезды *первого порядка*) так, что три внешние вершины каждой звезды первого порядка совпадают с тремя смежными вершинами звезды нулевого порядка: двумя внешними и одной внутренней.

Вокруг звезд первого порядка подобным же образом построен пояс из 15 еще меньших звезд второго порядка, причем некоторые из этих звезд по необходимости частично перекрывают друг друга, так что у пары таких звезд общими являются одна сторона и, кроме того, одна внешняя вершина. Назовем такую фигуру — объединение двух частично перекрывающихся звезд — *двойной звездой*.

Вокруг звезд второго порядка точно так же построен пояс звезд третьего порядка, тоже содержащий как одиночные, так и двойные звезды, затем — пояс звезд четвертого порядка и т. д.

Задача 1. *Определить отношение суммарной площади всех звезд (одиночных и двойных) к площади исходного пятиугольника.*

Площадь «человечка»

Для решения этой задачи полезно рассмотреть не звезды, а тот фон, который не занят ими. Фигура, напоминающая лист дикого винограда или смешного человечка с приподнятой шляпой, повторяется многократно во все уменьшающемся размере и притом так, что эти фигуры попарно не пересекаются, а их объединение составляет весь фон. Вокруг каждой такой фигуры можно описать ромб с углом 72° при вершине (рис. 1).

Задача 2. *Найти отношение площади части ромба, дополняющей человечка (и его шляпу!), к площади всего ромба.*

(Возможно, вы угадали, что ответ к задаче 2 равен... ответу к задаче 1.) На рисунке 2 читатель найдет самостоятельно[*]:

$$\alpha=36^\circ,\ a=dq,$$
$$b_1=a\ \mathrm{tg}\,\alpha=a\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$
$$b_2=b_1q,\ b_3=b_2q=b_1q^2,$$
$$b_4=b_3q=b_1q^3,\ b_5=b_1q^4,$$

где $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618034$. В результате искомое отношение p равно

$$p=77\sqrt{5}-\frac{343}{2}\approx 0{,}677234.$$

---

[*] Если эти вычисления вызовут у вас трудности, прочитайте сначала следующий раздел

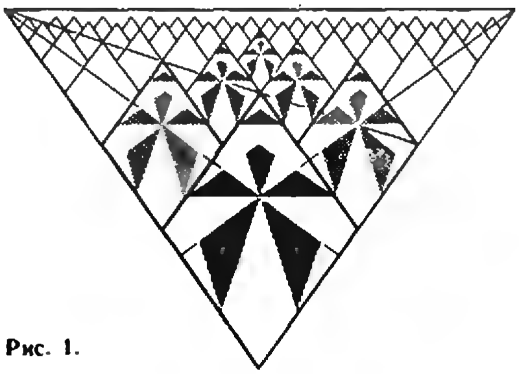


Рис. 1.

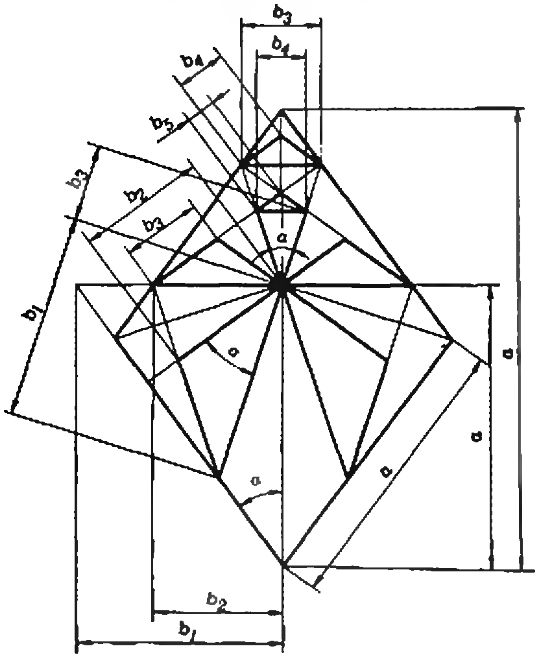


Рис. 2.

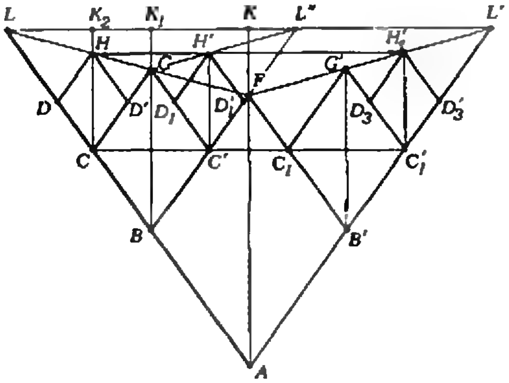


Рис. 3.

Измельчающиеся ромбы

Вернемся к рисунку 1 и посмотрим, как нужно получить показанную на нем сеть ромбов, а также сходные измельчающиеся узоры. Для этого обратимся к рисунку 3, несколько отличающемуся от рисунка 1. В угол LAL' вписан ромб *нулевого порядка* $ABFB'$, у которого $|AB| = a_0$.

В два образовавшихся угла LBF и $FB'L'$ вписаны два ромба *первого порядка* $BCGC'$ и $B'C_1G'C_1'$ со стороной $a_1 = a_0q$, где

$$0{,}5 < q < 1. \qquad (1)$$

Для построения ромбов *второго порядка* проведем прямые FG и FG', которые отсекут на прямых CH и $C_1'H_1'$, параллельных диагонали AF исходного ромба, отрезки, служащие диагоналями ромбов $CDHD'$ и $C_1'D_3H_1'D_3'$, подобных исходному. Эти два ромба принадлежат ряду конгруэнтных ромбов второго порядка со стороной $a_2 = a_1q = a_0q^2$.

Точно так же построим ряд ромбов третьего порядка со стороной $a_3 = a_0q^3$ и т. д.

Если $q < 1$, то прямые FG и FG' не параллельны сторонам исходного угла и пересекают их в некоторых точках L и L'. Точка L является центром гомотетии для ромбов $ABFB'$, $BCGC_1'$, $CDHD'$ ...

В силу симметрии таким же центром гомотетии для соответствующих фигур является и точка L'. На прямой LL' расположено, кроме этих двух точек, бесконечное множество других центров гомотетии для различных рядов ромбов. Одним из таких центров, например, является точка L''.

Задача 3. *Найти такой коэффициент гомотетии q, чтобы ромбы сплошь застилали внутренность треугольника LAL' (без просветов и наложений).*

Для этого необходимо и достаточно, чтобы при некотором натуральном n длина стороны a_i ромба любого порядка равнялась сумме длин сторон n ромбов следующих порядков:

$$a_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i+n-1} + a_{i+n},$$

откуда вытекает, что q должно удовлетворять уравнению

$$q^n + q^{n-1} + \ldots + q^2 + q - 1 = 0. \qquad (2)$$

При $n = 1$ уравнение (2) принимает вид $q - 1 = 0$, откуда $q = 1$. В этом случае точки C' и C_1 на рисунке 3 совпадают с точкой F, точки L и L' «уходят в бесконечность», а ромбы всех порядков становятся конгруэнтными (рис. 4)[*].

При $n=2$ уравнение (2) имеет вид $q^2+q-1=0$, а его корень, удовлетворяющий условию (1), равен:

$$q_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Теперь на рисунке 3 с вершиной F исходного ромба совпадает точка D_1', а укладка ромбов внутри угла LAL' приобретает вид, показанный на рисунке 5. Это — уже разобранный нами основной случай.

При $n=3$ корень кубического уравнения

$$q^3+q^2+q-1=0,$$

ограниченный условием (1), приблизительно равен $q_3=0{,}543689$, и сплошная укладка ромбов иллюстрируется рисунком 6.

Легко видеть, что для $n>1$ левая часть уравнения (2) отрицательна при $q=\frac{1}{2}$ и положительна при $q=1$. Следовательно, это уравнение имеет корень q_n, удовлетворяющий условию (1), причем единственный (так как левая часть уравнения (1) возрастает при $q>0$). Нетрудно также доказать, что $q_1>q_2>q_3>\ldots$ $\ldots>q_n>\ldots$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=1/2$.

По мере возрастания числа n прямая LL' все более приближается к вершине F исходного ромба.

Сетка ромбов, заполняющих внутренность угла в предельном случае $q_\infty=1/2$, изображена на рисунке 7. Точка F и аналогичные ей вершины ромбов всех порядков оказываются теперь на одной прямой LL'.

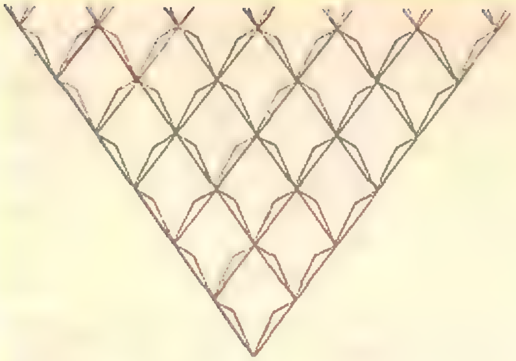


Рис. 4.

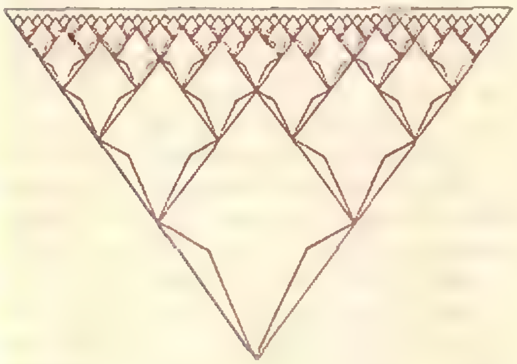


Рис. 5.

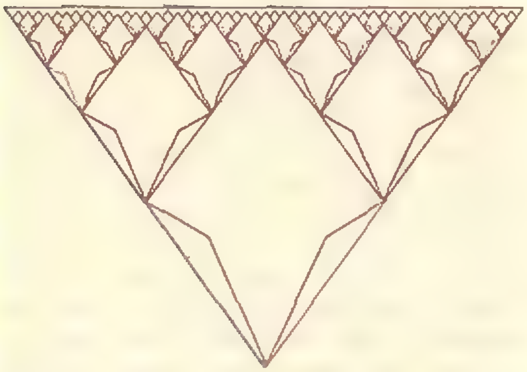


Рис. 6.

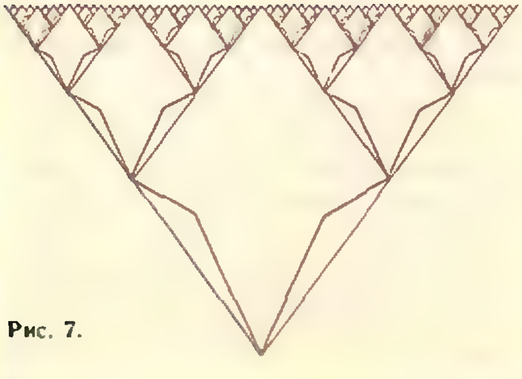


Рис. 7.

Решение задачи 1

Легко проследить связь между сеткой плотно уложенных ромбов на рисунке 5 и орнаментом, изображенным на обложке. Эту связь иллюстрирует

---

[*] На рисунках 4—8 для красоты выделен красным цветом орнамент, не влияющий на математическую суть дела.

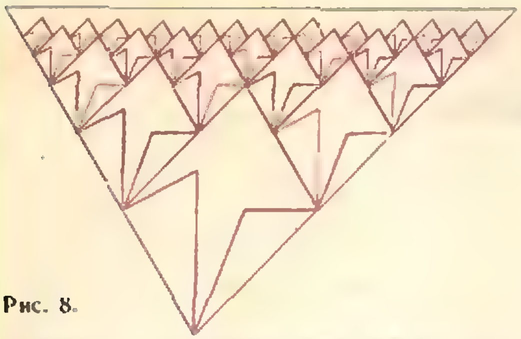


Рис. 8.

рисунок 1. Центр каждой одиночной звезды ненулевого порядка лежит в общей вершине четырех ромбов. Центр каждой из двух компонент двойной звезды совпадает с общей вершиной ровно двух ромбов, лежащей на стороне третьего. Каждая характерная повторяющаяся фигура фона («человечек со шляпой») вписана в соответствующий ромб.

Поскольку подобны между собой не только ромбы, но и вписанные в них фигуры, *отношение суммарной площади частей фона f, заключенных в каждом ромбе, к площади F этого ромба есть величина постоянная*, вычисленная нами при решении задачи 2.

Теперь, чтобы решить задачу 1, то есть *обосновать ее ответ*

$$p=77\sqrt{5}-\frac{343}{2},$$

остается только решить следующую несложную задачу:

Задача 4. *Покажите, что при любом целом $n>1$ предел суммы площадей всех ромбов всех порядков равен площади соответствующего треугольника LAL'.*

Указание. Для этого не нужно вычислять и суммировать эти площади — следует рассуждать геометрически.

Заключение

Выше мы встретили некоторый класс плоских регулярных структур, элементарные ячейки которых, подобно паркету, без просветов заполняют часть плоскости. Эти ячейки при $n>1$ (рисунки 5—7) получаются одна из другой гомотетиями.

В пределе при $n\to\infty$ коэффициенты гомотетии являются целыми степенями двойки; конфигурации, возникающие в этом случае, можно встретить в народных орнаментах.

Элементарные ячейки структуры в форме ромбов вместе с заключенным в них рисунком могут иметь ось симметрии, перпендикулярно прямой LL' (рис. 3), и тогда весь орнамент (рисунки 2 или 4—7) обладает осевой симметрией. Но ячейки могут содержать и асимметричный рисунок или даже иметь форму произвольного параллелограмма. Пример такой структуры без осевой симметрии приведен на рисунке 8.

Умножение... точек на плоскости

(Начало см. на с. 19)

Пусть теперь точка A не принадлежит Г. Соединим ее лучом с точкой O. Этот луч пересечет окружность Г в точке B. Тогда $A=RB$, где R — положительная действительная точка, и $A^n=R^nB^n$. Поэтому $A^n\widehat{O}I=n A\widehat{O}I$, а расстояние от 0 до A^n — n-я степень расстояния от 0 до A. Аналогично, корни уравнения $X^n=A$ можно записать в виде $R^{1/n}Y$, где Y — корень уравнения $Y^n=B$.

Упражнение 9. *Покажите, что любую точку можно представить в виде*

$$A=R\,(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где R — точка действительной оси и $\varphi\in[0,2\pi)$. Пользуясь этой записью и предыдущими формулами, покажите, что

$$A^n=R^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Упражнение 10. *Найдите квадратные и кубические корни из чисел -1, i, $-i$, 1, 2.*

задачник Кванта

Задачи

М616 — М620; Ф628 — Ф632

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июня 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М616, М617» или «Ф628». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М616. Можно ли числа 1, 2, ..., 30 разбить на группы

а) по пять чисел,

б) по шесть чисел

так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?

в) При каких n и k числа 1, 2, ..., nk можно разбить на n групп по k чисел так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?

С. Берколайко

М617. Внутри треугольника расположены окружности α, β, γ, δ одинакового радиуса так, что каждая из окружностей α, β, γ касается двух сторон треугольника и окружности δ (рис. 1). Докажите, что центр окружности δ принадлежит прямой, проходящей через центры вписанной в данный треугольник окружности и окружности, описанной около него.

В. Ягубьянц

М618. а) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $n!$ делится на n^2+1.

б) Докажите, что для любого $\alpha>0$ существует бесконечно много натуральных n таких, что $[\alpha n]!$ делится на n^2+1. (Здесь $m!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m$; $[x]$ — целая часть числа x.)

А. Сивацкий,
ученик 10 класса

М619. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $|CD|=|AD|+|BC|$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD.

И. Шарыгин

М620. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа такие, что $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. Докажите, что сумма модулей 2^n чисел

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$$

(со всевозможными комбинациями знаков «+» и «—») не превосходит 2^n.

Я. Касаковских

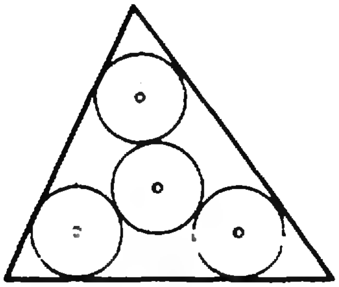


Рис. 1.

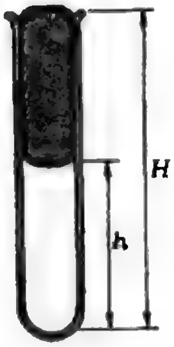


Рис. 2.

Ф628. В вертикальной трубке длины $H = 152$ см, запаянной с нижнего конца, имеется столбик воздуха высоты $h = 76$ см, запертый столбиком ртути (рис. 2). Атмосферное давление равно 10^5 Па, а температура $t_0 = 17°C$. До какой температуры t_1 следует нагреть воздух в трубке, чтобы вся ртуть вылилась?

Е. Бутиков, А. Быков, А. Кондратьев

Ф629. Шарик массы m подвешен на пружине жесткости k (пружинный маятник). Точка подвеса пружины совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой a и частотой ω. Как движется шарик при установившихся колебаниях?

Ф630. Элемент атомной батареи представляет собой конденсатор, на одну из пластин которого нанесен радиоактивный препарат, испускающий α-частицы со скоростью $v_0 = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с. Определить ЭДС этого элемента. Отношение заряда α-частицы к ее массе $k = 4{,}8 \cdot 10^7$ Кл/кг.

Ф631. Проволочная спираль, присоединенная к городской сети, нагревается электрическим током. Половину спирали начинают охлаждать (например, водой). Как это отражается на количестве тепла, выделяемого этой половиной спирали? другой половиной? всей спиралью?

В. Горбунова

Ф632. Оценить, во сколько раз освещенность солнечного зайчика, который получают на вертикальной стене в полдень, меньше освещенности прямыми солнечными лучами, если солнечный зайчик посылается на стену зеркалом с диаметром $d = 10$ см с расстояния $l = 50$ см.

Шахматный конкурс

Дорогие ребята!

За несколько месяцев существования шахматной странички «Кванта» мы убедились, что среди вас имеется много поклонников шахмат, этой древней и вечно юной игры. Мы получили от вас немало писем с решениями задач, опубликованных на шахматной страничке. В своих письмах вы задаете различные вопросы на шахматную тему, а также предлагаете увеличить число задач для самостоятельного решения. Все это привело нас к идее объявить Шахматный конкурс «Кванта». Этот конкурс мы начнем со второго полугодия. В нем вам будут предложены шахматные и шахматно-математические задачи, этюды, комбинации, головоломки.

Решения конкурсных заданий следует присылать (в одном экземпляре и в отдельном конверте) по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». На конверте не забывайте сделать пометку: «Шахматный конкурс» и номер журнала (например: «№ 7—80»).

Крайний срок отправки ответов на задания — последний день следующего месяца. Так, решения позиций из № 7 вам надо будет отправить не позднее 31 августа 1980 года.

Итоги Шахматного конкурса «Кванта» будут подведены в начале следующего года. Победителей конкурса мы пригласим в редакцию журнала на встречу с чемпионом мира по шахматам Анатолием Карповым. Победители будут награждены шахматной и математической литературой с автографом А. Карпова.

Решения задач

М562—М565; Ф573, Ф574, Ф576, Ф577

М562. *На отрезке [0; 1] задано множество M, являющееся объединением нескольких отрезков, такое, что расстояние между любыми двумя точками из M не равно 0,1. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M, меньше а) 0,55; б) 0,5.*

а) Обозначим сумму длин отрезков, составляющих множество M, через S. Сдвинем множество $M\subset[0;\ 1]$ вправо на расстояние 0,1. Полученное множество N не имеет общих точек с M, поскольку в M нет двух точек на расстоянии 0,1. Но оба конгруэнтных множества M и N помещаются на отрезке [0; 1,1] длины 1,1. Таким образом, $2S<1{,}1$, откуда $S<0{,}55$.

б) Разобьем отрезок [0; 1] на десять одинаковых отрезков A_0A_1, A_1A_2, …, A_9A_{10}. Расположим эти отрезки один над другим, как на рисунке 1, после чего спроектируем все отрезки на самый нижний отрезок A_0A_1. Докажем, что в любую точку отрезка A_0A_1 спроектируется не более пяти точек из множества M. В самом деле, если некоторая вертикальная прямая пересекает не менее шести отрезков, принадлежащих M, то найдутся два соседних отрезка A_iA_{i+1} и $A_{i+1}A_{i+2}$, пересекающихся с этой прямой в точках, принадлежащих множеству M (рис. 2). На отрезке [0; 1] расстояние между этими точками будет равно 0,1 (рис. 3), что противоречит условию. Поэтому в каждую точку отрезка A_1A_2 длины 0,1 проектируется не более пяти точек из множества M. Из этого сразу следует, что суммарная длина отрезков, составляющих множество M, меньше $0{,}1\cdot 5=0{,}5$.

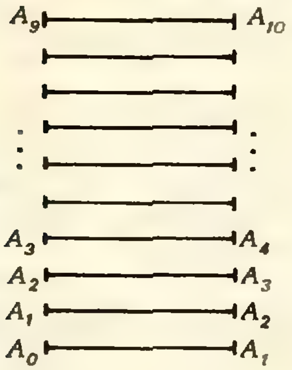


Рис. 1.

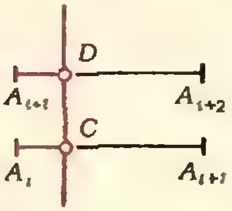


Рис. 2.

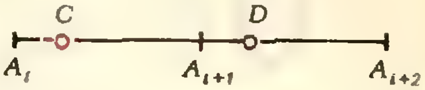


Рис. 3.

А. Кац

◆

М563. *Функция f определена на отрезке [a; b] длины 4 и имеет на нем непрерывную производную f′. Докажите, что внутри отрезка [a; b] найдется точка x, для которой*

$$f'(x)-(f(x))^2<1.$$

Предположим, что утверждение задачи неверно, то есть что во всех точках $x\in[a;\ b]$ выполнено неравенство

$$f'(x)-(f(x))^2\geqslant 1,$$

или

$$\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\geqslant 1.$$

Поскольку $(\operatorname{arctg} y)'=\frac{1}{1+y^2}$, слева стоит производная сложной функции $\Phi(x)=\operatorname{arctg} f(x)$. Итак, мы знаем, что во всех точках отрезка $[a;\ b]$

$$\Phi'(x)\geqslant 1.$$

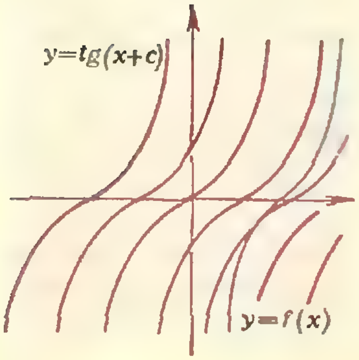
Воспользуемся формулой Ньютона — Лейбница:

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\int_a^b\Phi'(x)\,dx\geqslant\int_a^b dx=b-a=4.$$

Но arctg принимает лишь значения из интервала $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, значит, $\Phi(b)-\Phi(a)<\pi$. Получили противоречие.

Из нашего решения ясно, что утверждение задачи верно для отрезка $[a;\ b]$ длины π (или больше). Кроме того, в нашем решении мы нигде не пользовались непрерывностью производной функции f.

Наглядную интерпретацию задачи можно получить, заметив, что дифференциальное уравнение $\frac{y'}{1+y^2}=1$ имеет



решение $y=\lg(x+c)$; если в каждой точке $(x;\ y)$ график функции f имеет наклон более крутой, чем график функции $y=\lg(x+c)$, то f нельзя продолжить на отрезок длины π (см. рисунок) — график «уходит в бесконечность».

Ф. Вайнштейн

◆

M564. *Для каких точек M стороны BC треугольника ABC верно утверждение: $\triangle MPQ \sim \triangle ABC$, если точки P и Q являются:*
а) центрами окружностей, описанных соответственно около треугольников ABM и ACM;
б) точками пересечения их медиан;
в) точками пересечения их высот?

а) Покажем, что точку M на стороне BC можно выбрать произвольно.

Треугольники MPQ и APQ конгруэнтны ($|AP|=|MP|$, $|AQ|=|MQ|$, рис. 1). Докажем подобие треугольников APQ и ABC. Пусть K, L, O — середины сторон AB, AC и AM соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $\widehat{AMB}<\pi/2$ (случай $[AM]\perp[BC]$ тривиален).

Вокруг каждого из четырехугольников $AOLQ$ и $AKPO$ можно описать окружность ($\widehat{AOQ}=\widehat{ALQ}=\widehat{AOP}=\widehat{AKP}=\pi/2$ — см. рис. 1). Поэтому $\widehat{LAQ}=\widehat{LOQ}$ и $\widehat{POK}=\widehat{PAK}$. Но $\widehat{LOQ}=\widehat{POK}$ — как вертикальные углы. Отсюда $\widehat{LAQ}=\widehat{PAK}$ и $\frac{|AL|}{|AQ|}=\frac{|AK|}{|AP|}$. Поэтому композиция поворота на угол $\widehat{PAK}$ с центром в точке A и гомотетии с коэффициентом $k=\frac{|AK|}{|AP|}$ с тем же центром A переводит треугольник APQ в подобный ему треугольник AKL. Итак, $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.

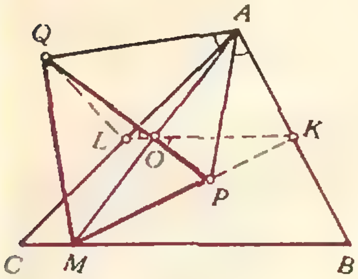


Рис. 1.

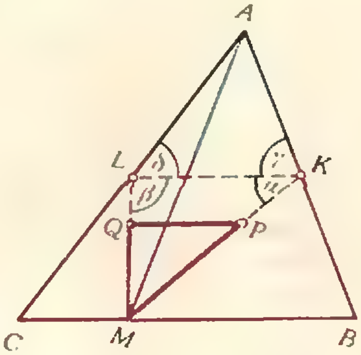


Рис. 2.

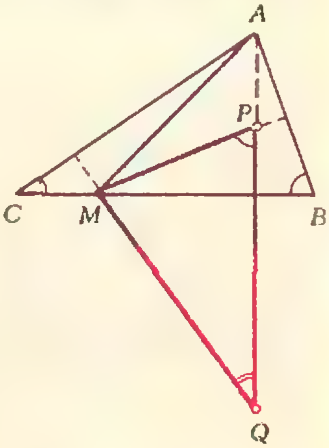


Рис. 3.

б) Гомотетия с коэффициентом $\frac{3}{2}$ и центром в точке M переводит $\triangle PQM$ в подобный ему $\triangle KLM$ (рис. 2). Допустим, что $\triangle KLM$ подобен $\triangle AKL$. Разберем три случая:

1°. $\alpha=\delta$ (см. рис. 2). Тогда $(AL)\parallel(KM)$, так что $|MB|=|MC|$, то есть M — середина $[BC]$.

2°. $\alpha=\gamma$. Тогда $(AM)\perp(KL)$, так что M — проекция вершины A на сторону BC.

3°. $\alpha=\widehat{A}$. Тогда либо $\beta=\gamma$ и $|MB|=|MC|$, либо $\beta=\delta$ и M — проекция вершины A (на $[BC]$).

Нетрудно убедиться, что верно и обратное: *если M — середина стороны BC или проекция на $[BC]$ вершины A, то треугольники MPQ и ABC подобны.*

в) В этом случае, как и в случае а), точку M на стороне BC можно выбрать произвольно. В самом деле (рис. 3), $\widehat{MPQ}=\widehat{ABC}$, $\widehat{MQC}=\widehat{ACB}$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами); значит, $\triangle MPQ \sim \triangle ABC$.

К сожалению, при публикации условия этой задачи наборщик перепутал знаки подобия и конгруэнтности (он учился *еще по старой программе); мы приносим извинения читателям,* которым эта опечатка помешала понять условие.

Э. Туркевич

М565. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные положительные числа. Обозначим через b_k среднее арифметическое всевозможных произведений по k данных чисел ($k=1, 2, \ldots, n$):*

$$b_1=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

$$b_2=\frac{a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n}{\frac{n(n-1)}{2}},$$

. . . .

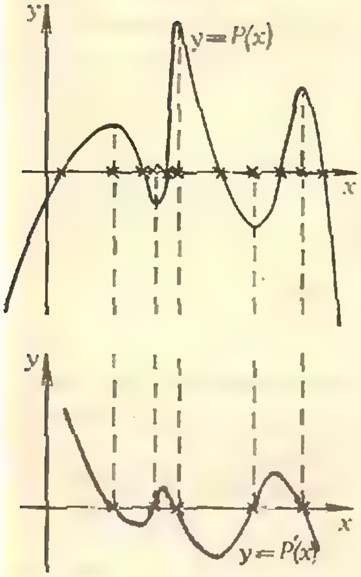
$$b_n=a_1a_2\ldots a_n.$$

Докажите неравенства:

а) $b_1>\sqrt{b_2}$,

б) $b_k^2>b_{k-1}b_{k+1}$ $(k=2, \ldots, n-1)$;

в) $\sqrt[k]{b_k}>\sqrt[k+1]{b_{k+1}}$ $(k=2, \ldots, n-1)$.



Пусть $s_1=nb_1$, $s_2=\frac{n(n-1)}{2}b_2, \ldots$

$$\ldots, s_k=C_n^kb_k, \ldots, s_n=b_n \text{ *)}.$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x)=x^n-s_1x^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}s_{n-1}x+(-1)^ns_n. \qquad (1)$$

Поскольку $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$, (2)

$P(x)$ имеет n различных положительных корней $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

а) Продифференцируем его $n-2$ раза, после чего поделим на $n(n-1)\ldots\cdot 4\cdot 3$. Мы получим квадратный трехчлен

$$x^2-\frac{2}{n}s_1x+\frac{2}{n(n-1)}s_2, \qquad (3)$$

имеющий различные положительные корни (между двумя корнями многочлена всегда есть корень его производной — см. рисунок). Значит, у многочлена (3) положительный дискриминант $D=\frac{s_1^2}{n^2}-\frac{2s_2}{n(n-1)}$, откуда $\frac{s_1}{n}>\sqrt{\frac{s_2}{\frac{n(n-1)}{2}}}$, то есть $b_1>\sqrt{b_2}$.

б) Продифференцируем теперь многочлен $P(x)$ $(n-k-1)$ раз ($k=2, \ldots, n-1$). Получим многочлен $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+2)x^{k+1}-(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)s_1x^k+\ldots+(-1)^{k-1}s_{k-1}\times\frac{(n-k+1)!}{2}x^2+(-1)^ks_k(n-k)!\,x+(-1)^{k+1}s_{k+1}(n-k-1)!$, (4) имеющий $k+1$ различных положительных корней. Поэтому многочлен $(-1)^{k+1}(n-k-1)!s_{k+1}y^{k+1}+(-1)^k(n-k)!s_ky^k+(-1)^{k-1}\frac{(n-k+1)!}{2}s_{k-1}y^{k-1}+\ldots+1$, (4′) получающийся из многочлена (4) заменой $y=\frac{1}{x}$, также имеет $k+1$ различных положительных корней. Продифференцируем теперь $k-1$ раз многочлен (4′). Получим квадратный трехчлен $(-1)^{k+1}(n-k-1)!\frac{(k+1)!}{2}s_{k+1}y^2+(-1)^k(n-k)!k!s_ky+(-1)^{k-1}\frac{(n-k+1)!}{2}(k-1)!s_{k-1}$, (5) имеющий два различных положительных корня. Разделим его на $(-1)^{k-1}(n-k-1)!(k-1)!$; получим трехчлен

$$\frac{k(k+1)}{2}s_{k+1}y^2-k(n-k)s_ky+\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}s_{k-1}.$$

Дискриминант его положителен, так что

$$k(n-k)s_k^2-(k+1)(n-k+1)s_{k-1}s_{k+1}>0$$

или

$$\frac{s_k^2}{(C_n^k)^2}-\frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)}\,\frac{s_{k-1}s_{k+1}}{(C_n^k)^2}>0,$$

то есть

$$\left(\frac{s_k}{C_n^k}\right)^2-\frac{s_{k-1}}{C_n^{k-1}}\cdot\frac{s_{k+1}}{C_n^{k+1}}>0 \qquad (6)$$

(поскольку

$$\frac{n-k}{k+1}C_n^k=C_n^{k+1} \text{ и } \frac{k}{n-k+1}C_n^k=C_n^{k-1}\Big).$$

Таким образом,

$$b_k^2>b_{k-1}b_{k+1} \quad (k=2, \ldots, n-1).$$

Неравенство б) называется *неравенством Ньютона.*

в) Будем доказывать в) по индукции. Базисом индукции ($k=1$) служит неравенство а). Предположим теперь, что нера-

---

*) Выражения $s_1, s_2, \ldots, s_n$ называются *элементарными (основными) симметрическими функциями* от n переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а тот факт, что они с чередующимися знаками служат коэффициентами многочлена с корнями $a_1, \ldots, a_n$ — *теоремой Виета.*

венство в) выполняется для $i = 2, 3, \ldots, k-1$, в частности что

$$\sqrt[k-1]{b_{k-1}} > \sqrt[k]{b_k},$$

и докажем его для $i = k$.

Перепишем неравенство из пункта б) в виде

$$b_{k-1} < \frac{b_k^2}{b_{k+1}}.$$

Последние два неравенства дают

$$b_k^{k-1} < b_{k-1}^k < \frac{b_k^{2k}}{b_{k+1}^k},$$

то есть

$$b_{k-1}^k < b_k^{k+1},$$

что и требовалось доказать.

Неравенство в) называется *неравенством Маклорена.*

М. Розенберг

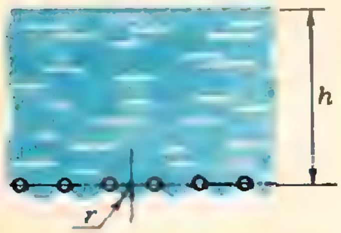
◆

Ф573. *Оцените, какое количество воды можно унести в решете с квадратными ячейками размером 2×2 мм. Диаметр D решета равен 20 см. Нити решета не смачиваются водой.*

Жидкость между нитями решета будет образовывать мениск. Радиус этого мениска не может быть больше половины расстояния между нитями, то есть $r_{max} = 1$ мм. Поэтому максимальное давление, которое может быть в жидкости над мениском, превышает атмосферное давление на величину $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$ (σ — поверхностное натяжение воды). Эта формула справедлива для круглого мениска, то есть для решета с круглыми ячейками. Однако для оценки мы можем не учитывать сложной формы мениска на квадратной сетке и пользоваться этой формулой.

Итак, $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$. С другой стороны, Δp равно гидростатическому давлению столба жидкости высоты h, налитой в решето:

$$\frac{2\sigma}{r} = \varrho g h.$$



Отсюда находим $h = \frac{2\sigma}{\varrho g r}$. Масса же жидкости в решете равна произведению ее объема V на плотность ϱ, то есть

$$m = V\varrho = \frac{\pi D^2}{4} h\varrho = \frac{\pi D^2 \sigma}{2gr} \approx 0{,}458 \text{ кг}.$$

◆

Ф574. *Два шара с массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг летят навстречу друг другу со скоростями $v = 20$ м/с каждый. График зависимости от времени силы взаимодействия шаров при столкновении показан на рисунке 1. Какое количество тепла выделилось при столкновении шаров?*

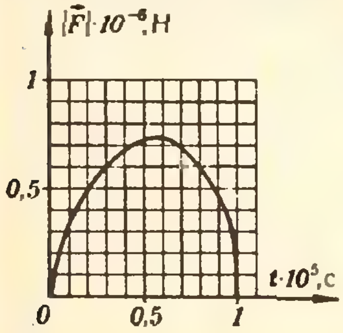


Рис. 1.

Изменение импульса каждого из шаров равно импульсу действующей на этот шар силы. Импульс силы $\vec{F}$, действующей на шар в течение времени Δt, равен $|\vec{F}|\Delta t$. Следовательно, полный импульс силы, действующей на шар за время столкновения, равен по абсолютной величине площади фигуры под графиком зависимости $|\vec{F}|(t)$. Из рисунка 1 находим импульс силы $|p_c|$:

$$|p_c| \approx 10^5 \cdot 10^{-6} \cdot 54 \text{ Н} \cdot \text{с} = 5{,}4 \text{ Н} \cdot \text{с}$$

(под графиком зависимости $|\vec{F}|(t)$ приблизительно 54 квадратика; площадь каждого квадратика $10^5 \cdot 10^{-6}$ Н · с).

Для проекций импульсов на ось X (рис. 2) можно записать:

$$p_1 = m_1 v - |p_c|, \qquad (1)$$

$$p_2 = -m_2 v + |p_c|. \qquad (2)$$

Здесь $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ — импульсы шаров после столкновения; $m_1 v$, $m_2 v$ — модули импульсов шаров до столкновения. Из (1) и (2) находим скорости шаров после столкновения:

$$v_1 = \frac{p_1}{m_1} = v - \frac{|p_c|}{m_1} = -7 \text{ м/с},$$

$$v_2 = \frac{p_2}{m_2} = -v + \frac{|p_c|}{m_2} = -2 \text{ м/с}.$$

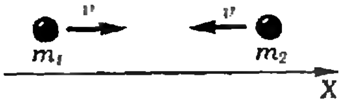


Рис. 2.

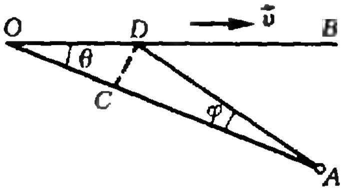
Теперь воспользуемся законом сохранения энергии. Кинетическая энергия системы до столкновения равна $E=\frac{m_1v^2}{2}+\frac{m_2v^2}{2}$, а после столкновения — $E'=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}$. Разность $E-E'$ равна количеству тепла Q, выделившегося при столкновении. Следовательно,

$$Q=\frac{m_1+m_2}{2}v^2-\frac{m_1v_1^2}{2}-\frac{m_2v_2^2}{2}=94{,}5\ \text{Дж}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф576. *По прямой OB равномерно движется самолет со скоростью $v>c$ (c — скорость звука). Наблюдатель следит за полетом из точки A. В тот момент, когда самолет находится в точке O, специальное устройство, установленное на самолете, испускает два коротких звуковых импульса: сначала импульс с малой амплитудой, затем — с большой. Временной интервал между импульсами равен τ. При каких условиях наблюдатель сможет зарегистрировать сначала импульс с большой амплитудой, и потом с малой? Расстояние OA равно L, угол AOB равен θ.*



Пусть за время τ самолет переместился из точки O в точку D.

Отложим на отрезке AO отрезок AC такой, что $|AC|=|AD|$. Если к моменту испускания второго импульса (с большой амплитудой) первый импульс (с малой амплитудой) успеет «пройти» расстояние $|OC|$ и окажется в точке C, то оба импульса будут зарегистрированы в точке A одновременно. Если же расстояние, «пройденное» первым импульсом за время τ, будет меньше $|OC|$, то второй импульс будет зарегистрирован в точке A раньше, чем первый. Таким образом, нас интересует, при каких условиях выполняется неравенство

$$c\tau<|OC|. \qquad (\bullet)$$

Поскольку время τ мало, можно считать, что углы, под которыми наблюдатель видит самолет в точках O и D, практически одинаковы, то есть угол φ (см. рисунок) очень мал. Следовательно, можно считать, что $\widehat{ACD}=\widehat{ADC}=90°$. Тогда

$$|OC|=|OD|\cos\theta=v\tau\cos\theta.$$

Подставим это выражение для $|OC|$ в $(\bullet)$:

$$c\tau<v\tau\cos\theta.$$

Отсюда находим, что второй импульс будет зарегистрирован в точке A раньше, чем первый, если

$$v>c/\cos\theta.$$

Это неравенство означает, что скорость самолета должна быть во всяком случае больше, чем скорость звука. Тогда, как показывает наше рассмотрение, может оказаться, что самолет приближается к наблюдателю, а наблюдатель будет слышать, как самолет удаляется.

Б. Болотовский

Ф577. *При температуре на улице $t_0=-20°C$ работающая батарея поддерживает в комнате температуру $t_1=16°C$. Когда кроме батареи включили электроплитку мощностью $P_1=1$ кВт, в комнате установилась температура, равная $t_2=22°C$. Определить тепловую мощность батареи.*

Примечание. *Теплоотдача от одного тела к другому пропорциональна разности температур этих тел ($\Delta P=k\Delta t$, $k=\text{const}$).*

При установившейся температуре в комнате тепловая энергия, выделяющаяся на приборах, равна тепловым потерям (потерям на теплоотдачу). Следовательно, тепловая мощность батареи равна

$$P=k(t_1-t_0). \qquad (1)$$

При включенной электроплитке и работающей батарее

$$P+P_1=k(t_2-t_0). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим тепловую мощность батареи:

$$P=P_1\frac{t_1-t_0}{t_2-t_1}=6\ \text{кВт}.$$

И. Слободецкий

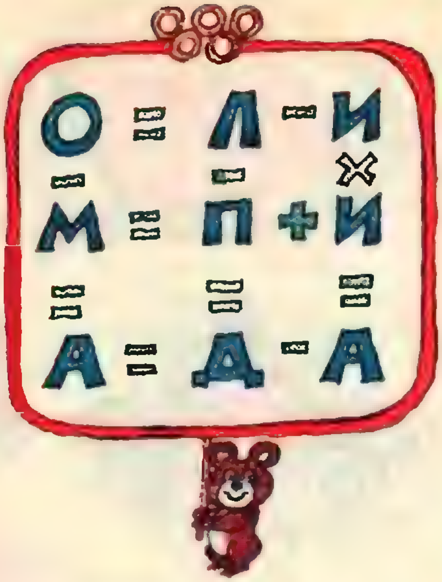
Квант для младших школьников

Задачи

1. Реши ребус — составь ребус! Расшифруйте ребус, изображенный на рисунке (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Затем, используя найденные значения букв, замените в записи

*О*Л*И*М*П*И*А*Д*А* = 80

звездочки арифметическими знаками, скобками или «пустым местом» (то есть уберите их) так, чтобы получилось тождество.



2. Докажите, что число 63! − 61! делится на 71.

Запись *n*! означает произведение всех целых чисел от 1 до *n*, например, 5! = 1 • 2 • 3 • 4 • 5.

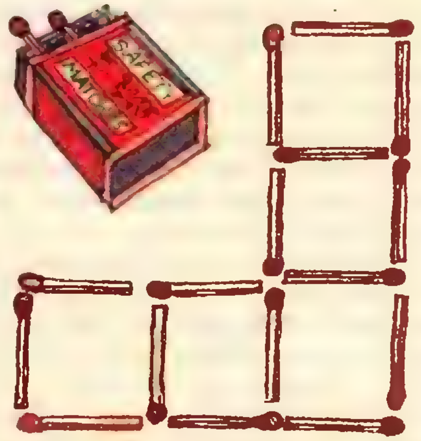
3. Из шестнадцати спичек сложили пять квадратов — см. рисунок. Переложите две спички так, чтобы число квадратов уменьшилось на единицу.

4. В очереди за билетами в кино стоят друзья: Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Известно, что Юра купит билет раньше, чем Миша, но позже Олега. Володя и Олег не стоят рядом, а Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. Кто за кем стоит?

КАССА
СЕГОДН
НА ЭКРАН
БЕЛОЕ СОЛ

5. В какой системе счисления верно равенство: 10 + 10 = 10 • 10?

6. Равносторонний треугольник нетрудно разрезать на четыре равносторонних треугольника. Для этого нужно соединить отрезками середины его сторон. Но можно ли разрезать его на 8, или 10, или 11 равносторонних треугольников? И вообще, на какое число равносторонних треугольников можно разрезать данный равносторонний треугольник?



Эти задачи нам предложили
Ф. Бартенев, Ф. Вайнштейн,
В. Радунский, Л. Филонов

ТЕТРАДЬ
VARNA

Н. Михайлова

Плоды «просвещения»

В воскресенье днем я подсчитал, что после утреннего похода с Федькой в кино у меня осталось четыре копейки, а к среде нам велели принести в школу новую тетрадку для рисования. У меня испортилось настроение. Нужно идти к папе и опять просить деньги.

«Пап, — сказал я, — мне деньги нужны на тетрадку для рисования. Дай, пожалуйста». «Интересно, — ответил папа. — А кому мы с мамой выдали вчера полтинник?»

«Мы, пап, сегодня с Федькой в кино были. А как Федька любит лимонад и слоеные трубочки, ты просто не представляешь!»

«Все ясно, — сказал папа. — Ты пал жертвой дружбы. Тебя, бедняжку, пить лимонад заставить невозможно, а трубочки ты и в рот не берешь. Но для друга готов на все!»

«Пап, ну, хватит издеваться. Я лимонад люблю и трубочки тоже. Просто у Федьки денег сегодня не было, и мы мой полтинник прогуляли».

«Другой разговор! — ответил папа. — Однако, если ты еще на полтинник претендуешь, придется попотеть. Вот реши задачу — получишь полтинник. Договорились?».

«Договорились. Давай скорей задачу, а то вдруг я не успею решить».

«Ладно, дам тебе время до вторника. А задача такая: *Представь себе, что вы с Федькой пошли сейчас в магазин. Каждому из вас нужна тетрадка для рисования. Пришли в магазин и вдруг выясняется, что Феде не хватает одной копейки, чтобы купить тетрадку, а тебе целых тридцати. Вы сложили ваши деньги, чтобы купить хоть одну тетрадку, но денег все равно не хватило. Сколько стоит тетрадка?*»

Папа написал мне условие на листе бумаги. Я пошел в свою комнату и стал думать, но до обеда так ничего и не придумал. Потом пришли гости, а потом меня отправили спать.

В понедельник я сразу после школы прибежал домой, достал условие задачи и снова сел ее решать.

Значит так, — сказал я себе — у меня остались 4 копейки. А на тетрадь мне не хватило 30 копеек:

$$4+30=34.$$

Тетрадь стоит 34 копейки. Тогда у

Федьки $34-1=33$ копейки. У нас с ним вместе $33+4=37$ копеек. Как раз хватит на 2 эскимо в шоколаде по 18 копеек и еще одна копейка останется. Красота!

Хотя нет. Ведь по условию задачи нам на тетрадку не хватило, даже когда мы сложили деньги.

Значит, получилась ерунда. Неверно я решаю. Попробую еще раз. Ага... Папа ведь не знает, что у меня осталось 4 копейки. Почему же я тридцать к четырем прибавлял? Ошибка!

Начну по-другому. Я не знаю, сколько стоит тетрадка. Это число обозначу буквой x. Значит, у меня *было* $(x-30)$ *копеек, а у Федьки* $(x-1)$ копейка. Складываем мои деньги и Федькины. Получится

$$x-30+x-1=(2x-31) \text{ копейка.}$$

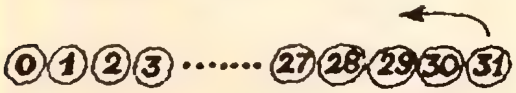
Но по условию задачи этих денег нам все равно не хватило на одну тетрадку. Значит,

$$2x-31<x.$$

Правильно? Да, ну а что дальше? Ага! Теперь уберем x из правой части:

$$2x-x-31<x-x,$$
$$x-31<0,$$
$$x<31.$$

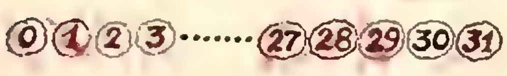
Что значит, что тетрадка стоит меньше 31 копейки? Сейчас я себе нарисую. Все числа, которые меньше 31, лежат слева от него:



Тетрадка не может стоить 31 копейку — я это число зачеркну. А меньше, ну, например, 29 копеек, она может стоить? Нет, потому что тогда у меня было бы

$$29-30=-1 \text{ копейка!}$$

Вот умора — минус одна копейка! *Так не бывает. Зачеркну* 29. И все, что левее 29, тоже нужно зачеркнуть. Тогда получается такая картинка:



Остается только 30. Значит, тетрадь стоит 30 копеек.

Сколько же у меня денег было?

$$30-30=0 \text{ копеек.}$$

Ни одной копейки. Это папа так думает. Он думает, что я такой же бедный, как дядя Эдик. Мама его всегда жалеет. «Бедный Эдик! Он купил машину — теперь у него ни копейки. Бедный Эдик! Он отдыхал с семьей в Болгарии — теперь у него ни копейки».

Но я совсем не такой бедный. И я скорей побежал к папе, чтобы его успокоить.

У папы сидят гости. Дядя Олег с сыном Тарасом. Тарас плохо решает задачи, но ему и не нужно: он будет скрипачом.

«Так, — сказал я, — во-первых, я не такой бедный, как дядя Эдик. У меня есть четыре копейки. Во-вторых, тетрадь стоит 30 копеек. Вот решение. Если ты теперь дашь мне 26 копеек, то я смогу ее купить.» Папа и дядя Олег сначала долго смеялись, а потом решили дать эту задачу Тарасу. *Сказали, ее можно решить проще.*

По-моему, давать Тарасу задачу без толку. Но пусть попробует, раз они так хотят.

А Тарас глаза вытаращил и говорит: «Так в чем же задача? У Федьки не хватало 1 копейки, а у Женьки 30. Они сложились, но на тетрадку снова не хватило. Значит, Женька ни копейки не добавил к Федькиным деньгам. То есть у него ничего не было. А на тетрадку ему не хватало 30 копеек. Значит, она стоила 30 копеек. Вот и вся задача».

«Молодец!» — похвалил папа этого воображалу.

«Лев Толстой называл это "Плоды просвещения". — сказал он мне. — Да, ладно, Женька, не расстраивайся. Ведь ты задачу решил? Решил. Запомни теперь, что иногда надо не школьную науку в ход пускать, а просто подумать. И еще одно. Ты ведь, небось, думал, что Тарас эту задачу не решит. Нехорошо, брат. Высокомерие — паршивая штука и всегда бывает посрамлено. Рано или поздно. А теперь бери полтинник на тетрадь и текущие расходы».

Деньги я взял. Ведь я все-таки решил задачу, но и урок этот я запомнил. Наверное, на всю жизнь.

И. Мельник

Где расположено основание высоты?

Решая стереометрические задачи, важно уметь правильно определять взаимное расположение элементов возникающих в них фигур. Многие ошибки, допускаемые при решении этих задач, связаны с изображением высоты пирамиды (или призмы). Неверно расположив основание высоты относительно основания пирамиды (или призмы), поступающий вследствие этого неправильно определяет угол наклона бокового ребра к плоскости основания, ошибается при построении линейного угла двугранного угла и т. д.

Цель предлагаемых ниже задач и примеров — научить вас решать стереометрические задачи, избегая подобных ошибок. Для этого в начале статьи мы предлагаем три задачи со списком возможных ответов, из которых нужно выбрать правильный. Разумеется, здесь нельзя ограничиться угадыванием правильного ответа: его нужно обосновать. Разобравшись с этими задачами, вы легко поймете решения следующих за ними примеров, взятых из практики вступительных экзаменов.

Задача 1. *Какая точка плоскости ABC является основанием высоты пирамиды $SABC$, если:*

а) *боковые ребра конгруэнтны;*

б) *боковые ребра образуют равные углы с плоскостью основания;*

в) *боковые грани образуют с плоскостью основания конгруэнтные углы;*

г) *плоские углы при вершине S прямые;*

д) *две пары противоположных ребер взаимно перпендикулярны;*

е) *боковые ребра конгруэнтны между собой и*

$\widehat{ASB}=\widehat{ASC}=60°$, $\widehat{BSC}=90°$;

ж) $\widehat{ACB}=90°$, $(AC)\perp(BS)$;

з) $\overrightarrow{SO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})$?

Возможные ответы:

1) точка пересечения медиан треугольника ABC;

2) точка пересечения его высот;

3) центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC;

4) центр окружности, вписанной в треугольник ABC;

5) центр окружности, вписанной в треугольник ABC, или одной из вневписанных *);

6) середина отрезка BC;

7) точка прямой BC.

Для решения задачи часто бывает существенно установить, принадлежит ли основание высоты пирамиде или находится вне ее.

Задача 2. *В пирамиде $SABC$ углы наклона боковых ребер к плоскости основания конгруэнтны между собой. При каком достаточном условии основание высоты SO пирамиды принадлежит треугольнику ABC?*

Возможные ответы:

1) $\triangle ABC$ — равнобедренный;

2) $\triangle ABC$ — равносторонний;

3) $\triangle ABC$ — прямоугольный или остроугольный;

4) $\triangle ABC$ — тупоугольный;

5) в каждом из этих случаев.

Задача 3. *В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ ($[BC]\parallel[AD]$, $|BC|<|AD|$). Боковые ребра пирамиды конгруэнтны между собой. При каком достаточном условии основание высоты SO пирамиды лежит вне трапеции $ABCD$?*

Возможные ответы:

1) если $\widehat{ABD}\leqslant 90°$;

2) если $\widehat{ABD}>90°$;

3) если $(\overrightarrow{BD},\widehat{\ }\overrightarrow{CA})\geqslant 90°$;

4) если $(\overrightarrow{BA},\widehat{\ }\overrightarrow{CD})>90°$;

5) ни при каком.

---

[*] Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из его сторон и продолжений двух других сторон.

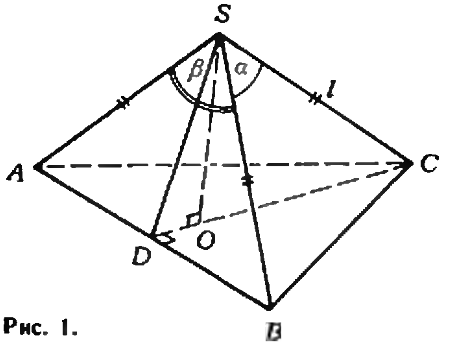


Рис. 1.

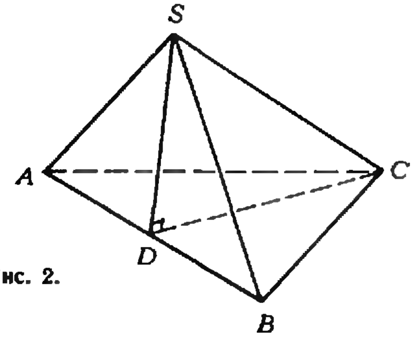


Рис. 2.

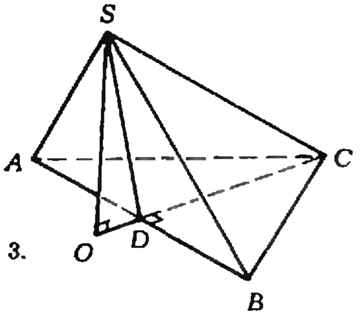


Рис. 3.

Перейдем теперь к разбору двух примеров, характерных для вступительных экзаменов.

Пример 1 (КГУ, 1975). *Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину l. Два плоских угла при вершине пирамиды равны α, а третий — β. Найти объем пирамиды.*

Решение. Пусть $SABC$ — данная пирамида, $\widehat{ASB}=\beta$, $\widehat{ASC}=\widehat{BSC}=\alpha$. Из условия задачи находим:

$$(\triangle ASC \cong \triangle BSC) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow([AC] \cong [BC]);$$

основание O высоты SO находится в центре окружности, описанной вокруг треугольника ABC (задача 1а). Возможны три случая (см. задачу 2): а) $\widehat{ACB}<90°$ — основание высоты расположено внутри $\triangle ABC$ (рис. 1); б) $\widehat{ACB}=90°$ — основанием высоты служит середина $[AB]$ (рис. 2); в) $\widehat{ACB}>90°$ — основание высоты лежит вне треугольника ABC (рис. 3). Обозначим через D середину отрезка AB.

Случай а). Исходя из условия, находим

$$|AB|=2l\sin\frac{\beta}{2};\ |SD|=l\cos\frac{\beta}{2};$$

$$|AC|=|BC|=2l\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$|CD|=\sqrt{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}=$$
$$=l\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

Положим $|OD|=x$. Из треугольника SOD

$$|SO|^2=l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-x^2;$$

из треугольника CSO

$$|SO|^2=l^2-(|CD|-x)^2=$$
$$=l^2-l^2+2l^2\cos\alpha-l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-$$
$$-x^2+2xl\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

Отсюда

$$l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-x^2=2l^2\cos\alpha-l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-$$
$$-x^2+2xl\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}};$$

$$x=l\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos\alpha}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}};$$

$$h=|SO|=$$
$$=\sqrt{l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-l^2\frac{(\cos^2\beta/2-\cos\alpha)^2}{1-2\cos\alpha+\cos^2\beta/2}}=$$
$$=\quad l\ \frac{\sqrt{\cos^2\beta/2-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\beta/2}}.$$

Значит,

$$V=\frac{1}{3}Sh=$$
$$=\frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}. \quad (1)$$

Замечание. Поскольку $\widehat{ASB}<\widehat{ASC}+\widehat{BSC}$, выполняется неравенство $\beta<2\alpha$ и подкоренное выражение положительно. Вырочем, в задачах подобного рода исследование области определения выражения, полученного в ответе, не требуется.

Случай б). Этот случай возможен тогда и только тогда, когда

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Действительно, если $\widehat{C}=90^\circ$, $|CD|=|AD|=l\sin\frac{\beta}{2}$; $|CD|=|AC|\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,l\sin\frac{\alpha}{2}$ (рис. 2). Отсюда $\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Наоборот, если $\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, то

$$|CD|=l\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}=$$

$$=l\sqrt{2-2\cos\alpha-\sin^2\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\sqrt{2}\,l\sqrt{1-\cos\alpha-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\sqrt{2}\,l\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{2}\,l\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому $\cos\widehat{ACD}=\frac{|CD|}{|AC|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $\widehat{ACD}=45^\circ$, $\widehat{C}=90^\circ$. Если $\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, то $h=|SD|=l\cos\frac{\beta}{2}$ (рис. 2), $V=\frac{l^2}{3}\sin^2\frac{\beta}{2}\times$ $\times\, l\cos\frac{\beta}{2}$, $V=\frac{l^3}{6}\sin\beta\sin\frac{\beta}{2}$.

Случай в). Положим $x=|OD|$ (рис. 3). Как в случае а), находим:

$$x=l\frac{\cos\alpha-\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}};$$

$$h=|SO|=l\frac{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-2\cos\alpha-\cos^2\frac{\beta}{2}}};$$

$$V=\frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}.$$

Мы видим, что ответы в случаях а) и в) совпадают, хотя получены они не одинаково. Более того, в случае б) этот ответ тоже годится, что не трудно проверить (избавляясь от α в (1) с помощью соотношения (2), получаем (3)).

Ответ:

$$V=\frac{l^3}{3}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}.$$

Подчеркнем, что решение, при котором разобран только случай а), не может считаться полным.

Пример 2. *Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник, у которого $|AB|=|BC|=20$ см, $|AC|=32$ см; углы между плоскостью основания и каждой из боковых граней равны 45°. Найдите объем пирамиды.*

Решение. Основанием высоты пирамиды служит точка, равноудаленная от прямых AB, AC, BC, то есть центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, или одной из вневписанных (задача 16). Поэтому условию задачи удовлетворяют четыре пирамиды, основаниями высот которых служат точки O_1, O_2, O_3, O_4 (рис. 4). Для вычисления объема этих пирамид достаточно определить высоты SO_1, SO_2, SO_3, SO_4, так как площадь основания равна $S=S_{\triangle ABC}=192$ см². Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°, высота пирамиды равна радиусу окружности, вписанной в $\triangle ABC$, или одной из вневписанных, центр которой — основание высоты пирамиды.

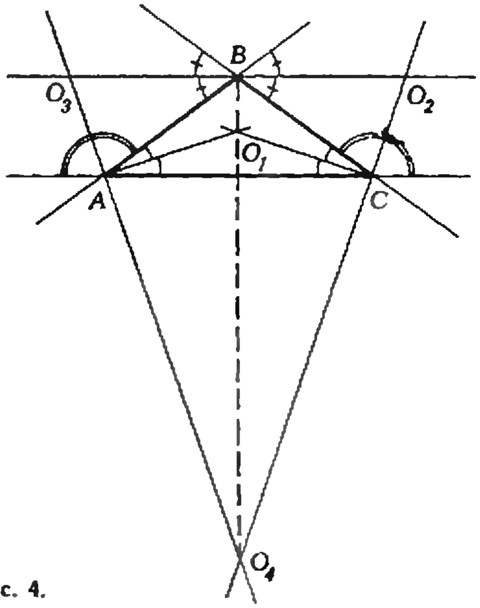


Рис. 4.

1) Пирамида с высотой SO_1.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(20+20+32)\,r_1=$$
$$=36\,r_1\ (\text{см}^2);\ 36\,r_1=192;$$
$$r_1=h_1=5\frac{1}{3}\ \text{см}.$$

Отсюда $V=341\frac{1}{3}$ (см³).

2) Пирамиды с высотами SO_2 и SO_3 конгруэнтны. Имеем

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(|AC|r_2-|BC|r_2)=$$
$$=16\,r_2\ (\text{см}^2);$$

$16\,r_2=192$; $r_2=h_2=12$ см; отсюда $V_2=V_3=768$ (см³).

3) Пирамида с высотой SO_4. Имеем

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(|AB|r_4+|BC|r_4-$$
$$-|AC|r_4)=4\,r_4\ (\text{см}^2).$$
$$4r_4=192;\ r_4=h_4=48\ \text{см};$$
$$V_4=3072\ (\text{см}^3).$$

Ответ: $\{341\frac{1}{3}$ см³; 768 см³; 3072 см³$\}$.

Упражнения

1. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, основания которой равны a и $2a$. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания; высота пирамиды равна a. Найти боковую поверхность пирамиды. («Квант», 1974, № 4, с. 50).

2. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC, у которого $|AB|=a$, $|BC|=b$. Боковая грань, которая проходит через сторону AC, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с плоскостью основания конгруэнтные углы. Найти отношение объемов пирамид $SABC$ и $SOBC$, где O — основание высоты пирамиды $SABC$.

3. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $|AB|=c$ и острым углом α. Найти объем пирамиды, если известно, что боковое ребро SC наклонено к плоскости основания под углом β, а направленные отрезки $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$ при последовательном их расположении образуют замкнутую ломаную линию.

4 (МВТУ, 1977). Основания параллелепипеда — квадраты со стороной b, а все боковые грани — ромбы. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найти объем параллелепипеда.

5 (НГУ, 1977). В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны a. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 образуют с плоскостью основания угол в 60°, а диагональ BC_1 боковой грани CBB_1C_1 перпендикулярна ребру AC. Найти объем призмы, если длина диагонали BC_1 равна $a\sqrt{6}$.

Наша обложка

Советские вымпелы — на станции «Луна-12» и на Венере

22 октября 1966 года в Советском Союзе был осуществлен запуск космической ракеты в сторону Луны. На борту ракеты была установлена автоматическая станция «Луна-12», которая вышла на селеноцентрическую орбиту и стала третьим советским искусственным спутником Луны. Одной из задач этой станции являлись получение и передача на Землю фотоснимков отдельных участков лунной поверхности, сделанных со сравнительно близкого расстояния. Специальное фототелевизионное устройство, установленное на борту станции, произвело фотографирование лунной поверхности и передало снимки на Землю по телевизионному каналу. 19 января 1967 года программа полета станции «Луна-12» была успешно завершена. За три месяца полета станция провела ряд научных исследований и передала на Землю уникальные фотографии лунной поверхности.

* * *

В целях более полного изучения Венеры и получения о ней большого объема научной информации 10 января 1969 года в Советском Союзе был осуществлен запуск автоматической станции «Венера-6». Станция «Венера-6» производила научные исследования планеты совместно со станцией «Венера-5», запущенной 5 января 1969 года. 16 и 17 мая 1969 года спускаемые аппараты станций совершили плавный спуск в атмосфере Венеры, выполнили обширный комплекс научных измерений и передали на Землю ценную информацию о характеристиках и свойствах атмосферы этой, до сих пор еще во многом загадочной, планеты. На поверхность Венеры были доставлены вымпелы с барельефом В. И. Ленина и Государственным гербом СССР. Новый выдающийся успех советской науки и техники, одержанный благодаря героическому труду всего советского народа, был посвящен столетию со дня рождения организатора коммунистической партии, основателя советского государства, вождя трудящихся всего мира В. И. Ленина.

М. Шубелева

Е. Кузнецов

Фотоаппарат на вступительных экзаменах

Принципиальную схему фотоаппарата можно представить в виде, изображенном на рисунке 1.

Как известно, фотоаппарат представляет собой светонепроницаемую камеру (очень часто фотоаппарат так и называют камерой). В передней части камеры находится объектив *О*. Объектив устроен довольно сложно: часто он содержит до двадцати различных линз. Однако для решения большинства задач объектив можно считать тонкой собирающей линзой. Так мы и будем делать в этой статье.

Для открывания и закрывания объектива служит затвор. Время, в течение которого объектив остается открытым, называется временем экспозиции, или просто экспозицией. Продолжительность экспозиции обусловлена освещенностью снимаемого объекта и чувствительностью фотопленки.

Поток световой энергии, проходящий через объектив, регулируется диафрагмой *D*. Изменяя диаметр диафрагмы, можно открывать более или менее значительную часть объектива. Оказывается, при этом изменяется не только освещенность изображения, но и глубина резкости изображаемого пространства (более подробно об этом мы поговорим немного позже).

В задней части камеры располагается фотопленка (или фотопластинка) *Фп*, на которой и получается изображение h фотографируемого объекта H (см. рис. 1). Для того чтобы изображение оказалось точно в плоскости фотопленки, в большинстве фотоаппаратов предусмотрена возможность перемещения объектива в некоторых пределах, вдоль его оптической оси. Этим осуществляется наводка на резкость.

Рассмотрим несколько конкретных задач, связанных с фотоаппаратом и предлагавшихся абитуриентам на вступительных экзаменах.

Задача 1. *Точечный объект был сфотографирован дважды на один и тот же кадр при двух положениях фотоаппарата. При втором положении аппарат был перемещен вверх на* $h=10$ *см относительно первого положения. Расстояние между двумя изображениями объекта на пленке оказалось равным* $p=2$ *мм. Определить расстояние до объекта, если фокусное расстояние объектива фотоаппарата* $F=5$ *см.*

Пусть объект S и его первое изображение S_1 расположены так, как показано на рисунке 2. Найдем положение изображения объекта во втором случае.

Поскольку фотоаппарат сместили перпендикулярно главной оптической оси объектива, второе изображение S_2 так же, как и изображение S_1, должно лежать в плоскости фотопленки. Проведем побочную оптическую ось, проходящую через объект и оптический центр объектива при втором положении фотоаппарата. В точке пересечения этой оси и плоскости пленки и находится изображение S_2.

Как видно из рисунка 2,

$$\frac{h}{p}=\frac{d}{f},$$

где d — искомое расстояние от объ-

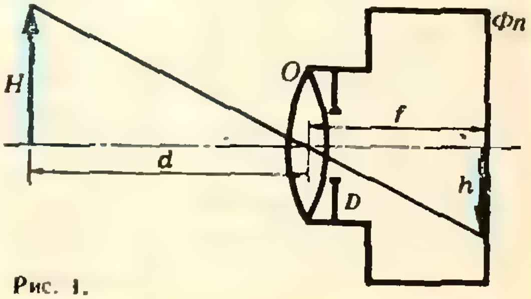


Рис. 1.

екта до фотоаппарата; f — расстояние от аппарата до плоскости изображений.

По формуле линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

Из этих двух уравнений найдем d:

$$d=F\frac{p+h}{p}=255\ \text{см}=2.55\ \text{м}.$$

Задача 2. *При фотографировании предмета с расстояния $d_1=15$ м высота его изображения на фотопленке оказалась равной $h_1=30$ мм, а при фотографировании с расстояния $d_2=9$ м — $h_2=51$ мм. Найти фокусное расстояние объектива фотоаппарата.*

По определению линейное увеличение объектива

$$\Gamma=\frac{h}{H},$$

где h — линейный размер изображения, H — линейный размер предмета.

С другой стороны (это следует, например, из рисунка 1),

$$\Gamma=\frac{f}{d},$$

где f — расстояние от изображения до объектива, d — расстояние от объектива до предмета.

Таким образом,

$$\frac{h}{H}=\frac{f}{d},$$

или, с учетом формулы линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ (F — фокусное расстояние),

$$\frac{h}{H}=\frac{F}{d-F}.$$

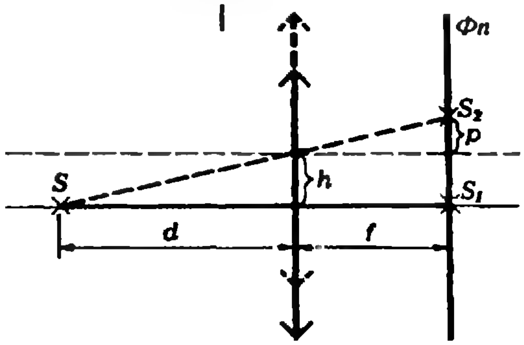


Рис. 2.

Запишем последнее соотношение для двух случаев, указанных в условии задачи:

$$\frac{h_1}{H}=\frac{F}{d_1-F}\quad\text{и}\quad\frac{h_2}{H}=\frac{F}{d_2-F}.$$

Отсюда получим

$$F=\frac{d_2h_2-d_1h_1}{h_2-h_1}\approx 0{,}43\ \text{м}=43\ \text{см}.$$

Задача 3. *При аэрофотосъемках используется фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=8$ см. Минимальный размер различимых деталей изображения на фотопленке (разрешающая способность пленки) $\delta=10^{-2}$ мм. На какой высоте должен лететь самолет, чтобы на фотографии можно было различить листья деревьев размером $l=5$ см? При какой скорости самолета изображение еще не будет размытым, если время экспозиции $\tau=10^{-3}$ с?*

Прежде всего поговорим немного о разрешающей способности фотопленки. Светочувствительная эмульсия фотопленки представляет собой кристаллики бромистого серебра, взвешенные в слое желатины. Эти кристаллики и являются светочувствительными центрами фотослоя. Если на кристаллик попал свет, при проявлении фотопленки он разлагается на металлическое серебро (имеющее черный цвет) и бром.

Кристаллики, хотя они и малы, все же имеют конечные размеры. Поэтому, если изображения двух различных точек попадут на один и тот же кристаллик, на фотопленке мы получим одну точку — один почерневший кристаллик. Иначе говоря, фотопленка эти две точки не разрешает.

Есть и еще одна особенность. Кристаллики бромистого серебра не только поглощают, но и рассеивают свет, вот почему засвеченными оказываются и близлежащие соседние кристаллики, на которые прямой свет не попадает. Из-за этого минимальная область почернения, соответствующая изображению светящейся точки, всегда оказывается больше размеров одного кристаллика.

Так или иначе, любая пленка имеет определенную *разрешающую способность.*

В нашем случае пленка разрешит две точки, если расстояние между их изображениями превышает $\delta = 10^{-2}$ мм, в противном случае после проявления на пленке получится одна точка (точнее — одно небольшое пятно).

Теперь давайте выясним, что означает фраза «на фотографии можно различить листья деревьев». Обычно критерий различимости — вопрос договоренности. Договоримся считать, что листья деревьев будут различимы на пленке, если изображение одного листа будет иметь размер минимальной области почернения. (Разумеется, в этом случае можно говорить только о том, есть ли в этом месте лист или его нет, а не о том, какой это лист.)

Это означает, что в данной задаче лист размером $l = 5$ см должен изобразиться на области размером не менее $\delta = 10^{-2}$ мм, иначе два соседних листа дадут одно пятно почернения.

Увеличение, создаваемое линзой, определяется по формуле

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{\delta}{l},$$

где d — расстояние от предмета до объектива, f — расстояние от объектива до фотопленки.

Поскольку самолет в момент аэрофотосъемки летает на высотах не ниже нескольких десятков метров, можно считать, что $d \gg f$. Тогда из формулы линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ следует, что $f = F$, то есть изображение находится в фокальной плоскости объектива аппарата.

Таким образом,

$$d = f\frac{l}{\delta} = F\frac{l}{\delta} = 400 \text{ м}.$$

По поводу второго вопроса задачи договоримся так. Будем считать изображение различимым, если за время экспозиции изображение одного листа сместится не более чем на размер минимального пятна почернения:

$$|\vec{v}|\tau\frac{F}{d} < \delta,$$

где $\vec{v}$ — искомая скорость самолета. Отсюда

$$|\vec{v}| < \frac{\delta d}{\tau F} = 100 \text{ м/с} = 360 \text{ км/ч}.$$

Задача 4. *Ближайшая точка, на которую может быть сфокусирован (наведен) фотоаппарат, находится на расстоянии $d = 2$ м от объектива. Куда переместится эта точка, если к объективу вплотную приставить тонкую положительную линзу с оптической силой $D = +5$ дптр?*

Как мы уже говорили, фокусирование фотоаппарата (наводка на резкость) осуществляется механическим перемещением объектива. Но это перемещение ограничено, поэтому аппарат нельзя сфокусировать на точки, находящиеся ближе некоторого расстояния. В данном случае это расстояние равно $d = 2$ м.

Пусть предмет находится от объектива на расстоянии $d_1 < d$. Очевидно, что насадочная линза должна создать изображение этого предмета на расстоянии d, на которое наведен объектив без дополнительной линзы.

По формуле линзы

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d} = D$$

(знак «минус» взят потому, что изображение мнимое), откуда

$$d_1 = \frac{d}{Dd + 1} \approx 0{,}18 \text{ м}.$$

Эту задачу можно решить по-другому. Обозначим через D_0 оптическую силу объектива. По формуле линзы

$$D_0 = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

где f — расстояние от объектива до фотопленки. Известно, что, если две тонкие линзы расположены вплотную друг к другу, их оптические силы суммируются. Поэтому для объектива с насадочной линзой формулу линзы можно записать так:

$$D_0 + D = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f}.$$

Вычитая из этого равенства предыдущее, найдем d_1.

Задача 5. *При фотографировании на пленке получаются одинаково резко изображенными не только* *те предметы (находящиеся на расстоянии d_0), на которые наведен объектив фотоаппарата, но также и предметы, находящиеся несколько ближе и несколько дальше этого расстояния. Другими словами, резкими получаются предметы, лежащие внутри некоторой области $d_1 \div d_2$ ($d_1 < d_0$, $d_2 > d_0$); d_1 называется ближней границей глубины резкости, d_2 — дальней границей. Оказалось, что при наведении объектива фотоаппарата на предметы, находящиеся на расстоянии $d_0 = 10$ м, ближняя граница глубины резкости равна $d_1 = 7{,}8$ м. Найти дальнюю границу.*

Предположим, что с помощью объектива DE получены изображения трех точек, лежащих на оптической оси объектива на разных расстояниях от него (рис. 3). Пусть это будут точки C_0, C_1 и C_2. Поместим фотопленку в точку C_0. Будем считать, что размер минимальной области почернения фотопленки равен $|AB|$ (на рисунке для наглядности он сильно увеличен). Если диаметр объектива таков, что лучи, образующие точки C_1 и C_2, не выходят за пределы области AB, при фотографировании любой из этих точек почернеет вся эта область, то есть изображения этих точек будут одинаково резкими.

Очевидно, чем меньше диаметр объектива, тем легче выполняется это условие. Вот почему при диафрагмировании объектива увеличивается глубина резкости.

Перейдем теперь к количественным расчетам. Из подобия треугольников DC_2O и AC_2C_0 следует

$$\frac{|AC_0|}{|DO|} = \frac{|C_2C_0|}{|OC_2|}.$$

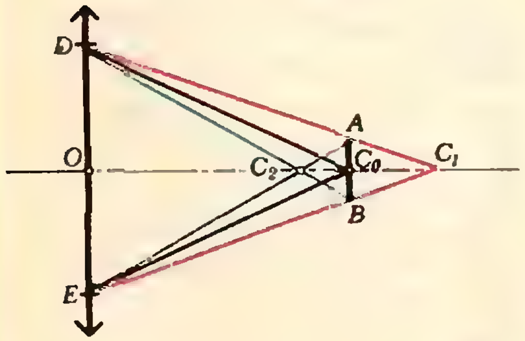


Рис. 3.

Аналогично, для треугольников DC_1O и AC_1C_0

$$\frac{|AC_0|}{|DO|} = \frac{|C_1C_0|}{|OC_1|}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{|C_2C_0|}{|OC_2|} = \frac{|C_1C_0|}{|OC_1|},$$

или

$$\frac{1}{|OC_2|} + \frac{1}{|OC_1|} = \frac{2}{|OC_0|} \qquad (*)$$

(так как $|C_2C_0| = |OC_0| - |OC_2|$ и $|C_1C_0| = |OC_1| - |OC_0|$).

По формуле линзы

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{|OC_0|} = \frac{1}{F},$$

откуда

$$|OC_0| = \frac{Fd_0}{d_0 - F},$$

где F — фокусное расстояние объектива. Аналогично получаем

$$|OC_1| = \frac{Fd_1}{d_1 - F} \text{ и } |OC_2| = \frac{Fd_2}{d_2 - F}.$$

Подставляя полученные выражения для $|OC_0|$, $|OC_1|$ и $|OC_2|$ в соотношение $(*)$ и проведя несложные преобразования, получаем

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{2}{d_0}.$$

Отсюда найдем d_2:

$$d_2 = \frac{d_0 d_1}{2d_1 - d_0} \approx 13{,}9 \text{ м}.$$

Упражнения

1. Фотографом был сфотографирован пробегающий мимо бегун. Расстояние до бегуна $d = 10$ м, фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F = 50$ мм. Размытость изображения на пленке оказалась равной $\delta = 1$ мм. Время экспозиции $\tau = 1/50$ с. Определить скорость бегуна.

2. Небольшой предмет фотографируют аппаратом «Зенит» с объективом, имеющим фокусное расстояние $F = 50$ мм, дважды. Сначала — с наименьшего допустимого для данного объектива расстояния $d = 0{,}5$ м. Второй раз — присоединив объектив к камере через удлинительное кольцо высотой $h = 25$ мм. Чему равно отношение размеров изображений, полученных на фотопленке?

3. При фотографировании одинаково резко получаются предметы, находящиеся на расстояниях от $d_1 = 15$ м до $d_2 = 30$ м от фотоаппарата. Не меняя наводки фотоаппарата, объектив задиафрагмировали (то есть уменьшили диаметр открытой части объектива). Ближняя граница глубины резкости стала равна $d_1' = 10$ м. Найти дальнюю границу.

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Механико-математический факультет

Вступительных экзаменов по математике на механико-математический факультет МГУ многие боятся, считая, что поступающим предлагают головоломно-трудные задачи. Эти опасения не обоснованы. Вступительные экзамены проводятся в соответствии с «Программой вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР». Задачи, предлагаемые на приемных экзаменах, требуют для решения лишь хорошего знания этой программы, умения пользоваться правилами и приемами, изученными в школе. Никаких дополнительных знаний от поступающих не требуется. Нередко молодые люди, напуганные программами физико-математических кружков и задачами различных олимпиад, не решаются подавать заявления на мехмат МГУ. Между тем, многие из них бывают неплохо подготовлены и могли бы успешно участвовать в конкурсе.

Две-три задачи в вариантах письменного экзамена достаточно просты и вполне доступны каждому, кто усвоил школьную программу. Однако на письменном экзамене получить высокую оценку нелегко, так как, наряду с нетрудными задачами, в варианты включаются и более сложные задачи, решение которых требует достаточно высокой математической культуры.

В 1979 году на выполнение письменной работы отводилось четыре часа. Для получения положительной оценки достаточно было правильно решить две задачи.

Вариант 1

1. Найти все решения уравнения

$$1-5\sin x+2\cos^2 x=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x>0$.

2. Отрезок KL является диаметром некоторой окружности. Через его концы K и L проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках P и Q, лежащих по одну сторону от прямой KL. Найти радиус окружности, если $\widehat{PKL}=\frac{\pi}{3}$ и точка пересечения прямых KP и QL удалена от точек P и Q на расстояние 1.

3. Найти точки минимума функции $y=x^3-2x|x-2|$, определенной на отрезке $[0;\ 3]$, и ее наибольшее значение на этом отрезке.

4. Решить неравенство

$$\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(2+x)}{x}.$$

5. Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC, в котором $\widehat{A}=\frac{\pi}{2}$, $\widehat{C}=\frac{\pi}{6}$, $|BC|=2\sqrt{2}$. Длины ребер AD, BD, CD равны между собой. Сфера радиуса 1 касается ребер AD, BD, продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC. Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки A к сфере.

Разберем подробно этот вариант.

1. Ответ. $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно квадратному (относительно $\sin x$) уравнению:

$$2\sin^2 x+5\sin x-3=0,$$

которое имеет два решения: $\sin x=-3$ и $\sin x=\frac{1}{2}$. Подходит, конечно, только второе. Решая его относительно x, находим

$$x=(-1)^m\arcsin\frac{1}{2}+\pi m\quad(m\in\mathbf{Z}),\quad(1)$$

что в данном случае удобно записать в виде двух серий решений:

$$x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi k\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

$$x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi l\quad(l\in\mathbf{Z}).$$

Условию $\cos x>0$ удовлетворяет только первая серия.

В целом абитуриенты с этой задачей справились успешно. Некоторые поступающие, записавшие решение уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ в виде (1), затем не сумели отобрать значения x, удовлетворяющие условию $\cos x>0$.

2. Ответ. 1. Решение. Из условия задачи следует, что $P\neq Q$, так как в противном случае точка пересечения прямых KP и QL (точка $P=Q$) была бы удалена от точек P и Q на расстояние 0. Нарисуем окружность, диаметр KL и, под углом $\frac{\pi}{3}$, хорду KP (рис. 1).

Рассмотрим два случая расположения точки Q: $Q\in\smile KP$ (рис. 2) и $Q\in\smile PL$ (рис. 3). Пусть $(LQ)\cap(KP)=A$.

В первом случае $\widehat{PQL}=\widehat{PKL}$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу) и $\widehat{APQ}=\widehat{PQL}$ ($|AP|=|AQ|$); значит, $\widehat{QAP}=\pi-2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ $\left(\widehat{PKL}=\frac{\pi}{3}\right)$, что невозможно, так как $\angle QAP$ — внешний угол в прямоугольном

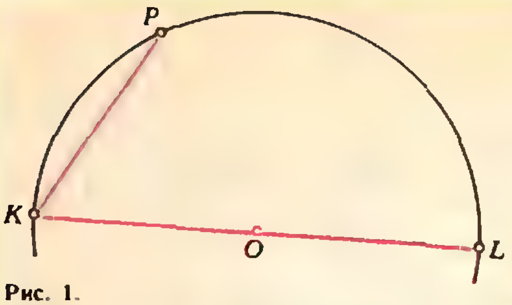


Рис. 1.

треугольнике PAL $\left(\widehat{KPL}=\frac{\pi}{2}\right)$. Итак, первый случай невозможен.

Во втором случае $\widehat{PQL}=\pi-\widehat{PKL}$ (четырехугольник $PQLK$ вписан в окружность), $\widehat{PQA}=\pi-\widehat{PQL}=\widehat{PKL}=\frac{\pi}{3}$, $\widehat{QPA}=\frac{\pi}{3}$ ($|AP|=|AQ|$), $\widehat{QAP}=\pi-2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$, $\widehat{ALK}=\pi-2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$. Значит, $\triangle AKL$ — равносторонний ($\widehat{ALK}=\widehat{LAK}=\widehat{AKL}$). В этом треугольнике LP — высота $\left(\widehat{LPK}=\frac{\pi}{2}\right)$, *поэтому* LP — медиана. Следовательно, $|AK|=2|AP|=2$, $|KL|=|AK|=2$, откуда $|OK|=1$.

Многие абитуриенты решали эту задачу, сразу считая, что точки P и Q расположены так, как изображено на рисунке 3. Чертеж есть лишь иллюстрация к решению геометрической задачи. Если решение использует какое-то свойство чертежа (например, равенство $\widehat{PQL}=\pi-\widehat{PKL}$, верное в случае, изображенном на рисунке 3, и неверное в случае, изображенном на рисунке 2), то наличие этого свойства должно быть обосновано. Иначе решение задачи будет неполным.

3. Ответ. Функция $f(x)=x^3-2x\cdot|x-2|$ ($x\in[0;\ 3]$) имеет одну точку минимума $x=\frac{2}{3}$, ее наибольшее значение на $[0; 3]$ равно 21 $\left(\max\limits_{[0;\,3]} f(x)=f(3)=21\right)$. **Решение.** По условию областью определения исследуемой функции f является отрезок $[0;\ 3]$. По определению модуля

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2x^2-4x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 2,\\ x^3-2x^2+4x, & \text{если } 2<x\leqslant 3.\end{cases} \qquad (2)$$

Значит,

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+4x-4, & \text{если } 0<x<2,\\ 3x^2-4x+4, & \text{если } 2<x<3.\end{cases}$$

На $]0;\ 2[$ функция f имеет одну критическую точку $x=\frac{2}{3}$, причем $f'(x)<0$ на $\left]0;\ \frac{2}{3}\right[$, $f'\left(\frac{2}{3}\right)=0$ и $f'(x)>0$ на $\left]\frac{2}{3};\ 2\right[$. Значит, $x=\frac{2}{3}$ — точка минимума.

На $]2;\ 3]$ $f'(x)>0$. Значит, на $]2;\ 3[$ функция f не имеет критических точек.

Рассмотрим теперь точку $x=2$. Эта точка не может быть точкой минимума, так как в любой окрестности точки 2 функция f принимает значения, меньшие $f(2)$; действительно, при $0\leqslant x\leqslant 2$ функция f совпадает с многочленом $f_1(x)=x^3+2x^2-4x$, который на $\left]\frac{2}{3},\ +\infty\right[$ возрастает.

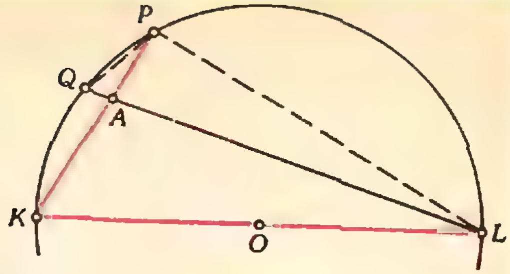


Рис. 2.

Наибольшее значение $\max\limits_{[0;\ 3]} f(x)$ функции f на $[0;\ 3]$, очевидно, равно наибольшему из чисел $\max\limits_{[0;\ 2]} f_1(x)$, $\max\limits_{[2;\ 3]} f_2(x)$, где $f_2(x)=x^3-2x^2+4x$; эти числа легко найти: они равны $f_1(0)=0$ и $f_2(3)=21$, поэтому $\max\limits_{[0;\ 3]} f(x)=f(3)=21$.

Значительная часть ошибок в решении этой задачи связана с формальным усвоением соответствующих разделов школьной программы. Например, некоторые абитуриенты дифференцировали функцию f в областях, содержащих точку $x=2$, где функция в действительности производной не имеет. Многие абитуриенты не смогли правильно объяснить, почему точка $x=2$ не является точкой минимума данной функции.

Отметим также нечеткое знание определений. Некоторые абитуриенты путали понятия «точка минимума» и «наименьшее значение» (характерное рассуждение: «точка $x=2$ не является точкой минимума, так как $f(2)=8>f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{40}{27}$»).

Часть абитуриентов под точкой минимума понимала точку с координатами $\left(\frac{2}{3};\ -\frac{40}{27}\right)$, а не точку $x=\frac{2}{3}$ из области определения функции, как должно быть в соответствии со школьным учебником.

4. Ответ. $\left]-\frac{1}{2};\ 0\right[$. ***Решение.*** *Обе* части данного неравенства определены при

$$\begin{cases} 2x+1\neq 0,\\ 2+x>0,\\ x\neq 0.\end{cases}$$

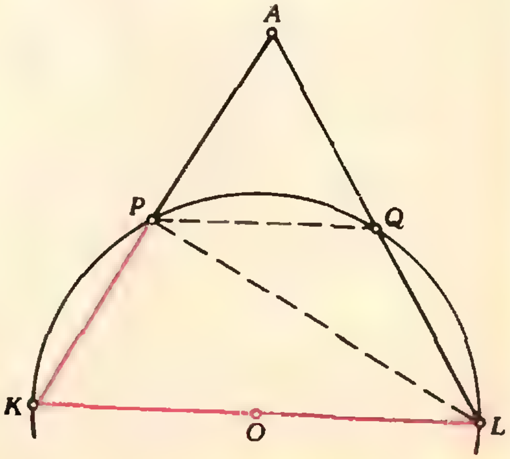


Рис. 3

то есть на множестве $\left]-2;\ -\frac{1}{2}\right[\ \cup$ $\cup \left]-\frac{1}{2};0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$.

На множестве $\left]-2;\ -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};0\right[$ данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{6x}{2x+1} < 1+\log_2(2+x)$$

или

$$\frac{4x-1}{2x+1} < \log_2(2+x). \qquad (1)$$

На множестве $]0;\ +\infty[$ оно равносильно неравенству

$$\frac{4x-1}{2x+1} > \log_2(2+x). \qquad (2)$$

Нарисуем примерные графики функций $y=\frac{4x-1}{2x+1}=2+\frac{-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}$ и $y=\log_2(2+x)$ на одном рисунке (рис. 4*).

При $x<-\frac{1}{2}$ имеем $\frac{4x-1}{2x+1}>2$, $\log_2(2+x)<1$. Значит, на $\left]-2;\ -\frac{1}{2}\right[$ неравенство (1) решений не имеет.

При $-\frac{1}{2}<x<0$ имеем $\frac{4x-1}{2x+1}<0$, $\log_2(2+x)>0$. Значит, неравенство (1) справедливо при всех $x\in\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

При $0<x<1$ имеем $\frac{4x-1}{2x+1}<1$, $\log_2(2+x)>1$ — на $]0;\ 1[$ неравенство (2) решений не имеет.

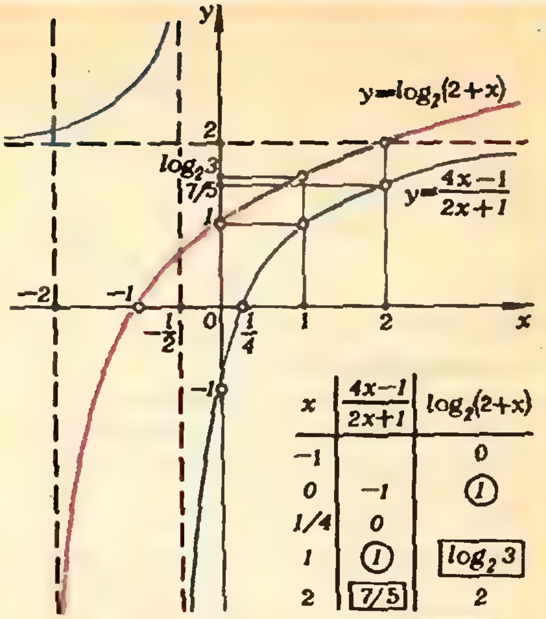
При $1\leqslant x<2$ имеем $\frac{4x-1}{2x+1}<\frac{7}{5}$, $\log_2(2+x)>\log_2 3$, но неравенство $\frac{7}{5}<\log_2 3$ равносильно неравенствам $2^{7/5}<3$, $2^7<3^5$, $128<243$; значит, на $[1;\ 2[$ неравенство (2) тоже решений не имеет.

Наконец, при $x\geqslant 2$ имеем $\frac{4x-1}{2x+1}<2$, $\log_2(2+x)>2$ — тоже нет решений.

5. Ответ. $\sqrt{3}-1$. Решение. Обозначим через H основание высоты пирамиды, проведенной из вершины D, и через M — точку касания сферы с плоскостью ABC (рис. 5). Так как $|AD|=|BD|=|CD|$ и равные наклонные имеют равные проекции, $|AH|=|BH|=|CH|$. Это означает, что точка H является центром окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника ABC, то есть H — середина гипотенузы BC. Обозначим через A_1, B_1, C_1 точки касания сферы с прямыми AD, BD, CD соответственно. Из условия следует, что

$$\begin{cases} |AA_1|=|AD|-|DA_1|, \\ |BB_1|=|BD|-|DB_1|, \\ |CC_1|=|CD|+|DC_1|. \end{cases} \qquad (1)$$

Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к сфере, равновелики, то



x	$\frac{4x-1}{2x+1}$	$\log_2(2+x)$
-1		0
0	-1	①
$1/4$	0	
1	①	$\boxed{\log_2 3}$
2	$\boxed{7/5}$	2

Рис. 4.

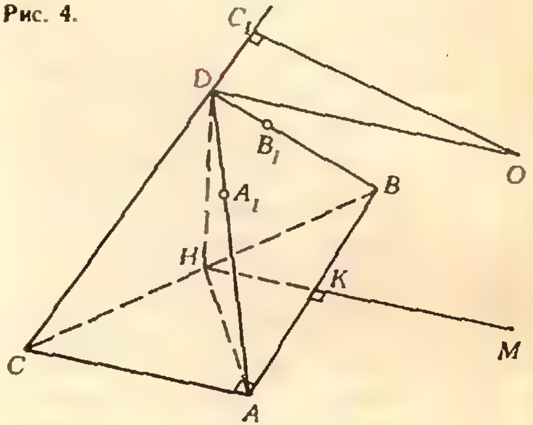


Рис. 5.

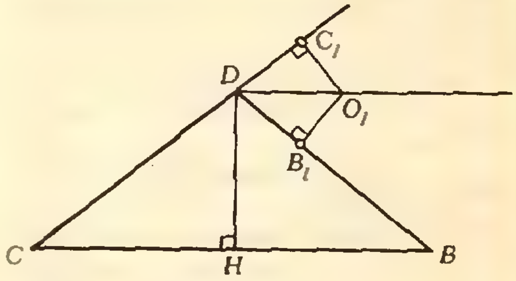


Рис. 6.

---

*) При дальнейшем решении никаких ссылок на этот рисунок не будет — тем не менее фактически именно он подсказывает все дальнейшие рассуждения.

$|DA_1|=|DB_1|=|DC_1|$, $|AM|=|AA_1|$, $|BM|=|BB_1|$ и $|CM|=|CC_1|$. Из последних равенств и равенств (1) находим

$$|AM|=|AA_1|=|BB_1|=|BM|.$$

Это означает, что точка M лежит в плоскости ABC на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Далее из равенств (1) следует

$$|CM|=|CC_1|>|CD|=|BD|>|BB_1|=|BM|.$$

Значит, точка M лежит на луче HK, где K — середина отрезка AB.
Обозначим через O — центр сферы и через O_1 — ортогональную проекцию точки O на плоскость BCD.
Из равенства $|OB_1|=|OC_1|$ следует $|O_1B_1|=|O_1C_1|$. Так как $|DC_1|=|DB_1|$, треугольники $D\widehat{O_1}C_1$ и $D\widehat{O_1}B_1$ (рис. 6) конгруэнтны. Значит, $C_1DO_1=B_1DO_1$, то есть DO_1 — биссектриса угла C_1DB_1.
Треугольник BCD — равнобедренный, следовательно, DH — биссектриса угла CDB. Таким образом,

$$\widehat{HDO_1}=\frac{1}{2}\widehat{CDB}+\frac{1}{2}\widehat{B_1DC_1}=\frac{1}{2}(\widehat{CDB}+\widehat{B_1DC_1})=\frac{\pi}{2}$$

или $HD\perp DO_1$. Так как прямая OO_1 перпендикулярна плоскости BCD, то $HD\perp OO_1$. Значит, прямая DH перпендикулярна плоскости OO_1D. Но плоскость ABC также перпендикулярна прямой DH. Значит, плоскости ABC и OO_1D параллельны.
Прямые DH и OM параллельны, как два перпендикуляра к одной плоскости ABC. Значит, точки D, H, O, M лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает параллельные плоскости ABC и OO_1D по прямым HM и DO. Значит, $HM\|DO$. Отсюда следует, что четырехугольник $HMOD$ — параллелограмм и, в частности, $|DH|=|OM|$, $|HM|=|DO|$. Поскольку $|OM|$ — радиус сферы, $|DH|=|OM|=1$. Это дает возможность вычислить боковые ребра пирамиды:

$$|AD|=|BD|=|CD|=\sqrt{|CH|^2+|DH|^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}.$$

Из $DO\|HM$ и $HM\|AC$ следует $DO\|AC$ и $\widehat{ODC_1}=\widehat{ACD}$. Из прямоугольного треугольника ABC находим

$$|AC|=|BC|\cdot\cos\widehat{C}=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}.$$

Отсюда следует, что равнобедренный треугольник ADC является прямоугольным ($|AC|^2=|CD|^2+|DA|^2$) и, в частности, $\widehat{ACD}=\frac{\pi}{4}$. Из прямоугольного треугольника ODC_1

$$|OD|=\frac{|OC_1|}{\sin\widehat{ODC_1}}=\frac{|OC_1|}{\sin\widehat{ACD}}=\frac{|OC_1|}{\sin\pi/4}=\frac{1}{\sqrt{2}/2}=\sqrt{2},$$

откуда $|HM|=\sqrt{2}$.

Из $\triangle HBM$ по теореме косинусов находим

$$|BM|^2=|BH|^2+|HM|^2-2|BH|\cdot|HM|\cdot\cos\widehat{BHM}=2+2-4\cdot\cos\frac{\pi}{6}=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2.$$

И, наконец, $|AM|=|BM|=\sqrt{3}-1$. Так как отрезки всех касательных, проведенных из точки A к сфере, равновелики, искомая величина равна $\sqrt{3}-1$.
Неумение представить себе конфигурацию в пространстве — основная причина, из-за которой многие абитуриенты слабо продвинулись в решении этой задачи.

Вариант 2

1. Найти все решения уравнения

$$4-5\cos x-2\sin^2 x=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x>0$.

2. Отрезок AB является диаметром некоторой окружности. Через его концы A и B проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках C и D, лежащих по одну сторону от прямой AB. Точка O, в которой пересекаются эти прямые, равноудалена от концов диаметра AB. Найти радиус окружности, если $|CD|=1$ и $\widehat{OCD}=\frac{\pi}{3}$.

3. Найти точки минимума функции $y=4x^3-x|x-2|$, определенной на отрезке $[0;\ 3]$, и ее наибольшее значение на этом отрезке.

4. Решить неравенство

$$\frac{2+\log_3 x}{x-1}<\frac{6}{2x-1}.$$

5. Основанием пирамиды $PQRS$ является прямоугольный треугольник PQR, в котором гипотенуза QR равна 2 и катет PQ равен 1. Длины ребер PS, QS, RS равны между собой. Сфера радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ касается ребра RS, продолжений ребер PS, QS за точку S и плоскости PQR. Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки Q к сфере.

Ответы

1. $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. **2.** 1. **3.** Точка минимума $x=\frac{1}{3}$, $\max\limits_{[0,\ 3]} f(x)=f(3)=105$. **4.** $\left]\frac{1}{2};\ 1\right[$. **5.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

И. Мельников, Ю. Нестеренко

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Небольшое тело соскальзывает по наклонной поверхности с высоты $H=1{,}2$ м. Наклонная поверхность переходит в петлю, как показано на рисунке 1. Найти величину работы силы трения, если известно, что сила давления тела на петлю в верхней точке равна нулю, масса тела $m=10$ г, радиус петли $R=0{,}4$ м. Ускорение свободного падения считать равным $g=10$ м/с^2.

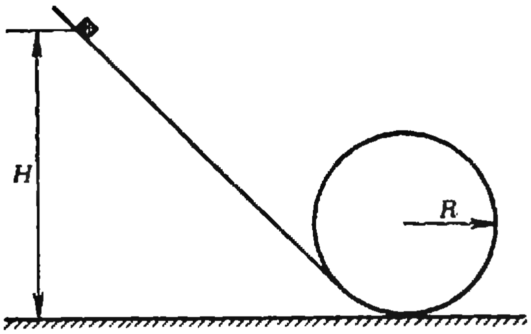


Рис. 1.

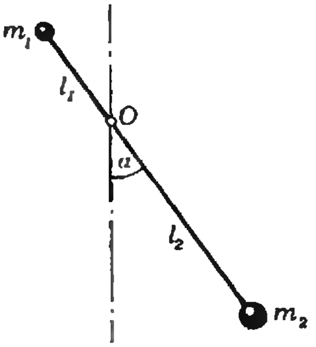


Рис. 2.

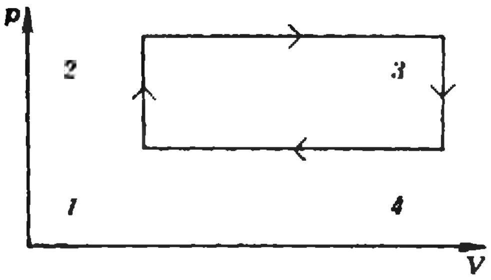


Рис. 3.

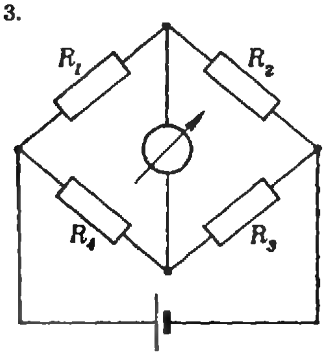


Рис. 4.

2. Невесомый рычаг может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O (рис. 2). Массы m_1 и m_2, закрепленные на концах рычага, находятся, соответственно, на расстояниях l_1 и l_2 от оси. В начальном положении рычаг отклонен на угол α от вертикального положения. После освобождения рычаг совершает колебания. Определить линейную скорость массы m_2 в момент прохождения положения равновесия.

3. С каким ускорением будут двигаться по наклонной плоскости два жестко скрепленных между собой тела, имеющих массы m_1 и m_2? Коэффициенты трения между телами и наклонной плоскостью равны, соответственно, k_1 и k_2. Угол наклонной плоскости равен α.

4. Идеальный газ совершает работу. При этом состояние газа меняется по замкнутому циклу, состоящему из двух изохор и двух изобар (рис. 3). Температуры газа в точках 1 и 3 равны, соответственно, T_1 и T_3. Определить работу, совершаемую одним молем газа, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

5. Смешали $V_1 = 1$ м^3 воздуха с влажностью $\alpha_1 = 20\%$ и $V_2 = 2$ м^3 воздуха с влажностью $\alpha_2 = 30\%$. Обе порции были взяты при одинаковых температурах. Определить относительную влажность α получившейся смеси.

6. В цилиндре под поршнем в пространстве объемом $V_1 = 1{,}5$ л находится воздух и насыщенный водяной пар при температуре $t_1 = 20°$C. Какова будет относительная влажность воздуха α в цилиндре, если объем уменьшить до величины $V_2 = 0{,}1$ л, а температуру повысить до $t_2 = 100°$C? Давление насыщенного водяного пара при 20°C равно $p_{н1} = 2{,}2 \cdot 10^3$ Па. (Ненасыщенный пар, содержащийся в воздухе, считать идеальным газом.)

7. Плоский конденсатор подключили к источнику постоянного напряжения $U = 300$ В. Затем источник отсоединили. Какую работу необходимо совершить, чтобы раздвинуть пластины конденсатора на расстояние в два раза больше первоначального? Начальная емкость конденсатора $C_0 = 100$ пФ $= 10^{-10}$ Ф.

8. В схеме, изображенной на рисунке 4, сопротивления равны $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 8{,}95$ Ом и $R_4 = 3$ Ом. До какой температуры необходимо нагреть сопротивление R_3, чтобы через гальванометр не шел ток? Температурный коэффициент сопротивления равен $\alpha = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$. Начальная температура сопротивления R_3 равна $t_0 = 20°$C.

9. Оптическая система состоит из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 4$ см и тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = -3$ см. Расстояние между линзами $l = 2$ см. Определить, в каких точках (на каком расстоянии от линз) сойдутся параллельные лучи света, падающие на систему с одной и с другой стороны?

10. В концы отрезка трубы, внутренняя сторона которой зачернена, вставлены собирающая (с одной стороны) и рассеивающая (с другой стороны) линзы. Диаметр трубы $D = 3$ см, длина отрезка трубы $l = 12$ см. Со стороны собирающей линзы на трубу вдоль ее оси падает широкий пучок параллельных лучей. Лучи, прошедшие через трубу, выходят из нее параллельным пучком диаметром $d = 1$ см. Чему равны фокусные расстояния линз?

Механико-математический факультет

1. Клин с углом при основании, равным $\alpha = 45°$, может скользить вдоль горизонтальной плоскости. На клине находится брусок

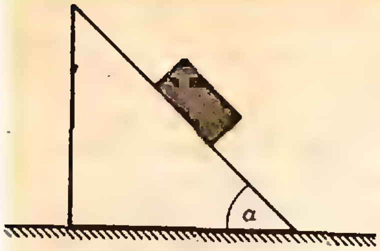


Рис. 5.

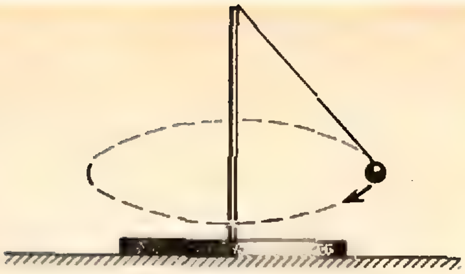


Рис. 6.

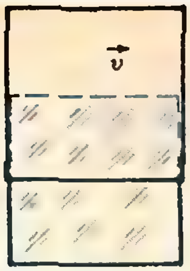


Рис. 7.

(рис. 5). С каким ускорением $\vec{a}$ должен двигаться клин в горизонтальном направлении (*в плоскости рисунка*), чтобы брусок относительно клина находился в покое, если коэффициент трения между поверхностями клина и бруска равен $\mu=0{,}1$?

2. На горизонтальном столе лежит тонкий диск массой $M=500$ г и радиусом $R=15$ см (рис. 6). В центре диска укреплен тонкий невесомый вертикальный стержень длиной $l=40$ см. К верхнему концу стержня на невесомой нерастяжимой нити подвешен маленький шарик массой $m=300$ г. Длина нити меньше *длины стержня*. Шарик приводится в движение так, что он описывает окружность в горизонтальной плоскости вокруг стержня. Какой максимальный угол α может при этом составлять нить со стержнем, чтобы диск не отрывался от стола? Считать, что вследствие трения диск не может скользить по столу.

3. Теннисный мяч ударяют ракеткой у самой поверхности Земли, сообщая ему начальную скорость $\vec{v}$ ($|\vec{v}|=20$ м/с), направленную под углом $\alpha=45°$ к горизонту. Мяч летит к вертикальной стене, двигаясь в плоскости, перпендикулярной к этой стене, и испытывает со стеной абсолютно упругое соударение. Стена находится от места удара на расстоянии $l=15$ м. На каком *расстоянии x* от места удара мяч упадет на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Сухой воздух заполняет закрытый сосуд объемом $V=25$ л при давлении $p_1=10^5$ *Па и температуре* $t_1=-23$°С. В сосуд кладут кусок льда массой $m=9$ г и нагревают сосуд до температуры $t_2=127$°С. Определить давление влажного воздуха. Газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К), давление насыщенных паров воды при температуре $t_2=127$°С равно $p_н=2{,}5\cdot10^5$ Па.

5. Алюминиевый конус с углом между осью и образующей, равным $\alpha=30°$, стоит на горизонтальном столе. На конус надето тонкое железное кольцо, плоскость которого находится на *расстоянии $h=5$ см ниже* вершины конуса. На какую величину Δh изменится расстояние от вершины конуса до плоскости кольца, если температура конуса и кольца повысится на величину $\Delta t=100$°С? *Коэффициенты* линейного расширения алюминия $\alpha_1=2{,}4\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$ и железа $\alpha_2=1{,}2\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$. Трение кольца о поверхность конуса отсутствует.

6. Пластины плоского конденсатора имеют форму квадрата со стороной $a=20$ см. Расстояние между ними $d=6$ мм. *Пластины* присоединены к источнику постоянного тока, ЭДС которого $\mathcal{E}=500$ В. В пространство между пластинами вдвигают, как показано на рисунке 7, с постоянной скоростью $\vec{v}$ ($|\vec{v}|=2$ мм/с) квадратную стеклянную пластинку, размеры которой таковы, что она в конце концов заполняет все пространство внутри конденсатора. Найти силу тока I, текущего по проводам от источника к конденсатору, пока пластинка движется. Сопротивление проводов не учитывать. *Краевыми эффектами пренебречь*. Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon=7$. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\times$ $\times10^{-12}$ Ф/м.

7. Электрическая цепь состоит из соединенных *последовательно* источника постоянного напряжения, сопротивления $R=500$ Ом и плоского конденсатора, у которого площадь пластин $S=4$ см², а расстояние между пластинами можно изменять. Если пластины сдвинуты до соприкосновения друг с другом, в цепи течет ток силы $I=0{,}2$ А. Какой величины заряды будут на пластинах, если пластины раздвинуть на расстояние $d=2$ мм? Внутренним сопротивлением источника пренебречь. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=$ $=8{,}85\cdot10^{-12}$ *Ф/м*.

8. Жесткая проводящая рамка квадратной формы лежит на горизонтальной непроводящей поверхности и находится в магнитном поле, линии индукции которого *параллельны* двум сторонам рамки. Масса рамки $m=20$ г, длина ее стороны $a=4$ см, абсолютная величина магнитной индукции $|\vec{B}|=0{,}5$ Тл. Какой силы I постоянный ток нужно пропускать по рамке, чтобы одна из ее сторон *начала приподниматься*?

9. Внутренняя поверхность конуса, покрытая отражающим слоем, образует коническое зеркало. Вдоль оси конуса внутри него протянута тонкая светящаяся нить. При каком минимальном угле α раствора конуса лучи, идущие от нити, будут отражаться от поверхности конуса не более одного раза?

10. Предмет находится на расстоянии $d=10$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см. Во сколько раз изменится величина *изображения, если на* место собирающей линзы поставить рассеивающую с тем же по модулю фокусным расстоянием?

С. Кротов. Л. Михеева

Ю. Первин, А. Салтовский

Память ЭВМ

Современная электронная вычислительная машина — завод в миниатюре. Под словом «завод» подразумевается, конечно, не только комплекс производственных зданий, которые заполнены станками и оборудованием; завод — это еще и технологический процесс (описываемый перечнем правил обработки изделий, инструкциями, наставлениями, чертежами), выполнение которого приводит к чудесному превращению сырья в готовую продукцию.

В ЭВМ сырьем, полуфабрикатами на всех стадиях технологического процесса, а также готовой продукцией является *информация*, то есть записанные в символьной форме сведения об объектах, явлениях и процессах окружающего мира.

Если ЭВМ — завод по переработке информации, то складом, на котором хранятся заготовленное для переработки сырье, заготовки, прошедшие часть технологического процесса, а также готовая к отправке продукция, является *память* или *запоминающее устройство* (ЗУ).

Таким образом, память или ЗУ — техническое устройство, предназначенное для хранения информации. Разумеется, это устройство должно своевременно выдавать и записывать информацию. Расторопность, а точнее быстродействие, памяти выражают названиями типов запоминающих устройств — *сверхоперативная память, оперативная память, внешняя память*.

Чем быстрее работает память, тем она обходится дороже. В больших ЭВМ, в которых применяют память различного быстродействия, отношения между центральной частью ЭВМ и различными видами памяти построены иерархически, так что обращение в более дешевую и емкую внешнюю память напоминает переговоры короля с королевой в «Балладе о королевском бутерброде».

Кодирование

Физическим носителем информации является *сигнал* (в ЭВМ — электрический сигнал). Преобразование информации из одной формы в другую осуществляется при помощи *кодирования*. Наши знания об окружающем мире в известной степени определяются способностью воспринимать и анализировать информацию, т. е. умением правильно истолковывать *код*. Механизм кодирования может быть значительно сложнее того, который разгадал Шерлок Холмс в «Пляшущих человечках». Так, например, генетики считают, что в хромосомах клетки эмбриона записан полный «план-чертеж» будущего человека.

Создатели первых ЭВМ должны были решить, как лучше всего кодировать обрабатываемую и хранимую информацию, чтобы обеспечить

— простоту и надежность;
— наибольшее быстродействие;
— минимум затрат оборудования (экономичность).

Наиболее полно всем этим требованиям удовлетворяет система *двоичного кодирования*, где для изображения информации используются числовые комбинации, состоящие всего из двух цифр — 0 и 1. Более подробно об этом можно прочесть в книге Ф. Бауэра и Г. Гооза «Информатика» (М., «Мир», 1976).

С точки зрения удобства общения с ЭВМ разумнее всего было бы использовать традиционную десятичную систему счисления (между прочим, она привычна нам лишь потому, что именно десять пальцев служили древнему человеку первыми портативными ЗУ). Но перечисленные выше технические требования оказали решающее значение при выборе системы кодирования — пришлось смириться с тем фактом, что с точки зрения машинной обработки информации наиболее разумной является не десятичная, а двоичная система счисления.

Материал запоминает

Материал, с помощью которого человек организовывал запись и хранение информации, был самым разнообразным — камни, пальцы и палочки, а позднее — бумага и перо. Все эти материалы обладали разнообразными достоинствами, в числе которых была, например, наглядность, но общим главным недостатком подобных систем хранения оставалось очень низкое быстродействие: попробуйте-ка пересчитать несколько раз сотню камней или отыскать нужный материал в толстой книге.

Современная техника располагает материалами, которые дают возможность изготовить компактные и высокоскоростные устройства памяти, позволяющие хранить большие объемы информации. Целый ряд материалов и простых устройств обладает замечательным свойством сравнительно долго сохранять одно из двух устойчивых состояний: феррит (см. ниже) сохраняет свою намагниченность и после того, как выключен ток в катушке намагничивания; конденсатор остается заряженным после того, как отключено подведенное к нему напряжение; электромеханическое реле сохраняет замкнутыми свои контакты до тех пор, пока через соленоидную катушку протекает ток.

Феррит

Способность материала «запоминать» результаты предыдущего опыта основана на замечательном свойстве, которое называют *гистерезисом*.

В качестве запоминающего материала, использующего явление гистерезиса, в ЭВМ довольно распространен феррит — искусственный материал с исключительно яркими магнитными свойствами. На рисунке 1 представлена зависимость направления и величины магнитного потока в феррите от величины и направления тока в катушке намагничивания. Эта зависимость имеет ступенчатый (прямоугольный) характер.

В памяти обычно используются кольцеобразные ферриты: замкнутый в ферритовом кольце магнитный поток наилучшим образом сохраняет энергию, затрачиваемую на перемагничивание (рис. 2).

При хранении информации на ферритах договариваются, что коль-

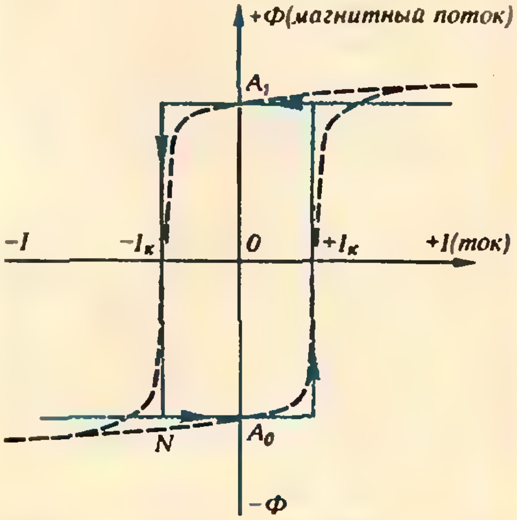


Рис. 1. **Прямоугольная петля гистерезиса — характеристика ферритов: материалов с особенно яркими магнитными свойствами.**

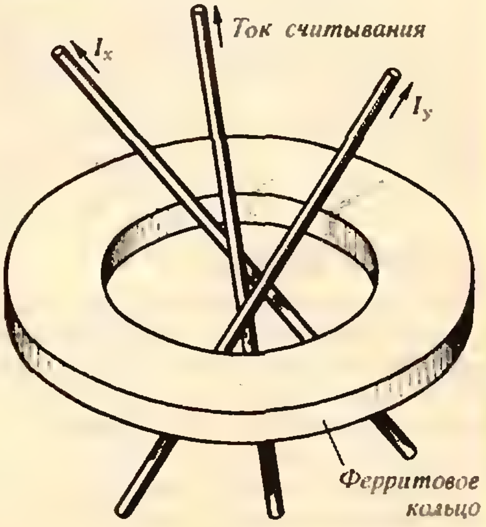


Рис. 2. **Ферритовое кольцо — наиболее распространенный элемент магнитных запоминающих устройств.**

цо хранит «1», если значение магнитного потока внутри кольца соответствует точке A_1 (рис. 1), и «0» при значении магнитного потока, соответствующем точке A_0.

Чтобы записать в ферритовое кольцо информацию, надо изменить направление и величину магнитного потока, для чего через катушку намагничивания пропускается электрический ток соответствующей величины и направления. Как видно из графика, резкое изменение значения магнитного потока произойдет в тот момент, когда величина тока в катушке достигнет некоторого критического значения $+I_K$ (рис. 1). Узнать, что именно хранит ферритовое кольцо, можно, перемагничивая кольцо в определенном направлении, например к точке A_0. Из курса физики известно, что изменение магнитного потока в замкнутом контуре вызывает появление ЭДС. Именно по величине ЭДС можно узнать, «0» или «1» хранило ферритовое кольцо. В самом деле, если кольцо хранило «единицу» (значение магнитного потока равно A_1), а перемагничивание (при считывании) выполнено к точке A_0 (для этого через катушку пропускают ток $-I_K$), в кольце произойдет быстрое изменение величины и направления магнитного потока. Это изменение магнитного потока отзовется появлением ЭДС в замкнутом контуре считывания. Если кольцо хранило «нуль», а по условиям считывание производится перемагничиванием током $-I_K$, то изменение потока от точки N до точки A_0 не разрушит хранимый «нуль». Изменение магнитного потока в кольце от точки N до A_0 вызовет столь же незначительное значение ЭДС.

Итак, мы познакомились с элементом машинной памяти — ферритом, который может помнить только одно из двух возможных состояний, обозначаемых нулем и единицей. Знание о состоянии объекта, который может быть только в одном из двух положений, составляет наименьшую порцию информации — один *бит**). Таким образом, феррит физически представляет 1 бит, т. е. один двоичный разряд.

Единицы информации

Для измерения информации, наряду с битом, употребляются производные единицы — *байт* (8 битов), *килобайт* (2^{10} байтов), сокращенно — Кбайт, и мегабайт (2^{20} байтов). Это единицы — «внемашинные».

Стандартная порция информации, которую выдает или принимает ЭВМ,— *машинное слово.* «Длина» машинного слова (то есть число двоичных разрядов) обычно фиксирована в каждой ЭВМ: в «Минске-32 машинное слово состоит из 37 битов, а в «БЭСМ-6» — из 48 битов.

Машинное слово — это та единица измерения объема памяти, которую часто использует программист. Для самой же машины, для работы ее устройств более важной оказывается порция информации, называемая *ячейкой.* Впрочем, во многих машинах понятия машинного слова и ячейки оказываются совпадающими. Но не во всех. Например, в машинах серии ЕС ячейка содержит один байт, так что одно 32-разрядное машинное слово ЕС ЭВМ располагается в четырех рядом расположенных ячейках.

Адреса ячеек

Важнейшая характеристика ячейки — ее номер во множестве всех ячеек. Этот номер называется *адресом* ячейки. По адресу в памяти отыскиваются ячейка или машинное слово, начинающееся в этой ячейке.

Адрес играет основную роль при поиске информации в памяти. Когда известен адрес ячейки, добраться до ее содержимого, при определенном устройстве памяти, столь же просто, как найти заданную клеточку в игре «Морской бой» или увидеть фигуру на указанном шахматном поле. Устроенная таким образом память (ее обычно делают на ферритах) называется памятью с *прямым* (или *произвольным*) доступом.

Аналогичную роль играет адрес при определении места в памяти для хранения информации.

Быстродействие

Физические процессы, протекающие в памяти в моменты записи или считывания информации, требуют определенного времени. Именно это время определяет быстродействие памяти, а зачастую и быстродействие ЭВМ в целом. Время поиска ячейки в памяти прямого доступа (выполненной на ферритовых кольцах) составляет 2—5 микросекунд (1 микросекунда $= 10^{-6}$ секунд), а в сверхоперативной памяти оно еще меньше — 10—100 наносекунд (1 наносекунда $= 10^{-9}$ секунд).

---

*) Слово «бит» произошло от английских слов «BInary digiT» («двоичная цифра»).

Память на ферритовых кольцах в настоящее время не является самой скоростной. Успехи полупроводниковой интегральной технологии позволили широко использовать в современных ЭВМ принципиально новые материалы и устройства. Пока стоимость таких устройств высока, новые элементы памяти применяются при создании сверхоперативной памяти — небольших по объему, но весьма быстродействующих запоминающих устройств, в которые записывают, как правило, информацию, наиболее часто используемую при решении данной задачи на ЭВМ. Рассказу об интегральных схемах, используемых в памяти ЭВМ, будет посвящена отдельная статья в одном из следующих номеров «Кванта».

Магнитофон

Хорошими характеристиками с точки зрения объема и дешевизны памяти обладает магнитофон. С «домашним» родственником этого типа памяти — бытовым магнитофоном — вы, вероятно, знакомы. Правда, в отличие от бытового собрата, магнитофон, применяемый в ЭВМ, солиднее не только по внешнему виду: высококачественная магнитофонная лента позволяет записывать информацию с очень высокой плотностью (например, 64 бита на одном миллиметре). Если учесть, что длина магнитофонной ленты достигает в магнитофонах 750 метров, то можно понять, насколько емкой является такая внешняя память.

Информация располагается на магнитофонной ленте последовательно, и каждый участок фиксированной длины, именуемый *зоной*, имеет свой собственный номер. Зона состоит, как правило, из большого числа (сотен и тысяч) ячеек. При хранении на ленте индивидуальность ячеек и их адреса игнорируются; порцией обрабатываемой информации становится зона; отличить ячейку одну от другой можно по относительному номеру, отсчитываемому от начала зоны, после того как зона с ленты будет переписана в оперативную память. Размер зоны, вообще говоря, произволен (в некоторых пределах), но фиксируется на время решения одной или нескольких задач. Разбивка магнитной ленты на зоны, называемая *разметкой*, выполняется программистом не во время вычислений, а до них: в этом, по существу, состоит предварительная подготовка физического носителя информации — ленты — к участию в вычислительном процессе.

При разметке магнитной ленты в начале каждой ленты автоматически расставляются номера зон. В дальнейшем это позволяет записать информацию в конкретную зону и прочитать ее оттуда, когда она потребуется. При считывании информации магнитофону заказывают номер зоны, тогда он начинает перемещать ленту в нужном направлении. Время поиска информации занимает десятки секунд, а иногда доходит до минут. Дело в том, что для поиска нужной ячейки памяти на ленте надо сначала просмотреть все предшествующие зоны, а затем в нужной зоне, вызванной в оперативную память, просмотреть последовательно все ячейки, предшествующие искомой. Такого вида память называют памятью с *последовательным доступом*.

Иерархия запоминающих устройств

В состав ЭВМ входят устройства, промежуточные по своему быстродействию между сверхоперативной и оперативной памятью — устройствами прямого доступа, с одной стороны, и магнитофонами — памятью с последовательным доступом, с другой стороны. Это, прежде всего, *магнитные диски* и *магнитные барабаны*. Оба этих устройства используют тот же принцип работы, что и магнитофоны: информация записывается на ферромагнитное покрытие благодаря тому, что изменение величины или направления тока в катушке намагничивания вызывает изменение магнитного поля, которое формирует на магнитном покрытии «отпечаток» информации;

считывание происходит, когда магнитное покрытие перемещается мимо контура считывания. В роли катушки намагничивания во всех этих устройствах выступает магнитная головка записи, в роли контура считывания — магнитная головка воспроизведения. Отличие этих устройств от магнитофона состоит в том, что у них сравнительно небольшая поверхность цилиндра вращается с большой скоростью, то есть время доступа к информации нормировано прежде всего временем оборота барабана или диска. Платить за это ускоренное быстродействие приходится меньшей, чем у магнитофона, информационной емкостью, но в то же время емкость магнитного диска и даже барабана значительно превосходит стандартные объемы оперативной памяти.

Все перечисленные причины и послужили основными аргументами при создании иерархических систем памяти. На самом верху этой лестницы находятся сверхоперативная и оперативная память («король» и «королева»), ниже — барабан и диск («королевская молочница»), в самом низу — магнитофон («королевская корова»).

Современные ЭВМ рассчитаны на многопрограммную работу. По аналогии с заводом можно сказать, что изготавливаются одновременно несколько разных изделий (по разным технологическим планам). Чтобы детали к самолету не попали в цех, где производят детские велосипеды, необходимо организовать контроль выдачи со склада: кому, что и когда выдавать. Функции охраны содержимого в памяти ЭВМ выполняет *ключ*. Представьте себе длинный коридор склада (памяти). Каждая комната, выходящая в коридор, имеет свой замо́к, а следовательно, свой ключ. Каждая ЭВМ имеет свое понятие «комнаты» — свой стандартный размер блока охраняемой памяти. В ЕС ЭВМ такой «комнатой» является объем памяти в 2 К байта. Каждое обращение к памяти, кроме адреса, содержит и ключ. Это позволяет различным программам мирно сосуществовать в памяти, не мешая друг другу.

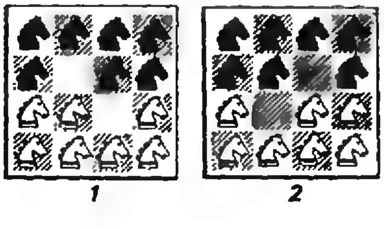
Память является самой дорогой частью ЭВМ. Ее характеристики определяют производительность всей машины. Нетрудно понять, что задача будет решена быстрее, если программа ее решения и все необходимые данные будут находиться в оперативной памяти, а наиболее используемая информация в сверхоперативной, нежели в том случае, когда программа или данные будут размещаться на внешней памяти (диск, барабан, магнитофон). Если в ЭВМ решаются сразу несколько задач (многопрограммный режим), то оперативной и сверхоперативной памяти не хватает. Попытки поднять эффективность работы ЭВМ за счет более полного использования всех возможностей иерархических систем памяти привели к интересной организации, называемой ***виртуальной*** (кажущейся) ***памятью***.

Существо этой организации состоит в том, что программист работает словно с памятью прямого доступа (например, оперативной), а на деле в момент выполнения программы работают все устройства памяти ЭВМ (если, конечно, программа достаточно большая). Высокая эффективность достигается за счет того, что в сверхоперативной памяти хранится «общий план» памяти — нечто вроде географической карты. Программа, управляющая решением задач в ЭВМ (ее называют *операционной системой*), пользуется этим планом, доставляя информацию в тот момент, когда она требуется для решения конкретной задачи (или незначительно позже). Виртуальная память — сложный сплав программных средств и электронного оборудования.

ПЕРЕГОНИТЕ КОНЕЙ

Перегоните коней из позиции 1 в позицию 2. Сколько ходов вам потребуется?

Л. Мочалов



XVI лингвистическая олимпиада

Ее порядковый номер показывает, что эта олимпиада — традиционная. А полностью она называется «Олимпиада по языковедению и математике».

На первый тур такой олимпиады в воскресенье 28 октября 1979 года пришли 290 московских школьников в здание филологического факультета МГУ и 237 ленинградских школьников в здание филологического факультета ЛГУ. Впервые эта олимпиада прошла одновременно по одним и тем же заданиям в Москве и в Ленинграде. (Могла бы пройти и в других городах, если бы представители филологических факультетов вузов этих городов заранее связались с коллегами из МГУ. Будем надеяться, что в ближайшее время это произойдет.) Олимпиада проводилась силами преподавателей и студентов кафедры структурной и прикладной лингвистики филфака МГУ и кафедры математической лингвистики филфака ЛГУ.

Прикладная лингвистика занимается исследованиями по машинному переводу, анализу и синтезу речи, информационному поиску и др. Ее идеи и методы очень разнообразны, многие из них почерпнуты из математики, кибернетики, психологии. Это отражали и задачи, предложенные на олимпиаде. Для их решения не требуется специальных знаний, но нужна смекалка, умение упорядочить факты, логика мышления. Многие призеры предыдущих олимпиад сейчас учатся на филфаке МГУ.

Ниже приводятся несколько задач первого тура.

2 (7 класс). Даны грузинские слова (в латинской транскрипции) и их переводы на русский язык в перепутанном порядке: xerxva, mγebavi, bari, mxerxavi, γebva, mtibavi, xerxi, barva — лопата, маляр, косарь, пилить, красить, пила, копать, пильщик.

Установите, какой перевод соответствует каждому грузинскому слову (γ — особый согласный звук грузинского языка).

3 (7 класс). Ниже приведены некоторые родственные слова русского и сербско-хорватского языков (знаки ˊ, ˝, ˆ обозначают различные виды сербско-хорватского ударения). Часть слов пропущена.

	русск.	серб.
1.	вода	вòда
2.	гроза	грòза
3.	терем	трêм
4.	колоть	кла̏ти
5.	брат	бра̏т
6.	?	срéбро
7.	?	врâн
8.	?	гра̏х
9.	?	вра̏на
10.	?	кла̂с
11.	?	гра̂д
12.	?	гра̏д
13.	бородат	?
14.	порог	?
15.	порох	?
16.	волос	?

Заполните пропуски

4 (7 класс). Даны некоторые числа в системе записи, которая использовалась в русской письменности до начала XVIII века:

Ф̃Л̃В̃—532, Т̃Л̃Є̃—335, Р̃К̃В̃—122, Ф̃М̃Д̃—544, Х̃М̃Є̃—645.

Определите, каким числам соответствовали записи:

Х̃К̃Д̃, С̃Л̃В̃, Т̃Л̃Г̃.

7 (8 класс). Даны обозначения некоторых дат на языке суахили и их переводы на русский язык в перепутанном порядке: tarehe tano Oktoba Jumapili; tarehe tatu Disemba Jumamosi, tarehe tano Oktoba Jumatatu; tarehe pili Aprili Jumanne; tarehe tano Oktoba Jumatano; tarehe nne Aprili Jumanne — 5 октября, понедельник; 5 октября, среда; 5 октября, воскресенье; 2 апреля, вторник; 4 апреля, вторник; 3 декабря, суббота.

1) Установите, какой перевод соответствует каждому сочетанию на языке суахили.

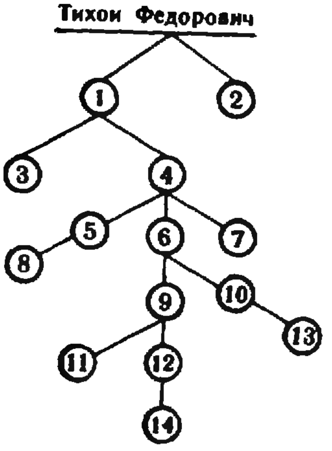
2) Переведите на суахили: 3 апреля, среда; 1 декабря, воскресенье.

10 (9 класс). В языке хева названия некоторых частей тела имеют числовые значения. Ниже приведены: в левой колонке — слова языка хева в латинской транскрипции, в средней — числовые значения этих слов, в правой — названия частей тела, которые эти слова обозначают. В каждой колонке имеются пропуски.

namalu	2	указательный палец левой руки
keli	5	мизинец левой руки
tagu	7	?
aluene	8	локоть левой руки
kolu	?	?
opey	12	левое ухо
?	1	?
aley	10	?
ilaw	11	левая сторона шеи
favalo	3	средний палец левой руки
kay-maluene	22	запястье правой руки
?	?	часть правой руки от запястья до локтя
ni	?	левый глаз
?	24	указательный палец правой руки
?	6	?
kay-name	23	?
kay-kolu	26	?
kay-keli	?	?
patapa	?	переносица

Заполните пропуски.

15 (8—10 классы). На рисунке приводится часть родословного дерева одной семьи коми, родоначальником которой был некий «Тихон Федорович». В этом дереве для каждого мужчины линиями указаны все его дети, а для женщин никакие потомки не указаны. Члены этой семьи, заштрихованные в дереве цифрами, перечисляются также на языке коми:



а) Остап Тикон
б) Остап Падей
в) Остап Марпа
г) Падей Марпа
д) Падей Остап
е) Тикон Падей
ж) Тикон Пекла
з) Илля Епрем
и) Илля Катя
к) Педот Вась
л) Тикон Закар
м) Падей Илля
н) Падей Педот
о) Епрем Пиль

1) Поставьте имена в соответствие узлам дерева. Сколькими способами это можно сделать?

2) Напишите на языке коми имя родоначальника семьи — «Тихона Федоровича».

* *
*

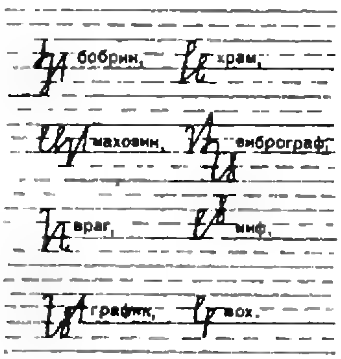
На второй тур было допущено около половины участников первого тура. Задачи второго тура были существенно труднее задач первого тура. Жюри, в состав которого входили представители филфаков МГУ и ЛГУ, мехмата МГУ, институтов востоковедения и языкознания АН СССР, пришлось немало потрудиться, чтобы выявить победителей — школьников, наиболее полно и оригинально решивших наибольшее число задач. Некоторым школьникам были присуждены «отдельные призы» за решения отдельных задач. Наилучшие результаты показали москвичи М. Черкасов (шк. № 7, 7 кл.), Д. Ногин (шк. № 91, 8 кл.), М. Толстая (спецшк. № 19, 8 кл.), С. Власов (шк. № 91, 9 кл.), М. Волович (шк. № 2, 9 кл.), Г. Левин (шк. № 10, 9 кл.), М. Гельфанд (шк. № 109, 10 кл.), К. Зоркий (шк. № 438, 10 кл.), Ю. Яголим (шк. № 91, 10 кл.) и ленинградцы И. Штеренберг (шк. № 132, 7 кл.) и И. Жуков (шк. № 227, 7 кл.). Победителям были вручены дипломы или грамоты и объемистые призы — книги по лингвистике и математике. На этом олимпиада закончилась, но не кончились занятия ее участников лингвистикой. Выпускники школ будут поступать на филфак МГУ или ЛГУ, а остальные — заниматься в кружках прикладной лингвистики и участвовать в олимпиаде 1980 года.

В заключение приведем несколько задач второго тура олимпиады.

2 (10 класс). Даны слова на венгерском языке и все их переводы на русский язык в перепутанном порядке: valakiröl, kik; ezekböl, kiktöl; ezekröl, akárkik; kikböl; ki; kiböl, ezen; valakikröl; kitöl — кто? из кого? любые; об этих; о ком-нибудь; от кого? из этих; на этом.

Установите, какой перевод соответствует каждому венгерскому слову. Объясните, почему в некоторых случаях разные венгерские слова переведены одним русским словом.

3 (9, 10 класс). Стенографией называется особая система письма, предназначенная для быстрой записи устной речи. Ниже застенографировано несколько русских слов.



Застенографируйте слова: микроб, комок, химик, крабик, гриф.

7 (8, 9 класс). Даны словосочетания на тайском языке (государственном языке Таиланда) в упрощенной русской транскрипции и их переводы на русский язык в перепутанном порядке: кратхинтхет сам док; кратхинтхет си док; накленг нынг кхон; нангйак си кхон; кабин нынг туа; чаба нынг док, нак сам туа; дуронг сонг туа; чалэй сам кхон; дуронг си туа; сэ сонг док; накленг си кхон; чанг нынг кхон; чанг сам кхон; буа сам док; чанг си кхон; кабин сам туа — 3 акации; 4 акации; 3 выдры; 1 китайская роза; 3 лотоса; 2 лошади; 4 лошади; 4 людоедки; 1 обезьяна; 3 обезьяны; 2 орхидеи; 3 пленника; 1 слесарь; 3 слесаря; 4 слесаря; 1 хулиган; 4 хулигана.

Установите, какой перевод соответствует каждому тайскому словосочетанию.

13 (7 класс). Ниже приводится разговор трех братьев: Володи (старшего), Андрея (среднего) и Миши (младшего) — и его перевод на японский язык, записанный в русской транскрипции. В японском тексте имеются пропуски. Заполните их.

Андрей. Володя, Боря этим летом отдыхает в лесу?
Вородзя-сан, котоси-но нацу Боря-ва мори-ни ясумимас ка?

Володя. Да, Андрей, Боря отдыхает в лесу. Миша, Боря гуляет по лесу?
Ээ, Андорэй-кун, Боря-ва мори-ни ясуму. Мися-кун, Боря-ва мори-ни сампосуру ка?

Миша. Нет, Володя, Боря рыбачит.
Ииэ, Вородзя-сан, Боря-ва цуримас.

Андрей. Миша, Боря спит в палатке?
. . . ., Боря-ва тэнто-ни нэмуру ка?

Миша. Нет, Андрей, Боря спит в лодке. Андрей, палатка находится на берегу?
Ииэ, Андорэй-сан, Боря-ва бооото-ни... . Андорэй-сан, тэнто-ва киси-ни аримас ка?

Андрей. Да, Миша. Вещи находятся в палатке. Миша, Боря рыбачит на берегу?
. . . . . Моно-ва тэнто-ни ару. Мися-. . . ., ... ?

Миша. Нет, Андрей. Боря рыбачит в лодке. Лодка находится в воде.
. . . .
Боото-. . . . . . мидзу-ни аримас

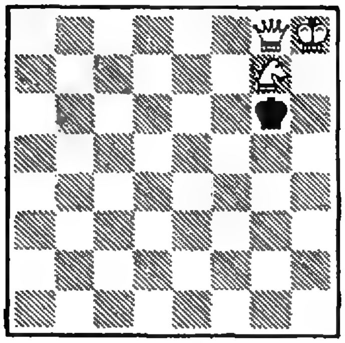
А. Виленкин

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

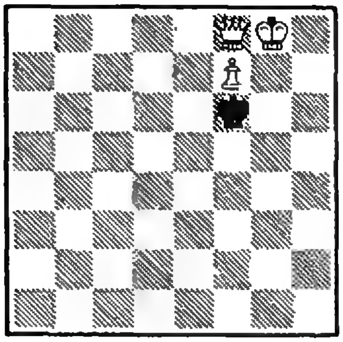
Среди множества задач, этюдов и необычных позиций на шахматной доске особый интерес представляют так называемые *символические* или, иначе, *изобразительные* задачи. Начальная или заключительная расстановка фигур в таких задачах или сам ход решения изображают собой какой-нибудь рисунок, символ, число или букву. Обычно символические задачи посвящаются выдающимся личностям, юбилейным датам или важным событиям.

В этом месяце, как вы знаете, в нашей стране празднуется День космонавтики. И именно 12 апреля 1964 года впервые были опубликованы 1—3 задачи международного мастера по шахматной композиции Э. Погосянца. Автор посвятил их Юрию Гагарину, первому человеку на Земле, побывавшему в космосе. Начальное расположение фигур в каждой из трехходовок изображает букву «Г». Предлагаем вам решить эти символические задачи. Любопытно, что в них использованы всего 4 фигуры.

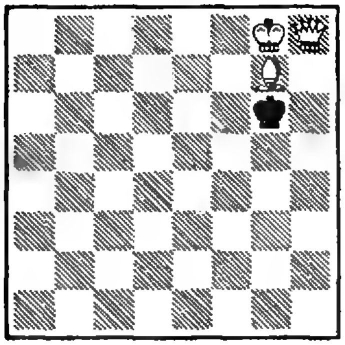
В нашей февральской страничке мы уже предлагали вам одну задачу — многоходовку, в которой белый ферзь после долгих и утомительных маневров объявляет мат неприятельскому королю на 14-м ходу. Такие задачи в шахматной композиции называются *виражами*. Необычная задача 4 также представляет собой вираж. Доска здесь, как обычно, квадратная, но размеры ее необычайно велики. В результате ферзь идет по виражу более двадцати ходов!



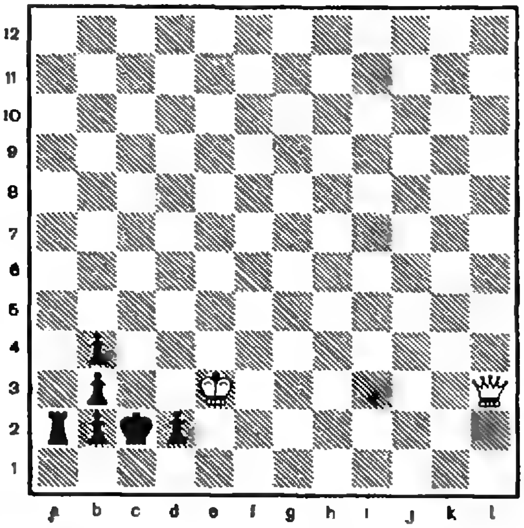
1. Э. Погосянц. Мат в 3 хода.



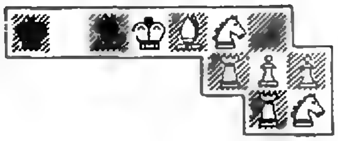
2. Э. Погосянц. Мат в 3 хода.



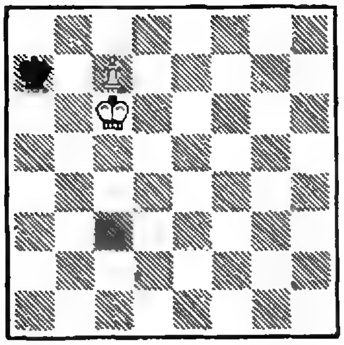
3. Э. Погосянц. Мат в 3 хода.



4. Я. Мортенс. Мат в 21 ход.



5. Пистолет Доусона. Мат в 21 ход.



6. К. Томлинсон. Мат в 2 хода.

Весьма любопытна задача 5, принадлежащая известному шахматному композитору Г. Доусону. Ее тоже можно назвать изобразительной, только рисунок здесь образуют не фигуры, а сама доска.

Задачи 1—3, как мы видели, содержали всего четыре фигуры. Однако минимальный материал, позволяющий создать шахматное произведение, состоит из трех фигур (при двух королях на доске просто нечем давать мат). Одна из рекордных в этом смысле — задача 6. Она решается очень просто, но учтите, что это самая старая трехфигурная задача — она придумана 135 лет назад!

Где расположено основание высоты?

Задачи (мы приводим номер правильного ответа, а вслед за ним — указание).

1а—3 (основание высоты должно быть равноудаленным от вершин основания;

1б—3 (по той же причине, что 1а).

1в—5 (основание высоты равноудалено от прямых AB, BC, AC).

1г—2 (достаточно показать, что основание высоты O принадлежит одной из высот треугольника, скажем CH, но

$$(SC)\perp(SA),\ (SC)\perp(SB)\Rightarrow \Rightarrow(SC)\perp(ASB)\Rightarrow(SC)\perp(AB);$$

$$(AB)\perp(SC),\ (AB)\perp(SO)\Rightarrow(AB)\perp \perp(SOC)\Rightarrow(AB)\perp(CO)\Rightarrow O\in(CH).$$

1д—2 (решение аналогично 1г)

1е—6 (покажите, что $\widehat{BAC}=\widehat{BSC}=90^\circ$, и воспользуйтесь 1а).

1ж—7($(AC)\perp(BC)$, $(AC)\perp(BC)\Rightarrow(AC)\perp\perp(BSC)\Rightarrow(ABC)\perp(BSC)\Rightarrow(SO)\subset(BSC)\Rightarrow\Rightarrow O\in(BC)$).

1з—1 (см. «Геометрия 9—10» § 22).

2—3 (ср. 1а).

3—2 (основание высоты — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$).

Упражнения

1. $\frac{3\sqrt6}{2}a^2$. (Основание высоты — центр окружности, вписанной в трапецию.)

2. $\frac{1}{2}$, если $a=b$,

$\left\{\frac{b}{a+b},\ \frac{b}{a-b}\right\}$, если $a>b$,

$\left\{\frac{a}{a+b},\ \frac{a}{b-a}\right\}$, если $a<b$.

(Покажите, что $O\in(AC)$; далее, при $a>b$, разберите два случая: $O\in[AC]$ и $C\in[AO]$.)

3. $\frac{c^3}{36}(\sin 2\alpha)\,\mathrm{tg}\,\beta$. (Примените задачу 1з.)

4. $\frac{\sqrt2}{2}b^3$. (Основание равноудаленной вершины — центр квадрата.)

5. (См. «Квант», 1978, № 6, с. 93.)

Фотоаппарат на вступительных экзаменах

1. $|\vec v|=\frac{\delta d}{F\tau}=10$ м/с.

2. $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}=1+\frac{h(d-F)}{F^2}=5{,}5$.

3. $d_2'=\frac{d_1d_2d_1'}{d_1'(d_1+d_2)-d_1d_2}\to\infty$, то есть дальняя граница глубины резкости бесконечно удалена.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Физика

Физический факультет

1. $A=mg(H-5/2R)=2\cdot10^{-2}$ Дж.

2. $V_2=l_2\sqrt{\frac{2g(1-\cos\alpha)(m_2l_2-m_1l_1)}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}}$, если в положении устойчивого равновесия масса m_1 находится выше оси вращения, и

$V_2=l_2\sqrt{\frac{2g(1+\cos\alpha)(m_1l_1-m_2l_2)}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}}$, если в положении устойчивого равновесия масса m_1 находится ниже оси вращения.

3. $|\vec a|=g\left(\sin\alpha-\frac{(k_1m_1+k_2m_2)\cos\alpha}{m_1+m_2}\right)$.

4. $A=R(\sqrt{T_3}-\sqrt{T_1})^2$, где R — универсальная газовая постоянная.

5. $\alpha=\frac{\alpha_1V_1+\alpha_2V_2}{V_1+V_2}\approx27\%$.

6. $\alpha=\frac{p_{н1}}{p_{н2}}\frac{V_1}{V_2}\frac{T_2}{T_1}\approx0{,}44=44\%$, где $p_{н2}==10^5$ Па — давление насыщенного водяного пара при температуре 100°С.

7. $A=C_0U^2/2=4{,}5\cdot10^{-6}$ Дж.

8. $t=\frac{(1+\alpha t_0)}{\alpha}\frac{R_2R_4}{R_1R_3}-\frac{1}{\alpha}\approx76^\circ C$.

9. $f_1=\frac{F_2(F_1-l)}{F_1-l+F_2}=6$ см от рассеивающей линзы, $f_2=\frac{F_1(l-F_2)}{l-F_1-F_2}=20$ см от собирающей линзы.

10. $F_1=\frac{Dl}{D-d}=18$ см; $F_2=l-F_1=-6$ см.

Механико-математический факультет

1. $|\vec a_1|<|\vec a|<|\vec a_2|$, где $|\vec a_1|=g\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mu}{1+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}\approx8$ м/с² (сила трения направлена вверх по поверхности клина) и $|\vec a_2|=g\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mu}{1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}\approx12$ м/с² (сила трения направлена вниз по поверхности клина).

2. $\alpha<\mathrm{arctg}\frac{R(M+m)}{lm}=\frac{\pi}{4}$.

3. $x=|\vec v|^2/g\sin2\alpha-2l=10$ м.

4. $p_2=p_1T_2/T_1+m/\mu RT_2/V\approx2{,}3\cdot10^5$ Па.

5. $\Delta h=h\alpha_2\Delta t=6\cdot10^{-3}$ см.

6. $I=\varepsilon_0(\varepsilon-1)|\vec v|a\mathcal{E}/d=1{,}77\cdot10^{-9}$ А.

7. $q=\varepsilon_0SIR/d=1{,}77\cdot10^{-10}$ Кл.

8. $I=\frac{mg}{2|\vec B|a}=5$ А.

9. $\alpha>2\pi/3$.

10. Величина изображения уменьшится в 3 раза.

Блуждающие фишки
(см. «Квант» № 3)

1. Можно за 32 хода:

1. c1—e1,
2. e1—f1,
3. a1—c1—e1—g1,
4. b1—c1 и т. д.

2. Первые две фишки надо поставить рядом, третью — через одну пустую клетку впра-

во от второй, четвертую — через одну пустую клетку вправо от третьей и т. д.

3. Нужно сделать три хода, чтобы расположить фишки на трех левых крайних полях, например, верхней горизонтали. Затем потребуется 33 хода, чтобы эти фишки переместить по горизонтали в крайнее правое положение. Наконец, необходимо сделать еще три хода, чтобы переместить фишки в конечное положение. Таким образом, перемещение может быть выполнено за 39 ходов.

4. Можно:
1. d3—d5,
2. d5—e5,
3. c4—e4—e6,
4. e6—f6,
5. b1—b3—d3—d5—f5—f7,
6. f7—g7,
7. a2—c2—c4—e4—e6—g6—g8,
8. g8—h8,
9. a1—b1,
10. b1—b3—d3—d5—f5—f7—h7,
11. b2—c2 и т. д.

5. Чтобы «растянуть» все фишки в цепочку по большой диагонали, потребуется 8 ходов (см. задание 4). Перемещение цепочки по диагонали из первоначального положения на 92 клетки потребует 92 • 3 = 276 ходов. Нужно сделать еще 8 ходов, чтобы расположить фишки на конечных позициях. Требуемое перемещение может быть выполнено за 292 хода.

6. Достаточно 19 ходов:
1. c1—c2,
2. a1—c1—c3,
3. b1—c1 и т. д.

7. Перемещение может быть выполнено за 20 ходов:
1. b1—b2,
2. b2—b3,
3. a1—a3—c3,
4. a2—b2 и т. д.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3)

1. См. статью Н. Михайловой «Плоды «просвещения»».

2. Семь слонов расставить можно — см. рисунок 1. Восемь же слонов расставить нельзя.

3. При каждом разрезе количество многоугольников увеличивается на единицу. Следовательно, после сотого разреза получится 101 многоугольник. Общее число вершин у них будет наименьшим, если все многоугольники будут треугольниками. Минимальное число вершин после 100 разрезов равно 101 • 3 = 303, а поэтому результат подсчета неверен.

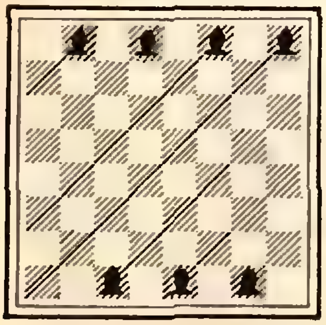


Рис. 1.

4. 1 + 2 — 3 — 4 + 5 + 6 — 7 — 8 + 9 + 10 — 11 — 12 + + 13 + 14 — ... + 301 + 302 = 1 + (2 — 3 — 4 + 5) + + (6 — 7 — 8 + 9) + (10 — 11 — 12 + 13) + ... + (298 — 299 — 300 + 301) + 302 = 303 (содержимое каждой скобки равно нулю).

5. См. рисунок 2.

Заочная школа программирования. Урок 5

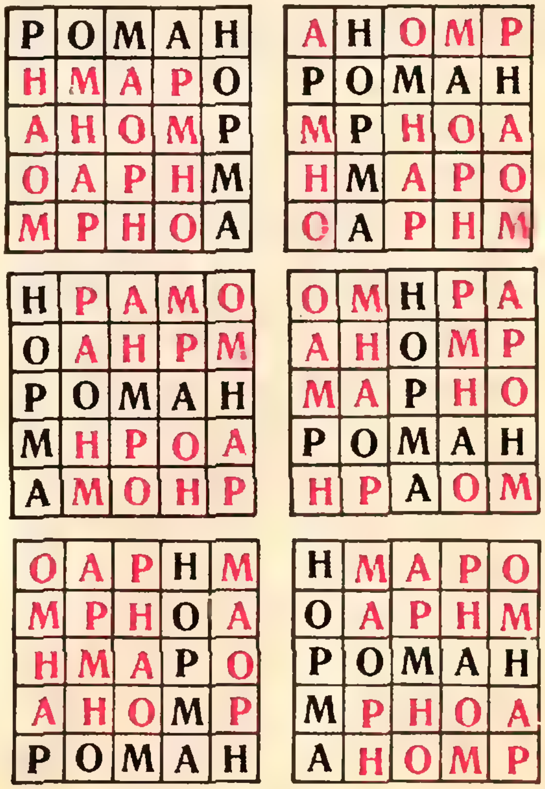
(см. «Квант» № 1)

```
5.1 15—>A; 24—>B; 3*A+A!3*B!2+
              (A+B)!5—A!6/25+33*A!6—>C;
8*C+A!2*(A+B+C)!7—33+(76*A—34)/
                        58+C!9—>K;
K!8/38+5*A/8+(A+K+B)!9—76+
                        58*C—>Л;
5.2 A=857 B=4 C=200
5.3    (—B+(B!2—4*A*C)!0.5)/(2*A)—>X1;
(—B—(B!2—4*A*C)!0.5)/(2*A)—>X2;
5.4 ЕСЛИ A>B ТО A—>МАКС:
B—>МИН ИНАЧЕ A—>МИН;
B—>МАКС ВСЕ;
5.5 1—>N; 0—>СЧ;
ПОКА N=<100:: N!2+СЧ—>СЧ;
N+1—>N ВСЕ;
5.6 ПОКА A/=B:: ЕСЛИ A>B ТО
B—A—>A ИНАЧЕ A—B—>B ВСЕ ВСЕ;
```

Заочная школа программирования. Урок 6

(см. «Квант» № 2)

```
6.1 P(100,100);0—>A;
ПОКА A=<100:: П(A,0);
Л(A,100);A+2—>A ВСЕ; 0—>A;
```



Р	О	М	А	Н
Н	М	А	Р	О
А	Н	О	М	Р
О	А	Р	Н	М
М	Р	Н	О	А

А	Н	О	М	Р
Р	О	М	А	Н
М	Р	Н	О	А
Н	М	А	Р	О
О	А	Р	Н	М

Н	Р	А	М	О
О	А	Н	Р	М
Р	О	М	А	Н
М	Н	Р	О	А
А	М	О	Н	Р

О	М	Н	Р	А
А	Н	О	М	Р
М	А	Р	Н	О
Р	О	М	А	Н
Н	Р	А	О	М

О	А	Р	Н	М
М	Р	Н	О	А
Н	М	А	Р	О
А	Н	О	М	Р
Р	О	М	А	Н

Н	М	А	Р	О
О	А	Р	Н	М
Р	О	М	А	Н
М	Р	Н	О	А
А	Н	О	М	Р

Рис. 2.

```
ПОКА А=<100::П(0,А);
Л(100,А);А+5—>А ВСЕ;
.КОНЕЦ;
6.2 0—>X:ПОКА X=<25::
ПЕЧАТЬ('X=',X,'У=',
(X*(X!2+1)+(X+2)*(X!2—1)!2)/
((X!3+4)!2) ВСЕ;
```

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 3)

1. В кубке города после каждой партии выбывает ровно один участник. Поэтому всего будет сыграна $n-1$ партия, и организаторам нужно заказать $2n-2$ бланка. Ответ не зависит ни от числа районов в городе, ни от распределения шахматистов в них.

2. Обозначим через n число участников турнира. Тогда $n-2$ шахматиста, которые довели турнир до конца, сыграли между собой $(n-2)(n-3)/2$ партий. А два интересующих нас шахматиста провели 10 или 11 встреч — в зависимости от того, сыграли они между собой или нет. Натуральное решение $n=12$ имеет лишь уравнение $(n-2)(n-3)/2+10=55$, откуда и следует, что указанная партия состоялась.

3. Пешка e7 беззащитна, и единственный шанс черных заключается в том, чтобы на неизбежное Кр:a7 ответить Крc7, не выпуская короля противника из заточения. Путь белого короля до пешки a7 занимает пять ходов, и существует 30 способов взять эту пешку за столько ходов, но лишь один из них приводит к цели: **1. Крe6! Крc3 2. Крd5!** Белый король, как говорят шахматисты, «отталкивает плечом» своего черного оппонента. Теперь тот не может пойти на d4 и теряет решающий темп: **2...Крd3 3. Крc6 Крd4 4. Крb7 Крc5 5. Кр:a7 Крc6 6. Крb8** и т. д. Не проходит, например, 1. Крe6 Крc3 2. Крd6 Крd4 3. Крc6 Крe5! 4. Крb7 Крd6 5. Кр:a7 Крc7 с ничьей. В этом этюде, как и в следующем, мы вновь сталкиваемся с тем, что кратчайшее расстояние на шахматной доске измеряется не обязательно по прямой.

4. У черных подавляющий материальный перевес, и для победы белых их король, очевидно, должен через поле e8 прорваться в неприятельский лагерь и уничтожить все черные фигуры. **1. Крb7!** (но не 1. Крb8?). **1...Крd4** (препятствуя движению белой пешки, не проходит ни 1...Крf4 2. c5 Крg3 3. c6 Кр:h3 4. c7 Кр:g4 5. c8Ф Сg7 6. Фe8 Крf4 7. Фf7 g4 8. Ф:g7 g3 9. Ф:h8 и т. д., ни 1...Крd6 2. Крb6 и 3. c5). **2. Крc6!** Сравните этот ход со вторым ходом решения предыдущего этюда. Белый король направляется на e8 зигзагообразным маршрутом, не теряя при этом времени! В случае 2. Крc7 следует 2...Лh7 3. Крd7 Сg7 4. Крe8 Сh8! 5. Крf8 Лg7!, и фигуры черных неуязвимы, они сами легко выигрывают, уничтожая беззащитные белые пешки. Теперь же грозит 3. c5, и черные, как и в предыдущем этюде, вынуждены потерять решающий темп. Впрочем, до победы еще далеко...

2...Кр:c4 3. Крd7 Крd4 (уже не спасает 3...Лh7 4. Крe8 Сg7 5. Крf7 Сh8+ 6. Кр:g8 и т. д. или 5...Крd4 6. Крg6 Крe3 7. Кр:h7 и т. д.). **4. Крe8 Крe3 5. Кр:f8 Крf3 6. Крg7 Крg3 7. Кр:h8 Кр:h3 8. Кр:g8 Кр:g4 9. Крf7 Кр:f5** (9...Кр:h5 10. Кр:e7 g4 11. Кр:f6 g3 12. e7 g2 13. e8Ф+, и белая пешка превращается в ферзя с шахом, в случае 9...Крf4 теперь после 13. e8Ф g1Ф 14. Фg6 у белых легкий выигрыш) **10. Кр:e7 g4 11. Крd7 g3 12. e7 g2 13. e8Ф g1 Ф 14. Фe6+ Крf4** (14...Крg5 15. Фg8+) **15. Ф:f6+ Крg3** (15...Крe4 16. Фg6+; 15...Крe3 16. Фb6+) **16. Фg6+ Крf2 17. Ф:g1+ Кр:g1 18. Крe6 Крf2 19. Крf6 Крf3 20. Крg6 Крf4 21. Кр:h6 Крf5 22. Крg7 Крg5 23. h6**, и черные должны сдаться, так как белая пешка h проходит в ферзи.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 3, с. 8)

1. Ответ: $R_S=]1;\, n-1[$.

2. Если $n \neq 3m$, то многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится на многочлен x^2+x+1 (верно также и обратное). Значит, число $2^{2k}+2^k+1$ может быть простым лишь при $k=3^l$. Но число $2^{3^l}+1$ делится на 3^{l+1}. Следовательно, $2^{3^{l+1}}-1$ делится на $2^{3^{l+1}}-1=2^{3k}-1=(2^k-1)(2^{2k}+2^k+1)$.

3. Докажите равенства $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$.

Затем $\cos\frac{8\pi}{35}+\cos\frac{12\pi}{35}+\cos\frac{18\pi}{35}=\cos\left(\frac{3\pi}{7}-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}-\frac{\pi}{5}\right)=\left(\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)\cos\frac{\pi}{5}+\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}\right)\sin\frac{\pi}{5}$.

Осталось показать, что $\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}=4\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}$.

Номер готовили:
А. Виленкин, Н. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова
Художественные редакторы Т. Макарова, Н. Вершинина
Корректоры Е. Сидоркина, В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-82-62
Сдано в набор 08.02.80.
Подписано в печать 18.03.80. Т-01192.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,26
Цена 30 коп. Заказ 359
Тираж 267 569 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

1. Магнитофонная лента и клубок ниток. Магнитофонная лента перематывается с одной бобины на другую. Докажите, что в течение всего времени перемотки сумма квадратов радиуса R круга, образованного намотанной частью ленты, и радиуса r круга на другой бобине постоянна:

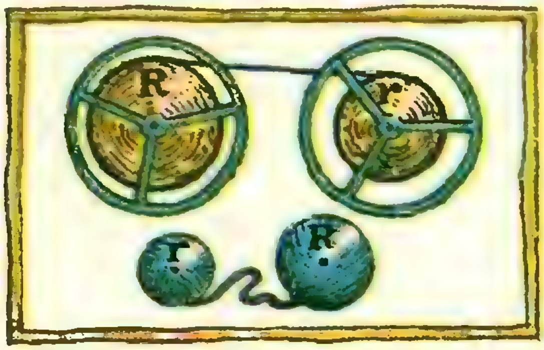
$$R^2 + r^2 = \mathrm{const}.$$

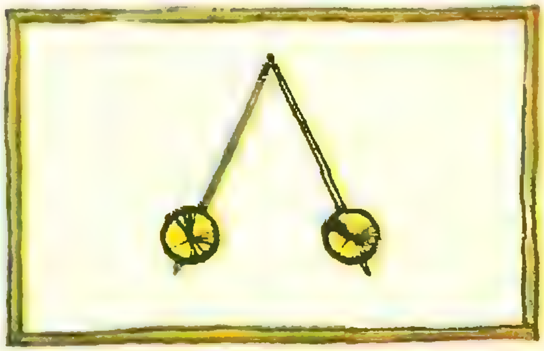
Аналогичный закон сохранения для кубов радиусов ($R^3 + r^3 = \mathrm{const}$) приближенно выполняется при перематывании нитки с одного клубка на другой. Почему?

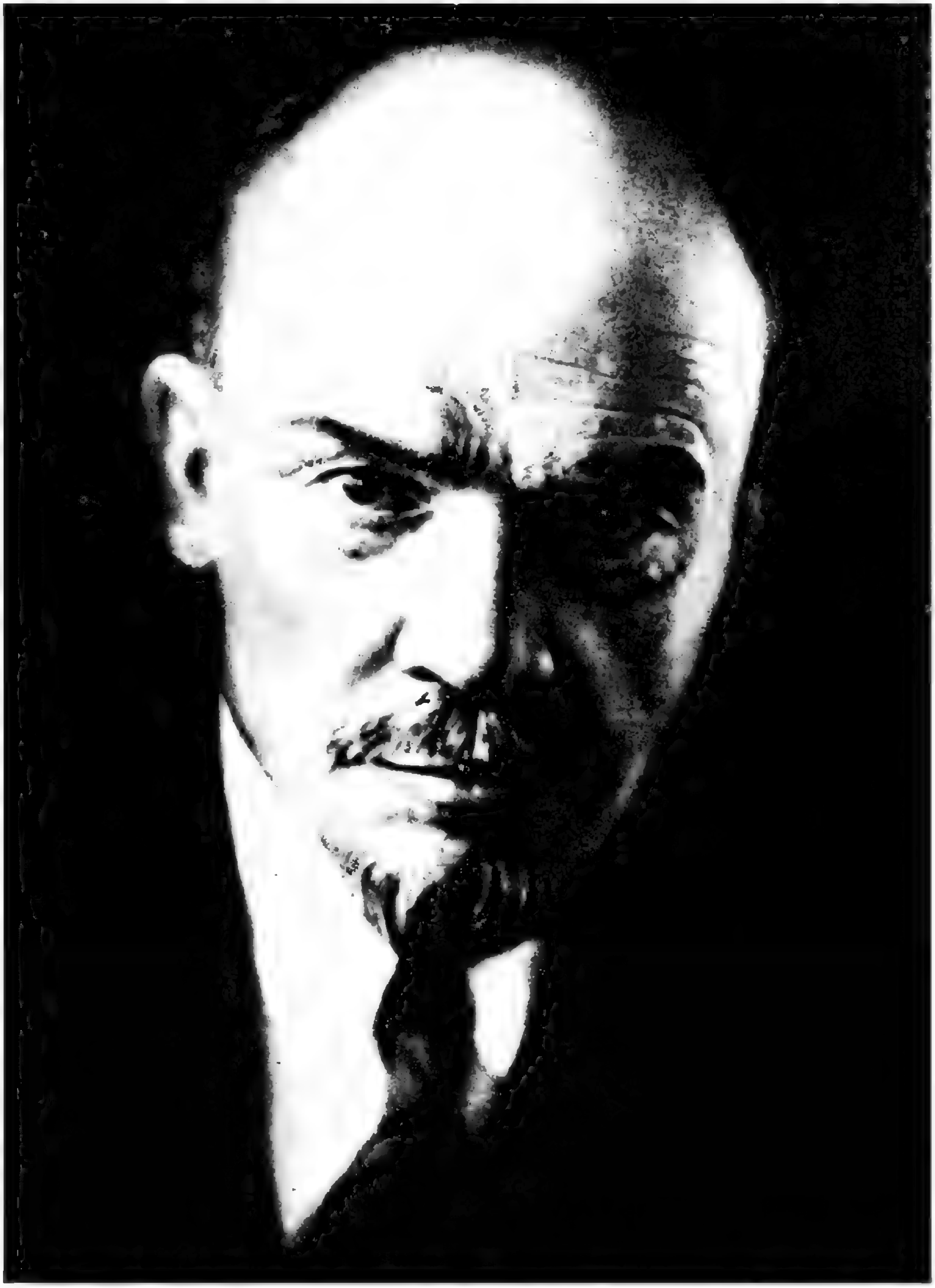
2. Маятник. Перед качающимся маятником неподвижно установлена камера и на один и тот же кадр сделано множество снимков. Снимки делались точно через каждую секунду один за другим с мгновенными экспозициями. В результате наложений получилась такая картина, как на *рисунке — два положения* маятника, симметричные относительно вертикали.

Каково наибольшее возможное значение периода колебаний маятника?

М. Мамикон



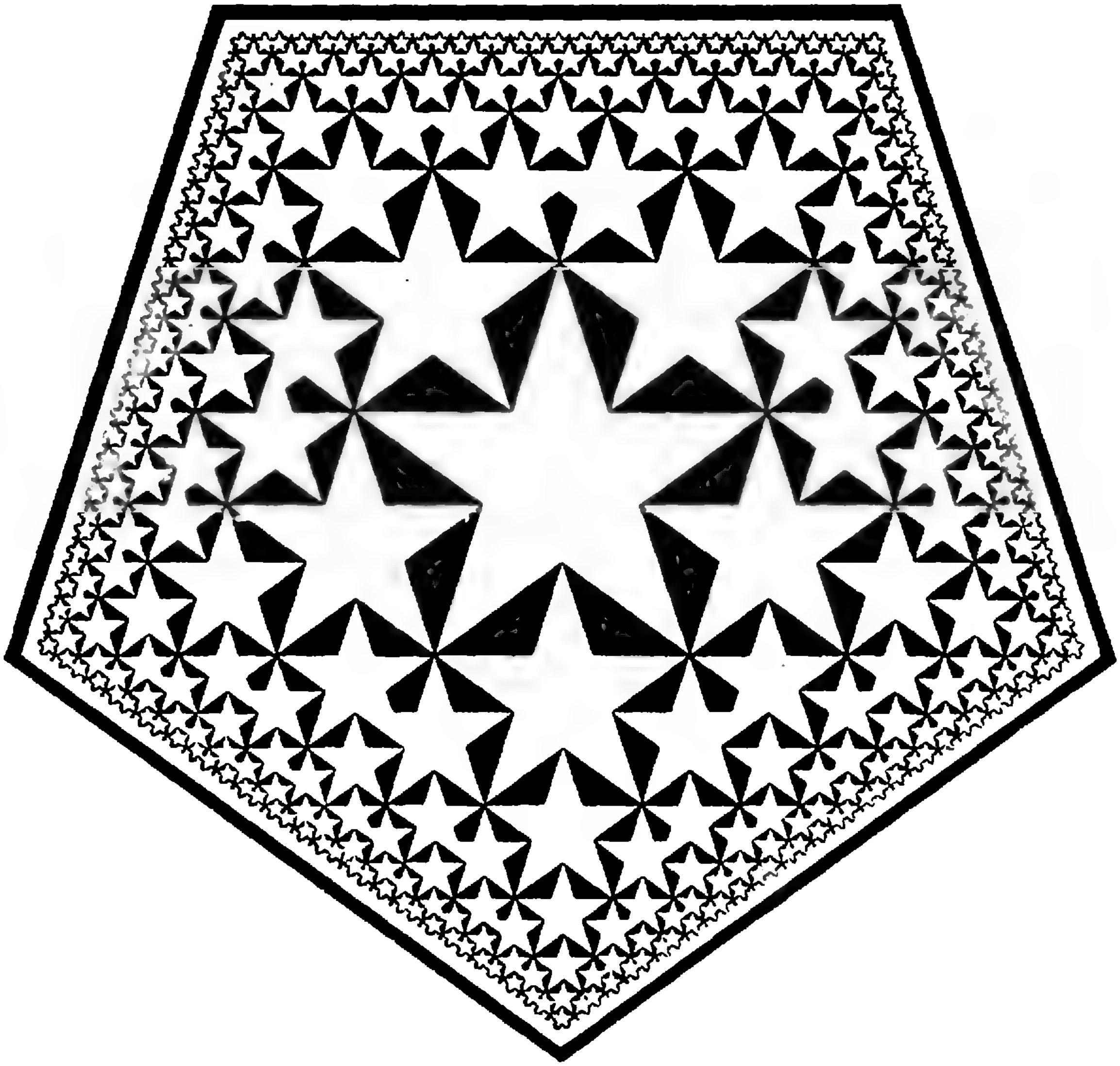




1870-1980

Индекс 70465
Цена 30 коп.

На этом рисунке изображен узор, состоящий из пятиконечных звезд, лежащих внутри правильного пятиугольника и «бесконечно измельчающихся» к его границе. С одной стороны, это декоративный материал, связанный с народными орнаментами; с другой — источник интересных математических задач, о которых вы можете прочитать на с. 26.



НОМЕР
5

Основан в 1970 году

Квант

5
1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В номере:

35 лет победы над фашистской Германией

2 Победа, которая спасла мир

5 *В. Регель, Б. Ткаченко.* Размагничивание кораблей в годы Великой Отечественной войны

10 *И. Пирогов, И. Тюлина.* Мехмат МГУ в годы Великой Отечественной войны

* * *

18 *П. Халмош.* Логика от А до Г

26 *Л. Гродко.* Устойчивость автомобиля

Лаборатория «Кванта»

32 *В. Матизен.* О пользе скатывания шариков

Математический кружок

33 *В. Ольхов.* Как придумать геометрическое неравенство

34 *Л. Курляндчик, А. Лисицкий.* Как придумать комбинаторное тождество

Задачник «Кванта»

36 Задачи М621—М625; Ф633—Ф637

38 Решения задач М566, М567, М569; Ф578, Ф580—Ф582

«Квант» для младших школьников

43 Задачи

44 *А. Дозоров.* По страницам старого учебника

Практикум абитуриента

46 *Н. Розов.* Читатели советуют

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году

51 *Г. Меледин, В. Пененко.* Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

53 *Г. Кембровский, А. Самусенко, А. Саржевский.* Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

55 *Б. Алексеюнас, А. Казлаускене, Э. Мисевичюс.* Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Искусство программирования

56 *Ю. Первин, А. Салтовский.* Как работает процессор

62 **Шахматная страничка**

63 **Ответы, указания, решения**

Смесь *(17, 25, 31, 42, 55)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1980

Победа, которая спасла мир

Прошло 35 лет с того незабываемого дня, когда наш народ впервые отпраздновал День Победы над фашистскими захватчиками. Труден был путь к этой победе. Прежде чем напасть на нашу страну, фашисты захватили всю Западную Европу и подчинили себе европейскую промышленность. Вся Европа кормила фашистские войска и снабжала их самым современным оружием. Казалось, что на всей земле нет такой силы, которая могла бы остановить фашизм, преградить его армиям путь к господству над миром. История опровергла эти прогнозы. Героический советский народ уничтожил чудовищную фашистскую военную машину и навсегда избавил человечество от фашистской диктатуры. Ни один другой народ в мире не мог бы в то время решить эту невероятно трудную историческую задачу.

Представьте себе на мгновение, что фашизм победил и во всем мире установился фашистский «новый порядок». Целые народы были бы поголовно истреблены. Народы нашей страны были бы превращены в рабов, лишенных самых элементарных человеческих прав. Каждый из вас, наши юные читатели, должен твердо помнить, чем вы обязаны погибшим в этой войне. Это они дали вам возможность нормально учиться, свободно выбирать профессию и самостоятельно строить жизнь. Не будь этой великой победы, каждый из вас по 10—12 часов в день гнул бы спину на тяжелых работах в фашистских трудовых лагерях, жил бы впроголодь, без малейшей надежды на нормальное питание, образование и личное счастье. Вам это трудно представить себе, но вашим отцам и дедам пришлось столкнуться с этой страшной возможностью лицом к лицу. Помните о тех, кто отдал свою жизнь за эту победу и гордитесь ими! Помните и о тех, кто пережил эту страшную войну, и уважайте их!

Школьники нашей страны давно уже шефствуют над могилами павших бойцов Великой Отечественной войны, разыскивают погибших воинов, проводят походы по местам боев, организуют школьные музеи боевой славы. Это справедливая дань тем, кто отстоял ваше право на свободную и счастливую жизнь. В этой работе должен участвовать каждый из вас.

Когда вы смотрите фильмы о Великой Отечественной войне, читаете книги о ее героях, многим из вас кажется, что героизм нужен был только в те годы, и вы жалеете, что опоздали родиться. Конечно, война предъявила к каждому жителю нашей страны предельно суровые требования, она нуждалась в массовом героизме, и его проявляли даже дети. Но ведь и тогда героями были не только те, кто горел в танке, таранил вражеский самолет или, спасая товарищей, грудью закрывал пулеметную амбразуру. Не меньше героизма было и в жизни тех, кто в жуткий мороз на пустырях сибирских городов восстанавливал эвакуированные заводы, вооружал, одевал, кормил наших солдат, или тех, кто оказывал сопротивление фашистам на временно оккупированных территориях. Героическими были и послевоенные годы, когда наш народ, потерявший более 20 миллионов человек, восстанавливал разрушенное войной хозяйство. Об этом героизме трудовых будней ваших родителей прекрасно рассказано в замечательных книгах Леонида Ильича Брежнева «Возрождение» и «Целина».

Героизм нужен нам и сегодня: строительство коммунистического общества, формирование нового человека потребуют от нашего народа немало героических свершений. Еще не изжиты преступность, расточительство, хищения государственного (а значит, народного!) имущества, взяточничество и некоторые другие отрицательные явления нашей жизни. И нам нужны сознательные, активные, непримиримые борцы со всеми подобными недостатками, борцы за светлые идеалы коммунизма, а не за личное сиюминутное материальное благополучие.

Наша страна была бы сейчас намного богаче, если бы не война, если бы нам не мешали строить новую жизнь. Готовясь к этой войне, наш народ сознательно жертвовал своим благосостоянием. Но в жизни существует суровая иерархия ценностей, и у нас не было другого выхода. По существу мы только еще начинаем жить в относительно благоприятной для нашей страны международной обстановке, связанной с разрядкой напряженности, с переходом на рельсы мирного сосуществования.

Научно-техническая революция вызвала к жизни оружие массового уничтожения, угрожающее всему живому на нашей планете. Но 35 лет человечество прожило без новой мировой войны, и как бы ни старались и ни стараются противники разрядки, силы мира растут и крепнут с каждым днем. Во главе этих сил стоит великий Советский Союз, который последовательно проводит ленинскую миролюбивую внешнюю политику. Весь мир признает огромный вклад, внесенный в борьбу за мир главой нашего государства Леонидом Ильичем Брежневым. Мы не только спасли человечество от кошмара фашистского «мирового порядка», но и избавили его от новой мировой войны.

Немалый вклад в эту великую победу советского народа внесла и наша наука. Многие научные работники сражались с оружием в руках в наших войсках, партизанских отрядах и отрядах народного ополчения. И в каждом научном центре, каждом вузе есть своя мемориальная плита с именами погибших героев. Но вклад науки в нашу победу намного шире. Благодаря огромному труду наших ученых перед войной и в ходе войны была полностью обновлена советская военная техника. Армия получила новые самолеты (истребители, штурмовики, пикирующие бомбардировщики), реактивные минометы («катюши»), наводившие ужас на фашистских солдат, танки «Т-34», «ИС» и «КВ», превосходившие аналогичное немецкое оружие.

Советские ученые всеми возможными путями старались приблизить нашу победу. Мы расскажем здесь лишь о некоторых работах наших физиков, математиков и механиков.

Для решения оборонных научно-технических вопросов в осажденном фашистскими войсками Ленинграде была создана специальная группа ученых, которую возглавил директор Ленинградского физико-технического института Академии наук СССР академик Абрам Федорович Иоффе. По заданию Ленинградского горкома партии в этом институте создали дешевую и эффективную зажигательную смесь, уничтожившую сотни вражеских танков, разработали новые подрывные противотанковые средства. Простые и удобные в обращении полупроводниковые термоэлектрогенераторы, сконструированные А. Ф. Иоффе и работающие от обычных керосиновых ламп, широко использовались партизанскими радистами. Сотрудник ЛФТИ Юрий Борисович Кобзарев (ныне академик) создал первую в мире радиолокационную установку.

Группа ученых того же института во главе с членом-корреспондентом АН СССР Павлом Павловичем Кобеко помогала обеспечивать надежность ледяной дороги через Ладожское озеро, единственной, связывающей Ленинград с «Большой землей», которую в те годы называли «Дорогой жизни».

Еще одна группа сотрудников Ленинградского физико-технического института, возглавляемая нынешним президентом Академии наук СССР академиком Анатолием Петровичем Александровым и впоследствии ставшим всемирно известным ученым академиком Игорем Васильевичем Курчатовым, провела на Северном, Балтийском, Черноморском и Тихоокеанском флотах очень важную работу по размагничиванию судов. Благодаря этому была полностью исключена возможность подрыва наших кораблей на вражеских магнитных минах.

Московские ученые активно участвовали в создании эффективной противовоздушной обороны столицы. Институт физических проблем АН СССР получил от Наркомата обороны задание разработать надежный и безопасный метод обезвреживания невзорвавшихся вражеских авиационных бомб. Под руководством академика Петра Леонидовича Капицы это поручение было выполнено в пятидневный срок.

Свердловские физики во главе с Сергеем Васильевичем Вонсовским (ныне академиком) и Яковом Савельевичем Шуром (позднее ставшим членом-корреспондентом АН СССР) внедрили магнитную дефектоскопию снарядов, стволов артиллерийских орудий и танковой брони, которая позволила существенно повысить надежность нашего оружия.

В разгар войны, в 1943 году, по решению партии и правительства в Москве был организован Институт атомной энергии, в состав которого вошли крупнейшие ученые-физики Советского Союза. На них была возложена задача по созданию атомного оружия.

Как писал покойный президент Академии наук СССР выдающийся советский физик академик С. И. Вавилов, «Советская техническая физика, обязанная своим появлением В. И. Ленину, с честью выдержала суровые испытания войны. Следы этой физики всюду: на самолете, танке, на подводной лодке и линкоре, в артиллерии, в руках нашего радиста, дальномерщика, в ухищрениях маскировки. Дальновидное объединение теоретических высот с конкретными техническими задачами, неуклонно проводившееся в советских физических институтах, в полной мере оправдало себя в пережитые грозные годы».

Советские математики и механики также внесли большой научный вклад в победу над врагом.

Академик Андрей Николаевич Колмогоров, используя свои работы в области теории вероятностей, создал метод определения наивыгоднейшего рассеяния артиллерийских снарядов.

При освоении больших скоростей авиация столкнулась с фактами внезапного разрушения самолетов под влиянием особого рода вибраций, получивших название флаттера. Теория этого явления, позволившая надежно защитить от него наши самолеты, была разработана Мстиславом Всеволодовичем Келдышем (впоследствии академиком и президентом АН СССР).

В послевоенные годы наши ученые проделали очень большую работу по укреплению обороноспособности Советского Союза. Их усилиями, возглавленными академиком Игорем Васильевичем Курчатовым, было создано советское атомное и термоядерное оружие и ликвидирована атомная монополия американских империалистов. Мир был избавлен от американского атомного шантажа. Под руководством академика Сергея Павловича Королева было разработано отечественное ракетное оружие. Советские ученые помогли оснастить наш флот атомными подводными лодками. Наша армия располагает сейчас всем необходимым для сокрушительного отпора любому врагу, и в этом залог нашей прекрасной будущей мирной жизни.

В. Регель, Б. Ткаченко

Размагничивание кораблей в годы Великой Отечественной войны

24 июня 1941 года в 2 часа 41 минуту в устье Финского залива подорвался на мине эсминец «Гневный». В 4 часа 21 минуту в этом же районе подорвался на мине крейсер «Максим Горький», но своим ходом пришел в Таллин. Предполагалось, что мины были неконтактными (магнитными). Противник уже в первые дни войны создал серьезную минную угрозу у выхода из советских военно-морских баз и на основных морских путях сообщения, использовав в общей сложности 1060 якорных ударных мин и до 160 донных неконтактных мин. Положение создалось угрожающее. А что же наш флот? Был ли он подготовлен к возможности минной блокады или это случилось совершенно неожиданно?

Среди многих задач оборонного значения важное место заняло размагничивание кораблей. В короткой статье нельзя подробно осветить всю эпопею размагничивания и перечислить всех участников, поскольку к решению этой проблемы, помимо научных работников, были привлечены многие военные моряки и судостроители.

Для взрыва магнитной мины не требуется непосредственного соприкосновения ее с корпусом корабля. Взрыватель срабатывает от воздействия на него магнитного поля судна. Идея изготовления такого взрывателя столь проста, что могла возникнуть сразу после изобретения компаса и появления стальных кораблей. Каждому известно, что стрелка компаса отклоняется, если к нему поднести железный предмет. Отклонение подобной стрелки, помещенной внутри мины, можно использовать для замыкания контакта взрывателя. При соответствующем подборе чувствительности взрыв мины будет происходить в тот момент, когда корабль окажется над ней, а значит, будет поражена самая незащищенная его часть — днище. Даже большие корабли, как правило, гибнут при взрыве под ними таких мин. Кроме того, магнитные мины, лежащие на дне, не поддаются обычным методам траления, рассчитанным на подсекание и подрыв якорных мин. Установка магнитных мин может производиться не только с кораблей, но и с самолетов — в открытом море, в бухтах, гаванях, на фарватерах рек.

Эти преимущества магнитных мин перед обычными якорными контактными минами дали основание военно-морским специалистам заранее предугадать их применение в предстоящей войне, тем более, что нашим военным морякам пришлось познакомиться впервые с магнитными минами английских интервентов еще в сентябре 1919 года на Северной Двине. Уже тогда на выставленном англичанами заграждении из магнитных мин подорвалось несколько наших кораблей. Однако военные моряки быстро очистили фарватер от этих, еще сравнительно примитивных, мин.

Естественно было ожидать, что в новой войне будут использоваться усовершенствованные магнитные мины: более чувствительные, с приспособлениями, затрудняющими их траление и уничтожение. Все это заставило командование Военно-Морско-

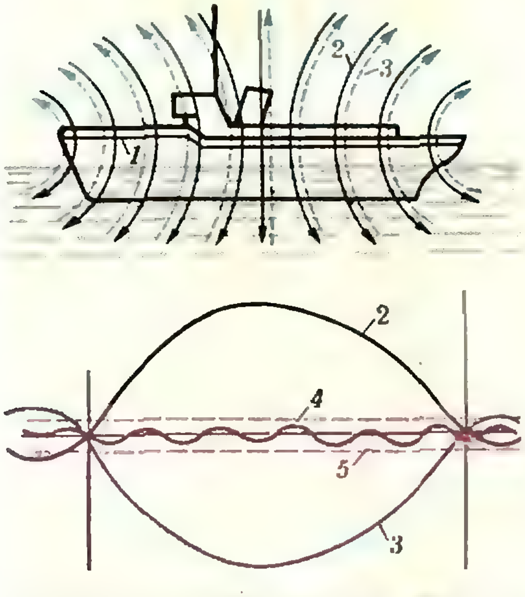
---

Статья была опубликована в журнале «Природа» (1975, № 4). Перепечатывается с сокращениями.

го Флота СССР поставить перед специалистами задачу — разработать методы защиты кораблей от неконтактного магнитного минного и торпедного оружия.

Эта важная работа была поручена Ленинградскому физико-техническому институту (ЛФТИ) Академии наук СССР еще в 1936 году. За ее выполнение взялись Анатолий Петрович Александров (ныне академик, директор Института атомной энергии им. И. В. Курчатова, президент АН СССР) и Борис Александрович Гаев (впоследствии доктор технических наук, заместитель директора ЛФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, умер в 1974 году). А. П. Александров организовал в своей лаборатории специальную группу, возглавляемую Б. А. Гаевым, которая занималась проблемой размагничивания кораблей.

Идея, положенная в основу работ по защите кораблей от неконтактных магнитных мин, состояла в размагничивании корабля. Предполагалось, что это можно сделать путем компенсации магнитного поля корабля с помощью закрепленных на нем специальных обмоток, через которые пропускался постоянный ток (см. рисунок). При этом магнитное поле корабля может быть скомпенсировано магнитным полем тока в такой степени, что прохождение корабля над миной не будет вызывать срабатывания взрывателя, имеющего ограниченную чувствительность.



Принцип обмоточного размагничивания кораблей: *1* — кабель размагничивающего устройства; *2* — магнитное поле корабля; *3* — магнитное поле обмотки с током; *4* — результирующее магнитное поле корабля; *5* — допустимый предел результирующего магнитного поля, не оказывающий влияния на магнитный взрыватель мины.

Простая идея, предложенная А. П. Александровым, Б. А. Гаевым и инженером ленинградского Балтийского завода А. А. Картиковским, не сразу получила поддержку со стороны специалистов. Многие из минеров считали, что если уж размагничивать корабль, то нужно полностью скомпенсировать его магнитное поле до нуля. А так как это невозможно из-за весьма сложной конфигурации поля, размагничивание становится бессмысленным, и нужно сосредоточить все силы на создании и совершенствовании методов траления. Некоторые специалисты считали даже, что корабль нужно не размагничивать, а намагничивать еще сильнее, с тем чтобы увеличенное магнитное поле вызывало взрыв магнитной мины на большом расстоянии от корабля. Кстати, как стало известно после войны, англичане, начавшие работать по противоминной защите кораблей также в 1936 году, пошли именно по этому неправильному пути (ведь противник может выставлять как чувствительные, так и загрубленные мины). В результате к началу войны их корабли не были защищены от немецких магнитных мин и торпед, и английский флот понес весьма ощутимые потери. Уже в ходе войны англичанам пришлось разрабатывать размагничивающие устройства и срочно оснащать ими свои корабли.

Группе А. П. Александрова надо было прежде всего самой убедиться в осуществимости идеи размагничивания. Сначала исследования проводились на лабораторной модели корабля, сделанной из дерева и обитой листовым железом. В результате этих опытов были найдены наиболее оптимальные виды размагничивающих обмоток. Решено было переходить к опытам на плавающих кораблях.

Президент Академии наук СССР академик А. П. Александров.

Первые измерения магнитных полей кораблей и опыты по их компенсации были проведены сотрудниками ЛФТИ в 1937 году в сухом доке Кронштадта на эсминцах «Яков Свердлов» и «Артем», а затем на лидере «Ленинград». Итоги были весьма благоприятными. В мае 1938 года в Ораниенбаумском порту на корабль «Дозорный» была наложена временная размагничивающая обмотка и путем измерения поля под кораблем был подобран оптимальный ток в ней. Затем корабль сделал большое количество проходов с выключенной и включенной обмоткой над установленными на разных глубинах разоруженными неконтактными магнитными минами. Было зафиксировано, что мины уверенно срабатывают при прохождении над ними корабля с выключенной обмоткой и совершенно не реагируют при включении в обмотку оптимального тока.

Таким образом, задача противоминной защиты малого корабля была успешно решена. Надо было переходить к опытам по размагничиванию крупных кораблей. В октябре 1938 года был выделен для экспериментов линкор «Марат». И на этом крупнейшем корабле нашего ВМФ при помощи временной размагничивающей обмотки удалось в десятки раз уменьшить магнитное поле в непосредственной близости от киля.

Чтобы получить все необходимые данные о поле корабля для проектирования системы защиты, надо было измерить значения магнитной индукции этого поля в большом числе точек на разных глубинах. Для этого под корабль опускалась алюминиевая штанга с прикрепленным к ней на специальной тележке магнитометром *). Штангу перемещали под кораблем и устанавливали на разных глубинах. Для каждого положения штанги измеряли магнитную индукцию в нескольких точках под килем и за бортами корабля. Эту трудоемкую работу, требующую хорошей отладки приборов и приспособлений, группа ЛФТИ научилась выполнять быстро, чтобы не задерживать боевые корабли на рейде.

Таким образом, к началу Великой Отечественной войны были созданы надежные методы защиты наших кораблей от магнитных мин противника.

Первое военное утро застало группу А. П. Александрова на борту линкора «Марат». Уже в 4 часа утра на нем была объявлена боевая тревога: с финского берега появились вражеские самолеты. Проверив соответствие расчетных ампер-витков в секциях обмоток и убедившись в правильности направления токов в них, комиссия передала в эксплуатацию защитное устройство линкора, сошла на берег в Кронштадте и тут же получила задание командования в срочном порядке оборудовать противоминными системами защиты несколько тральщиков. Не ограничиваясь этим, группа А. П. Александрова из имеющегося в наличии кабеля смонтировала два электромагнитных трала, и уже 27 июня 1941 го-

---

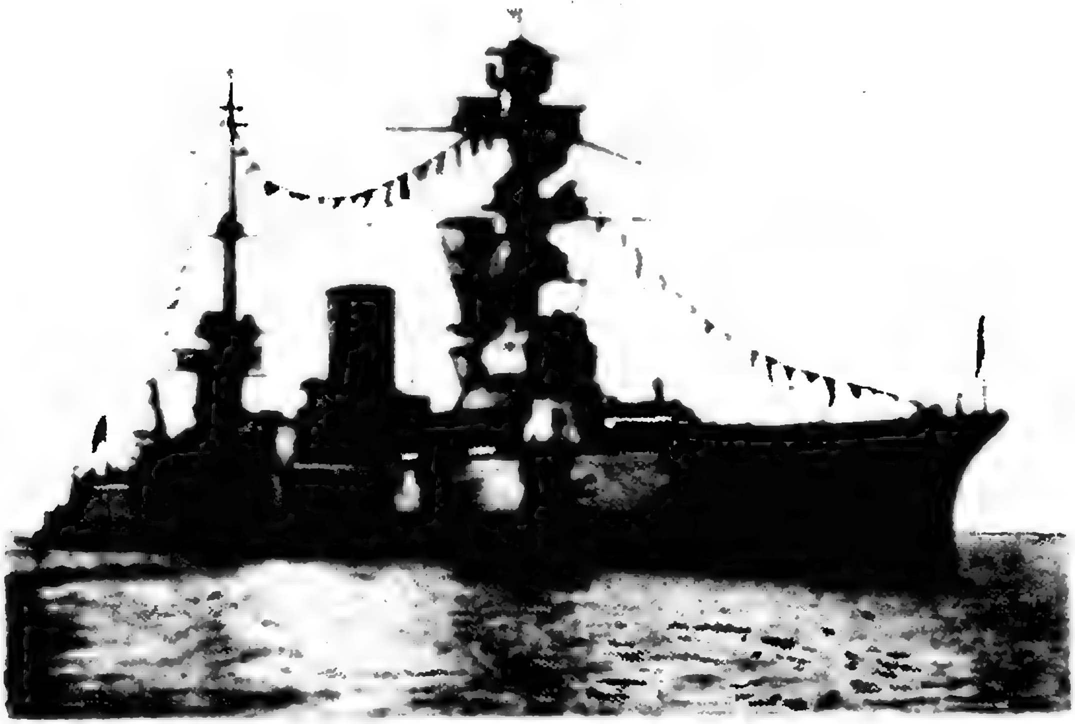
*) Магнитометр — прибор, предназначенный для измерения магнитной индукции поля

да эти тральщики вышли на выполнение боевого задания.

Прогнозы специалистов ЛФТИ и флота оправдались: самым первым мероприятием немецко-фашистского командования на морских театрах военных действий после вероломного нападения на Советский Союз была попытка заблокировать наши корабли в их базах и связать их боевые действия массовыми постановками магнитных мин. Фашисты возлагали большие надежды на эффективность этого нового морского оружия и были уверены, что советские моряки и специалисты не смогут быстро найти способы и средства защиты кораблей.

Именно в этих тяжелейших условиях начала войны и стал сказываться тот огромный труд, который был проделан в предвоенные годы учеными, военными моряками и специалистами судостроения. В первые же дни на ряде кораблей Балтийского флота были проложены и закреплены на палубе вдоль бортов вре-

Группа научных работников ЛФТИ, занимавшихся размагничиванием кораблей. Слева направо А. Р. Регель, Ю. С. Лазуркин, И. В. Курчатов. Фотография сделана в Поти в декабре 1941 года.



Линкор «Марат» — первый из крупнейших кораблей Военно-Морского Флота СССР, оборудованный размагничивающей системой.

менные размагничивающие обмотки (вплоть до монтажа более основательных устройств). Данные о магнитных полях кораблей разных классов, полученные до начала войны, позволили рассчитывать параметры таких временных обмоток. Военные моряки быстро освоили изготовление «времянок». Так, 28 июня 1941 года подобная «времянка» была за одну ночь наложена на крейсер «Киров», и он был благополучно выведен из Рижского залива через минное поле у острова Даго (теперь — Сарема), где только что перед этим подорвался еще не размагниченный крейсер «Максим Горький». Эффективность таких «времянок» стала очевидной, и моряки всегда радушно принимали у себя ученых. В ходу у них появилось шутливое присловие: «Перед тем как в бой идти, побывайте у ЛеФТИ».

27 июня 1941 года был издан приказ об организации бригад по установке размагничивающих устройств на всех кораблях флота. От ЛФТИ, помимо группы А. П. Александрова, в работу включились многие сотрудники из разных лабораторий. Игорь Васильевич Курчатов, оторвавшись на время от важнейших работ по ядерной физике, предложил А. П. Александрову включить себя и сотрудников своей лаборатории в работы по размагничиванию. Владимир Максимович Тучкевич (ныне академик, директор ЛФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР) также занялся этой проблемой.

С 27 июня 1941 года в Кронштадте начала работать Балтийская группа размагничивания, с 1 июля в Севастополе — Черноморская, с 9 июля в Архангельске — Северная, с 14 августа во Владивостоке — Тихоокеанская.

Сразу же по прибытии на места началась напряженная работа по монтажу размагничивающих устройств на кораблях. Она велась почти повсеместно круглосуточно, в труднейших условиях первого периода войны, при нехватке специалистов, кабеля, оборудования, зачастую под бомбежками и обстрелами, по жестко ограниченному графику. Тем не менее, самоотверженно преодолевая трудности, научные работники, военные моряки, судостроители и монтажники начали один за другим передавать специальным комиссиям штабов флотов корабли со смонтированными и отрегулированными размагничивающими устройствами. Уже в августе основное боевое ядро кораблей на всех действующих флотах и флотилиях было защищено от магнитных мин противника.

Боевая практика показала высокую эффективность разработанных методов размагничивания. Совместная деятельность специалистов по размагничиванию кораблей и по тралению магнитных мин в первый же месяц после начала войны свела практически к нулю потери наших кораблей от этих мин и полностью сорвала попытки закупорить наши корабли в базах и нарушить их боевую службу. Ни один корабль, снабженный защитной системой, не подорвался на магнитных минах.

Небольшая в довоенные годы группа специалистов, зародившаяся впервые в ЛФТИ АН СССР, послужила основой для создания в годы войны большой и хорошо организованной службы размагничивания кораблей. В нее вошли сотни военных моряков, вместе с ними работало большое число научных работников и судостроителей. Благодаря их работе были сохранены для Родины сотни кораблей и многие тысячи человеческих жизней.

И. Пирогов, И. Тюлина

Мехмат МГУ в годы Великой Отечественной войны

«...Золотом по мрамору высечены столбцы фамилий. Рядом с двумя — золотые звездочки. Герои Советского Союза. Всего же на мехмате их семь. Шесть из них — студентки. Не знаю, есть ли в каком-нибудь университете второй такой героический факультет». Так писала газета «Известия» 9 июня 1979 года. Об этом героическом факультете — механико-математическом факультете Московского государственного университета, его жизни в годы Великой Отечественной войны, о некоторых его преподавателях и студентах — участниках войны — рассказывают воспитанники факультета, бывшие фронтовики, ныне доценты МГУ И. А. Тюлина и И. З. Пирогов.

Фронтовики

21 июня 1941 года Женя Руднева записала в дневнике: «Сданы все зачеты! Все экзамены! Все! Все! Жизнь прекрасна и удивительна!»

А на следующее утро на весь наш народ обрушилась грозная весть — война. Мехмат, университет, вся страна закипели, как развороченный муравейник: одни спешили в военкоматы, другие уезжали на трудфронт и на оборонительные работы; бесчисленные эшелоны и колонны потянулись на запад.

В этой обстановке сотни комсомольцев, коммунистов, беспартийных мехматян надели шинели и взялись за винтовку. Учеба была короткой, многие сразу же попали в бой.

Именно так произошло с бойцами славной 8-й Краснопресненской ополченческой дивизии, куда попало 213 студентов, аспирантов и сотрудников мехмата, то есть каждый пятый ополченец Московского университета. Уже известный ученый доцент Николай Борисович Веденисов, с серьезным хроническим заболеванием позвоночника, записался в ополчение потому, что там были его ученики. Он погиб под Вязьмой. Сложившиеся специалисты, выпускники мехмата Михаил Иванов, Евгений Павлов, Мстислав Долгов, Олег Сорокин, Георгий Алексеев имели броню там, куда они были распределены весной 1941 г., но отказались от нее и погибли, защищая столицу на ее дальних подступах. Талантливые молодые ученые аспиранты Андрей Павлов, Иван Лепехин, Степан Карнов, Сергей Кудашев погибли осенью 41-го под Вязьмой, Ярцевым и Духовщиной. Враг не был допущен к Москве.

За время, выигранное в первые тяжелейшие месяцы войны, многие мехматяне, как и все некадровые военные специалисты, прошли переподготовку. Комсомолки, студентки мехмата, оказались хорошо восприимчивыми к штурманскому делу, которому их обучала заслуженный штурман страны Герой Советского Союза Марина Раскова. Более десяти комсомолок МГУ добровольно записались на штурманские курсы. О тех, кто овладел мастерством бомбовых ударов, теперь написано много книг, имена их известны всей стране, их носят траулеры, улицы городов, дворцы пионеров, отряды следопытов. Пять летчиц, комсомолок мехмата, были удостоены высокого звания Героя Советского Союза: Евгения Руднева (посмертно), Евдокия Пасько, Екатерина Рябова, Антонина Зубкова, Руфина Гашева.

О славных делах военных летчиц и штурманов, в том числе и о комсомолках с мехмата МГУ, написано много интересных книг (например, «Боевые подруги мои» и «Повесть о Евгении Рудневой» М. П. Чечневой [*]). Недавно боевые подруги отметили 60-летний юбилей Евдокии Борисовны Пасько. Учась на 3 курсе, она с другими комсомолками прошла обучение штурманскому делу в г. Энгельсе. Весной 1942 г. на Северном Кавказе Е. Пасько начала боевые вылеты. К августу 1944 г. она довела их число до 780, налетав 1040 часов и сбросив на позиции противника 93 тонны бомб. Штурман эскадрильи авиаполка ночных бомбардировщиков, она совершала 7—9 вылетов за ночь. После войны Е. Пасько окончила мехмат МГУ, читает разнообразные курсы высшей математики студентам МВТУ, где работает около тридцати лет.

Только через 20 лет после войны узнали о славных делах комсомольцев винницкого подполья, где отличилась комсомолка мехмата, студентка второго курса Лариса Ратушная — «девушка в гимнастерке», какой знал ее весь факультет. Лариса словно смотрела сквозь годы — еще в университете она стала пулеметчицей; до снега, удивляя всех, ходила в носках и резиновых тапочках — закалялась. Во время войны, после двух побегов из плена, Ратушная пробралась домой на Украину, где два года вела подпольную работу. О подвигах Ларисы и ее боевых друзей написана книга Д. Н. Медведева «На берегах Южного Буга». Посмертно Лариса Ратушная удостоена звания Героя Советского Союза.

Геннадий Барыков собирался поступить на мехмат МГУ, но война помешала этому. Он прошел с пехотой тысячи километров, истребляя фашистские танки огнем своей пушки. В красноармейской газете «Патриот Родины» от 16 июля 1945 г. опубликован Указ Президиума Верховного Совета СССР о присвоении звания Героя Советского Союза Геннадию Ивановичу Барыкову. Здесь

---

[*] О Жене Рудневой см. также «Квант», 1977, № 11, с. 38.

Комсомолки мехмата летчицы эскадрильи авиаполка ночных бомбардировщиков Герои Советского Союза (слева направо) Е. Руднева, Е. Пасько, Е. Рябова, А. Зубкова, Р. Гашева.

же рассказывается о многочисленных подвигах Барыкова. Так, в одном бою уже на немецкой земле Барыков остался один со своей пушкой, когда из леса показались на большой скорости 9 немецких танков. Геннадий бесстрашно вступил в поединок с танками. Вскоре метким огнем он поджег головной танк, другие пытались маневрировать в чаще. Но огонь артиллериста вынудил их повернуть назад. После войны Барыков успешно окончил мехмат, защитил кандидатскую диссертацию и работает в одном из вузов Москвы.

Давид Шклярский, один из организаторов школьных математических кружков и математических олимпиад в университете, по окончании мехмата МГУ вступил в действующую армию и погиб в составе моторизованной бригады особого назначения в тылу врага. Через два десятилетия, когда его друзья и ученики затеяли выпуск серии книг «Библиотека математического кружка», в списке авторов первым был поставлен Шклярский. Не по алфавиту — по долгу памяти.

Второкурсник Юра Тихомиров участвовал в Сталинградской битве. Командир роты Тихомиров под ураганным огнем поднимал в атаку бойцов, вел их на дзоты противника. В письме домой в 1944 г. он писал: «Попробовал я и пули, и осколков, вытаскивали меня из заваленного блиндажа, а я — цел и невредим...». Так он писал за полгода до победы, когда за плечами остались и форсирование Сожа и Днепра, и взятие Барановичей. На гимнастерке алело много наград. Бои шли за Варшаву. И здесь, на польской земле, под городом Пултуском, в деревне Старые Бареуки Юра Тихомиров был сражен снарядом, когда он шел в наступление впереди своей роты. Боевые товарищи писали о нем: «Несмотря на

Герой Советского Союза, партизанка Л. Ратушная.

Штурман эскадрильи 46 Гвардейского ночного легкобомбардировочного женского авиаполка, Герой Советского Союза Екатерина Рябова перед боевым вылетом.

то, что он не был богатырского сложения, своими действиями он не раз обеспечивал успех нашей части. Он был лучшим офицером полка».

Его товарищ по второму курсу мехмата Вася Жиров был пулеметчиком в пехоте. Но погиб он не за пулеметом. В жарких боях ранней весной 1942 г. под Ржевом прорвались немецкие танки. Вася Жиров бросился под вражеский танк со связкой гранат и погиб смертью героя.

В тылу врага сражались и погибли комсомольцы мехмата, которых отобрали в первые дни войны как самых надежных и выносливых: два Василия — Подольский и Власенко, Володя Игнатович и Ваня Архименко. Они были десантниками. Младший политрук моторизованного десантного батальона аспирант Казимир Агаев (комсомолец с 1929 г.) был высажен с десантом под Курском зимой 1942 г.; в феврале того же года Казимир Агаев пал смертью храбрых в упорном неравном бою в тылу противника.

Многие довоенные мехматяне запомнили Пашу Лунева. В 1933 г. он пришел на мехмат с восьмилетним рабочим и годовым партийным стажем (он был принят в партию на автозаводе им. Сталина, где работал шофером). На мехмате он учился хорошо и с большим интересом. Был оставлен в аспирантуре. Он был комсоргом, потом секретарем бюро ВЛКСМ мехмата, а перед войной — секретарем комитета ВЛКСМ МГУ. Получив еще до университета специальность танкиста, в начале войны Паша Лунев вступил добровольцем в армию и вскоре погиб под Белой Церковью.

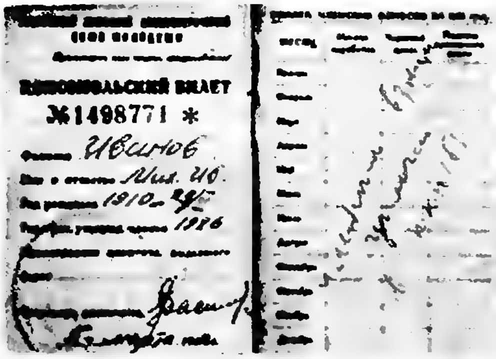
Всего с механико-математического факультета МГУ ушло в действующую армию более 300 человек, половина не вернулась. Комсомольцы факультета ведут поиск следов и воинских биографий погибших товарищей. На мемориальной доске 14 этажа высотного здания на Ленинских горах занесено 80 имен, но это еще не все.

Более пятидесяти человек вернулось на мехмат с различных фронтов Отечественной войны. В настоящее время на факультете работает 33 участника Великой Отечественной войны; из них 15 профессоров, докторов наук (примерно столько же ветеранов работает в НИИ механики МГУ).

Известный ученый-упругист П. М. Огибалов (декан механико-

Капитан Петр Матвеевич Огибалов, штурман и политработник воздушной армии, Народный герой Югославии, ныне профессор мехмата МГУ, бывший декан факультета.

Давид Шклярский, один из организаторов школьных математических олимпиад и математических кружков в МГУ.



КОМСОМОЛЬСКИЙ БИЛЕТ

№1498771 *

Иванов

33098

математического факультета МГУ в 1969—1977 гг.), будучи в 1941 г. работником ректората и секретариата парткома МГУ, преодолел запреты медкомиссий (из-за плохого зрения), вступил добровольцем в первую воздушную армию, в рядах которой штурманом и политработником прошел всю войну. Закончил он войну в грандиозной освободительной операции в Югославии и Венгрии, на южном фланге советско-германского фронта. Петр Матвеевич Огибалов, заслуженный деятель науки РСФСР, удостоен 15 правительственных наград и почетного звания Народного Героя Югославии.

Учеба в военные годы

Первый военный учебный год начался 1 августа 1941 г. по переходным учебным планам, значительно сокращавшим срок обучения. Но вскоре студенты были мобилизованы на спецработы по обороне Москвы и лишь часть из них вернулась к 1 сентября в аудитории. Занятия проходили в чрезвычайно сложных условиях. В середине октября в связи с эвакуацией университета в Ашхабад занятия были прерваны.

С первых месяцев войны студенты и преподаватели были привлечены в МПВО для охраны зданий университета на Моховой. В одном из подразделений из профессорско-преподавательского состава рядовыми бойцами были И. Г. Петровский, П. С. Александров, С. Л. Соболев, Б. В. Булгаков, А. А. Ильюшин, А. Г. Курош.

29 октября 1941 г. фашистский бомбардировщик прорвался к Манежу и сбросил 200-килограммовую фугасную бомбу перед зданием мехмата (здание Московского университета было включено гитлеровским командованием в число прицельных объектов бомбардировки). Взрывом бомбы была разрушена аэродинамическая труба, повреждены другие лабораторные установки, сильно повреждены памятник Ломоносову и

Старший лейтенант стрелковых войск, участник битвы под Сталинградом (где был тяжело ранен) Виктор Васильевич Москвитин, ныне профессор мехмата МГУ.

Капитан артиллерии Артур Яковлевич Сагомонян, ныне профессор мехмата МГУ.

Комсомольский билет Михаила Иванова, погибшего в 1941 г.

◀ Студенческий билет Андрея Павлова, погибшего в 1941 г.

старинная чугунная ограда. Помещения факультета надолго оказались непригодными к занятиям. Но зимняя экзаменационная сессия, а затем и весенняя состоялись: студенты сдавали зачеты и экзамены, в том числе и госэкзамены, получали дипломы.

Основная часть факультета, эвакуированная в Ашхабад, приступила к занятиям в декабре 1941 г.

Перезимовав в Ашхабаде, факультет летом 1942 г. переехал в Свердловск, где условия для занятий были лучше. А весной 1943 г. радостная весть облетела студентов: Московский университет возвращается в Москву! Летом факультет восстановился в Москве, но трудности в жизни факультета еще прибавились. Коллектив факультета значительно увеличился (на 1 курс было принято 155 студентов), а заниматься было негде, читальные залы не работали. В это время нередко можно было встретить нашего студента с учебником, а чаще с конспектом в метро, курсирующего по нескольку раз в день «от Сокольников до Парка» и обратно, в трамвае — от Дома Союзов до общежития в Останкино, а в весеннюю экзаменационную сессию — в Александровском парке, у Кремля — напротив мехмата.

К осени 1944 г. аудитории факультета были полностью восстановлены. По инициативе студентов была проведена научная студенческая конференция по математике и механике, а весной 1945 г. состоялась первая научная конференция «Ломоносовские чтения». Ломоносовская премия была присуждена проф. Х. А. Рахматулину, сделавшему доклад на тему: «Распространение нелинейных волн при ударе по гибкой нити».

Ученые факультета — фронту

Сорок лет назад, еще до начала войны, на аэродроме у станции Планерная под Москвой проходили испытания первых в мире ракет с воздушно-реактивными двигателями. Это было одно из существенных достижений на пути реализации смелых идей К. Э. Циолковского, по замыслу которого еще в 1933 г. в Москве был основан Реактивный научно-исследовательский институт (РНИИ). В Московском университете проводились хоздоговорные экспериментальные работы для РНИИ, о которых в журнале «Крылья родины» (№ 5 за 1964 г.) читаем:

«Начальным этапом явились исследования ракет в аэродинамической трубе механико-математического факультета МГУ. Путем нескольких продувок определили коэффиценты лобового сопротивления ракеты, подобрали аэродинамические тормозы, предназначавшиеся для быстрейшей расцепки первой и второй ступеней.

Одновременно с аэродинамическими исследованиями проводились испытания процесса горения в камере ВРД на ротационной установке, устроенной на станции Планерная». В продувке второй ступени ракеты в вертикальной трубе аэродинамической лаборатории МГУ принимали участие под руководством профессора Х. А. Рахматулина студенты мехмата МГУ И. А. Меркулов (конструктор ракеты с ВРД), А. Т. Улубеков и Л. Сабсович.

В начале войны молодыми учеными механико-математического факультета МГУ А. А. Космодемьянским и Л. П. Смирновым были выполнены исследования, имеющие непосредственное отношение к первым образцам пороховых военных ракет, получивших название «катюш». Об этом говорится в книге «Московский университет в Великой Отечественной войне».

Флаттер — это слово наводило ужас на летчиков-испытателей и конструкторов самолетов в предвоенные годы. Но вот в борьбу с этим таинственным явлением, вызывавшим разрушение самолетов в воздухе, вступили математики. После того как профессором нашего факультета М. В. Келдышем была разработана математическая теория флаттера, таинственность этого явления исчезла, а за время войны не было случаев разрушения самолетов из-за флаттера.

С первых дней войны ученые факультета самым активнейшим образом включились в научные исследования по оборонной тематике. Коллектив кафедры теории вероятностей под руководством академика А. Н. Колмогорова проводил большие исследования по разработке теории артиллерийской стрельбы и созданию таблиц стрельбы. В сжатые сроки была решена задача о наивыгоднейшем рассеивании снарядов при стрельбе по площадям. Профессор С. В. Бахвалов, бывший в годы гражданской войны артиллеристом, разработал теорию приборов управления артиллерийским огнем. В организации обороны Москвы от налета вражеской авиации посильную помощь войскам ПВО оказал профессор Н. А. Глаголев, решивший задачу об оптимальном размещении зенитных батарей вокруг Москвы.

Важная для ПВО задача об устойчивости формы аэростата воздушного заграждения, а также о прочности тросов заграждения была решена профессором Х. А. Рахматулиным; им же разрабатывались теория парашютов и аэродинамика проницаемых тел.

Трудной и актуальной проблемой для нашей авиации была бомбардировка вражеских войск с малых высот при малых скоростях самолетов. В решении этой проблемы приняли участие многие крупные ученые факультета. Академик Н. Е. Кочин дал практическое решение задачи по теории полетов самолетов на низкой высоте, а коллектив кафедры теории вероятностей создал в 1942 г. таблицы бомбометания с малых высот при малых скоростях самолетов.

Всему миру известна «Дорога жизни» по льду Ладожского озера и ее роль в обороне Ленинграда и спасении многих ленинградцев. В создании этой дороги принимал участие профессор кафедры теории упругости М. М. Филоненко-Бородич, решивший задачу о прочности ледового покрытия.

Следует особо остановиться на тех больших теориях и экспериментальных исследованиях по ряду опытно-конструкторских разработок военной техники, особенно артиллерии, которые проводились на кафедре теории упругости под руководством члена-корреспондента АН СССР А. А. Ильюшина с первых дней войны. Несмотря на то, что во время налетов вражеских бомбардировщиков на Москву лаборатории мехмата сильно пострадали, лабораторные работы на кафедре упругости имели перерыв лишь около двух месяцев (в конце 1941 г.).

Главный результат этих работ — теоретическое определение и доказательство допустимости пластических деформаций осколочно-фугасных снарядов при выстреле. Этот результат был проверен стрельбами и привел к созданию новых форм прочности, позволивших уже в 1943 г. коренным образом расширить производство снарядов из вязких сталей без термообработки и из сталистых чугунов. Использование же низколегированных сталей для изготовления снарядов значительно удешевляло и упрощало производство их, что было особенно важно при работе в условиях эвакуации.

При исследовании устойчивости вязко-пластических течений было определено число осколков и их разлет при разрыве снарядов, а на основе этих исследований были даны предложения об оптимальном проектировании снарядов. Впервые в практике исследования были применены методы моделирования проникновения авиабомб в грунт и дан анализ их прочности. Эти методы позволили решать проблемы оборонной техники ускоренными темпами. В начале войны был предложен метод скоростных испытаний на усталось ферросплавов для танковой промышленности. А в 1942 г. дано приближенное определение угла упреждения торпедной стрельбы по скорости изменения пеленга и сделан соответствующий прибор.

Сложную математическую задачу по устойчивости продольно-вращательных движений снарядов и ракет и определению наивыгоднейшей крутизны нарезки стволов решил член-корреспондент АН СССР Н. Г. Четаев. Им же совместно с профессором А. А. Космодемьянским и профессором Н. Д. Моисеевым была решена важная практическая задача об устойчивости самолета при движении по земле (эта задача возникла при частом перебазировании самолетов на новые неблагоустроенные аэродромы). Понятно, какое исключительное значение в годы войны имела служба времени ГАИШ, обеспечившая передачу точных радиосигналов времени для нужд фронта. В ее бесперебойную работу немалый вклад внес профессор Н. Д. Моисеев, руководивший этой службой. Академик А. Ю. Ишлинский, член-корреспондент АН СССР Б. В. Булгаков и профессор Я. Н. Ройтенберг проводили большую теоретическую и практическую работу по совершенствованию и повышению точности морских гироскопических приборов и приборов управления артиллерийским огнем на кораблях Военно-морского флота СССР.

Профессор М. А. Крейнес принимал активное участие в решении задачи о выборе схем регулярных сложных зубчатых передач для механизмов управления танков.

Здесь перечислены далеко не все работы оборонного характера, которые успешно выполняли ученые факультета. Этот труд ученых механико-математического факультета был отмечен многими правительственными наградами и Государственными премиями СССР.

Забытая теорема

(софизм-шутка)

Вот «теорема», забытая авторами учебников геометрии:

Через любые n точек можно провести прямую линию (n — произвольное натуральное число).

Докажем эту теорему методом математической индукции.

При $n=1$ и $n=2$ теорема справедлива (в силу известной аксиомы геометрии). Остается доказать теорему для больших значений n.

Допустим, что теорема справедлива при некотором $n=k$, и покажем, что в этом случае она будет сохранять силу и при $n=k+1$.

Итак, пусть произвольно заданы $k+1$ точек $M_1, M_2, \ldots M_k, M_{k+1}$. В силу предположения индукции, через k точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$ проходит некоторая прямая l. В силу того же предположения через k точек $M_2, \ldots, M_k, M_{k+1}$ также проходит некоторая прямая l'. Эти две прямые имеют по крайней мере две общие точки M_2 и M_k. Но две точки определяют единственную прямую. Прямые l и l' должны поэтому совпадать. Следовательно, прямая l, проходящая через точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$, проходит и через точку M_{k+1} — и теорема доказана.

Ю. Гайдук

П. Халмош

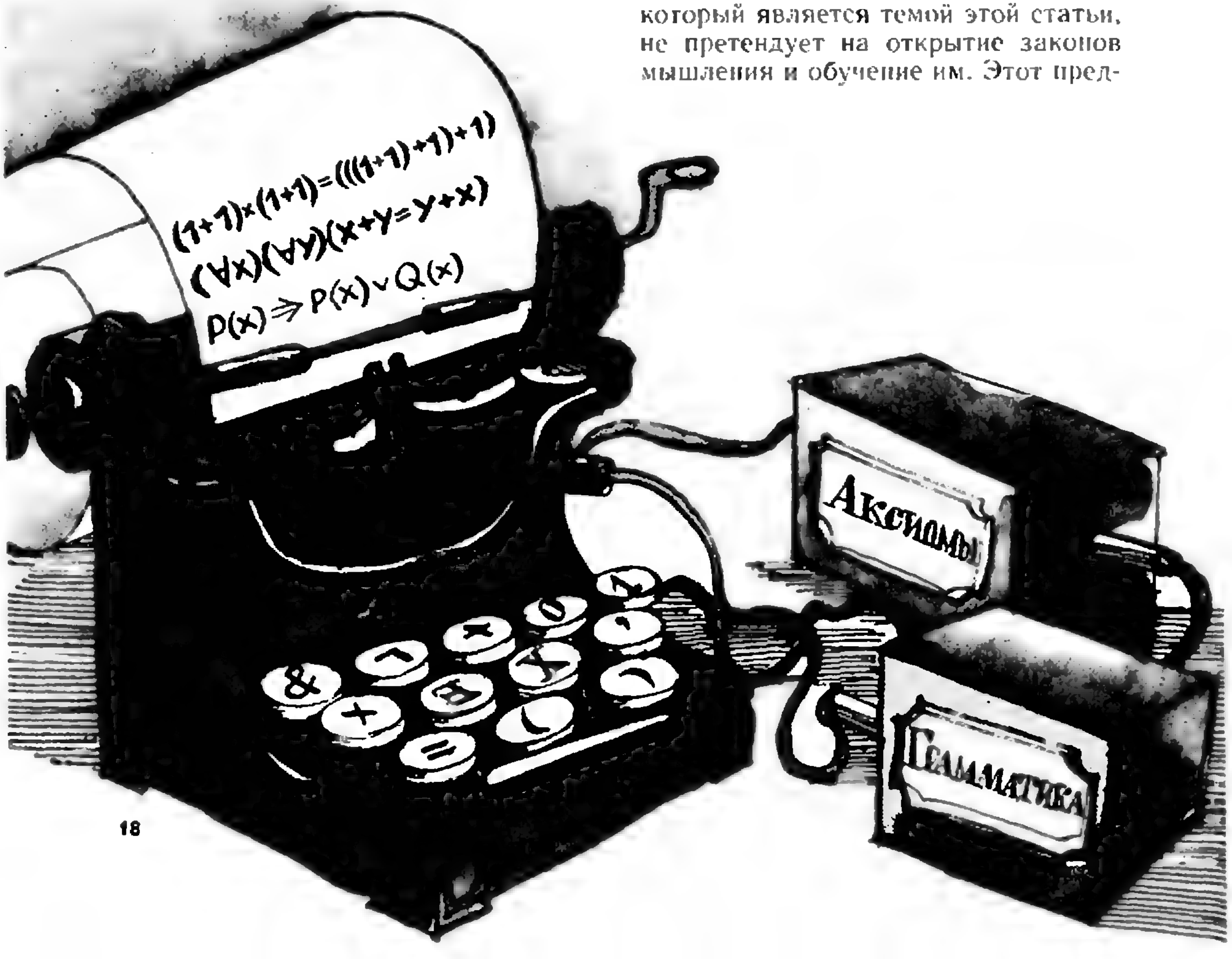
Логика от А до Г

Описание механического помощника математика с вольными замечаниями математика-исследователя

Чем является и чем не является логика

Первоначально «логика» означало то же, что «законы мышления». Логики изучали эту науку, надеясь, что смогут найти лучшие способы мышления и более надежные способы избегать ошибок, чем те, которые знали их предки. Они надеялись, что смогут научить этому искусству все человечество. Однако опыт показал, что это были несбыточные мечты. Нормальный, здоровый человек владеет всеми «законами мышления», которые когда-либо были изобретены, и нет ничего такого, чему логики могли бы его научить по части мышления и способов избегать ошибок. Это не означает, что человек знает, как он думает, и это не означает, что он никогда не делает ошибок. То же самое относится и к органам движения, с которыми рождаются все нормальные, здоровые люди. Я не знаю, как я хожу, но я делаю это. Иногда я спотыкаюсь. Законы ходьбы могли бы представлять интерес для физиологов и физиков, а все, что хочу я,— это продолжать ходить.

Предмет математической логики, который является темой этой статьи, не претендует на открытие законов мышления и обучение им. Этот пред-



Перевод с английского Л. Савиной статьи из Mathematics Magazine, т. 50 (1977), № 1, с. 5—11.

мет называется математической логикой по двум причинам. Во-первых, он имеет дело с тем видом деятельности, которым занимаются математики, когда они что-либо доказывают; математическая логика изучает природу доказательств и пытается предсказать в общих чертах все возможные типы утверждений, которые математики когда-либо докажут и которые они никогда не смогут доказать. Во-вторых, он сам является частью математики. Математическая логика изучает свой предмет математическими методами и проводит доказательства точно так же, как это делается в других областях математики (с методами которых она связана). Эта ситуация похожа на завод, производящий машины, которые призваны производить машины. Работник на таком предприятии не отличается от работника на любом другом заводе, производящем машины, за исключением того, что он, возможно, немного лучше понимает, как делать машины вообще (и немного хуже — как работает каждая конкретная машина).

История логики, подобно истории большинства наук, развивалась совсем не по порядку. Если бы я стал рассказывать вам все прямо, как было, вы бы пришли в замешательство. Я собираюсь рассказать вам немного об истории логики «по порядку», то есть в том порядке, в котором она должна была бы развиваться.

Сначала Буль и высказывания

Согласно моей версии, все началось приблизительно 100 лет назад с Джорджа Буля. Буль систематически изучил безобидные маленькие слова, которые мы используем каждый день, чтобы соединять высказывания,— так называемые *высказывательные связки*. В русском языке эти связки:

и, или, не, влечет,
тогда и только тогда.

Для них удобно иметь сокращения. Обычно используются следующие математические символы:

$$\&, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

Таким образом, если P и Q — высказывание, то $P \& Q$ — тоже высказывания. Если P означает «солнце светит» и Q — «жарко», то $P \& Q$ означает «солнце светит и жарко».

Затем Пеано и числа

Следующая фигура в нашей пересмотренной истории математической логики — итальянский математик XIX века Пеано, изучавший основы арифметики. В частности, он изучал свойства основных чисел *нуль* и *единица*, основные действия — *сложение* и *умножение* и основное отношение — *равенство*. Соответствующие символы, конечно, известны каждому:

$$0,\ 1,\ +,\ \times,\ =$$

Таким образом, популярное высказывание «дважды два — четыре» может быть записано в несокращенном виде так:

$$(1+1)\times(1+1)=((1+1)+1)+1.$$

Потом Аристотель и кванторы

Сразу же за Пеано следует Аристотель, который жил более 2000 лет назад и которому мы обязаны пер-

A
AEAEAE
AEAE
АРИСТОТЕЛЬ

вым анализом важнейших слов *все* и *некоторый*. (Между прочим, мы сейчас достигли начала алфавита: буква А в названии «Логика от А до Г» обозначает, конечно, Аристотеля.) Для них используются следующие сокращения: $\forall$ и $\exists$. Чтобы проиллюстрировать использование этих символов, рассмотрим предложение «Кто заколебался, тот пропал»*). На педантичном математическом языке это может быть сказано следующим образом: «Для всех X, если X заколеблется, то X пропал». Используя К(X) и П(X) в качестве сокращений для «X заколеблется» и «X пропал», мы можем написать

$$(\forall X)(\text{К}(X) \Rightarrow \text{П}(X)).$$

Если мы сомневаемся в этом утверждении, то есть если мы склонны верить, что вполне возможно колебание без последующей гибели, мы можем выразить наш скептицизм в виде

$$(\exists X)(\text{К}(X) \;\&\; (\neg\text{П}(X)).$$

И, наконец, Фреге и много кванторов

Важной частью аристотелевских сокращений является использование дополнительных символов, подобных вышеприведенному символу X. Такие символы в языке логики играют роль местоимений. Вспомните, что в вышеприведенном примере X заняло место слова «он». Символы, используемые таким образом, называются *индивидуальными переменными*. Следующей исторической фигурой, заслуживающей упоминания, является человек, который первым решился их использовать. Его имя Фреге, и он тоже жил в XIX веке. Сегодня мы ценим его за то, что именно он подчеркнул: одна переменная, то есть одно местоимение, — слишком убогий инструмент для большинства научных и математических целей. Например, если мы хотим выразить очень скромное утверждение, что имеется больше чем два числа, то есть что существуют по крайней мере три различных числа, мы можем сделать это следующим образом:

$$(\exists X)(\exists Y)(\exists Z)$$
$$(\neg(X=Y) \;\&\; \neg(Y=Z) \;\&\; \neg(Z=X)).$$

Совершенно очевидно, что для этой цели нужны по крайней мере три переменные. Чтобы сказать, что имеется больше чем десять чисел, нужно по крайней мере одиннадцать переменных. Чтобы проделать любое нетривиальное количество расчетов, нужен (по крайней мере потенциально) бесконечный запас переменных. Эффективный способ создать такой запас (обычно алфавиты имеют слишком конечное число букв) состоит в том, чтобы использовать одну букву, скажем X, и один дополнительный символ, скажем штрих. И затем использовать в роли переменных символы

$$X,\ X',\ X'',\ X''',\ X'''',\ldots$$

Кроме тех символов, которые я упоминал до сих пор, имеются еще два, которые я уже использовал, и безудержная честность заставляет меня присоединить их к нашему списку. Символы, которые я имею в виду,— левая и правая круглые скобки: они обозначаются, конечно, так:

$$($$

и

$$)$$

Сколько символов?

Оказывается, очень большая часть математики, а именно вся арифметика, может быть выражена с помощью символов, которые я перечислил до сих пор. Например, знаменитая теорема Эйлера*): каждое целое положительное число есть сумма четырех квадратов — может быть записана следующим образом:

$$(\forall X)(\exists X')(\exists X'')(\exists X''')(\exists X'''')$$
$$(X=(X'\times X')+((X''\times X'')+$$
$$+((X'''\times X''')+(X''''\times X'''')))).$$

На самом деле, можно навести некоторую экономию: некоторые символы можно легко и естественно

---

*) Буквальный перевод английского варианта нашей поговорки «Промедление смерти подобно». (*Прим. пер.*)

*) В русской математической литературе ее называют теоремой Лагранжа. (*Прим. ред.*)

определить через другие. Наш список можно без труда уменьшить до дюжины, а именно:

$$\& \; \neg \; + \; \times \; 0 \; 1 \; \exists \; X \; ' \; = \; (\;).$$

Чтобы снова получить $\vee$, заметьте, что $P \vee Q$ есть не что иное, как $\neg(\neg P \; \& \; \neg Q)$. Чтобы получить $\Rightarrow$, заметьте, что $P \Rightarrow Q$ есть то же самое, что и $\neg P \vee Q$. Чтобы получить $\forall$, заметьте, что $(\forall X)\, P\,(X)$ есть то же самое, что $\neg(\exists X)(\neg P(X))$. Так, словами, высказывание «Все ненавидят шпинат» означает то же самое, что отрицание того, что есть кто-то, кто его любит. В таких сокращениях есть некоторое техническое преимущество в принципе, но нет смысла связывать себя ими на практике. Всякий раз, когда удобно, я буду использовать $\vee$, $\Rightarrow$, и я даже буду использовать Y, Z, U, V и т. п. в качестве переменных. Чтобы устранить эти отклонения от наших правил, достаточно заменить $\vee$, $\Rightarrow$, $\forall$ и т. п. на их определения, а также заменить Y, Z, U, V и т. п. на X', X'', X''', X'''' и т. д.

Сделаем пару любопытных замечаний. Во-первых, все, что мы делаем для элементарной арифметики, с таким же успехом может быть сделано для всех существующих разделов математики. Технический аппарат, то есть символика и правила, управляющие ею, даже не стали бы сложнее: единственная разница состоит в том, что нам пришлось бы думать немного больше. Но ясно, что это нежелательно, поэтому я собираюсь ограничиться элементарной арифметикой. Во-вторых, в числе «двенадцать» нет ничего магического. Дюжина символов достаточна для арифметики и фактически для всей математики (хотя в этом случае мы, возможно, должны были бы найти другую дюжину). Более того, потратив незначительные усилия, можно обойтись и более скупыми средствами. Наилучший возможный результат, на который вы могли надеяться в самых фантастических мечтах, оказывается верным, а именно, что достаточно даже двух символов*). Полное изложение всей математики, записанное, скажем, точками и тире азбуки Морзе, не явилось бы особенно увлекательным чтением, но в принципе вполне возможно.

Механический математик

Давайте, теперь приступим к созданию механического математика, который положит конец всем математикам. Достоинства этой воображаемой машины чисто умозрительные: мы не утверждаем, что создание механического математика принесет какую-либо практическую выгоду. Он никогда не сможет заменить живого математика.

Начнем строить машину. Для этого нам понадобится лента для пишущих машинок, дюжина клавишей (на каждом находится один из дюжины основных символов) и потенциально бесконечно длинный рулон бумаги для печати. Идея машины состоит в том, что после нажатия пусковой кнопки машина должна начать печатать все, что она когда-либо может напечатать. Один из способов запрограммировать это таков: расположим дюжину символов в произвольном порядке (назовем его *алфавитным*) и затем дадим указание машине печатать первые двенадцать символов («букв») алфавита, потом печатать 144 «слова» из двух букв, затем 1728 «слов» из трех букв и т. д. до бесконечности. Машина, сконструированная таким образом, напечатает много чепухи, например

$$= \;=\; = \;(((0+').$$

и много лжи, например

$$(\exists X)\,((0 \times X) = 1),$$

но она рано или поздно напечатает любое арифметическое утверждение.

Потребуем соблюдения грамматики

Чтобы сделать машину более похожей на живого математика из плоти и крови, мы должны организовать дело так, чтобы на выходе машина никогда не давала сущего вздора, хотя пока мы ей разрешаем врать.

---

*) На самом деле, достаточно и одного. Подумайте, почему. (*Прим. ред.*)

Это в принципе достаточно легко. Нет смысла перечислять здесь все ограничения, которые должны налагаться на машину, но давайте рассмотрим несколько примеров. Во-первых, научим машину кое-какой грамматике. Давайте, скажем, что *имя* — это любая последовательность символов, состоящая из нулей и единиц с последовательно расположенными между ними знаками + и ×, а также с разделением получаемых результатов (правильно расставленными) круглыми скобками.

Например,

$$0,$$
$$1+1,$$
$$((1+1)\times(1+(1+(1+1))))$$

являются именами в этом смысле. Аналогично можно сказать, что *местоимение* есть то, что можно получить из X последовательным прибавлением штрихов. Таким образом, местоимениями являются

$$X,\ X',\ X'',\ X''',\ldots$$

Продолжая в том же духе, определим *существительное* как последовательность имен и местоимений, соединенных знаками сложения и умножения (с дополнительным использованием круглых скобок) тем же способом, каким первоначально из 0 и 1 были составлены имена. Совсем нетрудно создать машину, которая может распознавать существительное, когда она видит его. Если это будет сделано, мы сможем приказать машине следующее: «Начать печатать существительные (в некотором систематическом порядке). После того как напечатано одно существительное, напечатай знак равенства, и затем печатай другое существительное. Учись распознавать последовательности, которые ты таким образом напечатала (существительное, равенство, существительное), и называй каждую такую последовательность *равенством*». Теперь наша машина может печатать осмысленные равенства и распознавать их как таковые. Отсюда всего один шаг до того, чтобы научить машину печатать (и распознавать) составные формулы (назовем их *фразами*). Идея состоит в том, чтобы сложить вместе несколько равенств при помощи логических операторов *и*, *не* и *некоторый*, введенных с соответствующими ограничениями. Таким образом, машина, которая печатает только фразы, (по крайней мере умозрительно) достижима. Такая машина могла бы еще печатать неполные (например, $X=0$) или ошибочные (например, $1=0$) фразы, но она больше не будет печатать тарабарщину.

Беглое упоминание выражения «неполные фразы» предполагает другой взгляд на то, что мы хотим от механического математика. Неполная фраза в том смысле, в котором я хочу употребить это выражение сейчас, это что-то похожее на выражение «он пропал». Когда слышишь или видишь эти слова, возникает естественное желание спросить «Кто пропал?». Аналогично $X=0$ должно вызвать реакцию «Что такое X?» Фразы с «висящими местоимениями» такими, как «он» в выражении «он пропал», и такими, как «X» в «$X=0$», — это фразы, которые я хочу здесь называть неполными. Фраза, которая не имеет таких «висящих» местоимений, будет называться *предложением*. Следующий шаг в усовершенствовании механического математика — обучить его распознавать предложение, когда он его видит, и ввести в него запрет, позволяющий ему печатать только полные предложения. Теперь, если нажать кнопку, машина начнет печатать осмысленные предложения. Она никогда не преподнесет оператору выражение «$X=0$». Машина может сказать что-нибудь неинтересное (например, $(\exists X)(X=0)$) или ложное (например, $(\forall X)(X=0)$), но во всяком случае она будет все время что-нибудь говорить.

Зададим аксиомы

Теперь машина знает, как разговаривать. Следующий шаг — научить ее доказывать. Ни машина, ни ее живой прототип из плоти и крови не могут доказать что-то из ничего. Живой математик имеет свои аксиомы. В машину должны быть введены определенные предложения, с которых она обязана начинать. Будем называть эти предложения *аксиомами*. Я опять не указываю здесь точно, какие предложения должны быть аксиомами арифметики, но приведу несколько примеров. (Полное определение понятия «аксиома» в элементарной арифметике не очень длинно или сложно. Просто здесь не время и не место вдаваться в обсуждение технических частностей.) Ну, хорошо: машину можно было бы научить, что всякий раз, когда P и Q — предложения, тогда предложение

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

должно печататься красной краской. Идея состоит в том, что каждое такое предложение нужно считать аксиомой. Аналогично, мы можем сказать, что если $P(X)$ и $Q(X)$ — фразы (содержащие «висящее» местоимение X, но никаких других), то предложение

$$(\exists X)(P(X) \vee Q(X)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists X)P(X) \vee (\exists X)Q(X) \qquad (B)$$

должно печататься красным. Последний пример: такое предложение, как

$$(\forall X)(\forall Y)(X+Y=Y+X), \quad (C)$$

может быть аксиомой элементарной арифметики. (Пояснительные примеры: (A) Если погода теплая, то или солнце светит, или погода теплая, или же и то и другое вместе. (B) Если кто-то любит или шпинат или капусту, то или кто-то любит шпинат, или кто-то любит капусту. (C) $2+3=3+2$.

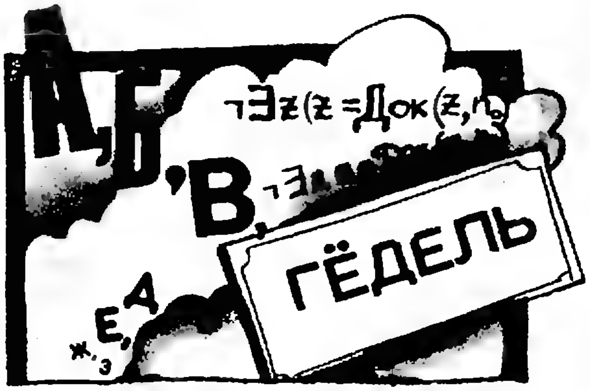
Суть дела здесь состоит в следующем: из всех предложений неким разумным и систематическим способом выбирается определенная группа предложений, которые машина может печатать, и машине дается команда печатать эти специальные предложения красным. Предложения, напечатанные красным, называются аксиомами для машины.

Запрограммируем процедуру

Выше я сказал, что никто не может доказать что-то **из** ничего, по этой причине я наделю механического математика некоторыми исходными предложениями. Но также верно, что никто не может доказать что-то **при помощи** ничего. Машина может печатать предложения черным и красным, и если аксиомы были выбраны в соответствии с пожеланиями разумного существа, то предложения, напечатанные красным (аксиомы), будут верны. Тем не менее машина может еще печатать много ложных штуковин, и она все еще не имеет средства для создания новых правильных предложений из старых.

Теперь процесс обучения машины достиг последнего этапа. На этом этапе машина должна научиться распознавать определенные комбинации предложений и за это вознаграждается тем, что ей разрешается использовать больше красной печатной краски. Общий список таких правил процедуры не длинный, список из двух примеров таких правил, который я собираюсь дать, даже еще короче. Возможное правило номер 1: если P — красное предложение и если $P \Rightarrow Q$ — красное предложение, то печатай Q красным. (Объяснение: если «Солнце светит» — аксиома или было уже доказано, так же как и высказывание «Если солнце светит, то погода теплая», тогда мы можем считать доказанным, что «Погода теплая».) Возможное правило номер 2: если неполная фраза $P(X)$, содержащая «висящее» местоимение «X» (и никаких других), такова, что предложение $P(0)$ — красное ($P(0)$ — предложение, полученное из $P(X)$ подстановкой 0 вместо X), то печатай предложение $(\exists X)P(X)$ красным. (Объяснение: если мы подставим 0 вместо X в «$(1+X)=1$», мы получим «$1+0=1$». Если это предложение — аксиома или уже было доказано, то мы можем считать доказанным «$1+X=1$ для некоторого X».)

Сделав последнее добавление, мы можем, наконец, почить на лаврах. Мы можем, если хотим, изменить внутреннюю конструкцию машины так, чтобы она не печатала ничего, кроме красных предложений. Когда нажата кнопка, машина начинает печатать аксиомы и с помощью правил процедуры продолжает печа-



тать теоремы, которые она может вывести из этих аксиом. Машина может делать это в некотором систематическом порядке, скажем в алфавитном.

Наступил золотой век. Механический математик закончен. Нажмите кнопку и, откинувшись на спинку стула, можете бездельничать. На ленте будут появляться одна за другой теоремы элементарной арифметики. Если подождать достаточно долго, то рано или поздно перед вашими глазами пройдут все теоремы. Машина никогда не говорит нелепостей и никогда не говорит неправды. Вы будете считать, что машина несколько скучновата, часто повторяет одно и то же, работает очень медленно с точки зрения человека. Но это не ее вина.

Есть ли противоречия?

Мы ввели в машину все, что мы сами, ее создатели, знаем об элементарной арифметике. Внутренняя работа машины и есть элементарная арифметика. Теория такой машины, ее конструкция, ее структурные свойства являются частью другой дисциплины, часто называемой *метаматематикой* (или, в нашем случае, метаарифметикой). Следующий вопрос является типичным вопросом, задаваемым в метаматематике: «Напечатает ли машина когда-либо как предложение P, так и его отрицание $\neg P$?» Если бы она когда-либо сделала это, то мы бы, вероятно, выразили неудовольствие таким состоянием дел, сказав, что элементарная арифметика противоречива. К счастью, это не так: арифметика не противоречива. Доказательство этого зависит от очень утонченного, неэлементарного изучения той машины, которую мы описали. Изучение является «неэлементарным» в нескольких смыслах этого слова. В самом точном техническом смысле дело в том, что доказательство того, что машина непротиворечива, не является одной из теорем, которую машина сама может доказать. Повторим это иначе: машина никогда не будет противоречить сама себе, но она не может доказать это.

Может ли все быть доказано?

Другим интересным вопросом метаматематики является следующий: «Является ли машина полной в том смысле, что она либо доказывает, либо опровергает каждое предложение элементарной арифметики?» В сущности, я уже дал ответ на этот вопрос, но все-таки стоит его повторить. При создавшемся положении вещей все то, что машина напечатает, она доказывает. Если я заинтересован в каком-то конкретном арифметическом предложении, я могу написать это предложение на кусочке бумаги и затем после включения машины сравнить весь последующий текст, печатающийся машиной, с моим заготовленным бланком. Если на бумаге утверждается P и если на какой-то стадии машина также печатает P, то я удаляюсь с победой: мое утверждение P доказано. Если на бумаге утверждается P, но на какой-то стадии машина печатает $\neg P$, то я удаляюсь с позором: мое P опровергнуто. Однако нет ли здесь третьей возможности? Не может ли так случиться, что машина никогда не напечатает P, а также никогда не напечатает $\neg P$? Не может ли так случиться, что машина никогда не разрешит спора между P и $\neg P$? На самом деле может, и тем самым мы достигли конца нашего алфавита. Г означает «Гёдель» — имя блестящего логика XX века. В начале 30-х годов Гёдель доказал с помощью тонкого и остроумного анализа арифметической машины, что существуют утверждения (и таких много), которые машина никогда не разрешит. Это доказательство явное: оно дает полную инструкцию для записи неразрешимого предложения. Доказательство того, что предложение, которое получили, следуя этой инструкции, неразрешимо, зависит от подробного изучения тех же самых инструкций. Здесь нет ничего неправильного, здесь нет парадокса, здесь все вполне логично. Тот факт, что никто никогда не потрудился записать неразрешимое предложение Гёделя полностью, снова объясняется недостатком терпения и быстротечностью человеческой жизни.

Когда я ставил вопрос о полноте, я сказал, что уже ответил на него. На самом деле, рассмотрим предложение (записанное формально с помощью дюжины формальных символов арифметики), которое утверждает, что арифметика непротиворечива. Совсем не ясно, что скудный формальный аппарат арифметики способен выразить такое предложение. Одной из заслуг Гёделя является то, что он показал способность арифметики проделать это. Если мы примем это на веру и если мы назовем одно такое предложение P, то мы знаем только, что P недоказуемо в элементарной арифметике. А как насчет $\neg P$? Ну, совершенно ясно, что $\neg P$ также не может быть доказано. Причина: все доказываемое, как мы уже знаем из наших предыдущих рассуждений на эту тему, истинно. (Это связано с тем, что арифметика непротиворечива.) Предложение $\neg P$, конечно, не истинно. (Вспомните, что $\neg P$ отрицает непротиворечивость арифметики.) Вывод: ни P, ни $\neg P$ не доказуемо. (Замечание: из этих двух высказываний, истинным является P.)

Но это не все

То, что я сообщил вам, произошло в 30-х годах. Но с тех пор наука не стояла на месте. Сам Гёдель добавил много ярких результатов к нашим знаниям о формальной логике. Многие другие работали в этой области и обнаружили неожиданные приложения и затруднения. Кто, например, мог ожидать, что формальная логика окажется одним из самых важных инструментов при конструировании самых что ни есть настоящих электронных вычислительных машин! Математическая логика жива и здорова, многое еще предстоит сделать, и пройдет много времени до того, когда кто-нибудь сможет описать математическую логику от «А» до «Я».

Дорогой Великой Отечественной войны прошли миллионы советских людей: учителя и инженеры, рабочие и колхозники. Люди самых разных профессий по призыву партии и зову сердца встали на защиту отечества. Мы расскажем вам об участнике Великой Отечественной войны, вся жизнь которого неразрывно связана с преподавательской деятельностью — Алексее Федотовиче Жникине.

В 1931 году молодой рабочий, выходец из крестьянской семьи, поступает на подготовительные курсы при пединституте в Ростове-на-Дону. В 1937 году он оканчивает институт и начинает работать на кафедре математики.

Великая Отечественная война прерывает педагогическую деятельность А. Ф. Жинкина. 15 ноября 1941 года он уходит на фронт, принимает участие в боях на Малой земле. Именно там начальник политотдела армии товарищ Л. И. Брежнев вручает А. Ф. Жинкину партийный билет.

За боевые заслуги А. Ф. Жинкин награжден многими боевыми орденами и медалями.

По окончании войны он продолжает свою преподавательскую деятельность в Винницком пединституте на кафедре методики математики, занимаясь изготовлением наглядных пособий.

Выйдя в 1970 году на пенсию, А. Ф. Жинкин не перестает заниматься педагогической и общественной деятельностью — выступает с лекциями перед молодежью, прививая ей любовь к математике.

М. Барская

Л. Гродко

Устойчивость автомобиля

Качества современного автомобиля в значительной степени определяются уровнем развития теории автомобиля. Одним из важнейших направлений этой теории является учение об устойчивости автомобиля.

Существует несколько различных видов потери устойчивости при движении автомобиля: потеря устойчивости, связанная с боковым или продольным опрокидыванием автомобиля; потеря устойчивости, связанная с достижением упругой шиной колеса ее критической скорости (этому вопросу была посвящена статья в 10 номере «Кванта» за 1978 г.); неустойчивые колебания в горизонтальной плоскости прицепов автомобильного поезда; наконец, неустойчивость одиночного автомобиля, приводящая к так называемым движениям «рысканья» — неуправляемым или плохо управляемым поворотам автомобиля в горизонтальной плоскости. Именно этот вид неустойчивости определяет качество поведения автомобиля в сравнительно «хороших» условиях, то есть при движении по ровной дороге со скоростью, которая наиболее часто встречается в эксплуатации. Именно с этим видом устойчивости связаны понятия: «автомобиль хорошо держит дорогу», «автомобиль приятен в управлении» и т. п.

Создание теории этого вида устойчивости связано с именами советских ученых академика Е. А. Чудакова и профессора Я. М. Певзнера и американского ученого М. Оллея. С помощью специальных экспериментов и теоретических исследований они установили, какие именно свойства автомобиля и его шин определяют его устойчивость.

В этой статье излагаются основные наиболее простые положения этой теории, которые вполне можно пояснить с помощью школьного курса физики.

Увод автомобильной шины

Отчего поворачивает автомобиль? Ответить на этот вопрос, по крайней мере в общих чертах, может каждый, кто хотя бы присматривался к автомобилю. Оттого, что передние рулевые колеса автомобиля могут поворачиваться относительно вертикальных осей. Конструкторы первых автомобилей, предлагая такое устройство, исходили из предположения, что колесо A, будучи повернуто на некоторый угол φ (рисунок 1), «захочет» катиться вдоль прямой AM, представляющей собой проекцию на плоскость дороги плоскости симметрии колеса. И автомобиль будет поворачивать. Если бы это было действительно так, то картина поворота автомобиля выглядела бы следующим образом: корпус автомобиля поворачивается вокруг точки O — центра поворота, лежащей на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей передних и задних колес. При этом, как видно из рисунка 1, если правое переднее колесо A повернуть

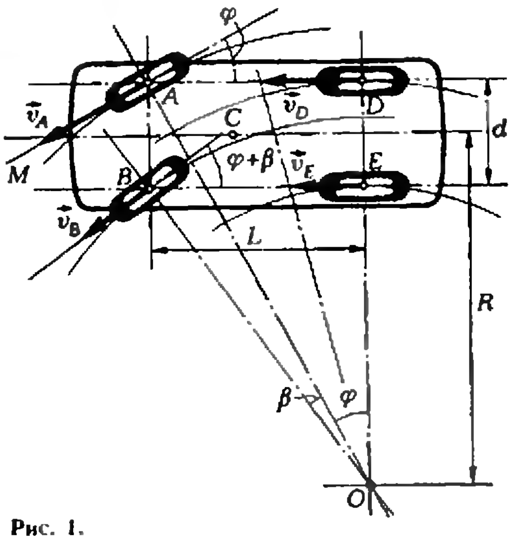


Рис. 1.

на угол φ, то левое нужно повернуть на несколько больший угол φ+β. Расстояние R от оси симметрии корпуса автомобиля до центра поворота можно найти из соотношения

$$R = L\,\mathrm{ctg}\,\varphi - \frac{d}{2},$$

где L — расстояние между осями передних и задних колес — так называемая база автомобиля, d — расстояние между соосными колесами — колея автомобиля.

Однако такая картина поворота возможна лишь при очень медленном повороте, когда центростремительное ускорение центра тяжести автомобиля и вызывающие его боковые силы, приложенные к колесам от земли, невелики.

При наличии боковой силы автомобильная шина «идет» под некоторым углом к своей плоскости симметрии. Это называется явлением увода шины. Для изучения явления увода применяется такой опыт. Испытуемую шину закрепляют на неподвижной оси и прижимают к вращающемуся барабану силой G, соответствующей нагрузке, то есть весу автомобиля, «приходящемуся» на одно колесо (рисунок 2, *а*). Колесо закрепляют так, что его плоскость симметрии (Пл. M) составляет с плоскостью симметрии барабана (Пл. N) некоторый угол δ, называемый углом увода (рисунок 2, *б*).

При вращении барабана на колесо будет действовать сила трения $\vec{F}_{тр} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (рисунок 2, *в*). Слагаемое $\vec{F}_1$ — это сила, «раскручивающая» колесо, а слагаемое $\vec{R}_2$ — это та сила; которая, если ее не «компенсировать», будет смещать колесо «поперек» барабана. Следовательно, чтобы колесо «шло» под углом δ к плоскости N, к нему надо приложить силу $\vec{P} = -\vec{F}_2$.

Измеряя с помощью динамометра величину силы $\vec{P}$ при различных углах увода, можно построить график зависимости $|\vec{P}|(\delta)$. Общий вид такого графика приведен на рисунке 3. При малых углах увода ($\delta < 5^\circ$) зависимость $|\vec{P}|$ от δ оказывается почти линейной, так что напишем

$$|\vec{P}| = k\delta. \qquad (1)$$

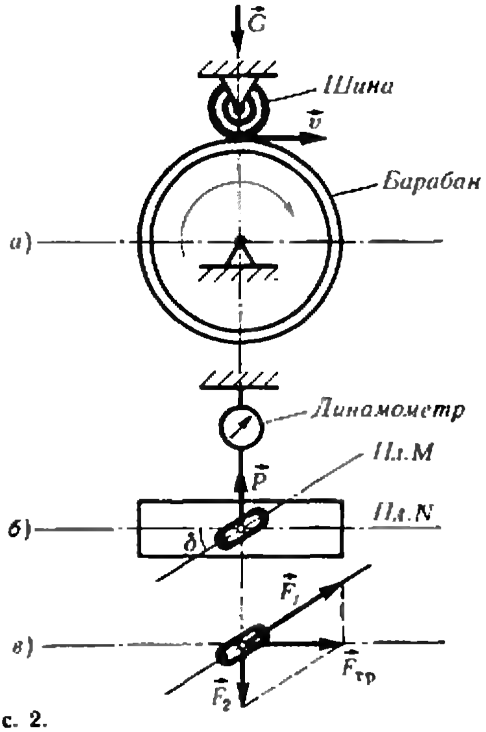


Рис. 2.

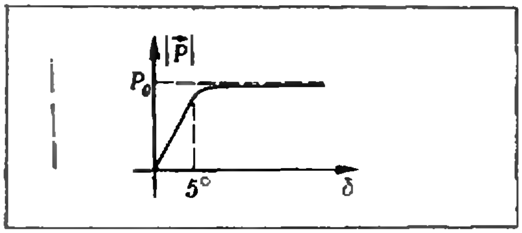


Рис. 3.

Коэффициент k называют сопротивлением боковому уводу данной шины. Значение k зависит от конструкции шины и от величины нагрузки $\vec{G}$. Для современных шин приблизительно выполняется соотношение

$$k \approx 5|\vec{G}|.$$

Например, для автомобиля «Жигули» нагрузка на одно колесо составляет примерно 2200 Н. Следовательно, $k \approx 11\,000$ Н/рад.

При углах увода $\delta > 5^\circ$ боковая сила перестает расти с ростом δ. Участок кривой $|\vec{P}|(\delta)$ при $\delta > 5^\circ$ соответствует качению колеса с полным боковым скольжением. Соответствующая сила трения — так называемая предельная сила трения —

$$|\vec{P}_0| = \mu|\vec{G}|,$$

где μ — обычный коэффициент тре-

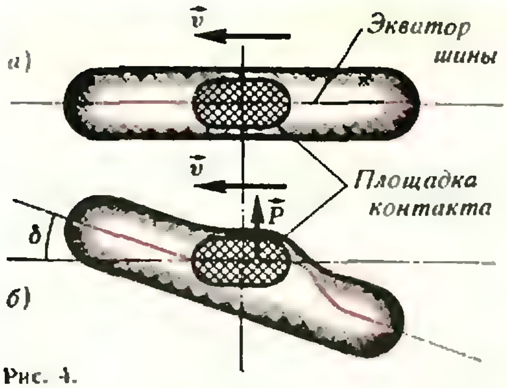


Рис. 4.

ния скольжения, который в теории автомобиля принято называть коэффициентом сцепления шины с дорогой.

Для современной шины на сухом асфальте $\mu = 0{,}6 \div 0{,}8$ (то есть трение шины о дорогу очень велико; например, при скольжении стали по стали $\mu = 0{,}08 \div 0{,}1$).

Оказывается, что при обычной эксплуатации автомобиля углы увода находятся на линейном участке характеристики $|\vec{P}|(\delta)$. Даже на таких «крайних» режимах работы шины, как поворот автомобиля «с писком», угол увода еще несколько меньше «критического» значения $\delta = 5°$. При езде по хорошей ровной дороге значения углов увода все время меняются, так как водитель все время «подправляет» рулем движение автомобиля, но остаются при этом очень малыми ($\delta \approx 0{,}5 \div 1°$).

Линейный участок характеристики увода, описываемый формулой (1), определяется, как показали многочисленные исследования, боковой упругостью шины. Для очень жесткого колеса (например, колесо детского велосипеда или коляски со сплошной резиновой шиной) критический угол увода очень мал — порядка $0{,}5 \div 1°$.

Рисунок 4 сделан с фотографии модели шины в месте ее контакта с дорогой. (Шина «катилась» по барабану со специальной прозрачной поверхностью, через которую изнутри барабана и были сделаны снимки.) На рисунке 4, *а* показано пятно контакта при качении без увода, а на рисунке 4, *б* — с уводом. Для того чтобы картина деформации шины была видна более четко, на шине нарисована средняя линия (экватор на недеформированной шине). Как видно из этих рисунков, средняя линия в зоне контакта направлена по вектору скорости движения шины и величина деформаций тем больше, чем больше угол увода. Отсюда ясно, что при одном и том же угле увода, а следовательно, при одних и тех же деформациях боковая сила тем больше, чем жестче шина.

Выяснение зависимости величины k — сопротивления боковому уводу шины — от конструктивных параметров шины (давления воздуха в шине, ее геометрических размеров, жесткости резины и т. п.) является очень сложной задачей. Кроме того, рассмотренная нами зависимость (1) справедлива лишь в тех случаях, когда угол увода неизменен во времени или меняется сравнительно медленно.

В случаях, когда необходимо рассматривать быстро меняющиеся углы увода, зависимость оказывается более сложной. Такая зависимость изучалась академиком М. В. Келдышем при исследованиях быстрых колебаний колеса с упругой шиной относительно вертикальной оси. Колебания этого типа носят название «шимми» (по названию американского танца). Такие колебания во многих случаях приводили к поломке рулевых управлений автомобилей и самолетных шасси. Теория М. В. Келдыша позволила создать специальные приспособления, устраняющие эти колебания.

Для изучения же устойчивости и управляемости автомобиля в целом зависимость (1) оказывается достаточной.

Движение автомобиля на круговом повороте

Как мы уже говорили, даже при движении автомобиля по прямой и сравнительно ровной дороге водитель немного двигает рулем, так как различные помехи, неровности дороги (пусть даже очень малые), порывы бокового ветра и, наконец, просто невозможность поставить передние рулевые колеса точно в положение «прямо» заставляют немного поворачивать руль время от времени. В течение одного какого-нибудь промежутка времени, пока руль неподвижен, траектория центра тяжести автомобиля близка к дуге окружности очень большого (по сравнению с длиной автомобиля) радиуса. Таким образом, реальная траектория центра тяжести автомобиля, движущегося «прямо», состоит из дуг окружностей большого радиуса и только кажется прямой линией.

Рассмотрим движение автомобиля по окружности радиуса R при неподвижном положении руля и постоянной скорости v. Такое движение называется установившимся поворотом.

Пусть рулевые (передние) колеса автомобиля повернуты под некоторым постоянным углом φ по отношению к положению «прямо» (рисунок 5). Центр тяжести автомобиля (точка C) движется по дуге окружности радиуса R с центростремительным ускорением

$$|\vec{w}_C| = v^2/R.$$

Это центростремительное ускорение сообщается равнодействующей боковых сил, приложенных к колесам автомобиля (на рисунке 5 показаны лишь составляющие $\vec{P}_A$, $\vec{P}_B$, $\vec{P}_D$ и $\vec{P}_L$ этих сил, перпендикулярные оси автомобиля; продольные их составляющие в рассматриваемом случае несущественны). Если радиус поворота R велик по сравнению с длиной автомобиля, то можно принять $\vec{P}_A = \vec{P}_B$ и $\vec{P}_D = \vec{P}_L$. Однако суммарная сила $\vec{P}_1 = 2\vec{P}_A$, приложенная к передней оси, и суммарная сила $\vec{P}_2 = 2\vec{P}_D$, приложенная к задней оси, не равны между собой. Их соотношение определяется условием $|\vec{P}_1|a = |\vec{P}_2|b$, где a и b — расстояния от центра тяжести автомобиля соответственно до передней и задней осей. (Поскольку автомобиль не вращается вокруг собственного центра тяжести, моменты сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ относительно точки C равны.) Учитывая это и используя второй закон Ньютона — $m\vec{w}_C = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$, — найдем, что

$$|\vec{P}_1| = m\frac{v^2 b}{RL}, \quad |\vec{P}_2| = m\frac{v^2 a}{RL}, \qquad (2)$$

где m — масса автомобиля, $L = a + b$ — база автомобиля.

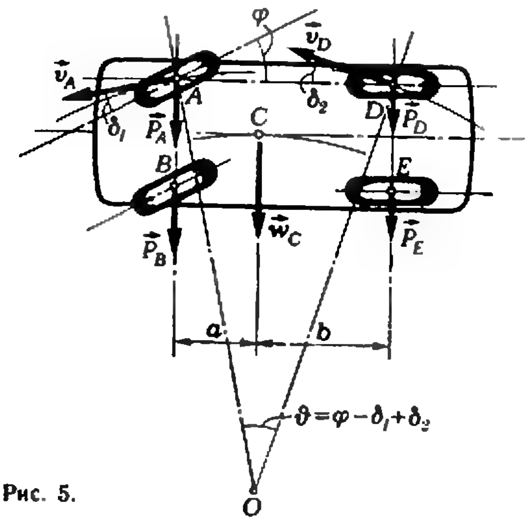


Рис. 5.

Действие боковых сил приводит к уводу шин. Пусть δ_1 и δ_2 — углы увода соответственно передней и задней шин. Векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_D$ скоростей переднего (A) и заднего (D) колес направлены так, как показано на рисунке 5. Перпендикуляры к векторам $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_D$ в точках A и D пересекаются в точке O — в центре дуги-траектории. (Мы считаем, что R очень велико по сравнению с шириной автомобиля, и поэтому пренебрегаем разницей в радиусах окружностей, описываемых точками A, B, C и D, и считаем, что все эти радиусы равны R.) В соответствии с изложенной выше теорией увода

$$|\vec{P}_1| = 2k_1\delta_1, \quad |\vec{P}_2| = 2k_2\delta_2, \qquad (3)$$

где k_1 и k_2 — сопротивления уводу соответственно одной передней и одной задней шин. Сравнивая (2) и (3), находим углы увода шин передней и задней осей:

$$\delta_1 = \frac{mv^2 b}{RLk_1}, \quad \delta_2 = \frac{mv^2 a}{RLk_2}. \qquad (4)$$

Радиус кривизны траектории характеризуется углом ϑ (см. рисунок 5): $R = L/\vartheta$ (поскольку $L \ll R$). Как видно из рисунка 5,

$$\vartheta = \varphi - \delta_1 + \delta_2. \qquad (5)$$

Если $\delta_1 = \delta_2$, то $\vartheta = \varphi$ — угол поворота руля полностью определяет радиус поворота. Автомобиль, у которого выполняется это условие (а это выполняется в соответствии с (4), если $k_1a = k_2b$), называется по терминологии академика Е. А. Чудакова автомобилем с «нейтральной поворачиваемостью».

Если увод задней оси больше чем передней ($\delta_2 > \delta_1$ и, соответственно, $k_1a > k_2b$), то очевидно, $\theta > \varphi$ — автомобиль поворачивает «круче». Такой автомобиль называют автомобилем с «избыточной поворачиваемостью».

И наконец, если увод задней оси меньше чем передней ($\delta_2 < \delta_1$, то есть $k_1a < k_2b$), то $\theta < \varphi$ — автомобиль имеет «недостаточную поворачиваемость».

Так как углы увода при данном R растут с ростом скорости (см. (4)), то «недостаточность» или «избыточность» поворачиваемости тем сильнее, чем больше v.

Подставляя (4) в (5) (с учетом соотношения $R = L/\theta$), можно получить общую формулу для «результирующего» угла поворота:

$$\theta = \frac{\varphi}{1 - \frac{mv^2}{L^2}\left(\frac{k_1a - k_2b}{k_1k_2}\right)}. \qquad (6)$$

Пусть $k_1a > k_2b$ (избыточная поворачиваемость). При данном φ с ростом скорости v знаменатель в выражении (6) уменьшается и θ возрастает. То есть чем больше v, тем «круче» поворачивает автомобиль (при постоянном угле поворота руля φ). Наконец, при некоторой скорости $v = v_{\text{кр}}$ величина θ становится бесконечно большой. При такой скорости достаточно бесконечно малого движения руля, чтобы автомобиль «развернулся» вокруг вертикальной оси. Поэтому величину $v_{\text{кр}}$ называют критической скоростью потери управляемости для автомобиля с избыточной поворачиваемостью.

Значение $v_{\text{кр}}$ найдем из (6), приравняв знаменатель нулю:

$$v_{\text{кр}} = L\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1a - k_2b)}}. \qquad (7)$$

Для автомобиля с недостаточной поворачиваемостью критической скорости не существует. В этом случае ($k_1a < k_2b$) знаменатель в формуле (6) всегда положителен и монотонно убывает с ростом скорости v. Таким образом, в этом случае эффективность управления просто уменьшается с ростом скорости.

Для легкового автомобиля с одинаковыми передними и задними колесами и с центром тяжести, расположенным примерно в середине ($a \approx b$), поворачиваемость близка к нейтральной и критическая скорость, если и существует, то достаточно высока. Если, однако, у такого автомобиля «спустит» одна из задних шин, то сопротивление уводу задней оси будет определяться, грубо говоря, лишь одним из двух колес и поэтому уменьшится примерно вдвое. Легко проверить по формуле (7), что при этом критическая скорость может оказаться довольно низкой, порядка 20÷30 км/ч. (В случае $a = b$, $k_2 = \frac{1}{2}k_1$ и $k_1 = \frac{5}{4}gm$ формула для $v_{\text{кр}}$ принимает вид $v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{5}{2}gL}$.) Если при этом до спуска задней шины автомобиль имел скорость 60÷70 км/ч, то после неожиданного спуска шины он окажется за критической скоростью. Ситуация при движении с «закритической» скоростью очень интересна. Из формулы (6) видно, что при $v > v_{\text{кр}}$ знаменатель отрицателен. Это означает, что наступает «обратимость управления». То есть, если руль повернуть «налево», то автомобиль завернет «направо», и наоборот. Неудивительно поэтому, что резкое падение давления в одной из задних шин приводит во многих случаях к серьезным авариям, так как водитель не может быстро «перестроиться» и теряет управление. При специальных испытаниях, когда водитель подготовлен, он справляется с машиной и может двигаться со скоростью, большей критической. Но когда спуск шины происходит неожиданно, авария почти неизбежна.

Существует мнение, что наиболее опасен разрыв шины переднего колеса. Это, однако, не совсем так. При быстром спуске передней шины резко возрастают усилия на руле. Но если суметь «удержать» руль (для этого требуются не очень большие усилия, дело лишь в неожиданности), то ничего опасного не произойдет.

При спуске же задней шины на большой скорости справиться с машиной очень трудно.

Любопытен еще следующий факт. Из вышеприведенных соображений ясно, что для улучшения устойчивости автомобиля желательно, чтобы центр тяжести был расположен как можно ближе к передней оси (то есть нужно, чтобы выполнялось условие $k_1a < k_2b$; если $k_1 \approx k_2$, то чем меньше отношение a/b, тем лучше).

У автомобиля с «задним» расположением двигателя это условие как раз не выполняется. (Двигатель очень тяжелый, и центр тяжести автомобиля «смещается» в сторону двигателя.) Для таких автомобилей компенсируют этот недостаток понижением давления в передних шинах (это снижает k_1).

В свое время для малолитражного автомобиля фирмы «Фиат» с «задним» расположением двигателя было предложено устанавливать давление в передних шинах в три раза меньше, чем в задних. Но даже при таких условиях автомобиль имел критическую скорость 40 км/ч и его эксплуатация была практически невозможна.

На грузовых автомобилях устойчивость заметно ухудшается, когда они сильно нагружены, так как при этом центр тяжести сдвигается назад и увеличивается масса m автомобиля. Это ухудшение устойчивости компенсируется тем, что у большинства грузовых автомобилей задние шины двойные, и это увеличивает вдвое сопротивление уводу задней оси.

У тех же грузовых автомобилей, которые имеют сзади такие же колеса, как и спереди (такие автомобили тоже существуют), дело с устойчивостью при полной загрузке обстоит хуже. У таких автомобилей приходится тщательно следить за давлением в задних шинах. Даже небольшое снижение давления может в этом случае привести к неустойчивости.

Замечательные треугольники

1. Рассмотрим треугольник, похожий на треугольник Паскаля (рис. 1). В нем заданы первые три единицы, а каждое следующее число получается суммированием стоящих выше, образующих вместе с искомым параллелограмм (для чисел, стоящих по боковым сторонам треугольника, параллелограмм вырождается в отрезок).

Обозначим через a_{ij} элемент i-й строки этого треугольника, j-й по счету от начала строки.

а) Докажите формулы:

$a_{n1} = 2^{n-2}$, где $n \geq 2$;
$a_{n2} = n \cdot 2^{n-3}$, где $n \geq 2$;
$a_{n3} = 2^{n-5}(n^2+n-4)$,
где $n \geq 3$.

б) Выведите рекуррентное соотношение, связывающее элемент a_{nk} с предшествующими, у которых второй индекс меньше k.

в) Выведите формулы для вычисления a_{n4} и a_{n5}.

2. Напишем теперь вместо чисел, образующих треугольник на рисунке 1, их последние цифры. Мы получим числовой треугольник, изображенный на рисунке 2. Докажите, что этот треугольник обладает следующими замечательными свойствами:

1°. Треугольник можно разбить на ромбики 5×5 пяти различных видов (не считая верхнего ромба), у которых в верхнем углу и, соответственно, на нижних сторонах стоят цифры 0, 2, 4, 6 или 8 (см. рис. 2).

2°. Если вместо каждого ромбика поставить цифру, стоящую в его нижнем углу, то получится числовой треугольник, отличающийся от данного лишь первыми тремя строчками.

3°. В каждом ромбике либо все цифры — нули, либо имеется ровно два нуля, расположенных в его самой длинной строчке на втором и четвертом местах.

4°. Цифра, стоящая в центре любого ромбика, равна каждой из двух цифр, расположенных с ней по соседству ниже строчкой.

М. Штеренберг
(Саратов)

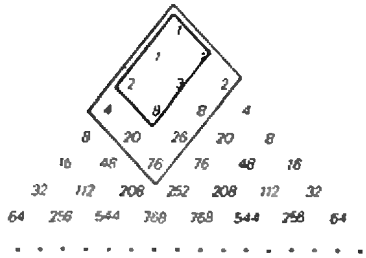


Рис. 1

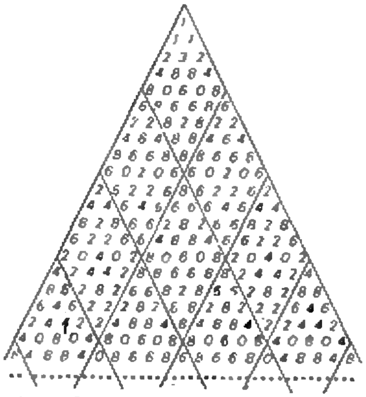


Рис. 2.

В. Матизен

О пользе скатывания шариков

> *Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою...*
>
> Козьма Прутков

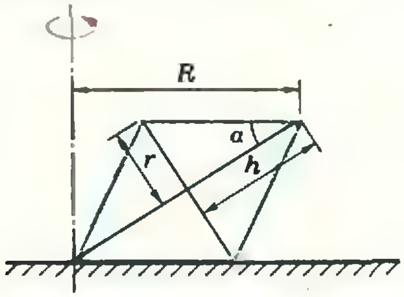
Предлагаем вам проделать такой опыт.

Возьмите комок пластилина и положите его на стол. Накройте комок пластиной и под нажимом раскатайте его. Движения пластины должны быть круговыми с относительно небольшим радиусом. Следите за тем, чтобы все точки пластины описывали окружности равного радиуса на одной и той же высоте над столом.

Попробуйте предсказать, какую форму примет пластилин.

Во-первых, верхняя и нижняя поверхности равноправны: в системе отсчета, связанной с пластиной, стол совершает то же самое вращение. Следовательно, полученное тело должно состоять из двух одинаковых половинок.

Во-вторых, увлекаемый пластиной комок катится вокруг некоторой точки на столе. Естественно предположить, что пластилин примет такую форму, которая позволила бы ему катиться свободно. Этому требованию удовлетворяет, в частности, коническая поверхность.



И действительно, комок пластилина превращается в два конуса, симметричных относительно общего основания.

Обозначим через α половину угла при вершине осевого сечения конусов, через r — радиус основания конусов и через h — их высоту (см. рисунок). Пусть объем комка пластилина равен V, а радиус вращения пластины — R. Найдем связь между указанными величинами. Поскольку

$$h = \frac{R}{2\cos\alpha}, \quad r = h \operatorname{tg}\alpha \text{ и } V = \frac{2}{3}\pi r^2 h,$$

получаем

$$\frac{12}{\pi}\,\frac{V}{R^3} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^5\alpha}.$$

Другими словами, если вы хотите получить конусы с заданным углом α, величины V и R должны быть связаны друг с другом вполне определенным соотношением.

Так, при $\alpha = 45°$ $\quad \frac{V}{R^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$

Если исходный комок пластилина имеет форму шара радиусом ϱ, то

$$V = \frac{4}{3}\pi\varrho^3 \text{ и } \frac{\varrho^3}{R^3} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\frac{R}{\varrho} = 2^{\frac{5}{6}} \approx 2$, то есть $R \approx 2\varrho$ — радиус вращения пластины приблизительно равен диаметру пластилинового шара.

Заметим также, что на опыте нельзя получить правильные конусы с углом α, существенно меньшим 45°. Нетрудно объяснить, почему. Чем меньше угол α, тем больше длина образующей конуса (при неизменном объеме пластилина), а значит, тем на большую поверхность должен распространяться нажим. В таких условиях оказывается практически невозможным сформировать вершинные участки конусов, так как основной нажим приходится на участки вблизи общего основания конусов. Кроме того, малым углам α соответствуют большие значения R, при которых неправильность движения рук может сильно исказить форму получающегося тела.

В. Ольхов

Как придумать геометрическое неравенство

«Придумать новую, оригинальную задачу — сделать небольшое самостоятельное «открытие», пожалуй, даже труднее, чем решить готовую чужую». Эти слова стоят в предисловии к Задачнику «Кванта» в первом номере журнала. Многие ребята спрашивают: а как же все-таки самому придумать задачу?

Расскажу, как я однажды придумал несколько геометрических неравенств.

Я начал с того, что доказал два известных неравенства:

$$a^4+b^4+c^4\geqslant 16S^2, \qquad (1)$$
$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\geqslant 16S^2, \qquad (2)$$

в которых a, b, c — длины сторон треугольника, а S — его площадь. Доказывал я их так.

Написав формулу для площади треугольника

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

и теорему косинусов

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

я нашел синус и косинус

$$\sin\gamma=\frac{2S}{ab}, \qquad (3)$$
$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad (4)$$

и подставил их значения в тригонометрическое тождество $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$. Получилось

$$\frac{4S^2}{a^2b^2}+\frac{a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{4a^2b^2}=1,$$

или

$$16S^2=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-a^4-b^4-c^4.$$

Отсюда, воспользовавшись алгебраическим неравенством (докажите его)

$$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2, \qquad (5)$$

я и получил неравенства (1) и (2).

Подумав немного, я решил попробовать использовать другое тригонометрическое тождество. Вместо $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$ я написал

$$\sqrt{3}\sin\gamma+\cos\gamma=2\sin(\gamma+30^\circ),$$
$$\sqrt{3}\sin\gamma+\cos\gamma\leqslant 2,$$

подставил соотношения (3) и (4) в последнее неравенство и после преобразований получил

$$c^2-a^2-b^2+4ab\geqslant 4\sqrt{3}\,S. \qquad (6)$$

Заметив, что длины a, b, c входят в (6) «несимметрично», я написал еще два варианта этого неравенства

$$a^2-b^2-c^2+4bc\geqslant 4\sqrt{3}\,S,$$
$$b^2-a^2-c^2+4ac\geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

и, сложив их, получил

$$(4ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2)\geqslant 12\sqrt{3}\,S. \qquad (7)$$

Глядя на (7), я решил воспользоваться неравенством

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$$

и получил, как при доказательстве (1) и (2), два красивых (но, к сожалению, довольно хорошо известных!) неравенства

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,S,$$
$$ab+bc+ca\geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

После этого мне уже было ясно, как можно получить еще много геометрических неравенств.

Упражнения

1. Докажите неравенство

$$2ab+2bc-b^2\geqslant 4\sqrt{3}\,S$$

Выясните, когда оно превращается в равенство.

2. Докажите, что для равностороннего треугольника неравенство (7) превращается в равенство. Верно ли обратное?

3. Применив тригонометрическое неравенство $\sin\gamma+\cos\gamma\leqslant\sqrt{2}$, докажите, что

$$c^2-a^2-b^2+2\sqrt{2}\,ab\geqslant 4S,$$
$$\sqrt{2}\,(ab+bc)-b^2\geqslant 4S,$$

и исследуйте, когда они превращаются в равенства

Л. Курляндчик, А. Лисицкий

Как придумать комбинаторное тождество

В различных задачниках, да и в Задачнике «Кванта», часто встречаются тождества, содержащие биномиальные коэффициенты C_k^l. Довольно часто удается их доказать методом математической индукции, иногда различными хитрыми преобразованиями, но эти доказательства, как правило, оставляют чувство неудовлетворенности: из них совершенно не ясно, как же было придумано данное тождество, как вообще находить новые тождества.

Здесь мы укажем несколько приемов, позволяющих придумывать подобные тождества. В частности, мы объясним, каким образом мы когда-то придумали задачу M470; об этом спрашивал в письме в «Квант» дагестанский школьник А. Габибов.

Представим себе, что нам нужно найти $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. Попробуем вспомнить, где нам встречалось выражение kx^{k-1}. Конечно же, в формуле $(x^k)'=kx^{k-1}$. Наша догадка «убивает» задачу; действительно,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)'=\sum_{k=1}^{n}(x^k)'=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

С другой стороны,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)'=\left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)'=$$

$$=\frac{((n+1)x^n-1)(x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{nx-n-1}{(1-x)^2}x^n.$$

(В этой выкладке мы, естественно, предполагали, что $x\neq 1$.) Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{nx-n-1}{(1-x)^2}x^n. \quad (1)$$

Теперь попытаемся найти $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2}$. «Особенности человеческого характера побуждают повторить процедуру, которая помогла нам ранее в аналогичной ситуации...» (Д. Пойа «Математическое открытие», М., «Наука», 1970, с. 88). Так повторим ее!

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(kx^{k-1})'=\left(\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}\right)'=$$

$$=\left(\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{nx-n-1}{(1-x)^2}x^n\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}+$$

$$+\frac{n(1-x)^2+2(1-x)(nx-n-1)}{(1-x)^4}x^n+$$

$$+\frac{n(nx-n-1)}{(1-x)^2}x^{n-1}. \quad (2)$$

Равенства (1) и (2) весьма громоздки. На их основе можно получить (при $|x|<1$) более красивую формулу

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+n}^{n}x^k=\frac{1}{(1-x)^{n+1}},$$

но ее вывод выходит за рамки школьной программы.

Расскажем теперь об одном приеме, который позволяет получать «новые» тождества из «старых». Рассмотрим хорошо известную формулу Ньютона

$$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i.$$

Продифференцируем это равенство. Получаем

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{i=1}^{n} iC_n^i x^{i-1}. \quad (3)$$

Положив в равенстве (3) $x=1$ и $x=-1$, найдем

$$\sum_{i=1}^{n} iC_n^i = n\cdot 2^{n-1};\quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^i iC_n^i = 0.$$

Продифференцируем теперь равенство (3):

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\,C_n^i x^{i-2}.$$

Положим и здесь $x=1$ и $x=-1$. Получаем еще два тождества

$$\sum_{i=2}^{n} i(i-1)\,C_n^i = n(n-1)\cdot 2^{n-2},$$

$$\sum_{i=2}^{n} (-1)^i i(i-1)\,C_n^i = 0.$$

При помощи дифференцирования можно получить много новых тождеств: достаточно взять какое-нибудь известное тождество и продифференцировать его.

Многие из вас встречали тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \sin ix = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\quad (x\neq 2\pi m). \tag{4}$$

(попробуйте его доказать!).

Продифференцируем (4):

$$\sum_{i=1}^{n} i\cos ix = \frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Подставляя в эту формулу, например, $x=\pi$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i\cdot i = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Конечно, это равенство легко доказать по индукции, но дело не в том, как доказать, а дело в том *как его получить!*

Сейчас мы немного усложним метод дифференцирования: будем сначала логарифмировать данное тождество, а затем уже дифференцировать его. Начнем с тождества

$$\prod_{i=1}^{n} \cos\frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

Равенство (5) прологарифмируем и полученное тождество продифференцируем. Получается

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\operatorname{tg}\frac{x}{2^i} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x.$$

Это тождество вы, наверное, встречали во многих сборниках задач по математике. Теперь мы знаем, как можно до него догадаться.

Нам осталось выполнить последнее обещание — рассказать, как была придумана задача М470.

Тут кое-что вам придется принять на веру. Имеет место формула

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

Вообще-то она доказывается не очень сложно, но нужно знать формулу интегрирования по частям, которой нет в школьном учебнике. Если этот интеграл вас заинтересует, напишите нам, и мы приведем подробное доказательство.

Пользуясь этой формулой, утверждение задачи **М470** получается таким образом:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{C_n^i} = (n+1)\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i i!(n-i)!}{(n+1)!} =$$

$$= (n+1)\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_0^1 x^{n-i}(1-x)^i dx =$$

$$= (n+1)\int_0^1 x^n \sum_{i=0}^{n} \left(1-\frac{1}{x}\right)^i dx =$$

$$= (n+1)\left(\int_0^1 x^{n+1}dx - \int_0^1 (x-1)^{n+1}dx\right) =$$

$$= \frac{n+1}{n+2}\left(1+(-1)^n\right).$$

В Задачнике «Кванта» под номером **М184** было опубликовано тождество

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i C_n^i}{ai+1} = \frac{n!a^n}{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}.$$

Оно получается из интегрального тождества

$$\int_0^1 (1-x^a)^n dx = \frac{n!a^n}{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}.$$

Действительно, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i C_n^i}{ai+1} =$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \int_0^1 x^{ai}dx = \int_0^1 (1-x^a)^n dx.$$

задачник кванта

Задачи

М621—М625; Ф633—Ф637

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июля 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М621, М622» или «Ф633». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М621. Вокруг окружности описан n-угольник. Произвольная точка P внутри окружности соединена со всеми его вершинами и точками касания. Образовавшиеся $2n$ треугольников окрашены попеременно в красный и синий цвет. Докажите, что произведение площадей красных треугольников равно произведению площадей синих треугольников.

У. Алла

М622. Докажите, что количество решений уравнения

$$x^3+y^2=z^3+t^2+1$$

в натуральных числах, не превосходящих 10^6, меньше, чем количество решений уравнения

$$x^3+y^2=z^3+t^2$$

в натуральных числах, не превосходящих 10^6.

В. Вавилов

М623. а) Сколько осей симметрии имеет куб? Правильная треугольная пирамида?
б)* Докажите, что если некоторый многогранник имеет k осей симметрии ($k\geqslant 1$), то k нечетно.

В. Сендеров

М624. Найдите последовательность (a_n), определяемую условиями $a_1=1$,

$$1+\sum_{d}(-1)^{n/d}a_d=0, \qquad (*)$$

где сумма $\sum$ берется по всем делителям d числа n (включая $d=1$ и $d=n$).
Например, если $n=p$ — простое число, то (*) принимает вид $1+(-1)^{p/1}a_1+(-1)^{p/p}a_p=0$, откуда $a_p=2$, если $p=2$, и $a_p=0$ — если $p>2$.

В. Абрамович

М625.* На координатной плоскости заданы четыре точки с рациональными координатами, не лежащие в вершинах параллелограмма, причем никакие три из них не принадлежат одной прямой. Разрешается проводить прямую через любые две уже полученные точки и отмечать точку пересечения любых двух проведенных прямых. Докажите, что множество точек, которые можно получить таким образом, — это множество всех точек плоскости с рациональными координатами, если: а) эти четыре точки — вершины трапеции; б) эти четыре точки — вершины произвольного четырехугольника.

Ю. Михеев

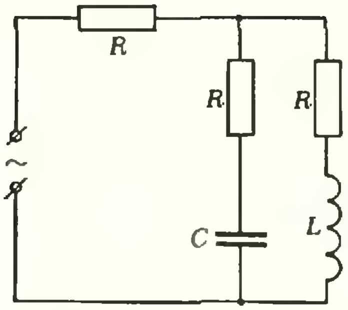


Рис. 1.

Ф633. Три одинаковых резистора, конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L соединены в цепь, как показано на рисунке 1. Частота ω переменного тока в цепи такова, что $\omega L = 1/\omega C$. При каком сопротивлении R резисторов ток в неразветвленной части цепи в n раз меньше тока в каждой из ветвей?

Г. Савкун

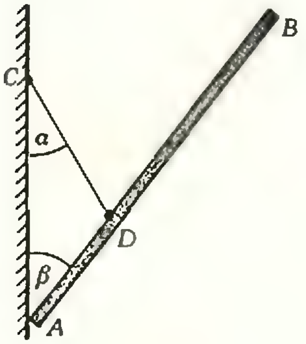


Рис. 2.

Ф634. Стержень AB длиной l и массой m нижним концом опирается на стену и с помощью нити удерживается в наклонном положении (рис. 2). Нить привязана к стене в точке C, а к стержню — в точке D такой, что $|AD| = 1/3\,|AB|$. Углы, составляемые нитью и стержнем со стеной, равны α и β соответственно. Найти возможные значения коэффициента трения между стержнем и стеной.

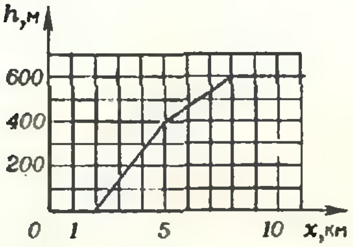


Рис. 3.

Ф635. Два одинаковых автомобиля массой $m = 10^3$ кг движутся вверх по одной и той же горной дороге. Зависимость высоты h дороги от расстояния x до начала подъема показана на рисунке 3. Каждый автомобиль развивает постоянную мощность $P = 12$ кВт, а сила сопротивления движению автомобиля пропорциональна квадрату его скорости: $|\vec{F}| = \alpha |\vec{v}|^2$, где $\alpha = 1{,}4$ кг/м. На последнем горизонтальном участке дороги расстояние между автомобилями равно 100 м. Каким было минимальное расстояние между автомобилями при их движении?

«Среднешкольный математический журнал», Будапешт

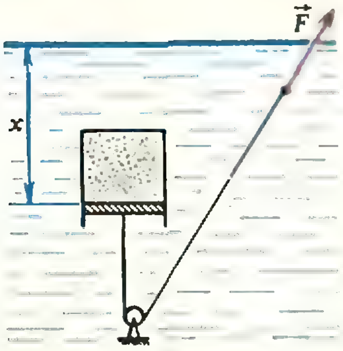


Рис. 4.

Ф636. Цилиндрический сосуд, закрытый невесомым поршнем площадью сечения S, содержит газ под атмосферным давлением p_0. Объем газа при этом равен V_0. Сосуд погружают в воду (плотностью ρ_0) так, как показано на рисунке 4. Найти зависимость расстояния x между поршнем и поверхностью воды от модуля F силы, удерживающей нить, которая привязана к поршню.

«Среднешкольный математический журнал», Будапешт

Ф637. В сверхпроводящих катушках с индуктивностями L_1 и L_2, включенных параллельно, возбужден ток. Индуктивность L_1 одной из катушек уменьшается до нуля. Во сколько раз изменится при этом ток в цепи и энергия системы?

П. Зубков

Решения задач

M566, M567, M569; Ф578, Ф580—Ф582

M566. *Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат, соответственно, на трех сторонах другого?*

Мы приведем два решения этой задачи: в одном из них фиксируется внешний (больший) треугольник и меняется внутренний (меньший) — так поступило большинство наших читателей, правильно решивших эту задачу; в другом — наоборот: фиксируется внутренний треугольник, а меняется внешний.

Первое решение. Пусть длина катета внешнего (фиксированного) треугольника равна a; найдем минимум площади S внутреннего треугольника. Обозначим длину его катета через u.

Рассмотрим два случая:

а) вершина C прямого угла внутреннего треугольника лежит на катете внешнего треугольника (рис. 1);

б) вершина C внутреннего треугольника ($\hat{C}=90^\circ$) лежит на гипотенузе внешнего треугольника (рис. 2).

Для случая а)

$$S=\frac{1}{2}u^2=\frac{1}{2}\left(x^2+(a-2x)^2\right)=\frac{1}{2}(5x^2-4ax+a^2)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[5\left(x-\frac{2a}{5}\right)^2+\frac{a^2}{5}\right],$$

так что минимальное значение $S_{\min}=\frac{a^2}{10}$ (при $\left(x-\frac{2a}{5}\right)^2=0$), откуда наименьшее значение отношения площадей

$$k=\frac{a^2/10}{a^2/2}=\frac{1}{5}.$$

В случае б) из рисунка 2 видно, что $u\geqslant x=\frac{a}{2}$; поэтому в этом случае $S_{\min}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{8}$, откуда наименьшее отношение площадей равно $\frac{1}{4}$. Так как $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}$, искомое наименьшее значение равно $\frac{1}{5}$.

Второе решение. Зафиксируем теперь меньший (внутренний) треугольник и будем менять больший (внешний) треугольник. Обозначим длину катета внутреннего треугольника через a, длину катета внешнего — через x.

Вершины A, C, B внешнего треугольника ($\hat{A}=45^\circ$, $\hat{C}=90^\circ$, $\hat{B}=45^\circ$) лежат на дугах, построенных на катетах и на гипотенузе внутреннего треугольника, вмещающих, соответственно, углы в 45°, 90° и 45°. Снова возможны два случая:

а) вершины A и C внешнего треугольника лежат на дугах, построенных на катетах внутреннего треугольника (рис. 3);

б) вершины A и C внешнего треугольника лежат на дугах, построенных на катете и гипотенузе внутреннего треугольника (рис. 4).

Поскольку площадь внешнего треугольника $S=\frac{1}{2}x^2$ и отношение площадей $\frac{a^2}{x^2}$ минимально, когда x — максимально, задача сводится к отысканию наибольшей общей хорды AC двух пересекающихся окружностей, проходящей через точку D их пересечения.

Из рисунка 5 видно, что $|AC|=2|O_1E|<2|O_1O_2|$ (O_1 и O_2 — центры окружностей); следовательно, хорда наибольшей длины, проходящая через точку пересечения окружностей D, параллельна отрезку, соединяющему центры упомянутых окружностей, и вдвое длиннее его.

Для случая а)

$$x_{\max}=2\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=a\sqrt{5},$$

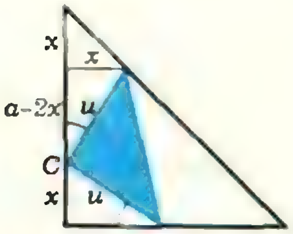


Рис. 1.

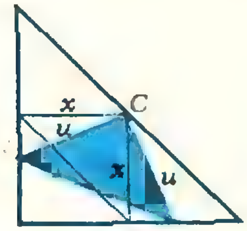


Рис. 2.

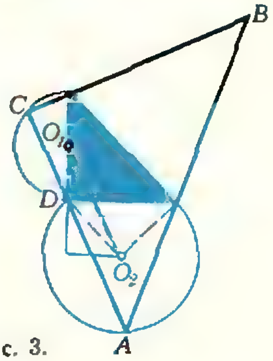


Рис. 3.

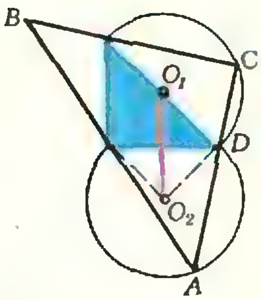


Рис. 4.

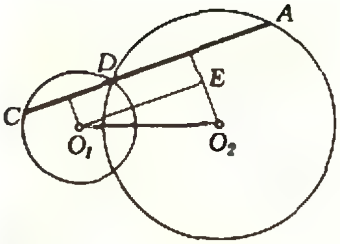


Рис. 5.

так что наименьшее отношение площадей $\frac{a^2}{x^2_{\max}} = \frac{1}{5}$.

Для случая б)

$$x_{\max} = 2a,$$

так что наименьшее отношение площадей равно $\frac{1}{4}$.

Как и раньше, делаем вывод, что искомое наименьшее отношение площадей равно $\frac{1}{5}$.

Второе решение, конечно, длиннее первого; но оно основано на красивом геометрическом рассуждении, которое можно применять и в других ситуациях. Например, когда рассматриваются произвольные треугольники. В этом вы можете убедиться, решив самостоятельно такую задачу:

В данный треугольник ABC вписать подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$ ($\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$, $\hat{C} = \hat{C}_1$) так, что $A_1 \in [BC]$, $B_1 \in [CA]$, $C_1 \in [AB]$ и площадь треугольника $A_1B_1C_1$ — наименьшая. Более общая задача уже разбиралась в «Кванте» (М207, решение — «Квант», 1974, № 2).

В. Батырев, А. Сосинский

◆

М567. *Натуральные числа p и q взаимно просты. Отрезок $[0; 1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков (рис. 1). Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $p+q-2$ чисел*

$$\frac{1}{p},\ \frac{2}{p},\ \ldots,\ \frac{p-1}{p},$$

$$\frac{1}{q},\ \frac{2}{q},\ \ldots,\ \frac{q-1}{q}.$$

Приведем два решения.

Первое решение. Из условия следует, что каждое из чисел p и q взаимно просто с числом $n = p+q$, поэтому никакие две из точек i/p, j/q, k/n (отличные от 0 и 1) не совпадают. Поскольку $1/p > 1/n$ и $1/q > 1/n$, любые две из точек i/p лежат в разных отрезках $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ и любые две из точек j/q — тоже. Нужно лишь доказать, что какие-то две точки i/p и j/q не могут попасть в один и тот же отрезок $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ ($k = 1, 2, \ldots, n-2$). Но это сразу следует из того, что дробь $\frac{k}{n} = \frac{i+j}{p+q}$ лежит между $\frac{i}{p}$ и $\frac{j}{q}$ (см., например, рисунок 2: угловой коэффициент диагонали параллелограмма заключен между угловыми коэффициентами его сторон*).

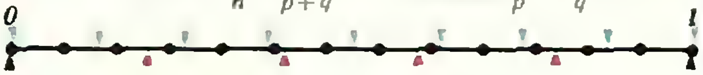


Рис. 1. $p=8$, $q=5$, $n=8+5=13$

Второе решение. Нарисуем на клетчатой бумаге прямоугольник размерами $p \times q$ клеток и проведем в нем диагональ OE (рис. 3) — она и будет играть роль отрезка $[0; 1]$ нашей задачи. Линии одного направления (синие) делят ее на p равных частей, другого (красные) — на q равных частей. Проведем через вершины клеток еще ряд параллельных прямых — под углом 45° к линиям сетки (на рисунке это — черные прямые $x+y=k$, где $k = 1, 2, \ldots, p+q-1$). Они делят $[OE]$ на $n = p+q$ одинаковых отрезков. Утверждение задачи теперь становится почти очевидным. В самом деле, на $[OE]$ между любыми двумя синекрасными точками обязательно лежит черная точка: ведь, пересекая какую-то клетку, $[OE]$ обязательно пересекает и ее черную диагональ. (Можно вместо этого сказать и так: между любыми двумя точками пересечения $[OE]$ с соседними черными прямыми лежит точка пересечения с синей или красной линией.)

В этом решении взаимная простота чисел p и q гарантирует, что $[OE]$ не проходит через узлы сетки, отличные от O и E (глядя на наш маленький рисунок, в этом можно усомниться).

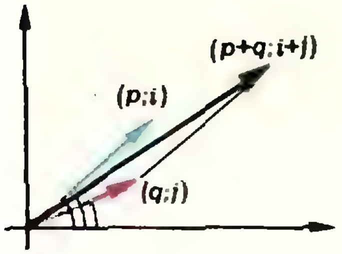


Рис. 2.

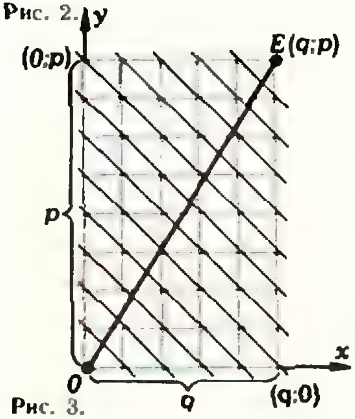


Рис. 3.

---

*) Тот факт, что «медианта» двух дробей i/p и j/q лежит между ними, использовался в статье «Близкие дроби» («Квант», 1975, № 8).

Задача M567 допускает замечательное обобщение. *Пусть α и β — любые положительные числа, связанные соотношением $1/\alpha+1/\beta=1$.*

Отметим на числовой оси всевозможные числа вида $i\alpha$ и $j\beta$ ($i\in\mathbf{Z}$, $j\in\mathbf{Z}$). Тогда каждый отрезок $[k;\ k+1]$ оси ($k\in\mathbf{Z}$), ни в один из концов которого не попало отмеченное число, содержит ровно одно из отмеченных чисел $i\alpha$, $j\beta$. Наша задача эквивалентна этому факту при рациональных α и β: нужно взять $\alpha=n/p$, $\beta=n/q$ (роль отрезка $[0;\ 1]$ будет играть теперь отрезок $[0;\ n]$). Этот же факт (для иррациональных α и β) упоминался недавно в решении задачи M538 («Квант», 1979, № 11), очень похожем на наше второе решение M567.

Н. Васильев

◆

M569. *В тетради написано несколько чисел. К этим числам разрешается приписать число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если оно отлично от всех уже написанных чисел. Докажите, что, начав с двух чисел 0 и 1, с помощью описанных операций можно получить*

а) число 1/5;

б) любое рациональное число между 0 и 1.

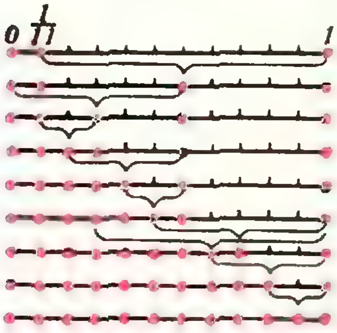


Рис. 1.

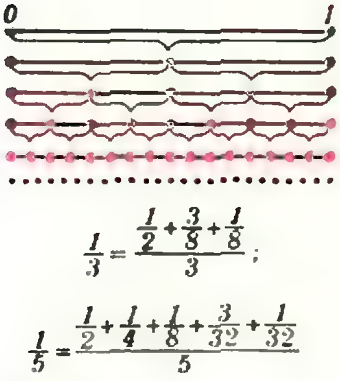

0
1
$\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}}{3}$;
$\frac{1}{5}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32}}{5}$

Рис. 2.

Начнем с представления числа 1/5 и вообще $1/q$. Числа 1/2, 1/4, 3/4 получить очень просто:

$$\frac{1}{2}=\frac{0+1}{2},\quad \frac{1}{4}=\frac{0+\frac{1}{2}}{2},\quad \frac{3}{4}=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}.$$

Так же можно, очевидно, получить любую правильную двоично-рациональную дробь, то есть дробь вида $p/2^m$, $p<2^m$ (рис. 1).

Чтобы получить дробь $1/q$, достаточно представить 1 в виде суммы q различных правильных двоично-рациональных дробей: их среднее арифметическое будет равно как раз $1/q$. Докажем по индукции, что это возможно. В виде суммы двух таких дробей 1 представить можно (например, $1=3/4+1/4$). Из представления 1 в виде суммы $n-1$ различных двоично-рациональных дробей можно получить ее представление в виде суммы n таких дробей:

$$1=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}.$$

В частности, следуя этому построению, получим

$$1=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32},$$

что дает представление числа 1/5.

Теперь к доказательству второго утверждения задачи можно идти многими разными путями. Приведем два из них.

1. Докажем, что если натуральное число p можно представить в виде суммы $n-1$ различных правильных двоично-рациональных дробей:

$$p=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}\quad (0<a_{n-1}<\ldots<a_2<a_1<1),$$

то его можно представить и в виде суммы n таких дробей. Пусть 2^m — наибольший из знаменателей слагаемых a_i. Заменив a_{n-1} на сумму $\left(a_{n-1}-\frac{1}{2^{m+2}}\right)+\frac{1}{2^{m+2}}$, получим нужное представление. Итак, если каждая из дробей $\frac{1}{q}$, $\frac{2}{q}$, …, $\frac{q-1}{q}$ может быть представлена в виде среднего арифметического различных правильных двоично-рациональных дробей, то и дроби $\frac{1}{q+1}$, $\frac{2}{q+1}$, …, $\frac{q-1}{q+1}$ могут быть представлены в аналогичном виде. Чтобы закончить доказательство по индукции (база индукции — представление числа 1/2), осталось представить в нужном виде дробь $\frac{q}{q+1}$. Ее можно получить из представления числа $\frac{1}{q+1}$ заменой всех дробей a_i на $1-a_i$.

2. Рассмотрим три уже полученных числа: 0, $1/q$, 1. Одно из двух средних $\frac{0+1}{2}$, $\frac{1/q+1}{2}$ дробь вида p_0/q, $1<p_0<q$ (если $q>2$). Одно из двух средних $\frac{0+p_0/q}{2}$, $\frac{1/q+p_0/q}{2}$ —

дробь p_1/q, где $1<p_1<p_0$ (если $q>3$). Ясно, что, продолжая этот процесс, мы получим дробь $2/q$. Рассмотрев затем тройку чисел $1/q$, $2/q$, p_0/q, мы таким же спуском получим дробь $3/q$, затем (если $q>4$) $4/q$, ..., $(q-1)/q$ и т. д. (рис. 2).

Заметим, что среднее арифметическое более чем двух чисел нам надо находить лишь один раз.

М. Серов

Ф578. *Концы A и B стержня AB скользят по сторонам прямого угла (рис. 1). Как зависит от угла α, образуемого стержнем с одной из сторон этого угла, ускорение середины стержня (точки C), если конец B стержня движется с постоянной скоростью $\vec{v}$?*

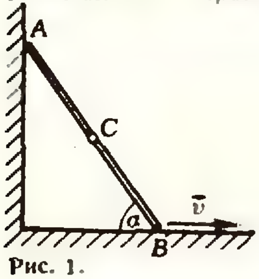


Рис. 1.

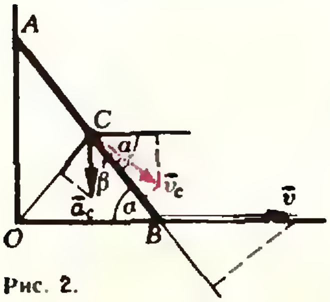


Рис. 2.

◆

Точка C при любом положении стержня находится на расстоянии $l/2$ от вершины O прямого угла (медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы). Следовательно, точка C движется по окружности радиуса $l/2$ с центром в точке O. Скорость v_c точки C направлена по касательной к траектории и в любой момент перпендикулярна OC.

Так как стержень нерастяжим, проекции скоростей точек C и B на направление стержня равны (рис. 2).

$$v\cos\alpha=v_c\cos\beta=v_c\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=v_c\sin 2\alpha.$$

Поэтому

$$v_c=\frac{v\cos\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{v}{2\sin\alpha}.$$

Проекция ускорения $\vec{a}_c$ точки C на радиус $OC=l/2$ должна быть равна $\frac{v_c^2}{l/2}=\frac{v^2}{2l\sin^2\alpha}$. Как направлен вектор $\vec{a}_c$? Заметим, что проекция скорости $\vec{v}_c$ точки C на горизонтальную ось равна $v_c\cos(\alpha-\beta)=v_c\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{v}{2}$. Эта величина не зависит от α и, следовательно, постоянна. Это означает, что вектор $\vec{a}_c$ направлен вертикально.

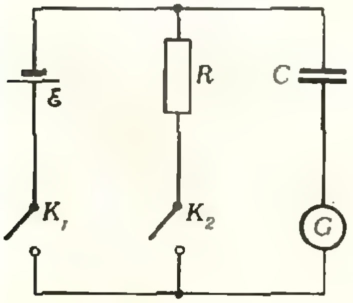
Таким образом,

$$a_c\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{v^2}{2l\sin^2\alpha},$$

откуда

$$a_c=\frac{v^2}{2l\sin^3\alpha}.$$

Ф580. *В схеме, показанной на рисунке, ЭДС батареи ℰ, ее внутреннее сопротивление r, сопротивление резистора R. При замыкании ключа K_1 стрелка гальванометра отклонится на угол α. На какой угол отклонится стрелка гальванометра, если при замкнутом ключе K_1 замкнуть ключ K_2? Отклонение стрелки пропорционально заряду, прошедшему через гальванометр.*



◆

После замыкания ключа K_1 напряжение на конденсаторе становится равным ℰ. При этом заряд конденсатора становится равным

$$q_1=C\mathcal{E}.$$

Такой заряд и проходит через гальванометр при замыкании ключа K_1. Следовательно,

$$\alpha=kq_1=kC\mathcal{E},$$

где $k=\mathrm{const}$ — коэффициент пропорциональности.

После замыкания ключа K_2 напряжение на конденсаторе становится равным напряжению на резисторе, то есть $U=IR$, где I — ток, текущий через резистор. Так как резистор включен последовательно с источником, $I=\mathcal{E}/(R+r)$. Следовательно, $U=\mathcal{E}R/(R+r)$. Заряд же конденсатора после замыкания ключа K_2 становится равным

$$q_2=CU=C\mathcal{E}\frac{R}{R+r}.$$

Следовательно, через гальванометр после замыкания ключа K_2 проходит заряд

$$q=q_1-q_2=C\mathcal{E}\frac{r}{R+r}$$

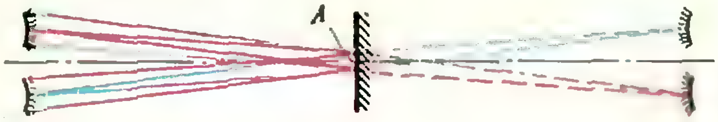
и угол β отклонения стрелки гальванометра равен

$$\beta = kq = kC\mathscr{E}\frac{r}{R+r} = n\frac{r}{R+r}.$$

Ф581. *Перед зеркалом стоит человек, закрыв один глаз. Изображение закрытого глаза в зеркале он закрывает, наклеивая на зеркало кусочек бумаги. Что увидит человек, если он откроет закрытый глаз и закроет открытый?*

◆

На рисунке красными линиями показан ход лучей, идущих от левого глаза в правый, а синими линиями — от правого глаза в левый. Благодаря этим лучам изображение одного глаза видно другим глазом. Так как глаза расположены симметрично, ясно, что при наклеивании на участок *A* зеркала бумажки человек всегда будет видеть бумажку на месте изображения своего закрытого глаза.



Ф582. *Тело плавает в воде так, что 2/3 его объема погружены в воду. Какая часть объема тела будет находиться под водой, если сосуд с водой перемещать с ускорением $\vec{a}$ в вертикальном направлении?*

◆

На тело действуют две силы: сила тяжести $M\vec{g}$ (M — масса тела) и сила $\vec{F}$, которая представляет собой равнодействующую всех сил давления жидкости, действующих на маленькие участки поверхности тела (рис. 1). Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{F} + M\vec{g} = M\vec{a}.$$

Для того чтобы найти $\vec{F}$, воспользуемся следующим приемом. Выделим в жидкости объем V_1, равный объему погруженной в жидкость части тела и имеющий форму погруженной части тела (рис. 2). На этот выделенный объем со стороны остальной жидкости действует точно такая же сила $\vec{F}$, как и на тело. И так как выделенный объем жидкости вместе с сосудом движется вверх с ускорением $\vec{a}$, то

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

где m — масса выделенного объема жидкости. Поэтому

$$M(\vec{a} - \vec{g}) = m(\vec{a} - \vec{g}) \Rightarrow M = m.$$

Но $M = \varrho_т V$, а $m = \varrho V_1$, где V — объем тела, $\varrho_т$ — плотность тела и ϱ — плотность жидкости. Следовательно,

$$\varrho_т V = \varrho V_1.$$

Отсюда

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\varrho_т}{\varrho}.$$

Это отношение, как мы видим, не зависит от ускорения $\vec{a}$ сосуда и, следовательно, при любом ускорении одно и то же. Поэтому, с каким бы ускорением $\vec{a}$ ни двигался сосуд, объем погруженной части тела будет составлять 2/3 всего объема тела.

И. Слободецкий

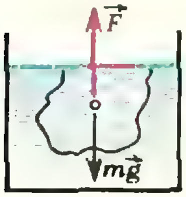


Рис. 1.

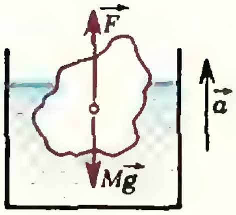


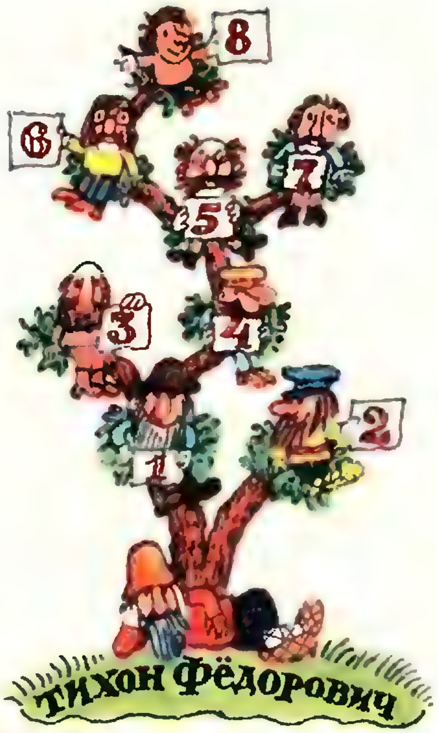
Рис. 2.

Несколько вопросов по астрономии

1. Есть ли такие места на Земле, где в течение всего года продолжительность дня равна продолжительности ночи?
2. Существует ли на экваторе смена времен года?
3. На какое время года приходятся на экваторе самые жаркие дни?
4. В день летнего солнцестояния (22 июня) высота кульминации Солнца (наибольшая высота Солнца над горизонтом) в средних северных широтах максимальная, в средних южных — минимальная. А на экваторе — промежуточная?

Н. Михайленко

Квант для младших школьников

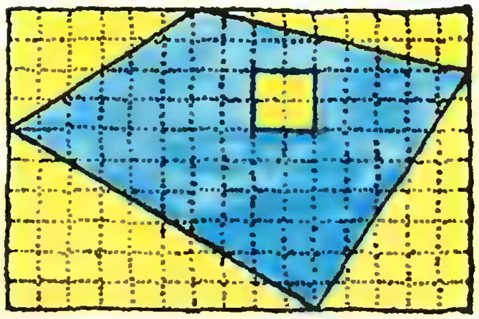


Задачи

1. Из бумаги склеили куб. Ясно, что его можно разрезать на шесть конгруэнтных квадратов. А можно ли его разрезать на двенадцать конгруэнтных квадратов?

2. На рисунке изображено родословное дерево одной семьи коми, родоначальником которой был некий Тихон Федорович. Вот все его потомки (на языке коми): Педот Тикӧн, Ӧстап Тикӧн, Тикӧн Вась, Педот Вась, Падей Ӧстап, Тикӧн Падей, Падей Илля, Тикӧн Педот. Известно, что среди них нет женщин. Установите, какое имя соответствует каждому узлу дерева.

3. Найдите два числа, разность и частное которых были бы равны пяти.



4. Покажите, что площадь фигуры синего цвета (см. рисунок) равна половине площади прямоугольника.

5. В книгах новгородских писцов XV века упоминаются такие меры жидких тел: *бочка, насадка* и *ведро.* Из этих же книг стало известно, что 1 бочка и 20 ведер кваса уравниваются с тремя бочками кваса, а 19 бочек, 1 насадка и 15,5 ведра уравниваются с 20 бочками и 8 ведрами.

Могут ли историки на основании этих данных определить, сколько насадок содержится в бочке?

6. Рассмотрим трехзначные числа, начинающиеся и оканчивающиеся одинаковой цифрой, например 343. Докажите, что если сумма первой и второй цифр делится на 7, то и все число делится на 7.

Эти задачи нам предложили
Н. Антонович, Ф. Бартенев,
В. Беликов, А. Савин, Я. Тестелец

А. Лозоров

По страницам старого учебника

Однажды в библиотеке мне в руки попала одна старая книга. Это было двадцать первое издание «Учебника физики», рекомендованного к изучению в гимназиях, реальных училищах и других средних учебных заведениях. Автор учебника — известный педагог, сокурсник Д. И. Менделеева по педагогическому институту Константин Дмитриевич Краевич.

Этот учебник прослужил не одно десятилетие и всегда пользовался большой популярностью. Так, двенадцатое его издание было удостоено «полной премии Императора Петра Великого». Впрочем, учебником вполне можно пользоваться и сейчас. В нем не хватает лишь раздела о физике XX века да стиль изложения несколько отличается от современного.

Вот описание нескольких опытов, взятое из учебника К. Д. Краевича. При желании вы сможете провести эти опыты в домашних условиях.

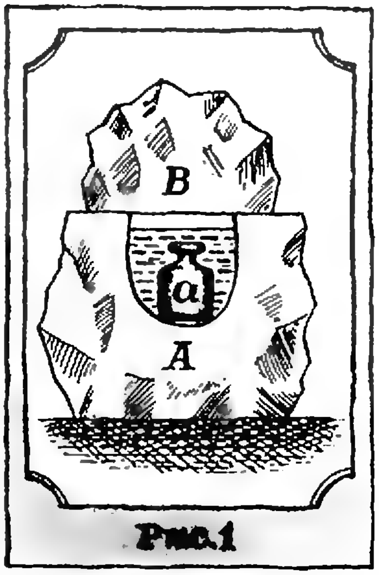


Рис.1

Опыт 1

«Если нагретое до некоторой температуры (например, до 50°C) тело *a* (например, стограммовую медную гирьку) поместить в углубление, сделанное в куске льда *A* и закрываемое другим куском льда *B*, то тело будет охлаждаться, уступая свою теплоту льду и превращая его в воду (рис. 1). Через некоторое время тело примет температуру растаявшей воды и льда, то есть 0°C, и дальнейшее таяние прекратится. Вода может быть собрана губкою, и количество образовавшейся воды определено взвешиванием; оно может служить мерою той теплоты, которую тело потеряло, охладившись от 50 до 0°C, и которую надо ему сообщить, чтобы нагреть его от 0 до 50°C.»

Ледяной калориметр обладает рядом преимуществ по сравнению с другими калориметрами. Главное из них — это практически полное отсутствие рассеяния тепла в окружающую среду.

Опыт 2

Известно, что трением можно добывать огонь. Но это требует определенного искусства. А вот вскипятить воду, используя трение, легко.

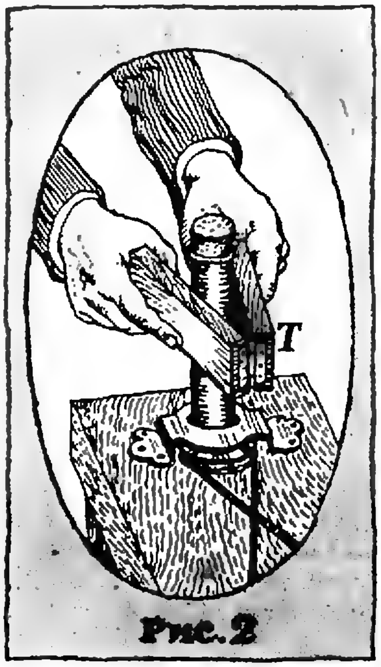


Рис.2

«Медная трубка (рис. 2), наполненная водою и закрытая пробкою, зажимается между двумя досками *Т*, соединенными шарниром, и приводится в быстрое вращение. Преодолевая трение, можно заставить жидкость закипеть и образовавшимися парами выбросить пробку.»

Опыт 3

Для этого опыта вам понадобятся металлическая сетка или рассекатель пламени для газовой плиты, газовая горелка или обыкновенная газовая плита. Во избежание неприятностей при проведении эксперимента будьте очень осторожны.

«Если покрыть пламя газа сеткою, то горение за сетку не переходит (рис. 3, *а*); точно так же, если незажженный газ пропустить через сетку и потом зажечь, то пламя вниз не передается (рис. 3, *б*). В обоих случаях металл сетки отнимет от газа значительную часть тепла, которое распространяется по всей сетке и постепенно теряется в воздухе; оставшаяся в газе теплота недостаточна, чтобы горение продолжалось.»

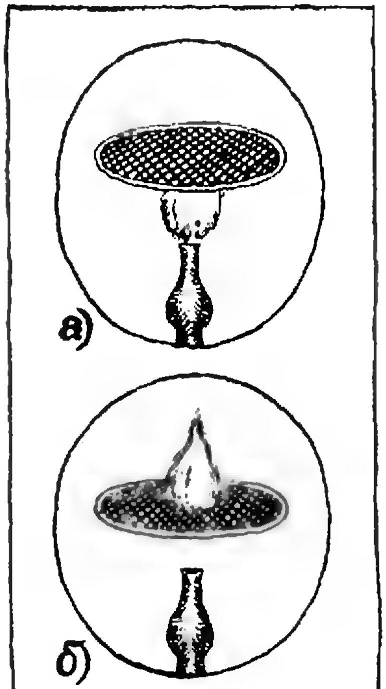


Рис. 3

Опыт 4

Если каким-либо образом менять плотность одного и того же тела, его можно заставить то всплывать, то тонуть в жидкости.

«Так, рыба, изменяя объем своего тела посредством плавательного пузыря, поднимается, опускается и держится на месте.

В картезианском водолазе стеклянный шарик *а*, наполненный частью водою, частью воздухом и имеющий внизу отверстие, плавает на поверхности воды (рис. 4). Надавливая на каучуковую перепонку в и сжимая воздух, который давит на воду, мы заставляем воду входить в шарик и сжимать находящийся в шарике воздух. Шарик делается тяжелее, вследствие чего он опускается и при надлежащем давлении может держаться внутри жидкости. С прекращением давления сжатый в шарике воздух вытесняет воду, и шарик снова подымается.»

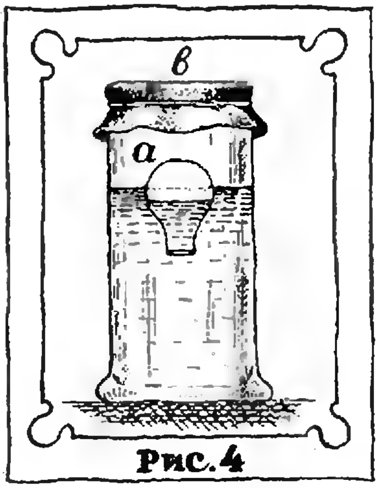


Рис. 4

Опыт 5

«Если намагничиваемый стальной брусок мал, то одного прикосновения к сильному магниту бывает достаточно, чтобы его намагнитить. Для намагничивания же больших стальных полос применяют следующий предложенный Дюгамелем способ. Стальную полосу *АВ* кладут на два разноименных полюса *S* и *N* двух магнитов (рис. 5). Затем ставят наклонно на середину два других магнита *Р* и *Q* так, чтобы *Р* касался намагничиваемой полосы северным, и *Q* — южным полюсом, и проводят ими по полосе *АВ* от ее середины до концов. Потом магниты подымают, ставят снова на середину *АВ* и повторяют прежнее действие несколько раз... Намагничиваемый брусок полезно при этом поворачивать и подвергать, постукивая по нему, сотрясениям.»

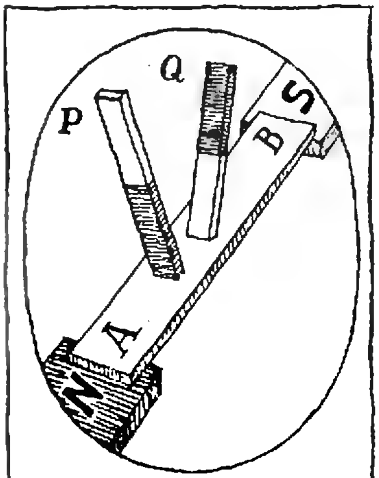


Рис. 5

Н. Розов

Читатели советуют

В письмах и заметках, присылаемых в «Квант» учащимися, преподавателями, любителями математики, часто затрагиваются вопросы, относящиеся к тематике «Практикума абитуриента». Читатели журнала высказывают замечания теоретического характера, сообщают приемы решения отдельных типов задач, дают методические советы, предлагают самостоятельно придуманные упражнения. Далеко не всегда содержащиеся в этих письмах и заметках соображения и задачи являются новыми и оригинальными, однако с некоторыми из них, по нашему мнению, полезно познакомить готовящихся к вступительным экзаменам в вузы. Поэтому редакция решила подготовить очередную подборку материалов, составленную по идеям к предложениям читателей «Кванта», с необходимыми дополнительными комментариями.

В вариантах вступительных экзаменов по математике нередко встречаются системы уравнений. Поступающие, как правило, хорошо знакомы с основными приемами решения систем — методом подстановки и методом исключения. На интересное сообщение, позволяющее решать некоторые системы уравнений, обращает внимание читатель журнала *П. Чеботарев* (Москва). Однако, прежде чем рассказать об этом, немного поговорим о сложных функциях специального вида.

Пусть дана функция f, причем для простоты будем считать, что $D(f)=\mathbf{R}$. Исходя из этой функции, можно образовать новую функцию

$$F(x)=f(f(x));$$

она, очевидно, определена также на всей числовой прямой. Функцию F принято называть *итерацией**) функции f. Из рисунка 1 легко понять, каким образом с помощью графика функции f находится значение итерации $f(f(x_*))$ для конкретного значения x_* аргумента.

Рассмотрим уравнение

$$f(f(x))=x. \qquad (1)$$

Прежде всего заметим, что если x_0 — корень уравнения

$$f(x)=x, \qquad (2)$$

то x_0 — корень и уравнения (1). Но уравнение (1) может, конечно, иметь и другие корни, не являющиеся корнями уравнения (2) (попытайтесь усмотреть этот факт из рисунка 1).

Поскольку уравнение (2) явно проще уравнения (1), полезно указать ситуации, в которых эти уравнения равносильны. Докажем, например, следующее предложение: *если функция f при некотором a удовлетворяет условиям*

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x)\geqslant x, & \text{\it при всех } x<a,\\ f(a)=a, & \\ a\leqslant f(x)\leqslant x, & \text{\it при всех } x>a, \end{array}\right. \qquad (3)$$

то уравнения (1) *и* (2) *равносильны* (дайте геометрическую интерпретацию этой теоремы).

Выше уже отмечалось, что корни уравнения (2) всегда служат корнями уравнения (1); установим справедливость обратного утверждения. Пусть x_0 — корень уравнения (1):

$$f(f(x_0))=x_0; \qquad (4)$$

---

*) Вообще *итерацией* (от латинского *iteratio* — повторение) в математике называют результат повторного применения какой-нибудь операции.

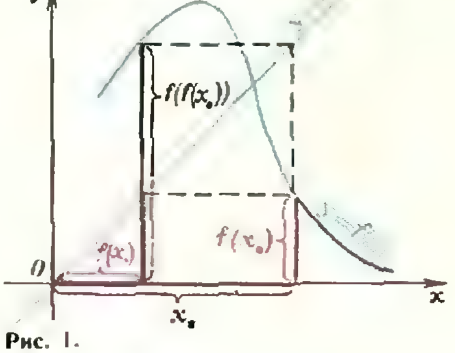


Рис. 1.

рассмотрим каждый из возможных случаев $x_0>a$, $x_0<a$, $x_0=a$ в отдельности.

Если $x_0>a$, то (см. (3))

$$a\leqslant f(x_0)\leqslant x_0. \qquad (5)$$

Из свойств (3) функции f следует, что неравенства $a\leqslant f(z)\leqslant z$ имеют место при любом $z\geqslant a$. Поэтому, выбрав $z=f(x_0)$, будем, учитывая (5), иметь

$$a\leqslant f(f(x_0))\leqslant f(x_0). \qquad (6)$$

Из соотношений (6) и (5) ясно, что

$$f(f(x_0))\leqslant f(x_0)\leqslant x_0.$$

Сравнивая эту цепочку неравенств с равенством (4), заключаем, что $f(x_0)=x_0$, то есть x_0 — корень уравнения (2).

Допустим, далее, что $x_0<a$. В этом случае неравенство $f(x_0)\geqslant a$ невозможно: если бы оно имело место, то выполнялось бы соотношение (6), которое, с учетом неравенства $x_0<a$, привело бы к противоречию с равенством (4). Таким образом, если $x_0<a$, то $f(x_0)<a$. Из свойств (3) функции f следует, что неравенство $f(z)\geqslant z$ имеет место при любом $z<a$. Поэтому, выбрав сначала $z=x_0$ и затем $z=f(x_0)$, будем иметь

$$x_0\leqslant f(x_0)\leqslant f(f(x_0)).$$

С помощью равенства (4) снова заключаем, что $f(x_0)=x_0$.

Случай $x_0=a$ очевиден. Следовательно, при условиях (3) любой корень уравнения (1) является корнем уравнения (2).

В заключение отметим, что по заданной функции f можно, очевидно, определить также функции

$$f(f(f(x))),\ f(f(f(f(x)))),\ \ldots$$

Справедливо следующее предложение (докажите его самостоятельно): *если функция f удовлетворяет условиям* (3), *то каждое из уравнений*

$$f(f(f(x)))=x,\ f(f(f(f(x))))=x,\ \ldots$$

равносильно уравнению (2).

А теперь посмотрим, как сформулированные предложения удается использовать для решения таких систем, в которых все уравнения одинаковы с точностью до обозначения переменных и в каждое уравнение входят лишь две переменные.

Пример 1 (МГУ, мехмат, 1977). *Найти все решения системы уравнений*

$$\begin{cases} y^3-6x^2+12x-8=0,\\ z^3-6y^2+12y-8=0,\\ x^3-6z^2+12z-8=0.\end{cases}$$

Определим функцию

$$f(x)=\sqrt[3]{6x^2-12x+8},\ x\in\mathbf{R}; \qquad (7)$$

тогда данную систему можно переписать в виде

$$y=f(x),\ z=f(y),\ x=f(z). \qquad (8)$$

Используя метод подстановки, получаем отсюда

$$f(f(f(x)))=x. \qquad (9)$$

Прежде всего рассмотрим уравнение $f(x)=x$, или

$$x^3-6x^2+12x-8=0.$$

Оно имеет единственный корень $x=2$ (сгруппируйте первый член левой части с последним и второй с третьим), который является корнем и уравнения (9). Из выражения (7) для функции f и уравнений (8) получаем решение исходной системы: (2; 2; 2).

Проверим, что функция (7) удовлетворяет условиям (3) при $a=2$, а потому уравнение (9) не имеет корней, помимо $x=2$. Неравенство $f(x)\geqslant x$, которое в данном случае приводится к виду

$$(x-2)^3\leqslant 0$$

(проведите необходимые преобразования), действительно выполняется при $x<2$, а $f(2)=2$. Далее, ясно, что $f(x)\leqslant x$ при всех $x>2$. Наконец, неравенство $f(x)\geqslant 2$ легко переписать в форме

$$6x^2-8x\geqslant 0,$$

откуда видно, что оно справедливо при $x>2$.

Следовательно, исходная система имеет единственное решение (2; 2; 2).

Упражнения

1. Найдите итерацию $f(f(x))$, если:

а) $f(x)=\sin x$;
б) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,
в) $f(x)=-x^2+1$.

2. Определите функцию $f(f(f(x)))$, если

$$f(x)=-x+3.$$

3. Решите уравнения $f(x)=x$ и $f(f(x))=x$, если:

а) $f(x)=-x^2+1$;
б) $f(x)=-x+3$.

4. Докажите, что если

$$f(x)<x \text{ при всех } x\in\mathbf{R}$$

или если

$$f(x)>x \text{ при всех } x\in\mathbf{R},$$

то уравнение $f(f(x))=x$ имеет своими корнями только корни уравнения $f(x)=x$.

5. Докажите, что если

$$\begin{cases} f(x)<x \text{ при всех } x<a,\\ f(a)=a,\\ f(x)>x \text{ при всех } x>a,\end{cases}$$

то уравнение $f(f(x))=x$ имеет единственный корень $x=a$.

Решите системы уравнений:

6. $\begin{cases} x-5y=2y^2+2,\\ y-5z=2z^2+2,\\ z-5x=2x^2+2.\end{cases}$

7. $\begin{cases} x=\dfrac{2y^2}{1+y^2},\\ y=\dfrac{2z^2}{1+z^2},\\ z=\dfrac{2x^2}{1+x^2}.\end{cases}$

8. (МГУ, мехмат, 1977).

$$\begin{cases} y^3+2x^2+6x+12=0,\\ z^3+2y^2+6y+12=0,\\ x^3+2z^2+6z+12=0.\end{cases}$$

⁂

Следующую задачу в редакцию прислали ученики 9 класса *Любовь Бобычевцева* и *Евгений Петров* (Харьков):

9. Могут ли при каком-нибудь значении a графики функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ касаться друг друга?

Поясним, что две кривые касаются друг друга, если они в некоторой общей точке имеют общую касательную.

⁂

Очень важное письмо прислал в редакцию наш читатель *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону). Он указывает, что в статье Я. Суконника и П. Горнштейна «Геометрические решения геометрических задач» («Квант», 1979, № 9, с. 38) при решении задачи 1 допущена серьезная ошибка.

Напомним, о какой задаче идет речь.

Пример 2. *Около треугольника AMB описана окружность, центр которой удален от стороны AM на расстояние 10. Продолжение стороны AM за вершину M пересекается в точке C с касательной к этой окружности, проведенной через вершину B. Найти площадь треугольника BMC, если известно, что*

$$|BC|=29,\ \widehat{ACB}=\operatorname{arctg}\frac{20}{21}.$$

Условие почти любой геометрической задачи не дает определенного, исчерпывающего описания того, какая именно конфигурация (фигура) имеется в виду: фиксируются только некоторые ее свойства, характеристики или параметры, а остальные в условии не детализируются. Если в условии задачи говорится просто о «треугольнике *AMB*», то с логической точки зрения этот треугольник может быть, к примеру, и остроугольным, и прямоугольным, и тупоугольным. В большинстве случаев для решения задачи не требуется знать те свойства конфигурации, которые не уточнены в условии, и ответ от них, естественно, не зависит.

Однако в ряде более серьезных задач бывает необходимо начинать решение с выяснения или уточнения отдельных свойств конфигурации, которые явно в условии не оговорены, но выводятся из него путем рассуждений. Скажем, для решения задачи нужно в первую очередь установить, что рассматриваемый треугольник *AMB* на самом деле не может быть оустроугольным. В подобных задачах особенно важно не упустить из виду ни одной логической возможности и по поводу каждой из них выяснить, совместима ли соответствующая конфигурация с данными условия задачи.

Все сказанное относится к сформулированной выше задаче — для ее решения прежде всего требуется извлечь из условия дополнительную информацию о фигуре, уточнить ее вид. В упомянутой статье решение этой задачи начинается по существу с доказательства того, что треугольник *AMB* не является остроугольным (хотя там об этом прямо и не сказа-

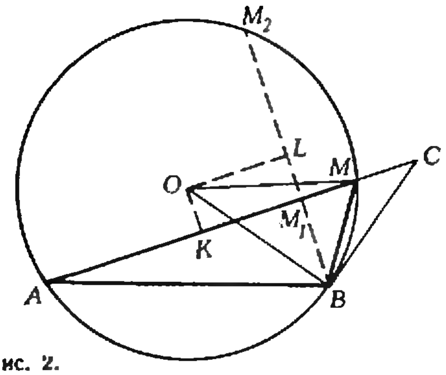


Рис. 2.

но). Если же угол AMB — прямой, то тогда получается ответ:

$$S_{BMC}=210. \qquad (10)$$

Однако тем самым далеко не исчерпываются все логически возможные типы углов треугольника AMB (или, что то же самое, все возможные расположения центра описанной окружности), а проведенные в статье рассуждения существенно опираются на чертеж, относящийся лишь к остроугольному треугольнику AMB. Правда, случаи

угол MAB — прямой,
угол MAB — тупой,
угол ABM — прямой,
угол AMB — тупой

по различным причинам несовместимы с данными условия задачи (приведите необходимые обоснования). Остается последняя возможность: угол ABM — тупой (рис. 2).

Опустим из точки B перпендикуляр BM_1 на сторону AM и продолжим его до пересечения с окружностью в точке M_2, а центр окружности O спроектируем на хорды AM и BM_2. Тогда, как легко проверить,

$$|BM_1|=|BC|\sin\widehat{ACB}=20=2|OK|,$$
$$|BM_2|=2(|BM_1|+|M_1L|)=3|BM_1|;$$

последнее соотношение, в отличие от случая остроугольного треугольника AMB, не противоречит условию задачи. Если теперь последовательно рассмотреть треугольники BM_1C, BOL, OKM и заметить, что $\widehat{OBL}=\widehat{ACB}$, мы придем к ответу (убедитесь в этом):

$$S_{BMC}=\frac{1}{7}(3470-600\sqrt{22}). \qquad (11)$$

В геометрии обычно принято так формулировать задачу, чтобы ответ оказывался одним и тем же для любой конфигурации в пределах того произвола, который допускает условие. С этой точки зрения приведенная формулировка задачи неудачна: в зависимости от того, прямоугольным или тупоугольным является треугольник AMB, получаются разные ответы (10) или (11). Для того чтобы такой неоднозначности не было, условие задачи должно начинаться так: *«Около нетупоугольного треугольника AMB...»*, тогда задача имеет единственный ответ (10). Однако авторы указанной выше статьи по недосмотру опустили слово «нетупоугольного» в тексте условия задачи.

* *
*

Многие читатели присылают в своих письмах различные алгебраические уравнения степени выше второй, для решения которых нужно «увидеть» путь разложения многочлена на множители, подчас довольно хитрый. Вот два таких уравнения, предложенные учеником 8 класса *Александром Матвеевым* (Рига):

Решите уравнения:
10. $x^3+x^2-5x-6=0.$
11. $x^4-10x^3+24x^2-6x-9=0.$

* *
*

Школьникам хорошо известно, что для решения задач на экстремумы существует универсальный метод, связанный с использованием производной. Однако это не значит, что в любой задаче такой метод проще и быстрее всего приводит к цели. Иногда лучше не спешить дифференцировать, а попытаться выяснить, нельзя ли воспользоваться какими-нибудь особенностями рассматриваемой конкретной задачи.

Именно об этом и напоминает читателям «Кванта» в своем письме *С. Берколайко* (с. Котово Белгородской обл.).

Пример 3. *Найти площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, имеющего наибольший объем, если известно, что*

$$|AC|=2\sqrt{2}, \quad |AA_1|=1.$$

Поскольку высота параллелепипеда задана, наибольший объем будет иметь параллелепипед с наибольшей площадью основания $ABCD$. Если обозначить через x длину одной стороны прямоугольника $ABCD$, то $\sqrt{8-x^2}$ — длина его другой стороны. Таким образом, вопрос о том, когда основание имеет наибольшую площадь, сводится к отысканию наибольшего значения функции

$$S(x)=x\sqrt{8-x^2}\ .$$

Стандартный метод решения такой задачи путем исследования производной $S'(x)$ требует проведения некоторых преобразований и вычислений.

Этого можно избежать, если несколько менее шаблонно подойти к задаче нахождения прямоугольника наибольшей площади с заданной длиной диагонали. Выберем в качестве переменной величину угла α между диагоналями прямоугольника $ABCD$. Тогда для его площади получается выражение (проверьте!)

$$S(\alpha)=4\sin\alpha,$$

откуда сразу же, без всякого дифференцирования, видно, что наибольшую площадь имеет квадрат со стороной длины 2. Следовательно, площадь боковой поверхности параллелепипеда равна 8.

* * *

Понятие предела последовательности — одно из важнейших в школьном курсе математики и одновременно одно из труднейших для учащихся. Обычно школьники знают, что такое предел последовательности (то есть могут на память *сказать* определение), но далеко не все достаточно глубоко это определение понимают (то есть могут с ним свободно *работать*). *В. Лебеденко* (г. Дубна Московской обл.) прислал в редакцию задачу (правда, довольно известную), решение которой требует именно понимания определения предела последовательности.

12. Существует ли предел последовательности

$$x_n=\sin n?$$

* * *

Владение разнообразными приемами преобразований имеет в математике большое значение — нисколько не меньшее, чем знание различных теорем или умение проводить логические рассуждения. Один из этих приемов состоит в том, чтобы прибавить и вычесть некоторое удачно подобранное выражение. Именно так часто поступают, например, при разложении многочленов на множители.

Ученик 9 класса *Аваз Нагиев* (п. Минджевань Зангеланского р-на Азербайджанской ССР) приводит такой пример:

Пример 4. *Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную при $x=a$, то*

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a).\quad(12)$$

Прежде чем вычислять предел, проведем следующие алгебраические преобразования данного выражения (считая, что $x\neq a$):

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$$

$$=\frac{xf(a)-af(x)+af(a)-af(a)}{x-a}=$$

$$=\frac{xf(a)-af(a)}{x-a}-\frac{af(x)-af(a)}{x-a}=$$

$$=f(a)-a\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ .$$

Отсюда уже ясно, что указанный в (12) предел действительно существует, если существует $f'(a)$ и равенство (12) справедливо.

* * *

Предлагаем читателям журнала самостоятельно решить еще две задачи. Первую из них прислал нам ученик 10 класса *Аладдин Эйвазов* (с. Ашурлу Масаллинского р-на АзССР), вторую — ученик 10 класса *Андрей Казаринов* (Тольятти).

13. Решите уравнение

$$3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162.$$

14. Три окружности расположены в одной плоскости так, что каждая из них проходит через центры двух других. Найдите площадь фигуры, являющейся объединением всех трех кругов, если известно, что площадь пересечения всех трех кругов равна S.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

На выполнение работы абитуриентам было предоставлено пять часов.

Вариант 1

(механико-математический, физический, экономический факультеты)

1. Расстояние между пунктами A и B равно 120 км. Мотоциклист, двигаясь без остановок, проедет это расстояние за 8 часов, если от A до промежуточного пункта C он будет ехать со скоростью v_0 км/ч, а далее — с ускорением a км/ч². Одно и то же время на весь путь ему понадобится, если от A до C он будет ехать со скоростью v_0 км/ч и от C до B — v_1 км/ч или от A до C со скоростью v_1 км/ч и от C до B — v_0 км/ч. Найти v_0, если параметр a по величине равен $2v_0$ и $v_0 \neq v_1$.

2. Решить неравенство

$$\log_{x^2+2x-3}\frac{|x+4|-|x|}{x-1} > 0.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\sqrt{3}\cos x+\sin x-2}+\sqrt{\operatorname{ctg} 3x+\sin^2 x-\frac{1}{4}}=\sin\frac{3x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Острый угол ABC ромба $ABCD$ имеет величину 60°. Окружность проходит через центр ромба, касается прямой AB в точке B и пересекает сторону CD в точке E. Определить, в каком отношении точка E делит отрезок CD.

5. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 2, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $|SA|=3$. На лучах AB и SB выбраны точки M и N соответственно так, что $|AM|>|AB|$, $|SN|>|SB|$. Шар касается граней трехгранного угла с ребрами BC, BM, BN и плоскости SAC. Найти радиус шара.

Вариант 2

(геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук)

1. Два автомобиля едут навстречу друг другу и встречаются через 6 дней. Если бы первый автомобиль ехал 1,8 дня, а второй — 1,6 дня, то вместе они бы проехали 520 км. Если бы первый проехал 2/3 пути, пройденного вторым, а второй — 1/3 пути, пройденного первым, то первому понадобилось бы для этого на 2 дня меньше, чем второму. Сколько километров за день проезжает каждый автомобиль?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+6\dfrac{x-y}{x+y}=5\\ xy=2.\end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$2\cos 2x-2\sqrt{3}\sin 2x+2\sqrt{3}\sin x-6\cos x-1=0.$$

4. В невыпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол ABC прямой, $|AB|=|BC|=a$. Из вершины D, как из центра, проведена окружность, касающаяся сторон AB, BC и прямой, проходящей через вершины A и C. Определить площадь пересечения ограниченного этой окружностью круга и четырехугольника $ABCD$.

5. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1, $ABCD$ — основание, AC — диагональ основания, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. Точки M, N и K лежат на ребрах AA_1, D_1C_1 и CC_1 соответственно, причем $|A_1M|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|D_1N|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|CK|=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Через точку K проходит прямая l, параллельная прямой MN. Найти длину части прямой l, заключенной внутри куба.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

В 1979 году каждый вариант письменного экзамена по физике состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент, хорошо представляя явление, может сам задать необходимые значения и получить численный ответ. Опыт вступительных экзаменов в НГУ показывает, что с задачами-оценками справляется значительная часть абитуриентов, зачисленных на физический факультет.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое на экзамене. Здесь важно понять сущность явления и среди различных физических факторов выделить главный.

Вариант 1

1. С наклонной плоскости, угол наклона которой α, соскальзывает без трения клин B (рис. 1). Верхняя грань клина горизонтальна. На клине покоится тело массой m. Найти силу трения, действующую на тело. Ускорение силы тяжести равно g.

2. Участки AB и CD узкой стеклянной трубки заполнены воздухом, BC и DE — ртутью, в участке EF — вакуум (рис. 2). Длины всех участков одинаковы. Давление в нижней точке A равно p. Трубку осторожно переворачивают так, что точка F оказывается внизу. Каким станет давление в точке F? Температура не изменяется.

3. В цепи, состоящей из заряженного конденсатора и катушки индуктивностью L, замыкают ключ K (рис. 3). По какому закону в зависимости от времени должна изменяться емкость конденсатора, чтобы ток в цепи нарастал прямо пропорционально времени t? Начальная емкость конденсатора равна C_0.

4. *Оценить*, с какой минимальной частотой вы должны вращать ведро с водой в вертикальной плоскости, чтобы вода не выливалась.

5. Между двумя параллельными плоскими зеркалами расположен источник света — электрическая лампочка. После включения лампочки на экране, перпендикулярном к зеркалам, появляются светлые и темные полосы. Объяснить явление.

Вариант 2

1. Частица с зарядом q и массой m, находясь на расстоянии l_0 от заряженной плоскости, имела скорость $\vec{v}$, направленную под углом α к плоскости (рис. 4). Плоскость, заряженная с неизменяющейся плотностью заряда на единицу площади σ, движется поступательно с постоянной скоростью $\vec{u}$, перпендикулярной к плоскости. На какое минимальное расстояние l частица приблизится к плоскости?

2. Два гладких шарика массой m и M подвешены к одной и той же точке O, как показано на рисунке 5. Радиус большого шарика равен R; длина нити, его удерживающей, равна l. Какой угол и эта нить образует с вертикалью?

3. В вертикально стоящем закрытом цилиндрическом сосуде высотой $2l$ и площадью сечения S находится тяжелый поршень массой m (рис. 6). Первоначально поршень уравновешен и делит объем сосуда пополам. Над поршнем находится гелий при давлении p_0, под поршнем — кислород. Поршень проницаем для гелия и непроницаем для кислорода. Через некоторое время поршень занимает новое равновесное положение. Найти величину смещения поршня. Температура постоянна, трением пренебречь.

4. *Оценить* давление шариковой ручки на бумагу.

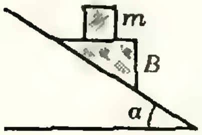


Рис. 1.

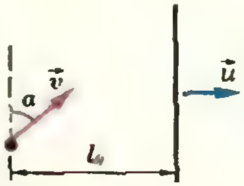


Рис. 4.

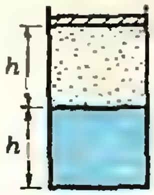


Рис. 7.

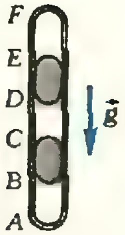


Рис. 2.

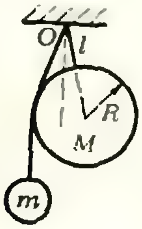


Рис. 5.

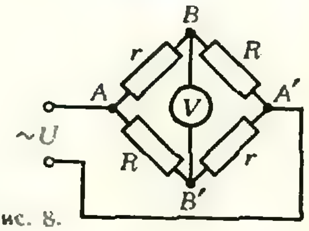


Рис. 8.

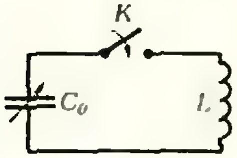


Рис. 3.

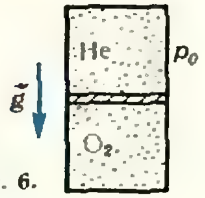


Рис. 6.

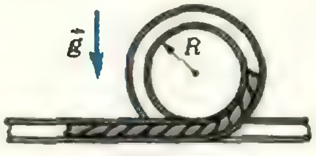


Рис. 9.

5. Имеются два различных источника напряжения, обеспечивающие одинаковую интенсивность свечения электрической лампочки. При кратковременном подключении к выходным клеммам источников катушки индуктивности только один источник дает интенсивный дуговой разряд. Объяснить наблюдаемое явление.

Вариант 3

1. В трубке над поверхностью воды находится воздух, сжатый покоящимся тяжелым поршнем до давления $p=3\cdot10^5$ Па (рис. 7). Расстояние от поршня до поверхности воды h, глубина слоя воды тоже h, температура воздуха и воды $t=6°C$. На каком расстоянии от поверхности воды окажется поршень, если трубку с водой нагреть до температуры $t_1=100°C$? Давлением паров воды при температуре $t=6°C$ можно пренебречь. Поршень может двигаться без трения.

2. В цепи с источником переменного напряжения вольтметр при включении между точками BB' показывает втрое меньшее напряжение, чем при включении между точками AA' (рис. 8). Выразить неизвестное сопротивление R через известное r.

3. В горизонтальной гладкой трубе имеется кольцевой изгиб радиусом R, расположенный в вертикальной плоскости (рис. 9). С какой минимальной скоростью должен двигаться на горизонтальном участке трубы тяжелый тонкий гибкий канат длиной $l>2\pi R$, чтобы он смог пройти через изгиб?

4. *Оценить* выталкивающую силу, действующую на вас со стороны воздуха в аудитории.

5. Подвижный поршень, замыкающий объем газа, в котором находится кусочек ваты, смоченной ацетоном, поднимают вверх. Объяснить характер изменения давления в объеме, измеряемого жидкостным манометром.

Г. Меледин, В. Пененко

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^4+(1-2a)\,x^2+a^2-1=0$$

а) не имеет решений?
б) имеет одно решение?
в) имеет два решения?
г) имеет три решения?

2. Решите неравенство

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2-\log_{\frac{1}{2}} x^2 > (\log_{\frac{1}{2}} 3)^2-1.$$

3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{x^2-1}}\,.$$

4. Найдите предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot\sin x-\operatorname{tg} x}{x^2\cdot\sin x}\,.$$

5. Радиус основания конуса равен R, а угол развертки его боковой поверхности равен 90°. Найдите объем конуса.

Вариант 2

(факультет прикладной математики)

1. Вычислите предел

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\,.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{a-2}{\sqrt{x+4}}=1.$$

3. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего членов равно 128, сумма всех членов равна 126. Сколько членов в прогрессии?

4. Решите уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0.$$

5. Основанием прямой призмы служит ромб $KBCD$ со стороной a и углом $\widehat{DKB}=60°$. Концы B_1 и D_1 диагонали верхнего основания призмы соединены прямыми B_1E и D_1F с серединами сторон KD и KB нижнего. В пересечении этих прямых образуется угол B_1OD_1, равный α. Определить объем призмы.

Вариант 3

(физический факультет и факультет радиофизики и электроники)

1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\log_{0,4}(x-x^2)}$.

2. Найдите сумму $1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}$, а затем сумму $2x+4x^3+\ldots+2n\cdot x^{2n-1}$.

3. Докажите тождество

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\,.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$$

5. Каждое из боковых ребер четырехугольной пирамиды образует с высотой угол α. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом β между диагоналями. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна h.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет и факультет радиофизики и электроники

1. На доске стоит прямой однородный цилиндр высотой $h=2,5$ см и диаметром $D=10$ мм. Один конец доски медленно поднимают. При каком угле α наклона доски к

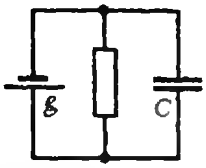


Рис. 1.

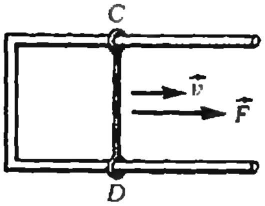


Рис. 2.

горизонту нарушится равновесие цилиндра относительно доски, если коэффициент трения $\mu = 0{,}5$?

2. Парафиновый шар, начиненный свинцовой дробью, плавает на поверхности воды так, что $n = 0{,}1$ его объема находится над водой. Во сколько раз объем свинца $V_с$ меньше объема парафина $V_п$? Плотность свинца $\rho_с = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность парафина $\rho_п = 0{,}86 \cdot 10^3$ кг/м³.

3. Температура газа в баллоне повысилась на ΔT кельвинов. При этом давление газа увеличилось на $1/n$ часть первоначального значения. До какой температуры T нагрели газ?

4. Определить заряд конденсатора q, если при коротком замыкании источника ток через него увеличивается в n раз (рис. 1). ЭДС источника равна $\mathcal{E}$, емкость конденсатора — C.

5. Под действием силы $\vec{F}$ ($|\vec{F}| = 1$Н) проводник CD, сопротивление которого $R = 1$ Ом, скользит, не теряя контакта, по металлической раме с постоянной скоростью $\vec{v}$ ($|\vec{v}| = 0{,}1$ м/с) (рис. 2). Система расположена в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамы. Определить ток I в проводнике. Трением и сопротивлением рамы пренебречь.

6. На воду налит слой кедрового масла. Можно ли подобрать угол падения света из воздуха на масло такой, чтобы на границе масло — вода произошло полное отражение света? Показатель преломления воды $n_в = 1{,}33$, масла $n_м = 1{,}52$.

7. Собирающая линза дает мнимое увеличенное в два раза ($\Gamma_1 = 2$) изображение предмета. Каким будет увеличение Γ_2, если, не изменяя положения предмета, собирающую линзу заменить рассеивающей с таким же фокусным расстоянием?

Механико-математический факультет и факультет прикладной математики

1. Тяжелый шарик, подвешенный на легком резиновом жгутике, растягивает его на $\Delta l = 5$ см. Каким будет максимальное растяжение X_{max}, если шарик поднять и затем отпустить с высоты $h = 20$ см, отсчитанной от нижнего конца нерастянутого жгутика? Деформацию жгутика считать упругой.

2. Математический маятник за некоторый промежуток времени совершает $N_1 = 12$ колебаний. После укорачивания нити маятника на $\Delta l = 28$ см он совершает за то же время $N_2 = 16$ колебаний. Определить первоначальную длину маятника l.

3. Цилиндрическая трубка с запаянным верхним концом вертикально опускается в ртуть так, что запаянный конец совпадает с поверхностью ртути в сосуде. При этом высота воздушного столба в трубке равна h. Определить длину трубки l. Атмосферное давление равно p, температуру считать постоянной.

4. Электрическая энергия постоянного тока передается по двухпроводной алюминиевой линии на расстояние $l = 400$ км при плотности тока (токе, текущем через единицу площади поперечного сечения проводника) $j = 1$ А/мм². Достаточным ли будет напряжение $U = 500$ кВ для того, чтобы потери в линии передачи не превышали $\eta = 5\%$ передаваемой мощности? Удельное сопротивление алюминия $\rho = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

5. Металлическое кольцо диаметром D и сопротивлением R расположено в однородном магнитном поле так, что плоскость кольца перпендикулярна вектору магнитной индукции $\vec{B}$. Кольцо вытягивают в сложенную вдвое прямую; при этом площадь, ограниченная контуром проводника, уменьшается равномерно. Определить заряд q, протекший по проводнику.

6. На стеклянный клин с углом $\alpha = 2{,}0°$ перпендикулярно к грани клина падает луч белого света. На какой угол β разойдутся после выхода из клина красный и фиолетовый лучи вследствие дисперсии, если показатель преломления стекла для красных лучей равен $n_к = 1{,}74$, а для фиолетовых $n_ф = 1{,}80$?

7. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы, фокусное расстояние которой равно F. Вплотную перед линзой расположена диафрагма, имеющая отверстие в виде круга некоторого диаметра. Пучок преломленных лучей в фокальной плоскости линзы имеет диаметр в n ($n > 1$) раз больше диаметра диафрагмы. Определить расстояние d от линзы до источника.

Химический факультет

1. Маленький тяжелый шарик, подвешенный на нити, совершает колебания в вертикальной плоскости. Наибольший угол отклонения нити от вертикали $\alpha = 60°$. Во сколько раз модуль N_1 максимальной силы натяжения нити больше модуля N_2 минимальной силы?

2. При изохорном охлаждении на $\Delta T = 3$К давление газа понизилось на 1%. Определить температуру T, до которой охлажден газ.

3. Гальванометр рассчитан на максимальный ток I. Какое добавочное сопротивление R_1 нужно последовательно подключить к гальванометру для того, чтобы им можно было измерять напряжения до максимального значения U? Известно, что при параллельном подключении к гальванометру сопротивления R_2 (шунта) предел измерения тока увеличивается в n раз.

4. Пучок однократно ионизированных изотопов магния ^{24}Mg и ^{25}Mg влетает в однородное магнитное поле. Определить радиус окружности R_1 движения легких изотопов, если для тяжелых изотопов он равен R_2. Скорость всех ионов в пучке считать одинаковой.

5. Фотоэффект вызывается облучением металла светом длиной волны λ. Найти задерживающее напряжение $U_з$, если длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта, равна λ_0.

I. Кембровский, А. Самусенко, А. Саржевский

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Площадь треугольника ABC равна 1. Найти площадь треугольника PQR, если точки P, Q, R принадлежат соответственно медианам AK, BL, CN и $\frac{|AP|}{|PK|}=1$, $\frac{|BQ|}{|QL|}=\frac{1}{2}$, $\frac{|CR|}{|RN|}=\frac{5}{4}$.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}.$$

3. Решить уравнение

$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cos x.$$

4. Найти все значения параметра a, для которых неравенство

$$(a-1)x^2-(a+1)x+(a+1)>0$$

выполнено для всех действительных x.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 1. Найдите площадь шестиугольника $AKLCMN$, если точки K, L, M, N принадлежат соответственно сторонам AB, BC, CD, AD и $\frac{|AK|}{|KB|}=2$, $\frac{|BL|}{|LC|}=\frac{1}{3}$, $\frac{|CM|}{|MD|}=1$, $\frac{|DN|}{|NA|}=\frac{1}{5}$.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0.$$

3. Решить уравнение

$$2\sin 3x\cdot\sin x+(3\sqrt{2}-1)\cos 2x=3.$$

4. Найти все значения параметра a, для которых уравнение

$$\cos x=\frac{a-1{,}5}{2-0{,}5a}$$

имеет решения.

Физика

Письменный экзамен

Медицинский факультет

Вариант 1

1. Равномерное движение по окружности. Линейная и угловая скорости; связь между ними. Единица угловой скорости. Центростремительное ускорение.

2. Переменный ток. Генератор переменного тока. Период и частота переменного тока. Действующие значения напряжения и силы тока. Использование диода для выпрямления переменного тока.

3. В калориметре находится $m_1=0{,}4$ кг воды при температуре $t_1=10$°C. В воду кладут $m_2=0{,}6$ кг льда при температуре $t_2=-40$°C. Какая температура установится в калориметре, если его теплоемкость ничтожно мала? Удельная теплоемкость воды $c_1=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплоемкость льда $c_2=2{,}1$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=0{,}33$ МДж/кг.

4. Расстояние между источником света, находящимся на оптической оси линзы, и экраном $l=0{,}5$ м. Линза дает четкое изображение источника при двух ее положениях, расстояние между которыми $a=0{,}1$ м. Каково фокусное расстояние линзы? Показать ход лучей.

Вариант 2

1. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Понятие о потенциале. Единица потенциала. Потенциал поля точечного заряда (без вывода). Разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряженностью для однородного поля.

2. Дисперсия света. Спектр. Спектроскоп. Инфракрасная и ультрафиолетовая части спектра. Спектры испускания. Спектры поглощения. Понятие о спектральном анализе.

3. Из точки, находящейся в 2 км к востоку и в 1 км к северу от перекрестка, вышел турист и за $t=1$ ч прошел путь $s=5$ км. Прямая, проведенная в восточном направлении, составляет с направлением движения туриста угол $\alpha=135$°. Определите, где находился турист после часа пути.

4. Определите сопротивление подводящих проводов от источника с напряжением $U=120$ В, если при коротком замыкании предохранитель из свинцовой проволоки сечением $S=1$ мм^2 и длиной $l=2$ см плавится за $\tau=0{,}03$ с. Начальная температура предохранителя $t_0=27$°C. Удельная теплоемкость свинца $c=0{,}13\cdot10^3$ Дж/(кг · К), температура плавления $T=600$ К, плотность $D=11{,}3\times10^3$ кг/м^3, удельное сопротивление $\varrho=2{,}1\cdot10^{-7}$ Ом · м, удельная теплота плавления $\lambda=0{,}25\cdot10^5$ Дж/кг.

Б. Алексеюнас, А. Казлаускене, Э. Мисевичюс

СОВЕТУЕМ КУПИТЬ

Китайгородский А. И. Физика для всех. Фотоны и ядра. Цена 40 к.

Раубах X. З. Загадки молекул. Цена 50 к.

Заказы (открытками) направляйте по адресу: 103031, Москва, Петровка 15, Магазин № 8 «Техника».

Ю. Первин, А. Салтовский

Как работает процессор

Архитектура ЭВМ

Современная электронная вычислительная машина — это сложный комплекс устройств и элементов, восхищающий своим технологическим совершенством и разнообразием физических принципов работы. Давайте, посмотрим на машину глазами программиста: познакомимся с основными ее устройствами, их назначением, существующими между ними связями, принципами действия этих устройств.

На упрощенной блок-схеме (рис. 1) представлены следующие устройства, составляющие ЭВМ:

— *Арифметико-логическое устройство* (АЛУ) выполняет арифметические и логические действия над данными, поступающими из Памяти. АЛУ, входящие в состав современных ЭВМ, могут выполнять до ста и более различных действий (операций). Кроме обычных арифметических — сложить, вычесть, умножить, разделить,— в наборе операций, которыми располагает АЛУ, содержатся операции, позволяющие редактировать информацию. Основная задача этого устройства — преобразование информации, получаемой из памяти.

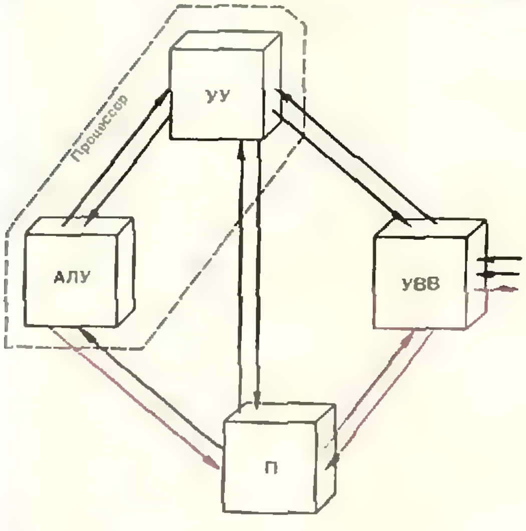


Рис. 1. Архитектура ЭВМ.

— *Память* (П) (или *запоминающее устройство* — см. «Квант», 1980, № 4) хранит данные, а также информацию, управляющую всеми работами в ЭВМ, т. е. *программу*.

— *Устройства ввода-вывода* (УВВ) являются органами общения машины с человеком. С помощью УВВ человек вводит в ЭВМ программу и данные, необходимые для выполнения программы, а также получает результаты в удобной для дальнейшей работы форме: таблицы, графики, схемы и чертежи. Устройства ввода — глаза и уши машины, а устройства вывода — ее язык и руки.

— *Устройство управления* (УУ) координирует работу ЭВМ в целом и ведает «дипломатией» взаимоотношений между отдельными устройствами.

Арифметические и логические операции выполняются в АЛУ с высокой скоростью, исчисляемой в современных ЭВМ от сотен тысяч до десятков миллионов операций в секунду. Для обеспечения высокой скорости работы машины в целом, процессы, связанные с передачей информации между устройствами — смена данных, получение нового задания, запись результата — полностью автоматизированы; этим и управляет УУ. Устройство управления — своеобразный дирижер ансамбля устройств, составляющих ЭВМ. «Нотной партитурой» дирижеру служит программа, предварительно записанная в памяти. Каждый такт пьесы, разыгрываемой под руководством УУ, является законченным элементарным действием: сложение двух чисел, сравнение двух величин и т. д. Именно УУ «настраивает» АЛУ на выполнение конкретной операции, «заботится» о том, чтобы из памяти была извлечена информация, необходимая для этой операции, не «забывает» по окончании действия записать результат в память либо переслать в распоряжение УВВ.

В семействе устройств, составляющих ЭВМ, наиболее технически сложными оказались отношения между УУ и АЛУ. Дело в том, что УУ не только «настраивает» АЛУ на выполнение определенной операции, например сравнение двух величин, но и «интересуется» результатом, в зависимости от значения этого результата принимает решение о дальнейшем ходе выполнения программы. Взаимоотношения АЛУ и УУ настолько тесны и сложны, что эти два устройства часто объединяют в одну группу, которую называют *Процессором*.

Логическую организацию машины называют ее *архитектурой*. Представленная на рисунке 1 архитектура считается классической. Она предложена в 1947 году американским ученым фон Нейманом и содержит в себе основные черты современных архитектурных решений ЭВМ.

Что такое управляющая информация?

В первом приближении работу ЭВМ можно представить так:

— из памяти извлекается *управляющая информация*. Как правило, это содержимое одной ее ячейки — одно машинное слово. В этом управляющем слове закодирована исчерпывающая инструкция о действиях устройств машины на ближайший отрезок времени — на один такт ее работы;

— УУ расшифровывает информацию, содержащуюся в управляющем слове, и в зависимости от значения этого слова выдает участвующим в операции устройствам ЭВМ приказы о конкретных действиях;

— после того как устройства выполняют порученную им работу, они сообщают об этом УУ; тогда либо из памяти будет извлечено следующее управляющее слово, либо движение информационных потоков в ЭВМ будет приостановлено.

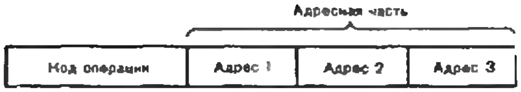


Рис. 2. Примерный формат трехадресной команды.

Управляющее слово называют *командой*. Последовательность команд представляет собой *программу на машинном языке*. Команды и данные, предназначенные для обработки, а также полученные результаты хранятся в памяти.

Каждая ячейка памяти, в том числе, ячейка, хранящая команду, имеет *адрес* (номер этой ячейки). По адресу в памяти разыскивается любая информация, точно так же как книга разыскивается в библиотеке по ее индексу, а оставленное на хранение в гардеробе пальто — по выданному номерку.

Команда чаще всего составляется из нескольких компонент (рис. 2).

Характер управляющей информации, которую команда поставляет для ЭВМ, определяется прежде всего *кодом операции*. Обычно это небольшая часть формата команды, занимающая для многих моделей ЭВМ 6—8 битов. Кроме кода операции, команда содержит следующую управляющую информацию:

— *адресную часть*, включающую адреса данных, над которыми надо произвести операцию, и адрес результата;

— явным или неявным образом задается *адрес следующей команды*, которую надо будет извлечь из памяти и принять к исполнению после выполнения текущей (выполняемой в данный момент) команды.

Из чего состоят устройства машины?

Различные устройства машины представляют собой комбинации большого числа элементов — «кирпичиков». Разнообразие элементов, однако, не столь велико. Поэтому для более подробного знакомства с работой устройств ЭВМ необходимо узнать принципы действия этих элементов. Рассматривая устройство памяти («Квант», 1980, № 4), читатель, по-

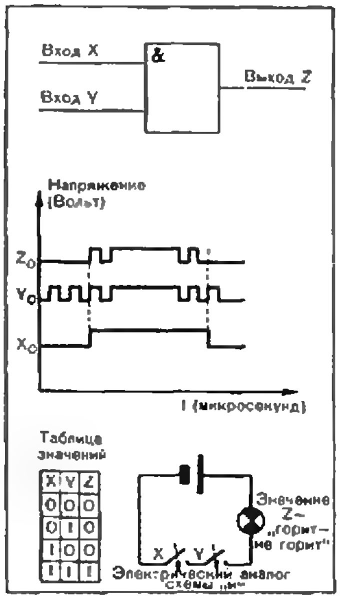

Вход X
Вход Y
&
Выход Z
Напряжение (Вольт)
Z_0
Y_0
X_0
t (микросекунд)
Таблица значений
X Y Z
0 0 0
0 1 0
1 0 0
1 1 1
Значение Z– „горит–не горит"
X
Y
Электрический аналог схемы „и"

Рис. 3а. Схема совпадения («и»).

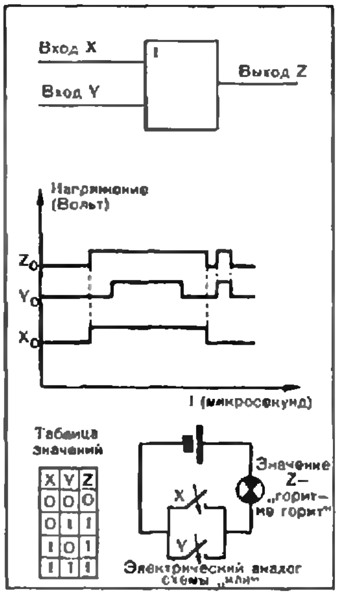

Вход X
Вход Y
1
Выход Z
Напряжение (Вольт)
Z_0
Y_0
X_0
t (микросекунд)
Таблица значений
X Y Z
0 0 0
0 1 1
1 0 1
1 1 1
Значение Z– „горит–не горит"
X
Y
Электрический аналог схемы „или"

Рис. 3б. Схема сборки («или»).

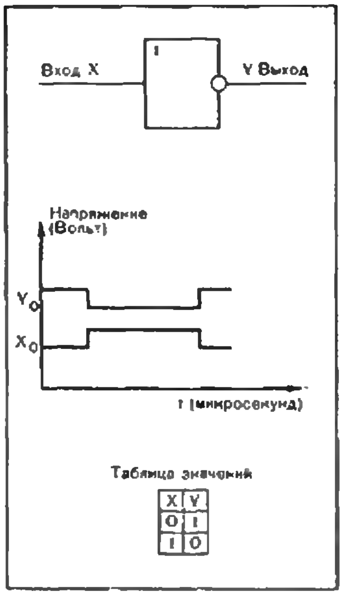

Вход X
1
Y Выход
Напряжение (Вольт)
Y_0
X_0
t (микросекунд)
Таблица значений
X Y
0 1
1 0

Рис. 3в. Схема инвертора («не»).

видимому, обратил внимание на дискретную природу хранимой в машине информации: в конечном итоге все сводится к двум состояниям, именуемым 0 и 1. Различные конструкции элементов могут давать лишь разные технические реализации, гарантирующие распознавание двух таких состояний. Например, два уровня напряжения — «высокий» и «низкий» — могут распознаваться электронными схемами так, что «высокое» означает единицу, а «низкое» — нуль.

Одним из простейших элементов, предназначенным для запоминания одного бита информации, является *триггер*, весьма похожий по принципу действия на обычный двухпозиционный выключатель, с той лишь разницей, что управляется он не вручную, а единичным электрическим сигналом, поступающим на его вход: если триггер находился в нулевом состоянии, то он «помнит» это состояние до поступления очередного единичного сигнала; если же триггер был в единичном состоянии, то поступивший на его вход единичный сигнал «сбрасывает» его в нулевое состояние, тоже запоминаемое на сколь угодно долгое время до прихода следующего единичного сигнала.

Способность триггера к хранению информации широко используется в различных запоминающих устройствах, простейшим из которых является *регистр* — группа триггеров, объединенная для оперативного хранения фиксированного числа битов, в частности машинного слова. Регистр является удобным средством для предварительного хранения информации. С помощью регистров эффективно согласуются информационные обмены между устройствами ЭВМ, работающими зачастую с различными скоростями.

В процессе выполнения команд УУ переключает управляющие сигналы и потоки информации. Переключение осуществляется с помощью различных электронных схем. Наиболее простыми и распространенными из них являются:

— *схема совпадения* («и») — сигнал, соответствующий значению «1», появится на выходе схемы «и» только тогда, когда значение всех входных сигналов будет соответствовать значению «1» (рис. 3а);

— *схема сборки* («или») — эта схема менее «привередлива» к характеру входной информации: значение «1» появляется на ее выходе каждый раз, когда хотя бы на одном входе появится значение «1» (рис. 3б);

— *схема инвертора* («не») вырабатывает на выходе значение, противоположное входному. Получаемое

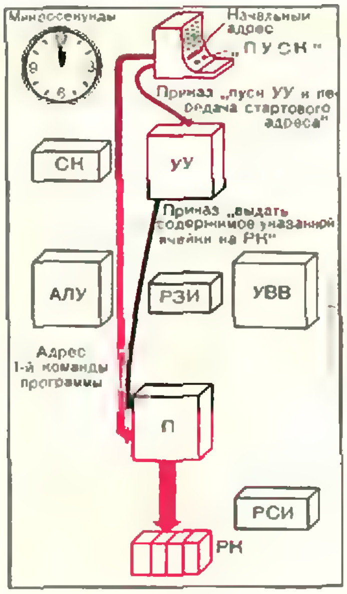

Микросекунды
Начальный адрес
„ПУСК"
Приказ „пуск УУ и передача стартового адреса"
СН
УУ
Приказ „выдать содержимое указанной ячейки на РК"
АЛУ
РЗИ
УВВ
Адрес 1-й команды программы
П
РСИ
РК

Рис. 4а. Выборка команд.

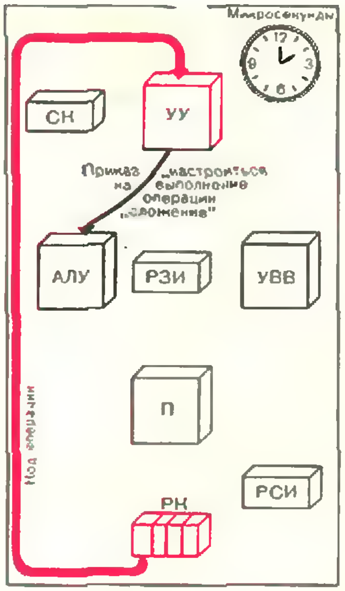

Микросекунды
СН
УУ
Приказ на „настроиться выполнение операции „сложение"
АЛУ
РЗИ
УВВ
П
Код операции
РСИ
РК

Рис. 4б. Дешифрация кода операции.

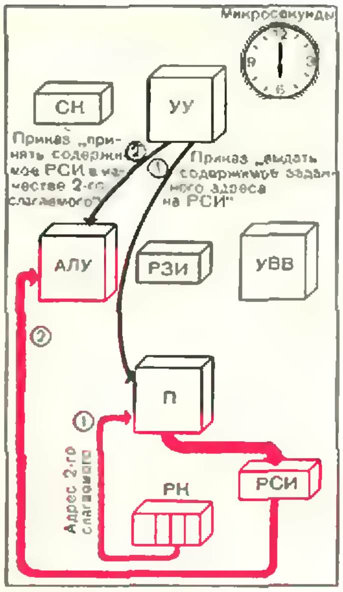

Микросекунды
СН
УУ
Приказ „принять содержимое РСИ в качестве 2-го слагаемого"
②
①
Приказ „выдать содержимое заданного адреса на РСИ"
АЛУ
РЗИ
УВВ
②
П
①
Адрес 2-го слагаемого
РК
РСИ

Рис. 4в. Пересылка 1-го слагаемого в АЛУ.

с помощью инверторов «негативное» изображение информации (рис. 3в), используется, в частности, для выполнения операции *вычитание*.

Элементы «и», «или», «не» используются при создании *функциональных блоков*, которые являются компонентами устройств ЭВМ: с помощью этих элементов возможно создание устройств с любыми наперед заданными свойствами. Характерной чертой работы функциональных блоков является их узкая специализация, обеспечивающая выполнение каждым блоком строго очерченного круга обязанностей. Широкое применение при создании отдельных устройств ЭВМ нашли следующие функциональные блоки:

— *сумматор* — сердце АЛУ: сумматор получает на входы двоичные представления двух чисел и выдает на выходе двоичное представление их суммы;

— *шифратор* — преобразует сигнал на одном из своих входов в соответствующий набор сигналов на выходе (например, в код операции);

— *дешифратор* — выполняет функцию, обратную действиям шифратора, то есть на каждую входную комбинацию сигналов выдает сигнал только на одну выходную линию; дешифратор используется, например, в УУ для расшифровки кода операции команды;

— *счетчик* — считает число дискретных сигналов, которые появляются на его входе; счетчик, как и регистр, состоит из конечного числа триггеров.

Процессор выполняет команду

Процессы, происходящие в машине при отработке команды, иллюстрируются рисунками 4а—4е. Это своеобразные стоп-кадры события, сюжет которого — отработка одной команды. Процессы, как это видно по «часам», фигурирующим на каждом рисунке, протекают во времени. Высокая общая скорость работы ЭВМ потребовала жесткой регламентации времени на каждый информационный обмен в отдельности. Метрономом машины, ее внутренними «часами», служит так называемый *генератор тактовой частоты*.

Перед началом работы оператор ЭВМ подготавливает с пульта стартовую информацию — адрес команды, исполняемой в данной программе самой первой. Приказ «пуск», который оператор дает машине, относится прежде всего к УУ (рис. 4а). Далее события развертываются следующим образом:

— прежде всего в специальный *счетчик команд* (СК) попадает ад-

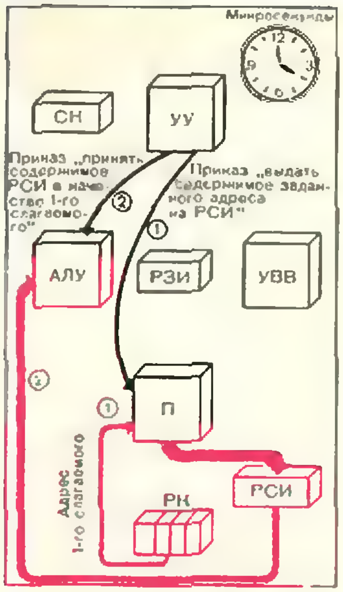

Микросекунды
СК
УУ
Приказ „принять содержимое РСИ в качестве 1-го слагаемого"
Приказ „выдать содержимое заданного адреса на РСИ"
②
①
АЛУ
РЗИ
УВВ
②
①
П
Адрес 1-го слагаемого
РСИ
РК

Рис. 4г. Пересылка 2-го слагаемого в АЛУ.

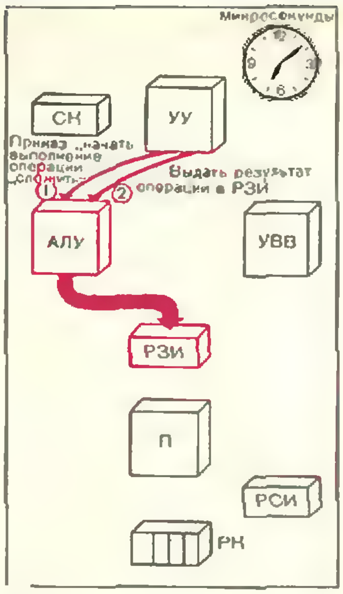

Микросекунды
СК
УУ
Приказ „начать выполнение операции „сложить"
①
②
Выдать результат операции в РЗИ
АЛУ
УВВ
РЗИ
П
РСИ
РК

Рис. 4д. Выполнение операции.

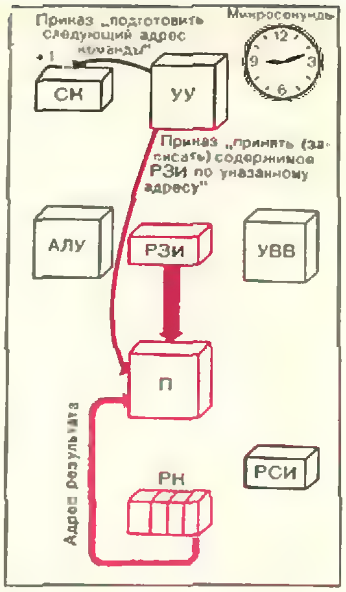

Приказ „подготовить следующий адрес команды"
Микросекунды
+1
СК
УУ
Приказ „принять (записать) содержимое РЗИ по указанному адресу"
АЛУ
РЗИ
УВВ
П
Адрес результата
РК
РСИ

Рис. 4е. Запись результата операции.

рес первой выполняемой команды программы; тем самым определяется место в памяти, откуда можно извлечь обрабатываемую команду;

— получив приказ о начале работы, УУ передает в память в качестве адреса разыскиваемой информации содержимое счетчика команд;

— эта передача сопровождается приказом для памяти «выдать содержимое указанной ячейки на регистр команд»;

— после этого из ячейки памяти с адресом, равным содержимому СК, считывается команда, размещаемая в *регистре команд* (РК);

— УУ с помощью дешифратора расшифровывает код операции команды и, настраивая АЛУ на выполнение операции (в нашем примере — «сложить два числа»), начинает отработку алгоритма команды (рис. 4б);

— адрес первого слагаемого (первый адрес в адресной части команды, расположенной в РК) передается в ЗУ; УУ требует выдать содержимое этого адреса в АЛУ; перевалочным пунктом в этой передаче служит *регистр считываемой информации* (РСИ) (рис. 4в);

— после того как АЛУ примет содержимое РСИ в качестве первого слагаемого, УУ начнет выборку следующего слагаемого. Для этого в память будет передан номер ячейки, хранящей второе слагаемое (второй адрес в адресной части команды из РК), и содержимое этой ячейки будет передано через РСИ в АЛУ (рис. 4г);

— получив оба слагаемых, АЛУ с помощью сумматора выполняет операцию сложения и передает результат в *регистр записываемой информации* (РЗИ) (рис. 4д);

— финалом отработки команды является запись содержимого РЗИ (результата) по адресу результата (третий адрес в адресной части команды в РК) (рис. 4е).

Как определяется порядок выполнения команд?

Следующая команда будет извлечена из памяти автоматически: завершение отработки команды фиксируется прибавлением 1 к содержимому счетчика команд, поэтому следующей выполняемой командой станет та, что хранится в соседней, следующей ячейке. Изменить эту последовательность способны две специальные команды — *безусловный переход* и *условный переход*. Их основное назначение состоит в изменении содержимого счетчика команд. Команда безусловного перехода содержит в своей адресной части информацию об адресе следующей команды. Эта информация заменяет (вытесняя) содержимое счетчика команд, невзирая ни на какие ситуации, которые могли произойти при отработке предыдущей команды. Напротив, команда условного перехода «интересуется» результатами работы предыдущей команды: в зависимости от значения этих результатов она выбирает ту или иную команду в качестве следующей: адреса возможных следующих команд присутствуют (явно или неявно) в адресной части команды условного перехода.

Почему нужны прерывания в ходе выполнения программы?

Кроме такого преднамеренного способа изменения последовательности команд, которым вооружают программиста команды безусловного и условного переходов, существуют «аппаратные» (внутренние машинные) способы изменения обычной последовательности, которые позволяют по некоторым важным и чрезвычайным причинам прерывать выполнение программы и начать выполнение другой программы. При появлении причины, вызвавшей *прерывание*, прежде всего изменяется содержимое счетчика команд: на него поступает *адрес прерывания*. Дело в том, что обычно для каждого класса причин отводится «свой» фиксированный адрес; его обычно «находят» с помощью шифратора. В фиксированных адресах прерываний содержатся команды перехода на подпрограмму (обработки соответствующего прерывания). Эти команды — «ближайшие родственники» уже известной команды безусловного перехода. Замечательный союз программных и аппаратных средств, предназначенных для быстрой реакции машины на чрезвычайные события, называют *системой прерываний*. Действия этого союза направлены на то, чтобы «сфотографировать» события, происходившие в ЭВМ в момент возникновения прерывания. «Фотография» помогает восстановить работу машины в прежней последовательности после того, как причины прерывания будут удовлетворены или ликвидированы. Телефонный звонок прерывает чтение книги, и вы, переговорив с приятелем, возвращаетесь к книге. Именно к книге, а не к самовару. Мало того, вы продолжаете читать именно с той страницы, на которой было прервано чтение. ЭВМ «узнает» причину прерывания так же, как вы узнаете голос одного из друзей.

Причин для прерываний может быть много. Вот некоторые из них:

— в машине осуществляется постоянный контроль за достоверностью передаваемой или принимаемой информации: обнаружена ошибка;

— произошла поломка оборудования;

— в программе есть ошибка.

Возможность прервать на время исполняемую программу позволяет управлять с помощью ЭВМ процессами, появление которых во времени трудно предугадать.

Все ли так просто?

Рассказывая о событиях, происходящих в процессоре во время выполнения программы, мы договорились считать управляющую информацию — команду (рис. 2) — состоящей из кода операции и трех адресов в адресной части. Нетрудно понять, что такой вид команды оказывает свое влияние на весь процесс работы ЭВМ. Машины с таким форматом команды называются *трехадресными*. Однако трехадресные машины — не единственный класс ЭВМ. В следующих номерах «Кванта» мы познакомим вас с ЭВМ разной адресности — одно- и двухадресными, полутораадресными и даже «безадресными» машинами. На этих машинах выполнение такой команды, как сложение, конечно же, сложнее.

**Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.
Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.**

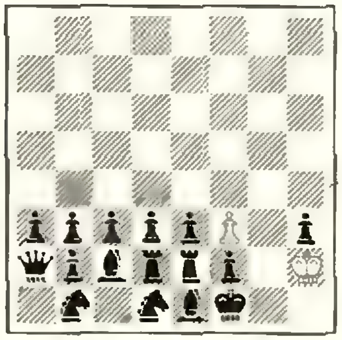
О силе шахматных фигур писали многие известные шахматисты, в том числе чемпионы мира Эм. Ласкер и Х. Р. Капабланка. В учебниках приводятся различные шкалы для сравнения силы фигур, например: $F_{\text{п}}=1$, $F_{\text{к}}=F_{\text{с}}=3$, $F_{\text{л}}=5$, $F_{\text{ф}}=9$; или: $F_{\text{п}}=1$, $F_{\text{к}}=3$, $F_{\text{с}}=3{,}5$, $F_{\text{л}}=5{,}5$, $F_{\text{ф}}=10$; или: $F_{\text{п}}=1$, $F_{\text{к}}=F_{\text{с}}=3{,}5$, $F_{\text{л}}=5$, $F_{\text{ф}}=10$.

Эти шкалы построены на основе богатого опыта шахматистов и на практике вполне оправдываются. Существует и чисто математический способ оценки силы шахматных фигур, он описан в «Кванте», 1974, № 6.

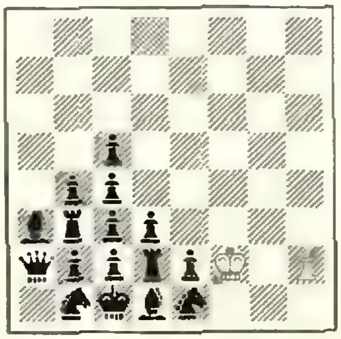
Однако в том и состоит прелесть шахматной игры, что мы то и дело сталкиваемся в ней с нарушениями различных правил. Одними арифметическими подсчетами здесь не обойдешься. В шахматной композиции имеется неограниченный простор для создания, как говорят математики, «противоречащих примеров». Так, пешка — самый скромный член шахматной семьи — в конкретной ситуации может оказаться сильнее целой армии неприятельских фигур.

Предлагаемые две задачи венгерского шахматного композитора О. Блаты служат прекрасной иллюстрацией того, как рушатся все представления о силе шахматных фигур.

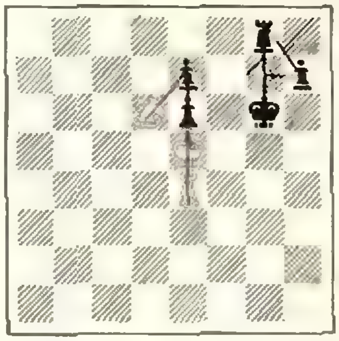
Своей необыкновенной популярностью шахматы, прежде всего, обязаны красивым и эффектным комбинациям, содержащимся в них. Наибольшее впечатление на любителей шахмат производят такие комбинации, в которых жертвуется самая сильная шахматная фигура — ферзь. Вот одна знаменитая комбинация с жертвой ферзя.



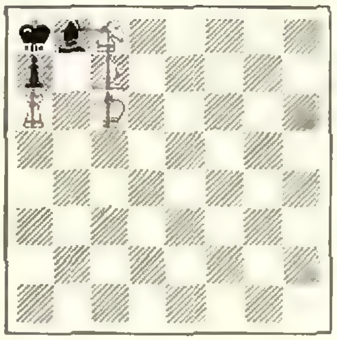
1. О. Блаты. Мат в 12 ходов.



2. О. Блаты. Мат в 16 ходов.

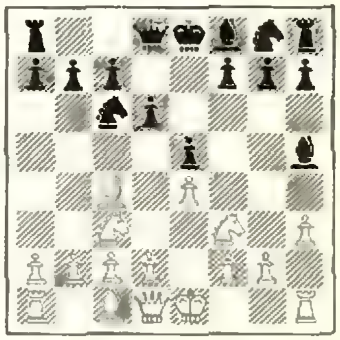


3. Э. Погосянц. 1 Мая. Белые начинают и выигрывают.



4. Э. Погосянц. День Победы. Черные начинают, после чего белые дают мат в 4 хода.

1. e4 e5 2. Кf3 d6 (этот ответ черных определяет защиту Филидора) **3. Сc4 Кc6 4. Кc3 Сg4 5. h3 Сh5.**



6. К:e5!! С:d1. Конечно, принятие жертвы ферзя приводит к катастрофе, но зато черные избавляют себя от скучной защиты в позиции, возникающей после 6...de 7. Ф:h5 или 6...К:e5 7. Ф:h5 К:c4 8. Фb5+ и 9. Ф:c4. **7. С:f7+ Крe7 8. Кd5×.** Эта популярная матовая комбинация, которая часто встречается в сеансах одновременной игры, называется «мат Легаля» — впервые ее применил француз Легаль еще в 1750 году! Любопытно, что в ее первом, авторском исполнении она была осуществлена некорректно. Дело в том, что ходы 5. h3 Сh5 не были включены в партию и после преждевременного 5. К:e5 черным надо было не соблазниться ферзем — 5...С:d1, а сыграть 5...К:e5 и спокойно остаться с лишней фигурой.

В прошлом номере «Кванта» мы рассказывали о так называемых символических (изобразительных) задачах на шахматной доске. Обратимся еще раз к этому необычному жанру шахматной композиции. Задача 3 посвящена празднику 1 Мая (фигуры изображают цифру 1 и флажок), а задача 4 — Дню Победы (буква П). Во второй задаче начинают черные (в противном случае позиция не могла бы возникнуть на доске), после чего их король получает мат в 4 хода. Это символизирует тот факт, что войну развязали черные (фашисты), длилась она четыре года и закончилась их полным разгромом.

Читатели советуют

1. а) $\sin(\sin x)$; б) $\sqrt{2+x^2}$; в) $-x^4+2x^2$.
2. $-x+3$.
3. а) $\{-(\sqrt{5}+1)/2;\ (\sqrt{5}-1)/2\}$ и $\{-(\sqrt{5}+1)/2;\ (\sqrt{5}-1)/2;\ 0;\ 1\}$;
б) $\{3/2\}$ и $\mathbf{R}$.
6. $\{(-1;\ -1;\ -1)\}$.
7. $\{(0;\ 0;\ 0),\ (1;\ 1;\ 1)\}$.
8. $\{(-2;\ -2;\ -2)\}$.
9. $a=e^{1/e}$. Указание. Так как функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ взаимно обратные, их графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Поэтому точка касания этих графиков является одновременно точкой касания графика функции $y=a^x$ с прямой $y=x$.

10. $\{-2;\ (\sqrt{13}-1)/2;\ (\sqrt{13}+1)/2\}$. Указание. $x^3+x^2-5x-6=(x^3+2x^2)-(x^2+2x)-(3x+6)$.

11. $\{3-2\sqrt{3};\ 1;\ 3;\ 3+2\sqrt{3}\}$. Указание. $x^4-10x^3+24x^2-6x-9=x^2(x^2-10x+25)-(x^2+6x+9)$.

12. Допустим, что последовательность (x_n) сходится и имеет пределом число $a<0$. Воспользуемся определением предела последовательности при $\varepsilon=1/2$; тогда найдется такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство

$$|\sin n-a|<1/2.$$

Покажем, что это неверно: существует натуральное число k такое, что $k>N$ и в то же время

$$\sin k-a>1/2.$$

Решая неравенство $\sin x>1/2$, легко убедиться, что оно верно, в частности, на интервале

$$\left]\frac{\pi}{6}+2N\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2N\pi\right[.$$

Поскольку длина этого интервала равна $2\pi/3>1$, в нем лежит по крайней мере одно целое число; обозначим его k. Так расстояние от начала координат до левого конца этого интервала равно $\frac{\pi}{6}+2N\pi>N$, очевидно, $k>N$. Таким образом, существует натуральное число $k>N$ такое, что $\sin k>1/2$, и потому

$$\sin k-a>\frac{1}{2}-a>\frac{1}{2}$$

(ибо $a<0$). Аналогично рассматривается случай $a>0$.

13. $\{9\}$.

14. $\dfrac{3\pi+2\sqrt{3}}{\pi-\sqrt{3}}S$.

XVI лингвистическая олимпиада

(см. «Квант» № 4)

I тур

2. Надо (по смыслу, принадлежности к разным частям речи и написанию) составить из данных слов две таблички:

пилить	пильщик	пила
красить	маляр	—
—	косарь	—
копать	—	лопата

и

xerxva	xerxi	mxerxavi
γebva	—	mγebavi
—	—	mtibavi
barva	bari	—

и привести их в соответствие. Интересно, что семиклассник из Москвы В. Меликов нашел второе решение, исходя из того, что «косарь» — инструмент (тогда это слово попадает в другую колонку).
3. Знаки вопросов надо заменить так: 5 — серебро, 7 — ворон, 8 — горох, 9 — ворона, 10 — колос, 11 — город, 12 — град, 13 — бра̊дат, 14 — прӑг, 15 — пра̂х, 16 — вла̂с.
4. 624, 232, 333.
7. Решается аналогично задаче 2, при этом надо заметить, что название дня недели состоит из «Juma» и порядкового номера дня недели (начиная с субботы), отсюда находится перевод числа 1.
10. Счет идет от большого пальца левой руки (1) по пальцам, затем по руке и через голову до мизинца правой руки (27 — kay-keli), для частей справа к названию той же части слева добавляется kay-.
15. Легко видеть, что для каждого человека сначала пишется отчество, а затем имя. Надо составить части графа (родитель и его возможные дети), а затем «уложить» их в требуемый граф. Задача имеет два решения (2-ж, 8-л или 2-л, 8-ж, остальное однозначно, причем родители Тикон и Палей встречаются дважды).

II тур

2. Переводы венгерских слов (по порядку) выглядят так: о ком-нибудь (ед. ч.); кто (множ. ч.); из этих; от кого (множ. ч.); об этих; любые; из кого (множ. ч.); кто (ед. ч.); из кого (ед. ч.); на этом; о ком-нибудь (множ. ч.); от кого (ед. ч.).
3. См. рис. 1.
7. Переводы тайских слов (по порядку) выглядят так: 3 акации; 4 акации; 1 хулиган; 4 людоедки; 1 обезьяна; 1 китайская роза; 3 выдры; 2 лошади; 3 пленника; 4 лошади; 2 орхидеи; 4 хулигана; 1 слесарь; 3 слесаря, 3 лотоса; 4 слесаря; 3 обезьяны.
13. Пропуски (по порядку) заполняются так: Мися-кун; нэмуримас; Ээ, Мися-кун; — кун, Боря-ва киси-ни цурука?; Инэ, Андорэй-сан, Боря-ва боото-ни цуримас. Боото-ва.

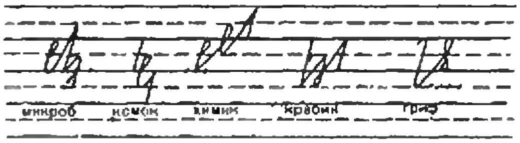


Рис. 1.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 4)

1. 1. Фd8 Крf7 2. Фg5 Крf8 3. Фf6×.

2. 1. Фc5 Крg6 2. f8Л Крh6 3. Лf6×.

3. 1. Фh3 Крg5 2. Фf3 Крg6 3. Фg4× (2...Крh4 3. Сf6×).

4. 1. Фh7+ Крc1 2. Фc7+ Крd1 3. Фi1+ Крc2 4. Фi8+ Крc1 5. Фc8+ Крd1 6. Фj1+ Крc2 7. Фj9+ Крc1 8. Фc9+ Крd1 9. Фk1+ Крc2 10. Фk10+ Крc1 11. Фc10+ Крd1 12. Фl1+ Крc2 13. Фg6+ Крc1 14. Фc6+ Крd1 15. Фh1+ Крc2 16. Фe4+ Крc1 17. Фc4+ Крd1 18. Фf1+ Крc2 19. Фd3+ Крc1 20. Ф:d2+ Крb1 21. Фd1×!

5. Фигурам в этом «пистолете» очень тесно, и поэтому в течение 20 ходов механизм приводится в действие, и только затем раздается выстрел! Перечислим белые фигуры в том порядке, в каком они натягивают пружину (в распоряжении черного короля имеется лишь два свободных поля, на которых он и ждет разрядки): **К, Л, К, Л, С, Л, К, Л, К, С, К, Л, К, Л, Кр, К, Кр, Л, Кр, К** и теперь — **21. Л:С×.**

6. 1. c8Л! Кра6 2. Ла8×.

Две задачи

(см. «Квант» № 4. 3-ю с. обложки)

1. Магнитная лента и клубок нитей. Справедливость утверждения следует из следующих соображений. Общая длина магнитофонной ленты остается постоянной во время перемотки. Поэтому ее «боковая площадь» (рис. 2), равная произведению длины ленты на ее толщину, тоже остается постоянной. Эту площадь как раз и определяет суммарная площадь $\pi R^2 + \pi r^2$ кругов, заполняемых намотанными частями ленты. Наличие катушек в центре бобин, очевидно, не нарушает «закона сохранения». В случае клубков в роли площадей выступают объемы клубков. Пустоты между нитками образуют примерно одинаковые доли от объема клубка, а без пустот сумма объемов клубков равна объему всей нитки, постоянному во время перемотки.

2. Маятник. Наибольший возможный период колебания маятника равен 4 секундам. За 1 секунду маятник уходит из положения *1* влево и обратно, и из положения *2* — вправо и обратно (см. рисунок 3). Еще две секунды расходуются на переходы из *1* в *2* и из *2* в *1*. Заметим, что возможно бесконечное множество периодов колебания маятника, меньших чем 4 секунды. Эти периоды равны $2/n$ секунд, где n — произвольное нечетное число.

Рис. 2.

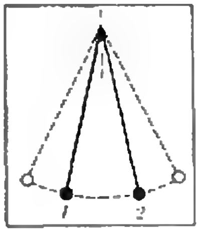


Рис. 3.

Чайн-намбер «Восьмое марта»

(см. «Квант» № 3. 3-ю с. обложки)

Квадраты целых чисел могут оканчиваться цифрами 0, 1, 4, 5, 6, 9. Поэтому мы должны рассмотреть только те из них, которые и начинаются этими же цифрами (за исключением нуля). Таких квадратов одиннадцать:

121, 144, 169, 196, 441, 484, 529,
576, 625, 676, 961.

Так как нам нужно образовать замкнутую цепочку, количества чисел, начинающихся с некоторой цифры, и чисел, оканчивающихся той же цифрой, должны быть одинаковы. Исключить два лишних числа можно двумя способами:

а) исключаем 169 и 576;
б) исключаем 196 и 529.

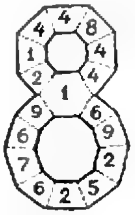


Рис. 4.

Рассмотрим вариант а). Ясно, что числу 961 может предшествовать только число 529, а числу 529 — число 625. Перед числом 625 может стоять либо 196, либо 676. Очевидно, нужно поставить число 676, иначе для него не останется места. Итак, получаем цепочку

196—676—625—529—961.

Оставшиеся числа образуют цепочку

121—144—484—441,

которая легко «сцепляется» с предыдущей (см. рисунок 4).

В варианте же б) образуется замкнутая цепочка 625—576—676, которая не может быть сцеплена с оставшимися числами.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Э. Назаров, И. Смирнова, Л. Черниевская

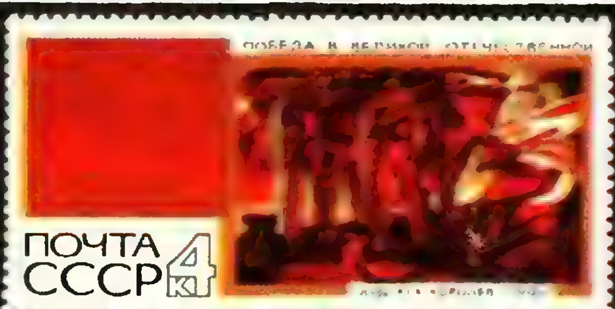
Зав. редакцией Л. Чернова

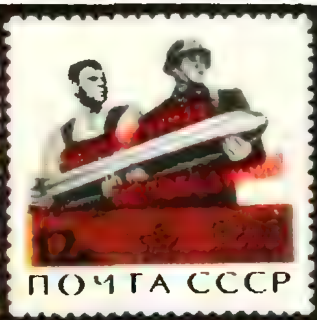
Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Н. Румянцева, Е. Сидоркина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 19.03.80
Подписано к печати 17.04.80
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,38 Т-08140
Цена 30 коп. Заказ 56
Тираж 267 964 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

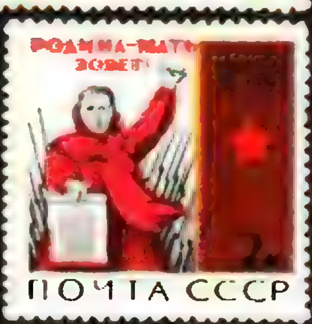

ПОЧТА СССР
4к

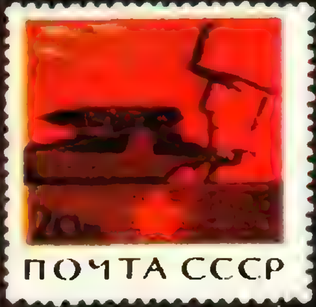

12к
ПОЧТА СССР

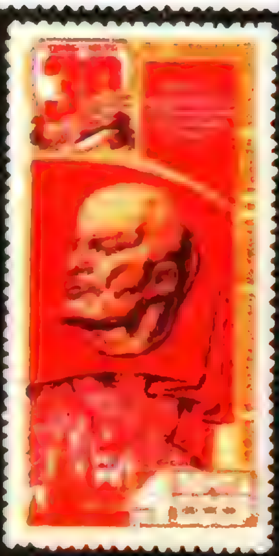
МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ДНЮ ПОБЕДЫ

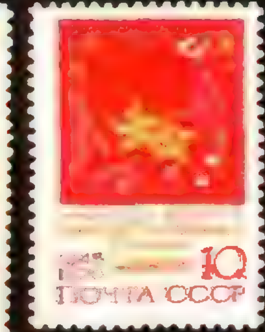
35 лет отделяют наш народ от того незабываемого дня, когда впервые была отпразднована победа над фашистской Германией. За столь недолгий срок советская филателия неоднократно отмечала этот всенародный праздник выпуском отдельных почтовых марок и специальных серий. Первой маркой, посвященной этому выдающемуся событию, была марка с изображением ордена Победы (выпущенная в 1943 году), на которой сделана надпечатка «Праздник Победы 9 мая 1945 года». Она поступила в почтовое обращение в июне 1945 года. Мы воспроизводим ее на помещенном здесь почтовом блоке 1975 года. Вместе с ним приведены также марки разных лет, посвященные этому празднику.

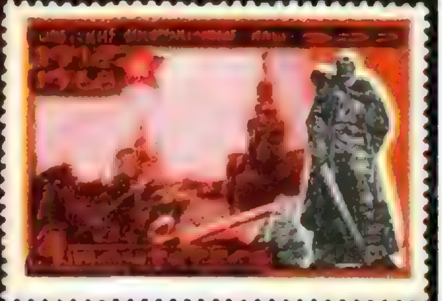
В. Рудов

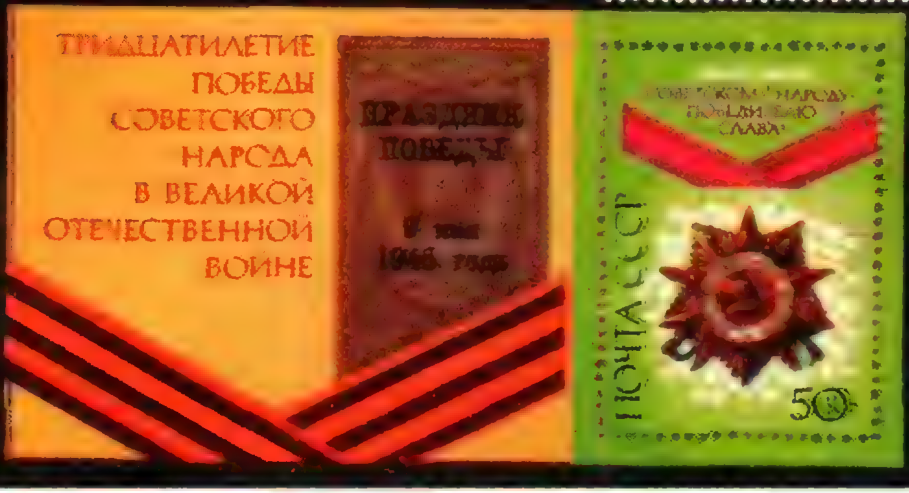

РОДИНА-МАТЬ ЗОВЕТ!
2к
ПОЧТА СССР

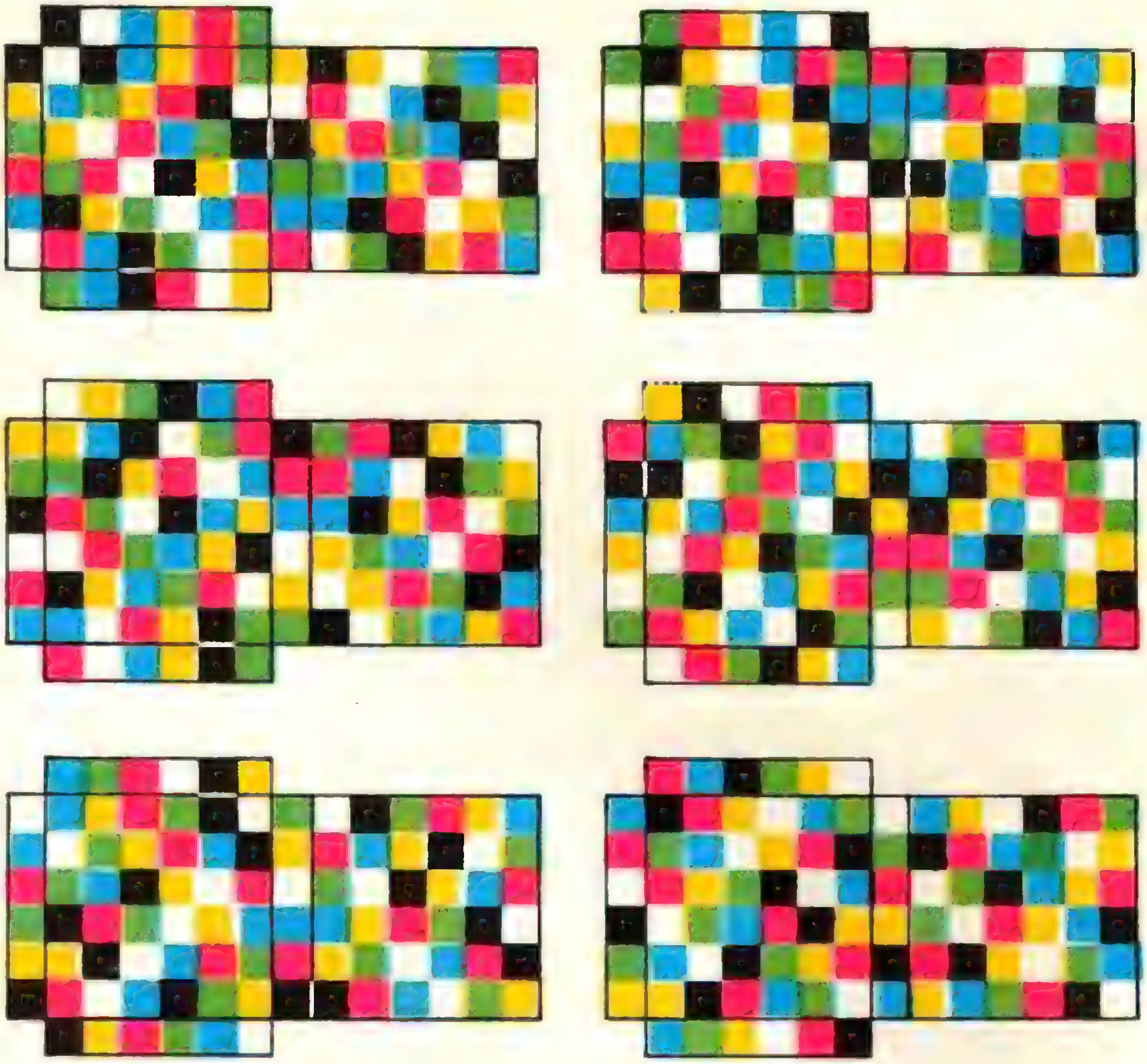

20к
ПОЧТА СССР




10
ПОЧТА СССР




ТРИДЦАТИЛЕТИЕ ПОБЕДЫ СОВЕТСКОГО НАРОДА В ВЕЛИКОЙ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЕ
ПРАЗДНИК ПОБЕДЫ
9 мая 1945 года
СОВЕТСКОМУ НАРОДУ-ПОБЕДИТЕЛЮ СЛАВА!
ПОЧТА СССР
50к



ГОЛОВОЛОМКА «ЦВЕТНОЙ КУБИК»

Из прямоугольных параллелепипедов 6×6×1, окрашенных в шесть различных цветов: красный, желтый, синий, зеленый, белый и черный (на рисунке приведены развертки параллелепипедов), выложите куб так, чтобы каждая грань его представляла квадрат, в котором по горизонтали, по вертикали и по диагоналям были представлены все шесть цветов (то есть каждый цвет встречался бы по одному разу).

Л. Мочалов

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Скульптура Е. В. Вучетича «Перекуем мечи на орала»

НОМЕР
6

Основан в 1970 году

Квант

6
1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *А. Михайлов.* Когда день равен ночи?
5 *Б. Вертгейм.* Метод неподвижных точек
10 *В. Можаев.* Тепловое расширение твердых тел
14 *И. Быстрый.* Площадь сегмента параболы Нейла

Математический кружок

16 *И. Михайлов.* О диофантовом анализе

Задачник «Кванта»

18 Задачи М626—М630; Ф638—Ф642
20 Решения задач М568, М570—М572, М574; Ф579, Ф586, Ф587

«Квант» для младших школьников

29 Задачи
30 *С. Белый.* Разноцветная математика

Практикум абитуриента

33 *Г. Перевалов.* Что значит «знать»?
36 *Л. Асламазов.* Электромагнитная индукция
Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году
42 *А. Пономаренко.* Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова
43 *Н. Перестюк, М. Ядренко.* Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко
44 *Я. Ерусалимский, Т. Коршикова, А. Хейфиц.* Ростовский государственный университет (механико-математический факультет)
44 *А. Березман, К. Дуничев, О. Овчинников.* Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина
45 *М. Калинина, О. Оноприенко.* Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Искусство программирования

48 *А. Салтовский.* Организация ввода и вывода в ЭВМ

57 **Шахматная страничка**
58 **Ответы, указания, решения**
Наша обложка *(15)*
Смесь *(13, 28, 41, 47, 56)*

О том, как самому нарисовать
такую картину,
как на первой странице обложки,
вы можете прочитать в заметке
«Картины на воде» (с. 15)

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1980

А. Михайлов

Когда день равен ночи?

Казалось бы, ответ очевиден: продолжительности дня и ночи одинаковы во время равноденствий, то есть 21 марта и 23 сентября ежегодно. (Интересно отметить, что в латыни, а оттуда и в ряде европейских языков, вместо слова «равноденствие» употребляется слово «равноночие» — equinoctium, что, конечно, обозначает то же самое.) Именно в эти дни Солнце в своем годичном движении по эклиптике проходит через небесный экватор, который пересекается с горизонтом по диаметру небесной сферы, так что всегда половина экватора находится выше и половина — ниже горизонта (рис. 1). Следовательно, во время равноденствий половина суточного пути Солнца проходит над горизонтом и половина — под ним; другими словами, продолжительность дня равна продолжительности ночи.

Проверим это, выписав из календаря времена восхода и захода Солнца в ближайшие к равноденствиям дни. При этом лучше выбрать год, наиболее удаленный от високосного, чтобы уменьшить влияние неравномерности течения календарных лет, вызванной включением в каждый четвертый год добавочного дня — 29 февраля. (Эта добавка необходима для того, чтобы со временем не разойтись с годом природы — так называемым тропическим годом, содержащим 365, 2422 суток.)

В таблице приведены данные о восходе и заходе Солнца (а также продолжительности дня и ночи и разность между ними), взятые из астрономического календаря на 1978 год, для Москвы (точнее — для пункта с географической широтой +56 градусов, что на 1/4 градуса севернее Москвы). В отличие от календаря время указано не местное, а московское декретное, что, конечно же, не изменяет продолжительности дня и ночи.

Из таблицы видно, что равенство дня и ночи наступает почти на три дня раньше астрономического весеннего равноденствия и на столько же позже осеннего. В чем причина такого странного явления?

Прежде всего заметим, что моментом восхода (захода) Солнца считается момент, когда верхний край солнечного диска появляется (исчезает) на линии идеального горизонта, как, например, на море. При этом центр Солнца находится ниже линии горизонта на видимый угловой радиус солнечного диска, равный 16′, что удлиняет день на удвоенное время, нужное на поднятие (или опускание) Солнца на такой угол.

Существует еще другое явление, оказывающее более значительное влияние на увеличение продолжительности дня. Это — *астрономическая рефракция*. Поясним ее суть.

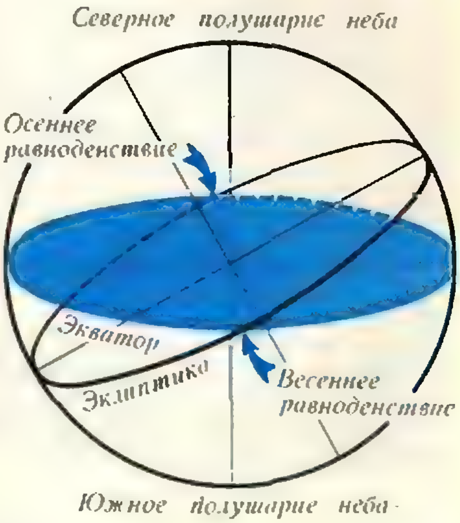


Рис. 1.

Таблица

						Продолжительность				
		Восход		Заход		дня		ночи		Разность мин
		ч	мин	ч	мин	ч	мин	ч	мин	
Март	17	6	41	18	37	11	56	12	04	—08
	18	6	38	18	39	12	01	11	59	+02
	19	6	36	18	41	12	05	11	55	+10
	20	6	34	18	43	12	09	11	51	+18
	21	6	31	18	45	12	14	11	46	+28
Сентябрь	23	6	16	18	28	12	12	11	48	+24
	24	6	18	18	25	12	07	11	53	+14
	25	6	20	18	22	12	02	11	58	+04
	26	6	22	18	20	11	58	12	02	—04
	27	6	24	18	17	11	53	12	07	—14

Лучи света от небесного тела, прежде чем попасть в глаз наблюдателя, проходят сквозь земную атмосферу, преломляясь в ней, как в призме. Так как плотность атмосферы увеличивается к поверхности Земли, лучи преломляются все сильнее и сильнее по мере приближения к Земле.

Пусть наблюдатель находится в точке *O* (рис. 2). Свет от удаленного объекта, например Солнца, приходит на Землю практически параллельным пучком. Если бы преломления света не было, наблюдатель увидел бы Солнце по направлению *OS*. Но, войдя в атмосферу, лучи преломляются, приближаясь к перпендикуляру к плоскопараллельным слоям, и наблюдатель увидит Солнце по направлению касательной *OR* к последнему элементу луча. При этом действительное положение Солнца — точка *S′* (*BS′* параллельно *OS*).

Таким образом, Солнце кажется наблюдателю приподнятым над горизонтом выше своего действительного положения на *угол рефракции ROS*. Если светило находится в зените, преломления света не происходит и угол рефракции (или просто рефракция) равен нулю. Наибольшей величины — 35′ — рефракция достигает тогда, когда Солнце появляется над горизонтом или заходит за горизонт. Рефракция поднимает Солнце над горизонтом на 35′, в то время как диаметр солнечного диска виден с Земли под углом всего лишь 32′.

Быстрое изменение рефракции у самого горизонта приводит еще к одному любопытному явлению, которое, вероятно, замечали многие читатели — у горизонта Солнце кажется нам заметно сплюснутым по вертикали (рис. 3). Действительно, рассмотрим момент, когда нижний край солнечного диска виден касающимся горизонта, а на самом деле находится на 35′ ниже. Верхний край диска приподнимается рефракцией слабее, всего на 29′. Это различие и приводит к искажению формы сол-

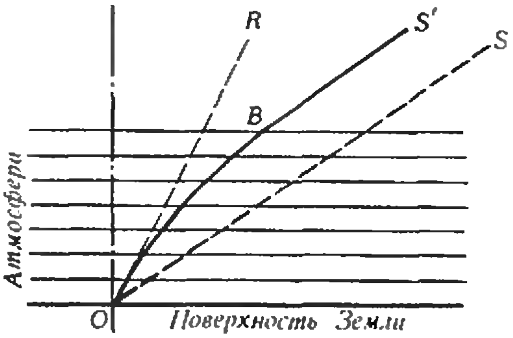


Рис. 2.

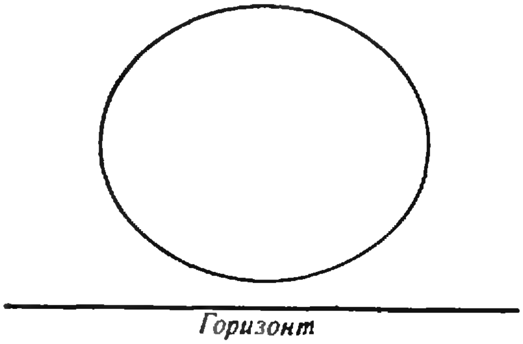


Рис. 3.

нечного диска. Когда Солнце поднимается выше над горизонтом, разность между рефракцией нижнего и верхнего краев быстро уменьшается и Солнце приобретает свой обычный вид.

Вернемся к вопросу о продолжительности дня и ночи. Оба упомянутых явления удлиняют день и укорачивают ночь: Солнце утром восходит раньше и вечером заходит позже «геометрических» восхода и захода, определяемых моментами, когда центр Солнца пересекает горизонт. Упреждение восхода и запаздывание захода определяются временем, которое требуется на изменение высоты Солнца у горизонта на $16' + 35' = 51'$. Это время, в свою очередь, зависит от географической широты φ места.

Небесный экватор пересекает горизонт под углом $90° - \varphi$. При $\varphi = 0$, то есть на земном экваторе, небесный экватор расположен вертикально. Там Солнце в своем видимом суточном движении, вызванном вращением Земли, поднимается утром и опускается вечером перпендикулярно к горизонту, проходя 51′ за время 3,4 минуты (из расчета, что полный оборот Земли на 360° происходит за 24 часа).

В Москве, широта которой близка к 56°, небесный экватор наклонен к горизонту на угол $90° - 56° = 34°$. Здесь Солнце при восходе поднимается и при заходе опускается наклонно, поэтому его высота меняется медленнее. В прямоугольном треугольнике SOA (рис. 4) гипотенуза SA равна катету OS, деленному на синус противолежащего угла:

$$|SA| = 51'/\sin 34° = 91{,}2'.$$

Это соответствует времени 6,08 минуты. Из таблицы следует, что время восхода и захода Солнца вблизи равноденствий изменяется в среднем на 2,4 минуты в сутки, поэтому для изменения высоты Солнца на 51′ в 6,08 мин требуется около 2,5 суток. На столько действительное равноденствие бывает раньше весной и позже осенью. Другими словами, равенство дня и ночи фактически бывает 18—19 марта и 25—26 сентября (а не 21 марта и 23 сентября).

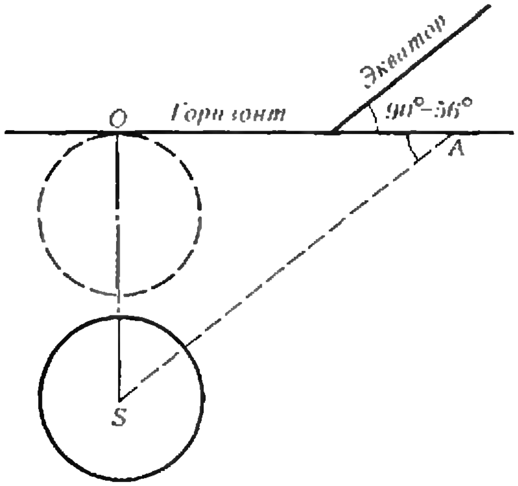
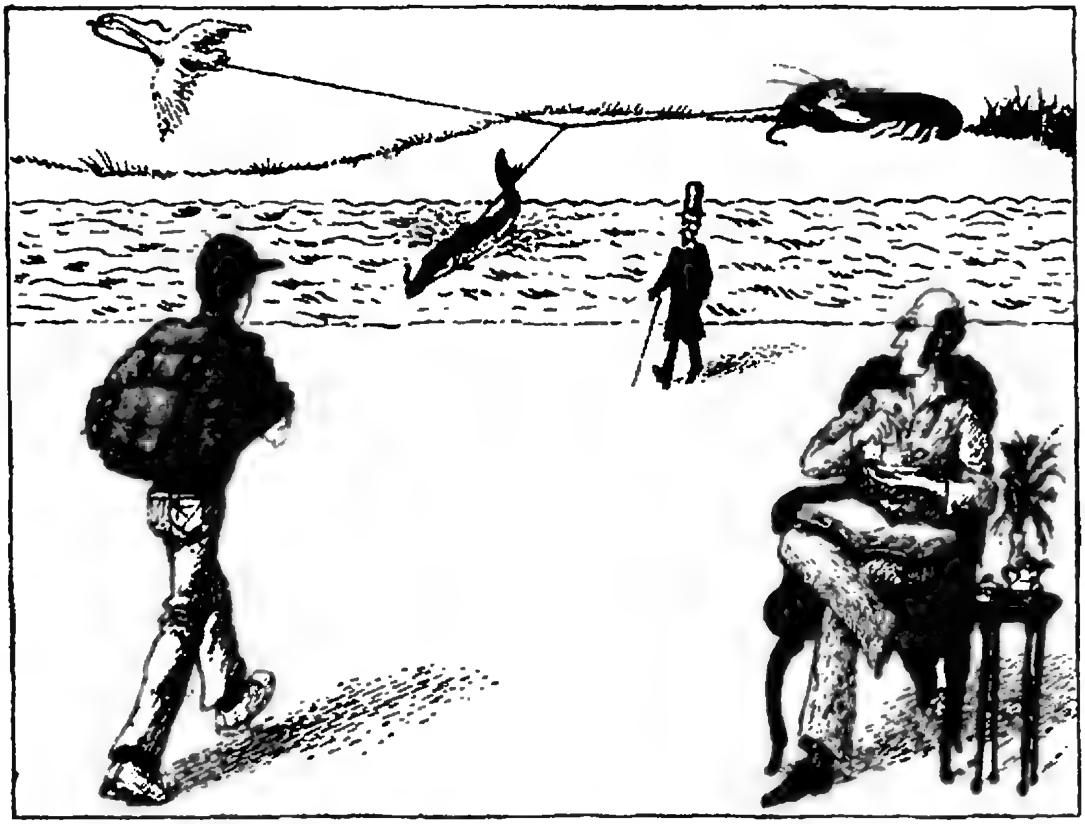


Рис. 4.

Отрадно отметить, что у нас светлое время года, когда день бывает длиннее ночи, продолжительнее темного. Если взять невисокосный год в 365 суток и принять, что день равен ночи 18 марта и 25 сентября, то промежуток между этими датами составит 191 сутки, а с 25 сентября до 18 марта следующего года — 174, то есть светлое время года на 17 суток больше темного. Эта разность складывается из десяти суток, связанных с описанными выше явлениями, и из семи суток, которые вызваны неравномерностью движения Земли по своей орбите. Земля движется быстрее близ перигелия, который она проходит ежегодно в первых числах января, и медленнее близ афелия, наступающего в начале июля. Если сосчитать число суток между астрономическими равноденствиями, то с 21 марта по 23 сентября их будет 186, а с 23 сентября до 21 марта следующего года — всего 179. Но первый промежуток приходится на весну и лето в северном полушарии и на осень и зиму в южном полушарии. Поэтому мы, жители севера, находимся в более благоприятном положении, так как у нас теплое и светлое время года продолжительнее холодного и темного, в отличие от жителей южного полушария, где осень и зима продолжительнее и в среднем холоднее.



Б. Вертгейм

Метод неподвижных точек

Когда мы ищем решение какого-нибудь уравнения, хорошо знать заранее, что у него есть решение — ведь если нет, то зачем время зря тратить? Это соображение становится весьма серьезным, когда речь идет о решении сложных уравнений и систем на мощных ЭВМ с дорогостоящим машинным временем. Поэтому очень важную роль играют так называемые теоремы существования, которые заранее гарантируют наличие решения. Об одной из них — теореме Брауэра о неподвижной точке, интересной и полезной уже на школьном уровне,— и рассказано в этой статье.

Прогулка

Начнем с прогулки, помня о пользе и вечности движения; в пути будут и неподвижные точки, и уравнения. Путников двое: один направляется из пункта a в пункт b, другой все время гуляет на дороге ab. Очевидно, их встреча неизбежна: путники хотя бы раз поравняются (окажутся одновременно в одной точке). Опишем это подробнее (рис. 1).

Пусть x — координата первого ($a \leqslant x \leqslant b$) путника и скорость его постоянна; y — координата второго ($a \leqslant y \leqslant b$). Каждому значению x (положению первого путника) соответствует единственное значение y (положение второго путника в тот же момент времени); итак, имеем функцию $y = f(x)$. Уравнение

$$f(x) = x$$

определяет место встречи.

Пример 1. Пусть $a = 0$, $b = 1000$ м, $y = 100 + 0{,}7x$. Если $x = 0$, то $y = 100$; если $x = 1000$, то $y = 800$ — первый обошел! Уравнение 100+

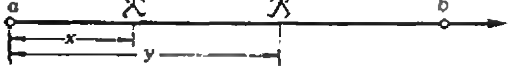


Рис. 1

$+0{,}7x=x$ дает координату $x=333\frac{1}{3}$ м — здесь первый догонит второго.

Если движение второго посложнее, то и функция f, и уравнение встречи будут потруднее, но все равно очевидно, что хотя бы одна встреча произойдет.

Однако это «очевидно» нас как математиков не устраивает; прежде чем пойти дальше, мы уточним математическую постановку задачи и докажем существование встречи.

Предположим (как в примере 1), что функция f отображает отрезок $[a;b]$ в себя, т. е. для всех $x\in[a;b]$ имеем $a\leqslant f(x)\leqslant b$. Тогда всякое решение уравнения $f(x)=x$ называется *неподвижной точкой* отображения f. (В нашем примере неподвижная точка — это как раз точка встречи.) Когда же она есть?

Теорема. *У всякой непрерывной функции f, отображающей отрезок $[a;b]$ в себя, существует неподвижная точка.*

В теореме существенны как непрерывность функции f, так и то, что речь идет об отрезке.

Упражнение 1. Укажите пример разрывной функции f, отображающей $[a;b]$ в себя, без неподвижной точки.

Упражнение 2. Укажите примеры непрерывных функций, отображающих в себя, без неподвижных точек: а) объединение двух отрезков $[a;b]\cup[c;d]$; б)* интервал $]a;b[$.

Для доказательства теоремы вооружимся красным и синим карандашами. Прежде чем их пустить в ход, обозначим

$$\varphi(x)=f(x)-x.$$

Ясно, что $c\in[a;b]$ будет неподвижной точкой для f тогда и только тогда, когда c — корень уравнения $\varphi(x)=f(x)-x=0$. Поэтому мы будем искать корень этого уравнения. Заметим, что из условий $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant f(x)\leqslant b$ сразу следует $\varphi(a)\geqslant 0$ и $\varphi(b)\leqslant 0$. Мы будем считать оба неравенства строгими (в противном случае задача решена). Разделим теперь отрезок $[a;b]$ на 10 равных частей и раскрасим в красный цвет все отрезки, для которых значение функции φ положительно на левом конце (рис. 2). Крайний слева отрезок, конечно, красный; будем двигаться слева направо пока не наткнемся на первый синий отрезок (рис. 2) или не дойдем до конца $[a;b]$ (рис. 3). Обозначим через $[a_1;b_1]$ последний красный отрезок, пройденный при таком движении. Тогда $\varphi(a_1)>0$ и $\varphi(b_1)<0$ и можно начать все сначала: поделить $[a_1;b_1]$ на 10 равных частей, раскрасить их в красный и синий цвета по тому же принципу и найти отрезок $[a_2;b_2]$, для которого $\varphi(a_2)>0$ и $\varphi(b_2)<0$. И так далее. Получим возрастающую ограниченную последовательность точек

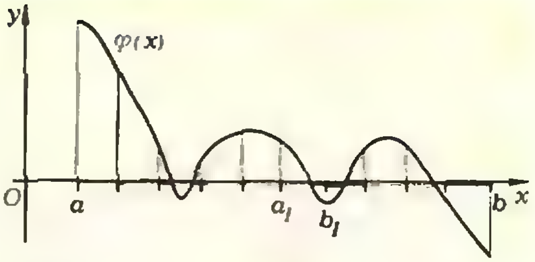


Рис. 2.

$$a\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_k\leqslant\ldots<b.$$

У такой последовательности (см. «Алгебра и начала анализа 9», п. 32) существует предел $c=\lim\limits_{k\to\infty}a_k$. Покажем, что $\varphi(c)=0$. Если бы это было не так, то, взяв $\varepsilon=\frac{1}{2}|\varphi(c)|$, мы легко придем к противоречию с определением непрерывности функции φ. Действительно, при $\varphi(c)<0$ для любого δ найдется N такое, что $|c-a_N|<\delta$; но $\varphi(a_N)>0$, значит, $|\psi(c)-\psi(a_N)|>|\psi(c)|>\varepsilon$, что невозможно, ибо ψ — непрерывна. При $\psi(c)>0$ получается аналогичное противоречие из неравенства $|\varphi(c)-\varphi(b_N)|>|\varphi(c)|$.

Чтобы понять, как применяется доказанная теорема, рассмотрим

Пример 2. Есть ли корни у уравнения

$$\cos x^3-x=0?$$

Функция $\cos x^3$ непрерывна; она отображает отрезок $[-\pi/2,\ \pi/2]$ в себя (даже в отрезок $[-1,1]$); значит, по теореме существует решение $c\in[-\pi/2,\ \pi/2]$.

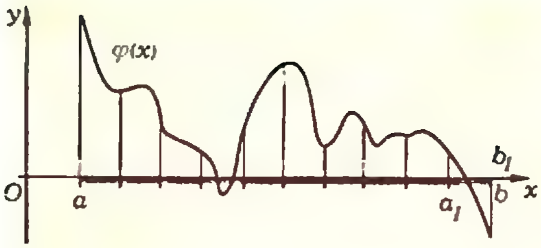


Рис. 3

Заметим, что числа a_n, b_n — это приближения к корню, и что делить отрезок можно не на 10, а скажем, на 2 части; такой прием (способ Больцано — по имени чешского математика) фактически применяется наряду с другими алгоритмами приближенного решения уравнений.

Кроме того, наша теорема ничего не говорит о **числе** неподвижных точек: ясно, что их может быть много.

Чашка кофе

А теперь — чашка кофе! Размешивая его плавными круговыми движениями, увидим в центре неподвижную точку. При некруговых движениях картина сложнее, но если рассмотреть положения частиц в два разных момента времени, можно найти частицу, неподвижную в том смысле, что она оба раза — но, быть может, не все время! — находится в одном и том же месте. Это очевидно, если принять физическое условие неподвижности частиц у стенок из-за трения, и не очевидно — но верно! — и без такого условия, лишь бы имела место непрерывность соответствующего отображения (то есть «близкие» частицы не расходились бы слишком далеко).

Чтобы «математизировать» рассмотренную ситуацию, нам будут нужны некоторые определения.

Пусть M — множество точек (например, часть прямой, плоскости или пространства); f — отображение множества M в себя: оно каждой точке $x \in M$ ставит в соответствие ее *образ* $y = f(x) \in M$. Такое отображение называется *непрерывным*, если для любой точки $x_0 \in M$ и любого $E > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in M$, удаленных от x_0 на расстояние, меньшее δ, расстояние между их образами $f(x_0)$ и $f(x)$ оказывается меньше E.

Для случая, когда M лежит на числовой прямой, расстояния между точками равно $|x_0 - x|$, между их образами — $|f(x_0) - f(x)|$, так что наше определение в сущности совпадает с определением непрерывной функции («Алгебра и начала анализа 9», п. 38).

Наглядный смысл определения в том, что непрерывное отображение f не должно иметь разрывов — очень близкие точки не могут слишком далеко оторваться друг от друга.

Как и раньше, мы назовем точку $x \in M$ *неподвижной точкой* отображения f множества M в себя, если $f(x) = x$.

Когда у отображения f обязательно есть неподвижная точка? Ответ на этот вопрос дает

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Эта знаменитая теорема строго доказана не так уж давно — в 1911 году*). Вместе с многочисленными обобщениями она играет выдающуюся роль в ряде областей современной математики. Теоремы о неподвижных точках важны и в теории, и для приложений: их применяют и для расчета крыльев самолетов, и для анализа оптимальных стратегий и состояний равновесия в играх, и в математико-экономических моделях.

Теорема Брауэра. *У всякого непрерывного отображения f круга M (вместе с его границей) в себя существует неподвижная точка.*

Эта теорема верна не только для круга M, а *для любого выпуклого ограниченного множества, содержащего свою границу*, например для прямоугольника, треугольника или вообще выпуклого многоугольника на плоскости, для куба или шара в пространстве.

---

*) Л. Э. Я. Брауэр — голландский математик; до него теорему применял латышский математик П. Боль, и ее называют еще теоремой Боля — Брауэра.

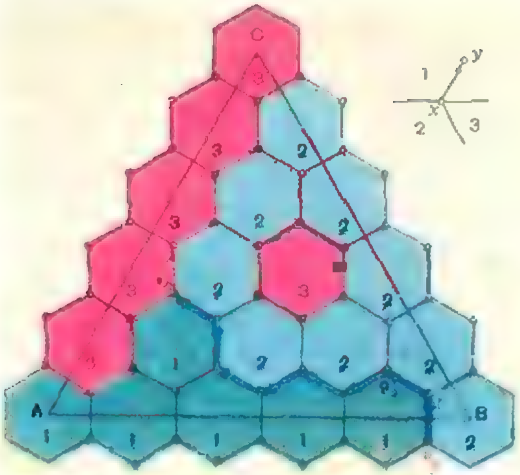


Рис. 4.

Однако она справедлива не для всякого M:

Упражнение 3. Укажите пример ограниченного множества M на плоскости и его непрерывного отображения в себя без неподвижной точки.

Упражнение 4*. Постройте непрерывное отображение круга без границы в себя, не имеющее неподвижной точки.

Упражнение 5. Постройте разрывное отображение круга (с границей) M в себя без неподвижной точки.

Мы не будем доказывать теорему Брауэра в наиболее общей ситуации, а рассмотрим случай, когда M — равносторонний треугольник. Для доказательства нам вновь потребуются цветные карандаши, но теперь уже три: красный, синий и зеленый. (В пространстве потребовалось бы четыре!) Они будут нужны для доказательства одного вспомогательного утверждения, известного под названием

Лемма Шпернера

На рисунке 4 показана «сеть» для лова точек в правильном треугольнике ABC со стороной a. Узлы отмечены кружками, из каждого узла исходит 3 линии (ребра), соединяя его с соседними узлами. Ячейки сети — правильные шестиугольники со стороной b. Стороны треугольника разделены на n равных частей, точки деления — центры граничных ячеек. Очевидно, $nb\sqrt{3}=a$ и $(n+1)(n+2)/2$ — общее число ячеек.

Каждая внутренняя вершина принадлежит трем, а граничная — двум ячейкам.

Пометим теперь числом 1 все ячейки, кроме последней одной стороны, числом 2 — ячейки второй, числом 3 — ячейки третьей (рис. 4). Оставшиеся (внутренние) ячейки пометим числами 1, 2, 3 совершенно произвольно. Раскрасим ячейки типа 1, 2 и 3 в зеленый, синий и красный цвет соответственно. Назовем вершину *полной*, если она содержится в ячейках всех трех цветов.

Лемма. *Существует полная вершина**).

Доказательство. Строим шаг за шагом ломаную, составляя ее из ребер «типа 1—2», примыкающих к ячейкам с числами 1 и 2. Начнем с края, где по условию есть лишь одно такое «двухцветное» ребро p_0p_1, и за конечное число шагов приходим к полной вершине: если ребро типа 1—2 $p_{k-1}p_k$, $k=1, 2, \ldots$, привело нас к неполной вершине p_k, то найдется еще одно ребро типа 1—2, исходящее из узла p_k (рис. 5), оно даст вершину $p_{k+1} \neq p_k$. Этот путь, очевидно, не возвращается ни на край, ни к пройденным вершинам (почему?). Так как множество вершин конечно, то ломаная обязательно закончится в полной вершине.

Лебедь, рак да щука

Докажем теперь теорему Брауэра для случая, когда M — правильный

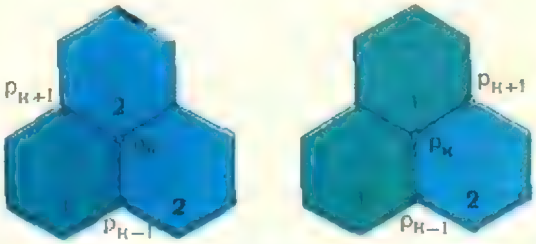


Рис. 5.

---

*) Эта лемма лишь частный случай знаменитой леммы, принадлежащей немецкому математику Шпернеру.

треугольник ABC (рис. 4). Пометим точку A числом 1, B — числом 2, C — 3 и запишем эти числа в соответствующих трех ячейках. Далее, в ячейках с центрами на стороне AB пишем 1, на BC — 2, на CA — 3. Каждой внутренней точке x ставим в соответствие *метку* — одно из чисел 1, 2, 3 — по следующему правилу: число 1, если расстояние от точки x до стороны AB не больше, чем расстояние от точки $y=f(x)$ до AB (точка x не «снижается» при отображении f); если этого нет, то берем число 2, когда точка x не приближается к BC (расстояние от x до BC не больше расстояния от y до BC); в остальных случаях берем 3 — при этом точка x удаляется от стороны CA (см. на рисунке 4 области для $\overrightarrow{xy}$, которым отвечают метки 1, 2, 3). Запишем в каждую внутреннюю ячейку метку ее центра. По лемме Шпернера найдем полную вершину x_0 и вспомним знаменитую басню Крылова:

...Лебедь рвется в облака,
Рак пятится назад,
а щука тянет в воду —
Да только воз и ныне там!

Мы как раз ищем неподвижную точку: подобие этого воза из басни составляют ячейки с числами 1, 2, 3, связанные с полной вершиной x_0. (Эта вершина «почти неподвижна» — при достаточно малом b она мало приближается к AB, к BC и к CA, т. е. мало двигается.)

Возьмем теперь последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$, стремящихся к нулю, и для каждого k найдем свою полную вершину x_k. Получим последовательность точек

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots$$

Первый случай. Если эта последовательность сходится*) к точке $\bar{x}=\lim\limits_{k\to\infty} x_k$, то $\bar{x}$ — неподвижная точка данного отображения. (Ее неподвижность следует из того, что $\bar{x}$ не приближается ни к одной из трех сторон треугольника.)

Упражнение 6. Докажите неподвижность точки $\bar{x}$.

Второй случай. Если последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ не сходится, то можно подобрать последовательность номеров $n_1<n_2<\ldots$ $\ldots<n_k<\ldots$ так, чтобы последовательность точек

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots$$

сходилась к некоторой точке $\bar{x}'=\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Упражнение 7. Докажите существование такой последовательности номеров $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ и неподвижность точки $\bar{x}'$.

Развитие метода неподвижных точек

Теорема Брауэра, которую мы доказали для отрезка и для треугольника, обобщается не только на трехмерное пространство (как было указано выше), но и на «пространство любого числа измерений». Более того, польский математик Ю. Шаудер обобщил ее на случай «бесконечномерных» пространств. Дальнейшее развитие это направление получило в работах академика А. Н. Тихонова. Польский математик С. Банах доказал важную теорему о сжатии пространств, обогатившую метод неподвижных точек. В последнее время построения, подобные рисунку 4, применяются для счета на ЭВМ приближений к неподвижным точкам и для решения многих близких задач.

Упражнения

8. Применяя теорему Брауэра (для отрезка) показать, что следующие уравнения имеют решение: а) $x-\cos x=0$; б) $\cos(\sin x)-x=0$.

9. Отображение $f:(x,\ y)\to(x',\ y')$, где $x'=x^2+1{,}5xy$, $y'=0{,}5xy+y^2$, на отрезке $S=\{(x,\ y)\,|\,x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y=1\}$ имеет неподвижную точку. Доказать это по теореме Брауэра, а также решая систему $x=x^2+1{,}5xy$; $y=0{,}5xy+y^2$.

10. Показать, что система

$$\begin{cases} x=\sin(x+y), \\ y=0{,}5\,(x^2+xy^3) \end{cases}$$

имеет решение.

11. Исследовать систему

$$\begin{cases} x_1=x_2^2+2x_2x_3+x_1x_2, \\ x_2=x_3^2+x_3x_1, \\ x_3=x_1^2+x_1\,(x_2+x_3) \end{cases}$$

на существование ненулевого решения (по теореме Брауэра). Решить ее элементарными средствами.

---

*) Говорят, что последовательность точек сходится, если сходятся обе последовательности координат точек

В. Можаев

Тепловое расширение твердых тел

Хорошо известно, что практически все твердые тела при нагревании расширяются. Это — универсальное свойство твердых тел. Относительное удлинение большинства твердых тел при нагревании на 1°С составляет $\sim 10^{-5}$. Чтобы понять природу этого, на первый взгляд, очевидного явления, необходимо разобраться в характере взаимодействия между атомами в твердом теле.

Любое твердое тело состоит из устойчивой системы частиц — атомов, ионов или молекул, — взаимодействующих друг с другом. Мы не будем подробно останавливаться на природе этих взаимодействий, а рассмотрим их общий характер.

Для устойчивости ансамбля частиц, образующих твердое тело, необходимо наличие двух типов сил: сил притяжения, которые не дают распасться такой системе, и сил отталкивания, не позволяющих частицам слиться друг с другом. Эти силы зависят от расстояния между частицами. И силы притяжения, и силы отталкивания тем больше, чем меньше это расстояние. Однако по мере уменьшения расстояния абсолютная величина силы отталкивания возрастает гораздо быстрее, чем абсолютная величина силы притяжения.

На рисунке 1 приведен общий вид зависимостей силы притяжения (a) и силы отталкивания (b) от расстояния между частицами твердого тела. Кривая c — это результирующая этих сил, которая и описывает характер силы взаимодействия. На расстоянии $r = r_0$ силы отталкивания уравновешивают силы притяжения, и результирующая сила взаимодействия обращается в нуль. Расстояние r_0 между частицами соответствует устойчивому состоянию равновесия. Действительно, смещение частиц из положения рановесия приводит к появлению результирующей силы, которая стремится вернуть их в положение равновесия.

Для описания взаимодействия между частицами обычно используют понятие энергии взаимодействия. На рисунке 2 приведен график зависимости энергии взаимодействия от расстояния между частицами. Численное значение энергии при расстоянии r между частицами *1* и *2* равно работе, которую необходимо совершить, чтобы переместить частицу *2* из бесконечности, где энергия взаимодействия равна нулю, в точку, на-

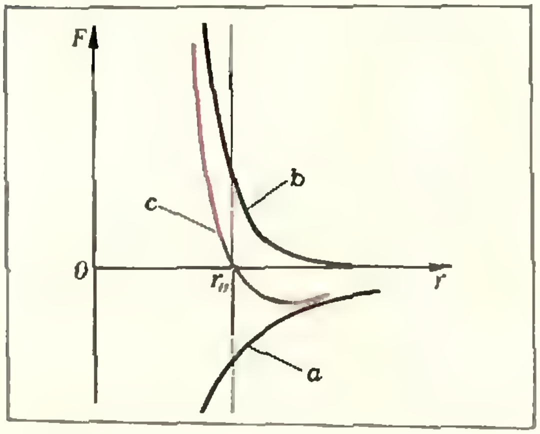


Рис. 1.

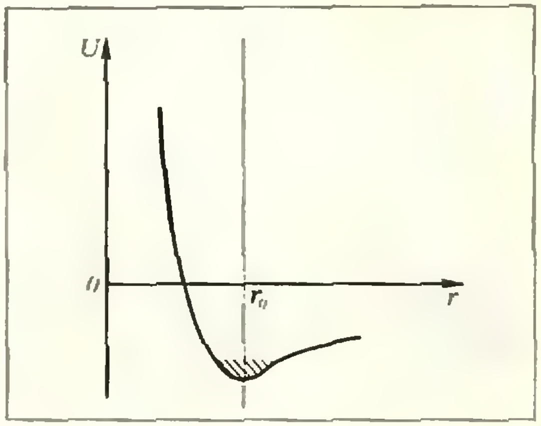


Рис. 2.

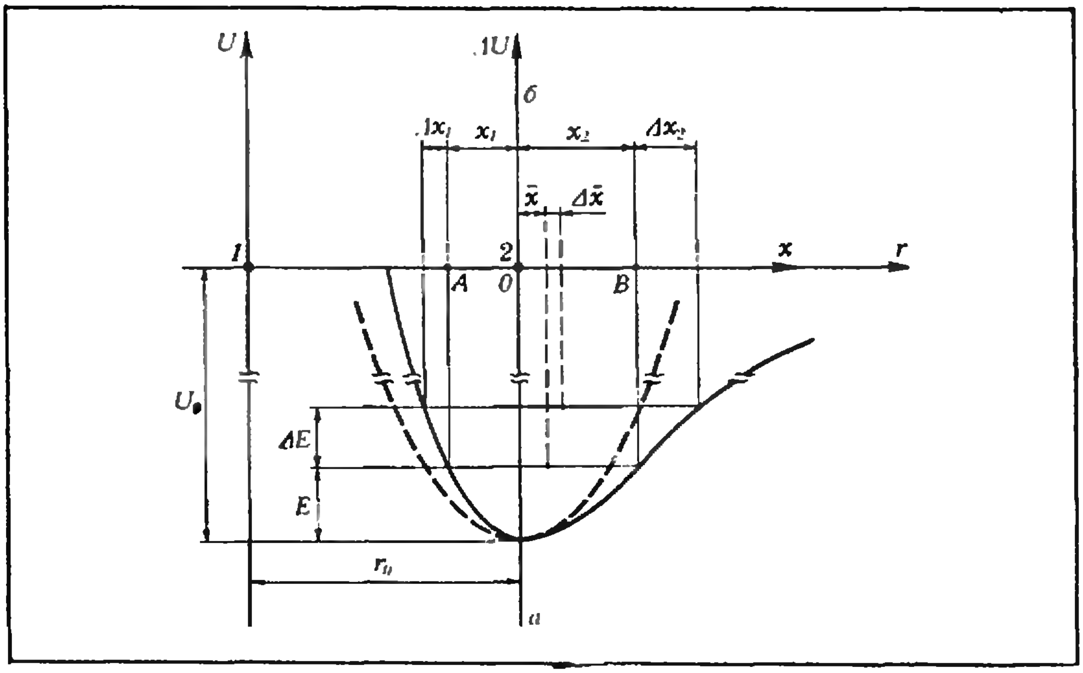


Рис. 3.

ходящуюся на расстоянии r от частицы *1*. При сближении частиц до расстояния r_0 работа совершается силами притяжения — энергия взаимодействия в этой области отрицательна. При сближении от расстояния r_0 до расстояния $r<r_0$ необходимо совершать работу против сил отталкивания — в этой области энергия взаимодействия положительна. В положении устойчивого равновесия (при $r=r_0$) полная энергия взаимодействия достигает минимального значения.

Вблизи абсолютного нуля частицы в твердом теле располагаются на расстояниях r_0 друг от друга, находясь на дне потенциальной ямы (в энергетическом смысле этого слова). При нагревании твердого тела происходит увеличение полной энергии E частиц. Эта энергия, отсчитываемая от дна потенциальной ямы, включает в себя кинетическую и потенциальную энергии частиц. Единственной доступной формой движения частиц в этом случае является колебательное движение около положений равновесий. Полная энергия E колеблющейся частицы в твердом теле, так же как и энергия молекул газа, пропорциональна температуре T.

Рассмотрим колебания частицы, находящейся в потенциальной яме (на участке, заштрихованном на рисунке 2) и обладающей полной энергией E. Для простоты пусть частица *1* неподвижна, а колеблется частица *2*. В момент прохождения положения равновесия (точка O на рисунке 3) частица *2* обладает максимальной кинетической энергией, равной E. При движении частицы влево от положения равновесия кинетическая энергия расходуется на преодоление сил отталкивания ее от частицы *1* и переходит в потенциальную энергию взаимодействия. Отклонение влево происходит до тех пор, пока вся кинетическая энергия частицы не перейдет в потенциальную энергию. Это происходит в точке A на расстоянии x_1 от положения равновесия. В этой точке частица останавливается и начинает двигаться в обратном направлении. При движении вправо от положения равновесия кинетическая энергия частицы *2* расходуется на преодоление сил притяжения к частице *1* и также переходит в потенциальную энергию взаимодействия. В точке B, находящейся на расстоянии x_2 от положения равновесия, вся кинетическая энергия переходит в потенциальную, частица останавливается и начинает двигаться влево.

Общий характер поведения частицы *2* мы описали. Теперь рассмотрим его более детально.

Обратимся снова к рисунку 1. В окрестности точки r_0 зависимость $F(r)$ можно приближенно, с определенной степенью точности, считать линейной. В этом случае сила $F(x)$, возникающая при отклонении частицы от положения равновесия на расстояние x, пропорциональна этому отклонению и направлена к положению равновесия. (Мы полагаем, что такие силы возникают при упругих деформациях твердых тел. Именно из этого предположения и следует закон Гука.) В таком приближении изменение потенциальной энергии частицы в окрестности точки r_0 описывается зависимостью

$$U(x) = \frac{Kx^2}{2}, \qquad (1)$$

где K — некоторый постоянный коэффициент, и частица совершает гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{K/m}$. Поэтому такое приближение называют гармоническим.

Можно ли, остановившись на гармоническом приближении, объяснить тепловое расширение тел? Нет. И вот почему. Потенциальная кривая $U(x)$ в гармоническом приближении — это парабола, симметричная относительно вертикали $x=0$ (см. рисунок 3). Значит, с повышением температуры, то есть с увеличением полной энергии частицы, может происходить только увеличение амплитуды колебаний частицы *2*, а среднее расстояние между частицами *1* и *2* остается неизменным. Значит, и размер тела остается при нагревании неизменным.

Итак, нам нужно более точно, чем гармоническим приближением описать характер изменения потенциальной энергии частицы *2* в окрестности точки O.

В действительности потенциальная кривая несимметрична — ее левая ветвь «растет» значительно быстрее, чем правая. Для учета асимметрии потенциальной кривой в окрестности точки O представим потенциальную энергию частицы в таком виде:

$$U(x) = K\frac{x^2}{2} - \beta\frac{x^3}{3}, \qquad (2)$$

где x, по-прежнему, — отклонение от положения равновесия. Добавляя член $\beta x^3/3$, мы приближаем нашу модельную потенциальную кривую к реальной кривой. (В первом приближении мы заменили действительную кривую потенциальной энергии взаимодействия параболой (1), теперь мы делаем следующее приближение.)

Несимметричный характер потенциальной кривой (2) приводит к тому, что максимальные отклонения частицы *2* вправо (x_2) и влево (x_1) оказываются неодинаковыми: $|x_2| > |x_1|$. Поэтому среднее положение частицы уже не совпадает с положением равновесия — оно смещается вправо от точки O на расстояние $\bar{x} = \frac{|x_2| - |x_1|}{2}$. Иными словами, среднее расстояние между частицами *1* и *2* увеличивается на $\bar{x}$, а это означает, что нагревание тела, то есть увеличение энергии его частиц, приводит к увеличению линейных размеров тела.

Проведем теперь оценку линейного коэффициента теплового расширения α. Пусть тело нагрето до некоторой температуры T, при которой средняя тепловая энергия его атомов равна E. Тогда для левого крайнего положения частицы *2* (точка A на рисунке 3) можно записать:

$$E = \frac{Kx_1^2}{2} + \beta\frac{|x_1|^3}{3}. \qquad (3)$$

(Мы приравняли полную энергию частицы ее потенциальной энергии в левом крайнем положении.) Аналогично для правого крайнего положения (точка B)

$$E = \frac{Kx_2^2}{2} - \beta\frac{|x_2|^3}{3}. \qquad (4)$$

Пусть теперь температура тела увеличилась на величину ΔT. Взяв приращения от обеих частей уравнений (3) и (4), получим

$$\Delta E = K|x_1| \cdot \Delta|x_1| + \beta x_1^2 \cdot \Delta|x_1|, \qquad (5)$$

$$\Delta E = K|x_2| \cdot \Delta|x_2| - \beta x_2^2 \cdot \Delta|x_2|. \qquad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) найдем изменения $\Delta|x_1|$ и $\Delta|x_2|$ максимальных отклонений частицы 2 от положения равновесия при увеличении температуры тела на ΔT:

$$\Delta|x_1| = \frac{\Delta E}{K|x_1| + \beta x_1^2}, \qquad (7)$$

$$\Delta|x_2| = \frac{\Delta E}{K|x_2| - \beta x_2^2}. \qquad (8)$$

Изменение среднего расстояния между частицами 1 и 2 при нагревании тела от нуля до температуры T, как мы уже видели, равно

$$\bar{x} = \frac{|x_2| - |x_1|}{2}.$$

При нагревании тела от температуры T до температуры $T + \Delta T$ эта величина меняется на

$$\Delta\bar{x} = \frac{\Delta|x_2| - \Delta|x_1|}{2}. \qquad (9)$$

Подставляя (7) и (8) в (9), находим

$$\Delta\bar{x} = \frac{\Delta E[K(|x_1| - |x_2|) + \beta(x_1^2 + x_2^2)]}{2(K|x_2| - \beta|x_2^2|)(K|x_1| + \beta x_1^2)}. \qquad (10)$$

Запишем условие равенства потенциальной энергии частицы 2 в точках A и B:

$$\frac{Kx_1^2}{2} + \beta\frac{|x_1|^3}{3} = \frac{Kx_2^2}{2} - \beta\frac{|x_2|^3}{3}. \qquad (11)$$

Перепишем равенство (11) в следующем виде:

$$\frac{K(x_2^2 - x_1^2)}{2} = \beta\frac{(|x_2|^3 + |x_1|^3)}{3}. \qquad (12)$$

Разложив на множители выражения в скобках и сделав преобразования, из уравнения (12) найдем

$$|x_2| - |x_1| = {}^2\!/_3\,\frac{\beta}{K}(x_2^2 - |x_2|\cdot|x_1| + x_1^2) \approx {}^2\!/_3\,\frac{\beta}{K}x_2^2 = {}^2\!/_3\,\frac{\beta}{K}x_1^2. \qquad (13)$$

Последние приближенные равенства справедливы, поскольку действительно $|x_1| \approx |x_2| = x$. Подставляя (13) в (10), учитывая, что $K|x_2| \gg \beta x_2^2$, $K|x_1| \gg \beta x_1^2$, находим приближенное выражение для $\Delta\bar{x}$:

$$\Delta\bar{x} \approx \frac{\Delta E(-{}^2\!/_3\beta x^2 + 2\beta x^2)}{2K^2x^2} = {}^2\!/_3\,\frac{\Delta E\beta}{K^2} \approx \frac{\Delta E\beta}{K^2}.$$

(Проведенная грубая оценка с точностью до коэффициента 2/3 совпадает с результатом, который получается при более строгом расчете.)

Теперь найдем коэффициент линейного расширения α. По определению $\alpha = \frac{1}{l}\frac{\Delta l}{\Delta T}$. В нашем случае $l = r_0$, $\Delta l = \Delta\bar{x}$, так что

$$\alpha = \frac{1}{r_0}\frac{\beta}{K^2}\frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{\beta}{r_0K^2}c_V,$$

где c_V — теплоемкость, отнесенная к одной частице. Мы нашли, что коэффициент линейного расширения α пропорционален теплоемкости тела. Экспериментальные результаты хорошо подтверждают эту связь.

В области высоких температур $\Delta E = k\Delta T$. Следовательно,

$$\alpha = \frac{k\beta}{r_0K^2}.$$

Опыт подтверждает, что в области высоких температур α действительно практически не зависит от температуры.

Задачи наших читателей

Докажите неравенства:

1. $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$;

2. $1 + \sqrt{2!} + \sqrt[3]{3!} + \ldots + \sqrt[n]{n!} < n(n+3)/4$;

3. $a_1^{a_1}a_2^{a_2}\ldots a_n^{a_n} \geqslant (a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}$, где $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Е. Карлинская,
ученица 10 класса

4. $x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \ldots + x + \frac{n}{2(n+1)} > 0$, где $n \geqslant 2$.

Л. Федоров

5. Пусть p — простое число и $p > 11$. Докажите, что разность $p^{60} - 1$ делится на 1980.

С. Манукян

6. Докажите, что выражение

$$1^{100} - 2^{100} + 3^{100} - 4^{100} + \ldots + 1975^{100} - 1978^{100} + 1979^{100}$$

делится на 199 879.

Д. Нямсурэн

И. Быстрый

Площадь сегмента параболы Нейля

В 1657 году двадцатилетний студент Оксфордского университета Уильям Нейль (1637—1670) нашел длину дуги «полукубической параболы» $y=a\sqrt[3]{x^2}$. Это открытие поразило современников, и в память о рано умершем талантливом математике полукубическая парабола называется *параболой Нейля*.

В наше время параболу Нейля можно встретить не только в вузовском курсе анализа, но и в школьном учебнике*). А недавно на лекции для абитуриентов я получил такую записку:

Как найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=3\sqrt[3]{x^2}$ и касательной к ней в точке $x=-8$?

Вот что я тогда ответил.

Эта задача, несмотря на кажущуюся простоту, связана с определенными трудностями.

Первая трудность возникает при нахождении касательной к параболе Нейля

$$f_1(x)=3\sqrt[3]{x^2} \qquad (1)$$

в точке $x=-8$. Как известно, уравнение касательной определяется по формуле

$$y-f_1(-8)=f_1'(-8)(x+8). \qquad (2)$$

Здесь

$$f_1(-8)=12,$$

$$f_1'(-8)=3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'\Big|_{x=-8}=$$
$$=3\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\Big|_{x=-8}=2\cdot(-8)^{-\frac{1}{3}}.$$

Значит, производная не существует (поскольку выражение $(-8)^{-\frac{1}{3}}$ не имеет смысла), следовательно, не существует и касательной к кривой (1).

Между тем, из чертежа ясно, что вывод неверен: прямая (AB) — касательная! В чем дело? Как же найти угловой коэффициент касательной? Дело в том, что формула

$$\left(\sqrt[n]{x^m}\right)'=\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1},$$

верная при $x\geqslant 0$, здесь неприменима. Для вычисления производной (при $x<0$) следует пользоваться формулой

$$\left(\sqrt[n]{x^m}\right)'=\frac{m}{n}\,\frac{\sqrt[n]{x^m}}{x}, \qquad (*)$$

$$x\neq 0,\ n\in\mathbf{N},\ m\in\mathbf{Z}.$$

(которая, разумеется, применима и для положительных x). В соответствии с ней имеем

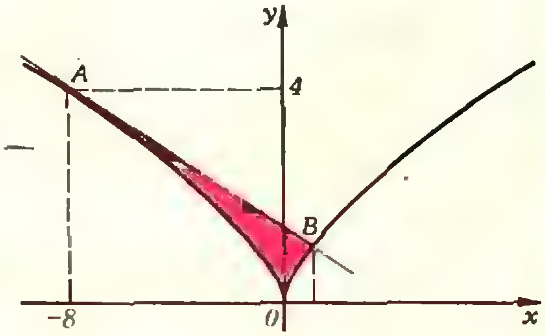
$$f_1'(-8)=\left(3\sqrt[3]{x^2}\right)'\Big|_{x=-8}=$$
$$=3\cdot\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt[3]{(-8)^2}}{(-8)}=-1.$$

Подставив $f_1(-8)=12$ и $f_1'(-8)=-1$ в равенство (2), получим искомое уравнение касательной:

$$y=4-x.$$

Упражнение 1. *Найдите точки пересечения линий $f_1(x)=3\sqrt[3]{x^2}$ и $f_2(x)=4-x$.*

Теперь, когда известна абсцисса точки B, легко найти площадь криволинейного треугольника AOB. Как



---

*) «Алгебра и начала анализа 9», задачи 438, 474б. «Алгебра и начала анализа 10», задача 393а.

известно, это можно сделать по формуле

$$S=\int\limits_{x_A}^{x_B}[f_2(x)-f_1(x)]\,dx.$$

Имеем

$$S=\int\limits_{-8}^{1}(4-x-3\sqrt[3]{x^2})\,dx=$$

$$=\int\limits_{-8}^{1}(4-x)\,dx-3\int\limits_{-8}^{1}\sqrt[3]{x^2}\,dx. \qquad (3)$$

Вычисление первого интеграла никаких трудностей не вызывает:

$$\int\limits_{-8}^{1}(4-x)\,dx=$$

$$=4x-\frac{x^2}{2}\Big|_{-8}^{1}=67{,}5\ (\text{ед})^2. \qquad (4)$$

А вот вычисление второго интеграла неожиданно приводит к выводу:

$$3\int\limits_{-8}^{1}\sqrt[3]{x^2}\,dx=3\int\limits_{-8}^{1}x^{\frac{2}{3}}\,dx=$$

$$=\frac{9}{5}\,x^{\frac{2}{3}+1}\Big|_{-8}^{1}=\frac{9}{5}\left(1-(-8)^{\frac{5}{3}}\right)$$

— интеграл не существует, поскольку выражение $(-8)^{\frac{5}{3}}$ не имеет смысла!

Дело в том, что формула интегрирования, которая здесь была применена, справедлива лишь для $x\geqslant 0$. Для более широкой области изменения переменной следует воспользоваться формулой

$$\int\sqrt[n]{x^m}\,dx=\frac{n}{n+m}x\sqrt[n]{x^m}+C\ (**)$$

$$x\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N},\ m\in\mathbf{Z}^{*}).$$

В соответствии с ней имеем

$$3\int\limits_{-8}^{1}\sqrt[3]{x^2}\,dx=$$

$$=\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-8}^{1}=59{,}4\ (\text{ед})^2. \qquad (5)$$

Подставив результаты (4) и (5) в равенстве (3), получим

$$S=67{,}5-59{,}4=8{,}1.$$

Упражнения

2. Запишите формулу (*) в терминах степенной функции.

3. Запишите формулу (* *) в терминах степенной функции.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=2\sqrt[4]{x^2},\quad y=0{,}4x+2{,}4.$$

---

*) Если $m<0$, то нужно дополнительно потребовать, чтобы $x\neq 0$.

Наша обложка

Картины на воде

Картину, которую мы воспроизвели на первой странице обложки, вы можете «нарисовать» сами за несколько минут.

В фотографическую кювету или какой-нибудь другой сосуд налейте воды; в отдельных маленьких посудинках разведите в бензине или скипидаре небольшие количества художественной масляной краски нескольких цветов (делайте это подальше от огня и электроприборов). Затем эту краску осторожно капайте на поверхность воды. Капли начинают расползаться, образуя на поверхности причудливый плавающий рисунок. Этот рисунок можно изменить, осторожно помешав его палочкой, подув на него.

Плотный лист бумаги (чертежной) осторожно возьмите за уголки и положите его на секунду плашмя на поверхность воды. Красочный слой впитается в бумагу. Теперь снимите лист, переверните его и оставьте сохнуть. Картина готова.

Поведение капель на поверхности воды зависит от концентрации краски в растворителе, от того, в какой последовательности и с каким интервалом падают капли на воду, от сорта краски. Первые капли, как правило, быстро растекаются по всей поверхности воды. Если подождать минуту, пока растворитель с поверхности испарится, и после этого на образовавшуюся пленку капать новой краской, то новые капли могут разломать пленку на отдельные «льдинки», разбегающиеся в разные стороны.

Основную роль во всех этих явлениях играет, очевидно, поверхностное натяжение.

Ю. Котов

И. Михайлов

О диофантовом анализе

Область теории чисел, в которой исследуются целочисленные решения уравнений вида $P(x,\ y,\ \ldots,\ z)=0$, где $P(x,\ y,\ \ldots,\ z)$ — многочлен от нескольких переменных с целыми коэффициентами, называется *диофантовым анализом*, а сами эти уравнения — *диофантовыми*. О некоторых диофантовых уравнениях и способах их решения мы уже писали*).

Напомним, что *решить диофантово уравнение* — это значит выяснить следующее:

1. *имеет ли оно хотя бы одно целочисленное решение;*
2. *конечно или бесконечно число его целочисленных решений;*
3. *найти все его целочисленные решения.*

Например, для уравнения $x^3+y^3+z^3=30$ пока неизвестно ни одного целочисленного решения. Однако, возможно, решение будет найдено позднее. А может быть, будет доказано, что их не существует.

А вот для уравнения $x^3+y^3+z^3=3$ известны четыре решения: $(1;\ 1;\ 1)$, $(4;\ 4;\ -5)$, $(4;\ -5;\ 4)$, $(-5;\ 4;\ 4)$. Но пока остается открытым вопрос: а есть ли другие решения?

Другой пример. Доказано, что уравнение $x^3+y^3+z^3=2$ имеет бесконечное множество решений в целых числах $(x;\ y;\ z)=(1+6\alpha^3;\ 1-6\alpha^3;\ -6\alpha^2)$, где α — целое число. Но до сих пор не выяснено, все ли его решения задаются этими формулами.

Мощным средством доказательства бесконечности множества целых решений диофантовых уравнений является *метод параметризации*. Суть этого метода состоит в представлении переменных $x,\ y,\ \ldots,\ z$ в виде функций, зависящих от целочисленных параметров $\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma$: $x=A(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma)$, $y=B(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma)$, ..., $z=C(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma)$, где $A,\ B,\ \ldots,\ C$ — многочлены с целыми коэффициентами. Методы параметризации, порою весьма искусственные, но исключительно оригинальные, требуют, как правило, большой изобретательности, а потому способствуют приобретению и развитию навыков самостоятельной творческой деятельности в математике.

Вернемся к уравнению $x^3+y^3+z^3=2$ и попытаемся его параметризовать. Для этого положим $x=a+b$, $y=a-b$, где a и b — целые числа; получим $2a^3+6ab^2+z^3=2$. Пусть $a=1$, тогда $6b^2=-z^3$, откуда $z=6c$ (c — целое), то есть $b^2=-36c^3$. В таком случае $c=-\alpha^2$ (α — целое), но тогда $b=6\alpha^3$. Окончательно имеем

$$(1+6\alpha^3)^3+(1-6\alpha^3)^3+(-6\alpha^2)^3=2.$$

То есть $x=A(\alpha)=1+6\alpha^3$, $y=B(\alpha)=1-6\alpha^3$, $z=C(\alpha)=-6\alpha^2$. Подставляя вместо α целые числа, получим различные решения.

Задача 1. Параметризовав уравнение $x^3+y^3+z^3=2t^3$, докажите бесконечность множества его целочисленных решений.

Математиков, занимающихся теорией чисел, вот уже много лет привлекает нерешенная до сих пор задача: разрешимо ли в целых числах уравнение $x^4+y^4+z^4=t^4$?

В 1914 году А. Веребрюсов предложил доказательство его неразрешимости. Однако, как выяснилось позже, его доказательство было ошибочным. (Кстати, предположение о неразрешимости этого уравнения в целых числах высказал еще Эйлер.) В 1945 году было доказано, что уравнение $x^4+y^4+z^4=t^4$ не имеет решений в целых числах для $|t|<10^8$. Но, разумеется, это — еще не полное решение.

---

*) См «Квант», 1971, № 3, с 15, 1978, № 1, с 25, № 12, с 2

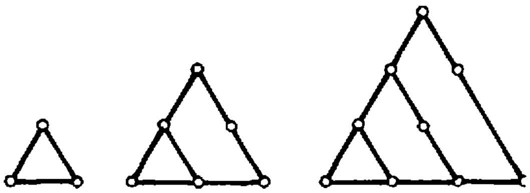


Рис. 1.

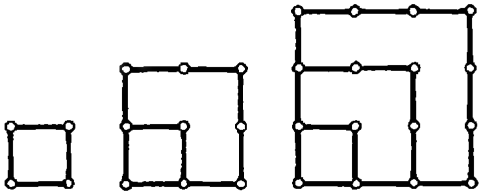


Рис. 2.

Попытаемся решить задачу более простую, хотя и «более сложную» с виду: докажем бесконечность множества целочисленных решений уравнения $x^4+y^6+z^{12}=t^4$.

Пусть $x=a-b$, $t=a+b$, где a и b — целые числа. Тогда $y^6+z^{12}=8a^3b+8ab^3$. Положим $y^6=8a^3b$, $z^{12}=8ab^3$; тогда $a=c^3$, $b=d^3$ (c и d — целые числа) и $y^2=2c^3d$, $z^4=2cd^3$. Отсюда следует, что $2cd$ — квадрат целого числа. Полагая $c=\alpha^4$, $d=2\beta^4$ (α, β — целые числа), получаем тождество

$$(\alpha^{12}-8\beta^{12})^4+(2\alpha^6\beta^2)^6+(2\alpha\beta^3)^{12}=(\alpha^{12}+8\beta^{12})^4,$$

доказывающее требуемое.

Задача 2. Найдите еще одно тождество, описывающее решения уравнения $x^4+y^6+z^{12}=t^4$.

А вот для доказательства неразрешимости некоторого диофантова уравнения очень полезно бывает рассмотреть это уравнение «по некоторому модулю»*). Поясним, что мы имеем в виду.

Два целых числа a и b называются *сравнимыми по модулю* k, если разность $a-b$ делится на k. Легко видеть, что два числа a и b сравнимы по модулю k тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые остатки при делении на k. То, что a и b сравнимы по модулю k, записывают так: $a\equiv b \pmod k$.

Пусть нам надо решить диофантово уравнение

$$x^3+117y^3=5.$$

Рассмотрим это уравнение «по модулю 9», то есть с точностью до слагаемых, кратных девяти. Нетрудно показать, что любое число в кубе или делится на 9, или дает при делении на 9 в остатке 1 или 8, то есть $x^3\equiv0 \pmod 9$ или $x^3\equiv1 \pmod 9$ или $x^3\equiv8 \pmod 9$.

Поскольку 117 делится на 9, $117y^3\equiv0 \pmod 9$. Таким образом,

$$x^3+117y^3\equiv0 \pmod 9$$

или

$$x^3+117y^3\equiv1 \pmod 9$$

или

$$x^3+117y^3\equiv8 \pmod 9.$$

Поэтому уравнение $x^3+117y^3=5$ не имеет целочисленных решений.

Задача 3. Докажите, что уравнения
а) $x^3+y^3=9t\pm4$;
б) $x^3+y^3=9t\pm3$;
в) $x^3+y^3+z^3=9t\pm4$
не имеют целочисленных решений.

Треугольные и квадратные числа*) связаны соответственно с правильным треугольником и квадратом (см. рисунки 1, 2).

Обозначим n-е треугольное число через T_n, n-е квадратное число через K_n.

Задача 4. Докажите следующие формулы: $T_n=\frac{1}{2}n(n+1)$; $K_n=n^2$.

Задача *найти все треугольные числа, являющиеся квадратными,* сводится к решению уравнения $T_n=K_m$, то есть уравнения $n(n+1)=2m^2$.

Решить это уравнение нам поможет уравнение $x^2-2y^2=1$. Оно имеет бесконечное множество решений (в натуральных числах), задаваемых рекуррентно: $x_{k+1}=3x_k+4y_k$ и $y_{k+1}=2x_k+3y_k$, $x_1=3$, $y_1=2$ (докажите это самостоятельно или посмотрите доказательство в «Кванте», 1978, № 1, с. 26).

(Окончание см. на с. 35)

---

*) См. статьи М. Башмакова («Квант», 1971, № 3) и А. Геронимуса («Квант», 1978, № 12).

*) См. также «Квант», 1974, № 6, с. 53.

задачник Кванта

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 августа 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М626, М627» или «Ф638». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М626—М630; Ф638—Ф642

М626. Каждая сторона выпуклого четырехугольника разделена на 8 равных частей. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены друг с другом, и полученные клетки раскрашены в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных клеток равна сумме площадей белых клеток.

В. Произволов

М627. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги записано натуральное число.

а) Пусть каждое из этих чисел встречается ровно один раз. (Приведите примеры такой расстановки чисел!) Докажите, что для любого заданного m найдутся две соседние (имеющие общую сторону) клетки, разность чисел в которых не меньше m.

б)* Пусть каждое число $n \in \mathbf{N}$ встречается ровно n раз (то есть 1 — один раз, 2 — два раза и т. д.). Укажите наибольшее число k такое, что обязательно найдутся две соседние клетки, разность чисел в которых не меньше k. (Приведите пример такой расстановки, в которой разность чисел в любой паре соседних клеток не больше $k+1$.)

А. Толпыго

М628. На сфере построен треугольник, одна «сторона» которого имеет величину 120°. Докажите, что «медиана», опущенная на эту «сторону» делится каждой из двух других «медиан» на две равные части. («Медианы» и «стороны» — дуги больших окружностей.)

А. Ягубьянц

М629. а) Докажите, что число $2^{2n-1}-9n^2+21n-14$ делится на 27 при любом натуральном n.

б) Докажите, что если числа $a+b$ и a^2+b делятся на m, то a^n+b делится на m при любом n (a, b и m — некоторые натуральные числа).

в)* Докажите, что если $f(n)=a^n+b_0+b_1n+\ldots+b_kn^k$ делится на m при $n=1$, $n=2$, ..., $n=k+1$, $n=k+2$, то $f(n)$ делится на m при любом n (a, b_0, b_1, ..., b_k, m — некоторые натуральные числа).

Т. Маликов

М630. На плоскости даны окружность и точки P, Q на ней. Проведем через точки P, Q и произвольную точку K плоскости окружность. Пусть M — точка пересечения касательной к этой окружности в точке K с прямой PQ. Какое множество заполняют точки M?

И. Шарыгин

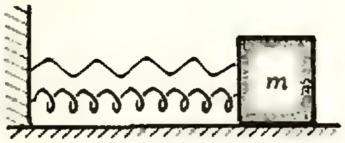


Рис. 1.

Ф638. Читая в 1908 году лекции в Страсбурге, академик Л. И. Мандельштам поражал слушателей следующим красивым опытом. Два камертона на резонаторных ящиках, имеющих резонансные частоты 500 Гц и 505 Гц, ставили рядом и один из камертонов возбуждали. Второй камертон при этом практически не откликался на колебания первого. Но стоило экспериментатору начать периодически закрывать и открывать рукой ящик звучащего камертона, как тут же начинал звучать второй камертон. Объясните результат этого опыта.

Ф639. Две пружинки с жесткостями k_1 и k_2 присоединены каждая одним концом в вертикальной стене, другим — к грузу массы m, лежащему на горизонтальном столе (рис. 1). В начальный момент пружина с жесткостью k_1 растянута на величину l_1, а пружина с жесткостью k_2 сжата на величину l_2. Груз отпускают. Найти амплитуду и период колебаний груза. Трением пренебречь.

А. Бергман

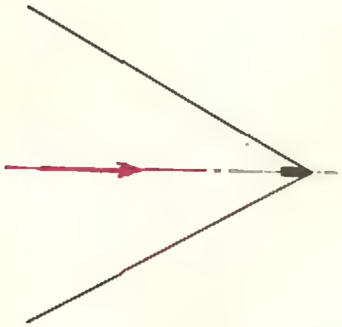


Рис. 2.

Ф640. На рисунках 2 и 3 показаны границы областей волнений, возбуждаемых кораблем на двух участках пути. Красными стрелками указаны направления скорости корабля. На первом участке (рис. 2) течение отсутствует. Направление течения на втором участке (рис. 3) показано синей стрелкой. Определите скорость течения, если скорость корабля относительно берегов в обоих случаях одна и та же и равна 18 км/ч.

В. Белонучкин

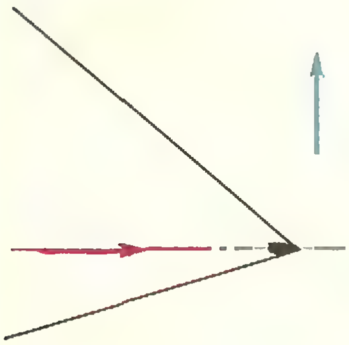


Рис.

Ф641. Настенные часы с маятником имеют массу $M=5$ кг. Масса груза на конце легкого маятника $m=150$ г. Какая ошибка в показаниях часов накопится за сутки, если часы подвесить к потолку на двух длинных параллельных шнурах? Считать, что часы, прикрепленные к стене, идут точно.

Е. Бутиков

Ф642. На рисунке 4 приведена идеализированная вольтамперная характеристика диода. Конденсатор емкости $C=100$ мкФ, заряженный до напряжения $U=5$ В, подключается через диод к резистору с сопротивлением $R=100$ Ом. Какое количество тепла выделится на резисторе при разрядке конденсатора?

Е. Сурков

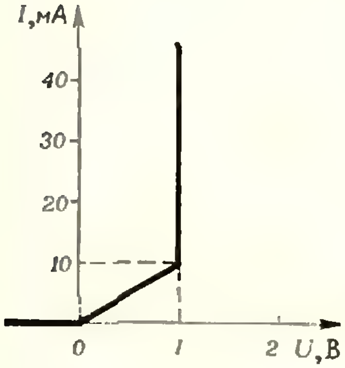


Рис. 4.

Решения задач

М568, М570—М572, М574; Ф579, Ф586, Ф587

М568. *Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что*

а) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA, равны между собой, то $ABCD$ — ромб;

б) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, равны между собой, то $ABCD$ — прямоугольник.

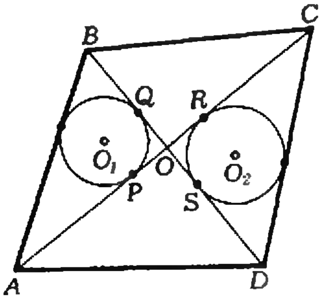


Рис. 1.

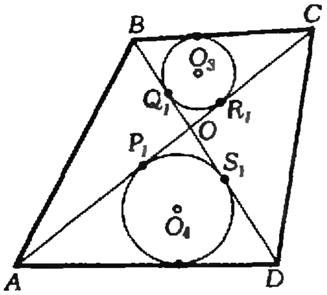


Рис. 2.

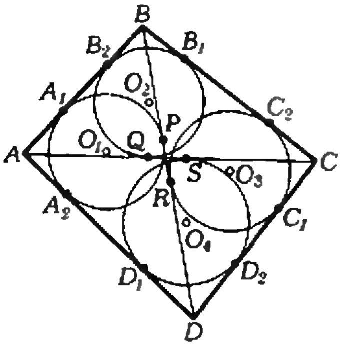


Рис. 3.

а) Пусть r — радиус, O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники AOB и COD; P, Q, R, S — точки касания этих окружностей со сторонами AO, BO, CO, DO этих треугольников (рис. 1).

Докажем сначала, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Для этого достаточно установить, что его диагонали AC и BD делятся точкой O пополам.

Предположим, что это не так. Пусть, например, $|AO|>|OC|$. Мы докажем, что из этого неравенства следуют неравенства $|BO|<|OD|$ и $|BO|>|OD|$, что невозможно.

Из неравенства $|AO|>|OC|$ следует, что $|AP|>|CR|$, поскольку $|OP|=|OR|$; из $|O_1P|=|O_2R|$ вытекает $\widehat{O_1AP}<\widehat{O_2CR}$, и поэтому $\widehat{BAO}<\widehat{DCO}$. Следовательно, $\widehat{ABO}>\widehat{CDO}$ и $|BQ|<|DS|$, но это значит, что $|BO|<|OD|$.

Повторяя проведенные рассуждения для треугольников BOC и AOD (рис. 2; проделайте это самостоятельно), получим, что $\widehat{DAO}<\widehat{BCO}$, откуда $\widehat{ODA}>\widehat{CBO}$, и, следовательно, $|DS_1|<|BQ_1|$, то есть $|BO|>|OD|$.

Полученное противоречие доказывает, что $|AO|=|OC|$. Так же доказывается, что $|BO|=|OD|$. Итак, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Из равенства площадей треугольников AOB и BOC (мы пользуемся известной формулой $S=pr$) получаем

$$\frac{1}{2}\,r\,(|AO|+|OB|+|AB|)=\frac{1}{2}\,r\,(|OC|+|OB|+|BC|),$$

откуда $|BC|=|AB|$, то есть четырехугольник $ABCD$ — ромб.

б) Первое решение. Пусть (рис. 3) A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, D_1 и D_2 — точки касания окружностей, вписанных в треугольники ABD, ABC, BCD, CDA, со сторонами четырехугольника $ABCD$; O_1, O_2, O_3, O_4 — центры этих окружностей; P, Q, R, S — точки касания окружностей с диагоналями AC и BD; r — радиус окружностей.

Сначала мы докажем интересный и сам по себе факт: *для произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ длины отрезков между точками касания, лежащими на противоположных сторонах четырехугольника, равны,* то есть $|A_1B_2|=|C_1D_2|$ и $|B_1C_2|=|A_2D_1|$.

Убедимся сначала, что рисунок 3 «правильный», то есть что расположение точек касания на сторонах четырехугольника именно такое, как это показано на рисунке 3.

Рассмотрим, например, треугольники ABD и ACD и докажем, что точка A_2 лежит ближе к точке A, чем точка D_1.

Для этого достаточно доказать, что $|AA_2|+|DD_1|<$ $<|AD|$.

Легко видеть, что

$$|AA_2|=\frac{|AB|+|AD|-|BD|}{2}$$

и

$$|DD_1|=\frac{|AD|+|CD|-|AC|}{2}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$|AA_2|+|DD_1|=|AD|+\frac{|AB|+|CD|-|BD|-|AC|}{2}.$$

Но $|AB|+|CD|<|BD|+|AC|$ (докажите это!) и, следовательно,

$$|AA_2|+|DD_1|<|AD|.$$

Теперь докажем, что $|A_2D_1|=|B_1C_2|$ и $|D_2C_1|=|A_1B_2|$.

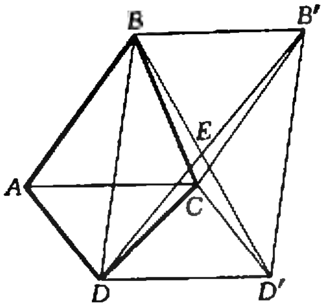


Рис. 4.

Пользуясь свойством отрезков касательных (рис. 3), получаем

$$|BD| = |BP| + |PD| = |BA_1| + |DA_2| = |BB_2| + |A_1B_2| + |DD_1| + |A_2D_1|. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$|BD| = |BR| + |RD| = |BB_1| + |B_1C_2| + |DD_2| + |D_2C_1| = |BB_2| + |B_1C_2| + |DD_1| + |D_2C_1|. \quad (2)$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получаем

$$|A_1B_2| + |A_2D_1| = |B_1C_2| + |D_2C_1|. \quad (3)$$

Проведя точно такие же вычисления для диагонали AC, получим

$$|A_2D_1| + |D_2C_1| = |A_1B_2| + |B_1C_2|. \quad (4)$$

Сложив теперь равенства (3) и (4), получим

$$|A_2D_1| = |B_1C_2|.$$

Следовательно, и $|D_2C_1| = |A_1B_2|$.

До сих пор мы не пользовались равенством радиусов вписанных окружностей, так что полученный нами результат справедлив для произвольного выпуклого четырехугольника.

Теперь завершим решение задачи.

Так как центры окружностей одинаково удалены от соответствующих сторон, получаем $(O_1O_2) \parallel (AB)$ и $(O_3O_4) \parallel (CD)$; а так как $|O_1O_2| = |A_1B_2|$ и $|O_3O_4| = |C_1D_2|$, получаем $|O_1O_2| = |O_3O_4|$.

Аналогично, $|O_2O_3| = |O_1O_4|$ и, значит, четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ — параллелограмм, а так как стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны сторонам этого параллелограмма, четырехугольник $ABCD$ — тоже параллелограмм.

Приравняв выражения для площадей треугольников ABD и ABC, получим

$$\frac{1}{2} r\,(|AB| + |BD| + |AD|) = \frac{1}{2} r\,(|CD| + |AD| + |AC|),$$

откуда $|BD| = |AC|$.

Таким образом, диагонали параллелограмма $ABCD$ равны по длине, а это и значит, что $ABCD$ — прямоугольник.

Второе решение. Как и в первом решении, мы докажем сначала, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Для этого проведем через точки B и D прямые, параллельные стороне AC (рис. 4), и отложим на них по одну сторону от прямой BD отрезки BB' и DD' длины $|AC|$.

Четырехугольник $BB'DD'$, очевидно,— параллелограмм. Легко видеть, что треугольники BCB', $B'CD'$, $CD'D$ конгруэнтны треугольникам ABC, ABD и ACD соответственно, так что радиусы окружностей, вписанных во все четыре треугольника, на которые параллелограмм разбит отрезками CB, CB', CD и CD', равны.

Докажем, что точка C совпадает с точкой E пересечения диагоналей параллелограмма $BB'D'D$.

В самом деле, если это не так, то точка C принадлежит одному из треугольников, на которые параллелограмм разбивается своими диагоналями (на рисунке 4 это треугольник DED'). В этом случае радиус окружности, вписанной в треугольник DED', будет больше r, а радиус окружности, вписанной в треугольник BEB',— меньше r, что противоречит конгруэнтности треугольников DED' и BEB'.

Таким образом, точка C совпадает с точкой E пересечения диагоналей параллелограмма $BB'D'D$ и, следовательно, $[DC] \parallel [AB]$ и $[AD] \parallel [BC]$, то есть четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Для завершения этого решения достаточно провести рассуждения, уже проведенные в конце первого решения.

А. Егоров

М570. *Задан набор квадратов, сумма площадей которых равна 4. Докажите, что квадратами этого набора всегда можно покрыть квадрат площади 1.*

«Вырежем» сначала из каждого квадрата нашего набора максимальный из возможных квадратиков со стороной длины $\frac{1}{2^n}$ (если длина стороны квадрата из данного набора равна a, то n определяется из условия $\frac{1}{2^n} < a < \frac{1}{2^{n-1}}$). Так как сторона каждого квадрата уменьшается меньше чем в два раза, общая площадь полученных квадратиков больше 1.

Покажем, что новым набором квадратиков можно покрыть квадрат единичной площади (отсюда, очевидно, следует, что и исходным набором квадратов его покрыть можно).

Если в наборе есть квадратик со стороной длины 1 или больше, то он один уже все покроет. Пусть таких квадратиков нет. Разобьем единичный квадрат на четыре одинаковых квадрата $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ и уложим на них все квадратики со стороной длины $\frac{1}{2}$ из нашего нового набора, если они есть (рис. 1, *а*). Затем каждый из непокрытых квадратов снова разобьем на четыре части и уложим на них квадратики со стороной длины $\frac{1}{4}$ из нашего набора, если они есть (рис. 1, *б*). Оставшиеся непокрытыми квадраты снова разобьем на четыре части, и так до тех пор, пока весь квадрат площади 1 не окажется покрытым (рис. 1, *в*). Такой момент обязательно наступит, поскольку мы укладываем квадратики без пересечений (точнее, никакие точки, кроме точек границ квадратиков, не покрываются более одного раза), а общая их площадь больше 1.

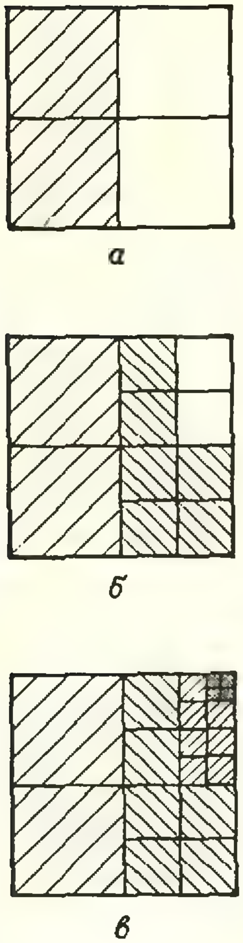


Рис. 1.

Число 4 в условии задачи можно уменьшить. Докажем, что единичный квадрат можно покрыть любым набором квадратов, сумма площадей которых равна 3.

Будем укладывать квадраты в порядке убывания длин их сторон. Первый (самый большой) поставим в левый нижний угол единичного квадрата (рис. 2), рядом с ним — второй, и так до тех пор, пока очередной квадрат (пусть его номер равен k_1) не покроет правую нижнюю вершину единичного квадрата. Проведем прямую, на которой лежит верхняя сторона квадрата номер k_1 (на рисунке 2 эта прямая проведена пунктиром). Следующие квадраты будем ставить на отрезок этой прямой, заключенный между вертикальными сторонами единичного квадрата: на левый конец этого отрезка ставим квадрат с номером k_1+1 и так далее. Когда мы дойдем до правого конца отрезка, проведем новую прямую и начнем снова укладывать квадраты.

Предположим, что мы уже уложили последний квадрат (пусть его номер N), а большой квадрат все еще полностью не покрыт.

Рассмотрим квадраты выходящие на правую сторону единичного квадрата. Пусть k_1, k_2, k_3, …, k_m — их номера. Обозначим через a_i длину стороны квадрата номер i. Если $k_m \neq N$ (то есть последний квадрат не «дошел» до конца «своего» отрезка), положим для удобства $a_{N+1}=0$.

Из способа укладки квадратов следует, что

$$a_{k_i+1}+a_{k_i+2}+\ldots+a_{k_{i+1}} < 1+a_{k_i+1}.$$

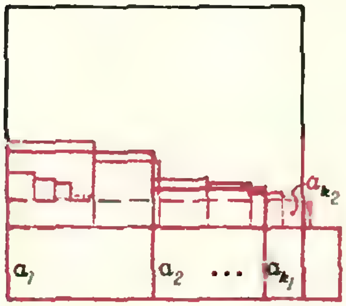


Рис. 2.

Кроме того, тот факт, что единичный квадрат не покрыт полностью, означает, что

$$a_{k_1}+a_{k_2}+a_{k_3}+\ldots+a_{k_m} < 1$$

(не покрыта правая верхняя вершина).

Оценим общую площадь квадратов, помня о том, что последовательность (a_i) — невозрастающая.

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{k_1}^2)+(a_{k_1+1}^2+a_{k_1+2}^2+\ldots+a_{k_2}^2)+\ldots$$

$$\ldots+(a_{k_{m-1}+1}^2+\ldots+a_{k_m}^2)<$$

$$<a_1(a_1+a_2+\ldots+a_{k_1})+a_{k_1+1}(a_{k_1+1}+a_{k_1+2}+\ldots+a_{k_2})+\ldots$$

$$\ldots + a_{k_{m-1}+1}(a_{k_{m-1}+1} + a_{k_{m-1}+2} + \ldots + a_{k_m}) <$$

$$< a_1(1 + a_{k_1}) + a_{k_1+1}(1 + a_{k_2}) + \ldots + a_{k_{m-1}+1}(1 + a_{k_m}) =$$

$$= a_1 + (a_{k_1+1} + a_{k_2+1} + \ldots + a_{k_{m-1}+1}) +$$

$$+ a_1 a_{k_1} + a_{k_1+1} a_{k_2} + \ldots + a_{k_{m-1}+1} a_{k_m} <$$

$$< a_1 + (a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_{m-1}}) + a_1(a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_m}) <$$

$$< 2a_1 + 1 < 3.$$

Итак, наше предположение оказалось неверным, и, значит, единичный квадрат покрыт полностью.

Если потребовать, чтобы стороны укладываемых квадратов были параллельны сторонам покрываемого квадрата, то число 3 уменьшить нельзя. Действительно, для произвольного $S<3$ возьмем набор из трех одинаковых квадратов площади $S/3$. Каждый из них сможет покрыть не более одной вершины единичного квадрата, поэтому весь квадрат покрыт не будет.

Точная оценка в случае, когда стороны укладываемых квадратов не параллельны сторонам единичного квадрата, автору неизвестна.

Некоторые читатели в своих решениях пытались обобщать утверждение задачи, заменяя единичный квадрат прямоугольником единичной площади. Но, очевидно, каким бы большим числом K мы ни заменили число 4 в условии, верного утверждения не получится (контрпример: прямоугольник со сторонами длины $2k$ и $1/2k$ нельзя покрыть набором из k единичных квадратов).

А. Вайнтроб

◆

М571. *Убывающая последовательность (x_n) положительных чисел такова, что при любом натуральном n*

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \ldots + \frac{x_{n^2}}{n} < 1.$$

Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots + \frac{x_n}{n} < 3.$$

Мы докажем более сильное утверждение: для нашей последовательности при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots + \frac{x_n}{n} < 2.$$

Действительно, поскольку $x_i > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} < \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} \frac{x_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{x_m}{m}.$$

Поскольку последовательность (x_n) — убывающая,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} < \sum_{k=1}^{n} x_{k^2} \left(\sum_{m=k^2}^{k^2+k-1} \frac{1}{m} + \sum_{m=k^2+k}^{k^2+2k} \frac{1}{m} \right) <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} x_{k^2} \left(\frac{k}{k^2} + \frac{k+1}{k^2+k} \right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k^2}}{k} < 2,$$

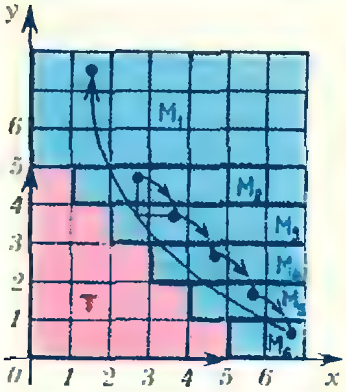
что и требовалось доказать.

Оценка 2 уже неулучшаема: мы предлагаем читателям доказать самостоятельно, что для любого $c<2$ можно найти убывающую последовательность из положительных чисел такую, что при любом натуральном n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k^2}}{k} < 1 \text{ и } \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} > c.$$

З. Чантурия

М572. *Кенгуру прыгает по углу $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ координатной плоскости Oxy следующим образом: из точки $(x; y)$ кенгуру может прыгнуть в точку $(x+1; y-1)$ или в точку $(x-5; y+7)$, причем прыгать в точки, у которых одна из координат отрицательна, не разрешается. Из каких начальных точек $(x; y)$ кенгуру не может попасть в точку, находящуюся на расстоянии больше 1000 от начала координат? Нарисуйте множество всех таких точек $(x; y)$ и найдите его площадь.*



Ответом является «ступенчатый треугольник» T (см. рис.): он содержит два граничных полуоткрытых промежутка $[O; A[$, $[O; B[$ (где A и B — точки с координатами $(5; 0)$ и $(0; 5)$ соответственно), но не содержит никаких других граничных точек (точек десяти отрезков, ограничивающих «ступеньки»). Площадь его, очевидно, равна 15.

Достаточно доказать, во-первых, что из «треугольника» T кенгуру выйти не может, и, во-вторых, что из остальных точек угла $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ может удалиться сколь угодно далеко от начала координат. Первое очевидно: находясь в T, кенгуру может совершать только прыжки типа $(1; -1)$, и поэтому неизбежно окажется на оси Ox. Для доказательства второго утверждения заметим, что комбинация пяти прыжков $(1; -1)$ и одного прыжка $(-5; 7)$ дает «прыжок» $(0; 2)$; поэтому кенгуру, находящихся в области $M_1 = \{(x; y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 5\}$, легко убежит вертикально вверх, многократно повторяя эту комбинацию из шести прыжков. Если кенгуру находится в области $M_2 = \{(x; y) \mid x \geqslant 1, 5 > y \geqslant 4\}$, то сделав четыре прыжка $(1; -1)$ и один прыжок $(-5; 7)$, кенгуру попадет в область M_1, откуда он уже умеет убегать. Аналогично находятся еще четыре «области убегания» M_3, M_4, M_5, M_6

$$(M_{6-k} = \{(x; y) \mid x \geqslant 5-k, k+1 > y \geqslant k\}, k = 3, 2, 1, 0).$$

А. Сосинский

◆

М574. *Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из чисел 0 и 1 должна удовлетворять следующему условию: для любого целого k от 0 до $n-1$ сумма*

$$a_1a_{k+1} + a_2a_{k+2} + \ldots + a_{n-k}a_n$$

является нечетным числом.
а) Придумайте такую последовательность для $n = 25$.
б) Докажите, что такая последовательность существует для некоторого $n > 1000$.

Еще одна формулировка задачи **М574**:
Найдите последовательность $e_1 < e_2 < \ldots < e_l$ натуральных чисел такую, что каждое число от 1 до $e_l - e_1$ представляется в виде разности $e_i - e_j$ некоторых из этих чисел нечетным числом способов.

Первое решение. Легко придумать такую последовательность из четырех чисел: $A_1 = 1101$. Чтобы построить нужную последовательность из двадцати пяти чисел, мы трижды используем A_1, причем разделяем A_1 нулями так:

$$A_2 = 1101\ 000\ 1101\ 0000000000\ 1101.$$

Такое построение можно продолжить и далее: если последовательность $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ удовлетворяет условию задачи, то и последовательность

$$B = (\underbrace{A}_{n}\ \underbrace{00\ldots0}_{n-1}\ \underbrace{A}_{n}\ \underbrace{00\ldots0}_{3n-2}\ \underbrace{A}_{n}) = (b_1, b_2, \ldots, b_{7n-3}),$$

состоящая из трех наборов A и двух наборов нулей между ними, также ему удовлетворяет.

Докажем более общий факт: вместе с последовательностями $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $C = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ удовлетворяет условию задачи и последовательность B длины $(2n-1)(m-1)+n$ из m «блоков»:

$$\begin{aligned} B = (a_1c_1, \quad & a_2c_1, \quad \ldots, a_nc_1, \quad \overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n-1}, \\ a_1c_2, \quad & a_2c_2, \quad \ldots, a_nc_2, \quad 0, 0, \ldots, 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1c_{m-1}, \quad & a_2c_{m-1}, \quad \ldots, a_nc_{m-1}, \quad 0, 0, \ldots, 0, \\ a_1c_m, \quad & a_2c_m, \quad \ldots, a_nc_m); \end{aligned}$$

здесь j-й блок повторяет последовательность A, если $c_j = 1$, и нулевой, если $c_j = 0$.

Пусть целое $k = (2n-1)q + r$, где $q = 0$; $r = 0, 1, \ldots, n-1$ или $-n < r < n$, $0 < q < m$ (q и r — целые). Тогда при сдвиге последовательности B на k мест j-й блок $(a_1c_j, a_2c_j, \ldots, a_nc_j)$ будет пересекаться только с $(j+q)$-м блоком исходной последовательности, причем со сдвигом на r единиц в индексах a_i; поэтому сумма $S_k(B)=b_1b_{k+1}+b_2b_{k+2}+b_3b_{k+3}+\dots$ представляется в виде произведения

$$(c_1c_{j+1}+c_2c_{j+2}+\dots)(a_1a_{1+|r|}+a_2a_{2+|r|}+\dots)=S_j(C)S_{|r|}(A)$$

и, следовательно, является нечетным числом для любого целого k от 0 до $(2n-1)(m-1)+(n-1)$. При $C=(1, 1, 0, 1)$ получаем нужный нам частный случай.

Таким образом, по набору длины n, удовлетворяющему условию задачи, можно построить набор длины $7n-3$, также удовлетворяющий этому условию. Начиная с набора длины 1, состоящего из одной единицы, мы получим бесконечную серию таких наборов: A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_l, ... Их длины будут равны 4, 25, 172, 1201, ..., $(7^l+1)/2$,...

На полях показано, как, используя семиричную систему счисления, можно сразу выписать последовательность A_l для любого $l=0, 1, 2,\dots$

Второе решение задачи б). Определим семейство последовательностей $\{D_n\}$ по индукции следующим образом: $D_0=(1)$ и если $D_n=(d_1, d_2, d_3, \dots, d_r)$, то

$$D_{n+1}=(1, 0, 1, d_1, 1, 0, 1, d_2, 1, 0, 1, d_3, \dots, 1, 0, 1, d_{r-1}, 1, 0, 1, d_r).$$

(Например, $D_1=(1, 0, 1, 1)$, $D_2=(1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$.)

Доказать, что D_n удовлетворяет условию задачи, можно по индукции. При этом нужно рассмотреть отдельно четыре случая: $k=4l$, $k=4l+1$, $k=4l+2$, $k=4l+3$, причем для разбора случаев $k=4l+1$ и $k=4l+3$ нужно предварительно доказать (тоже индукцией) следующую лемму:

Каждая последовательность $D_n=(d_1, d_2, d_3, \dots, d_r)$ симметрична: $d_j=d_{r-j}$ для всех $1\leq j\leq r-1$, и $d_r=1$.

Рассмотрим, например, случай $k=4l+1$. Написав под D_{n+1} эту же последовательность, сдвинутую на $4l+1$ членов, легко найти

$$S_k(D_{n+1})=(d_{l+1}d_1+d_{l+2}+d_2+\dots+d_{r-1}+d_{r-l-1})+d_r=$$
$$=(d_1+d_2+\dots+d_{r-l-1})+(d_{l+1}+d_{l+2}+\dots+d_{r-1})+d_r,$$

и это число нечетное по лемме о симметрии D_n. Для $k=4l+3$ доказательство аналогично предыдущему, а случаи $k=4l$ и $k=4l+2$ более просты.

К сожалению, этот метод не позволяет получить из любой последовательности длины n последовательность длины $4n$. Для его применения необходимо соблюдение условий леммы о симметрии, что бывает, конечно, далеко не всегда.

При первом из описанных способов построения бесконечной серии последовательностей A_0, A_1, A_2, ..., удовлетворяющих условию задачи, их длины равны $(7^l+1)/2$ $(l=0, 1, 2, \dots)$. Второй способ дает последовательности с длинами 4^l $(l=0, 1, 2, \dots)$. Какие же значения может принимать длина последовательности, удовлетворяющей условию задачи? Оказывается, те значения n, для которых $2n-1$ является делителем числа 2^k-1 при некотором нечетном k. Это показали в 1976 году Ф. Дж. Мак Вильямс и А. И. Одлызко. Такие $2n-1$ в пределах сотни и соответствующие последовательности для $n=12$ и $n=24$ указаны на полях. Легко проверить, что длины построенных нами последовательностей удовлетворяют этому критерию: если $n=(7^l+1)/2$, $l\geq1$, то $2n-1$ делит $2^{3\cdot7^{l-1}}-1$ (докажите!), а если $n=4^l$, то $2n-1$ делит $2^{2l+1}-1$. Примеры последовательностей достаточно строить для тех n, удовлетворяющих критерию, у которых $2n-1$ — простое (подумайте, как получить из них остальные). Но для более глубокого анализа задачи и доказательства общего результата нужно перейти на новый, неэлементарный язык, типичный для алгебраической теории кодирования: последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ нулей и единиц рассматривать как многочлен $A(x)=a_1+a_2x+\dots+a_nx^{n-1}$ с коэффициентами из поля $F_2=\{0, 1\}$ (в этом поле $1+1=0$)*), удов-

Выпишем подряд l-значные числа семиричной системы от $\underbrace{11\dots1}_{l}$ до $\underbrace{44\dots4}_{l}$ (их будет $(7^l+1)/2$). Против тех чисел, в записи которых встречаются только цифры 1, 2 и 4, поставим 1, а против остальных — 0. Получим последовательность A_l, удовлетворяющую условию. Например, при $l=2$ получится A_2:

11	1	26	0
12	1	30	0
13	0	31	0
14	1	32	0
15	0	33	0
16	0	34	0
20	0	35	0
21	1	36	0
22	1	40	0
23	0	41	1
24	1	42	1
25	0	43	0
	44	1	

n	$2n-1$
4	7
12	23
16	31
24	47
25	49
36	71
37	73
40	79
45	89

Последовательности для $n=12$ и $n=24$ (соответственно, черные и красные столбики):

1	1	1	1
	1		1
1	1	1	1
	1		0
0	0	0	0
	1		0
0	1	1	1
	1		1
0	0	0	0
	1		0
1	1	1	0
	0		1

---

*) См. статью С. Ашманова в «Кванте», 1980, № 2.

летворяющую такому условию (*): *в разложении выражения $A(x)A(x^{-1})$ по степеням x все коэффициенты при $x^{-(n-1)}$, $x^{-(n-2)}$, ..., x^{n-2}, x^{n-1} нечетны.*

Наши два решения на этом языке коротко формулируются так:

1) вместе с многочленами $A(x)$ степени $(p-1)/2$ и $C(x)$ степени $(q-1)/2$ условию (*) удовлетворяет также многочлен $A(x)\cdot C(x^p)=B(x)$ степени $(pq-1)/2$;

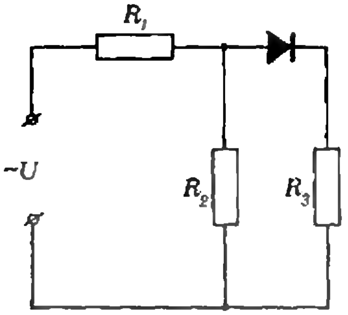
2) в последовательности $D_1(x)=1+x^2+x^3$, $D_{n+1}(x)=(1-x^{4^n})/(1-x^2)+D_n(x^4)$ все многочлены удовлетворяют условию (*).

Н. Васильев, С. Конягин, А. Разборов

Новый вариант задачи **М574** *получится, если располагать последовательность из 0 и 1 на окружности и требовать, чтобы при любом k сумма попарных произведений членов, отстоящих на k, была нечетной. Если Вам удается получить результаты по этой задаче, напишите нам об этом.*

◆

Ф579. *В схеме, показанной на рисунке, $R_1=10$ Ом, $R_2=20$ Ом, $R_3=15$ Ом, напряжение в сети переменного тока $U=10$ В. Определить мощность, которая выделяется на резисторах с сопротивлением R_2 и R_3.*



Половину периода T переменного тока диод закрыт, и через резистор R_2 течет переменный ток $I=\frac{U}{R_1+R_2}$. За время $T/2$ на резисторе R_2 выделяется энергия

$$W''=I^2R_2\frac{T}{2}=\frac{U^2R_2T}{2(R_1+R_2)^2}.$$

Вторую половину периода диод открыт. Общее сопротивление резисторов R_2 и R_3, соединенных параллельно, равно $R_0=\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$. Напряжение на этих резисторах равно $U_0=\frac{U}{R_1+R_0}R_0$.

За эту половину периода на резисторах R_2 и R_3 выделяются соответственно энергии

$$W'''=U_0^2R_2\frac{T}{2}=\frac{U^2R_0T}{2R_2(R_1+R_0)^2},$$

$$W_3=U_0^2R_3\frac{T}{2}=\frac{U^2R_0T}{2R_3(R_1+R_0)^2}.$$

Средние мощности, выделяющиеся на резисторах R_2 и R_3 за полный период, равны соответственно

$$N_2=\frac{W'+W'''}{T}=\frac{U^2R_2}{2(R_1+R_2)^2}+\frac{U^2R_0}{2R_2(R_1+R_0)^2},$$

$$N_3=\frac{W_3}{T}=\frac{U^2R_0}{2R_3(R_1+R_0)^2}.$$

Подставив численные значения величин U, R_1, R_2, R_3, найдем

$$N_2\approx1{,}6\ \text{Вт},\qquad N_3\approx0{,}7\ \text{Вт}.$$

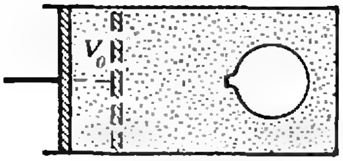
Г. Коткин

◆

Ф586. *Теплоизолированный сосуд откачан до глубокого вакуума. Окружающий сосуд одноатомный идеальный газ имеет температуру T_0. В некоторый момент открывают кран, и происходит заполнение сосуда газом. Какую температуру T будет иметь газ в сосуде сразу после его заполнения?*

Чтобы понять, как при заполнении сосуда газом изменяется температура, нужно рассмотреть происходящие при этом энергетические превращения. При открывании крана какая-то порция газа заталкивается в сосуд силами давления окружающего газа. Благодаря работе этих сил врывающийся в сосуд газ приобретает кинетическую энергию направленного макроскопического движения — он входит в сосуд струей. При встрече со стенками сосуда и с уже попавшим в сосуд газом струя меняет направление, ослабевает и в конце концов рассеивается. При этом кинетическая энергия упорядоченного движения газа в струе превращается во внутреннюю энергию, то есть энергию хаотического теплового движения его молекул.

Все это происходит настолько быстро, что теплообменом входящего в сосуд газа с окружающим газом и стенками можно пренебречь. Поэтому для всего рассматриваемого процесса



первый закон термодинамики имеет вид: работа A сил давления окружающего сосуд газа над вошедшим в сосуд газом равна изменению внутренней энергии ΔU вошедшего газа:

$$A=\Delta U. \qquad (1)$$

При заполнении небольшого откачанного сосуда давление и температура в атмосфере окружающего газа остаются неизменными. Поэтому для нахождения работы A представим себе, что наш откачанный сосуд находится внутри большого цилиндра с подвижным поршнем (см. рис.). Цилиндр заполнен газом, температура которого T_0; давление газа в цилиндре p_0. Процессу заполнения сосуда соответствует перемещение поршня вправо при постоянном давлении p_0. Действующая слева на поршень сила совершает работу p_0V_0, где V_0 — объем, «вытесняемый» при перемещении поршня. Эта работа и будет равна интересующей нас работе внешних сил над заталкиваемым в сосуд газом, так как энергия не вошедшего в сосуд газа внутри цилиндра остается неизменной. Обратим внимание на то, что объем V_0 не совпадает с внутренним объемом заполняемого сосуда, так как температура T газа в сосуде отличается от T_0.

С помощью уравнения состояния идеального газа работу A можно выразить через температуру T_0 и количество газа ν, вошедшего в сосуд:

$$A=p_0V_0=\nu RT_0. \qquad (2)$$

Изменение внутренней энергии ΔU газа, вошедшего в сосуд, равно

$$\Delta U=\nu\times\frac{3}{2}R(T-T_0). \qquad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение первого закона термодинамики (1), получаем

$$T=\frac{5}{3}T_0.$$

Таким образом, температура заполнившего откачанный сосуд газа оказывается выше температуры окружающего сосуд газа. Отметим, что полученный результат не зависит ни от объема сосуда, ни от давления p_0. Температура газа в сосуде не зависит также и от того, будет ли заполнение сосуда происходить до конца, пока давление в нем не сравняется с давлением газа в окружающей среде, или кран будет перекрыт раньше.

Е. Бутиков, А. Быков, А. Кондратьев

Ф587. *Проводник массы M и длины l подвешен к диэлектрику за концы с помощью двух одинаковых проводящих невесомых пружин с общим коэффициентом жесткости k. К верхним концам пружин подсоединен конденсатор емкости C. Вся конструкция висит в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости конструкции.*

Проводник смещают в вертикальной плоскости из положения равновесия и отпускают. Определить дальнейшее движение проводника в вертикальной плоскости. Сопротивлением, собственной индуктивностью и емкостью проводников пренебречь.

◆

Направим координатную ось X вертикально вниз; за начало отсчета координат примем положение равновесия стержня (см. рисунок).

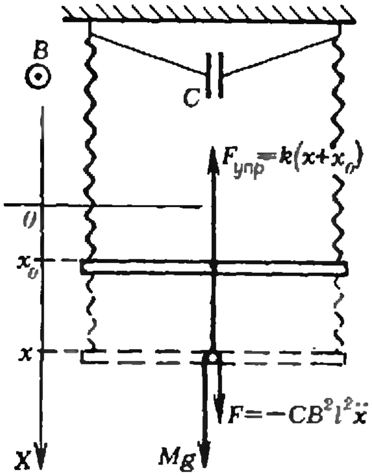
Пусть x_0 — удлинение каждой пружины в этом положении. Согласно II закону Ньютона:

$$Mg-kx_0=0. \qquad (*)$$

При смещении стержня из положения равновесия сила тяжести остается неизменной, а сила упругости меняется. Следовательно, после того как стержень отпускают, он начинает двигаться с ускорением по направлению к положению равновесия. Так как это движение происходит в магнитном поле, в стержне возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}=Bvl$, где $v=\dot{x}$ меняющаяся со временем скорость стержня. В цепи появляется ток, и конденсатор заряжается. Поскольку сопротивление проводящих пружин равно нулю, напряжение на конденсаторе равно $\mathcal{E}$ и заряд q конденсатора равен $C\mathcal{E}=CBvl$. Следовательно, ток в цепи в любой момент времени равен

$$i=\dot{q}=C\dot{\mathcal{E}}=CB\dot{v}l=CB\ddot{x}l.$$

На стержень с током в магнитном поле действует сила $\vec{F}$



такая, что

$$|\vec F| = |\vec B| Il = CB^2l^2|\ddot x|.$$

Как направлена эта сила? Примем для определенности, что магнитное поле направлено к нам. При движении стержня вверх ЭДС, возникающая благодаря действию на свободные электроны силы Лоренца, направлена слева направо. Пока стержень находится ниже положения равновесия (ускорение направлено вверх), направление тока в стержне совпадает с направлением ЭДС, а конденсатор заряжается. При этом сила $\vec F$ направлена вниз, то есть противоположно ускорению $\ddot x$ стержня. Когда стержень оказывается выше положения равновесия, направление ЭДС остается прежним, но скорость стержня, а следовательно, и ЭДС уменьшаются. При этом конденсатор разряжается, ток в стержне меняет направление, и следовательно, сила $\vec F$ тоже меняет направление — теперь она направлена вверх, то есть опять противоположно ускорению. Рассмотрев движение стержня вниз, мы убедимся, что и в этом случае направление силы $\vec F$ противоположно направлению ускорения стержня. Таким образом,

$$F = -CB^2l^2\ddot x.$$

Запишем теперь уравнение движения стержня:

$$M\ddot x = Mg - k(x+x_0) - CB^2l^2\ddot x.$$

Учитывая, что $Mg = kx_0$ (см. (*)), окончательно имеем

$$M\ddot x + CB^2l^2\ddot x = -kx.$$

Такое уравнение, как известно, описывает гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+CB^2l^2}}.$$

Амплитуда A колебаний равна первоначальному отклонению стержня, и в любой момент времени

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+CB^2l^2}}\,t\right).$$

(Роль конденсатора, как мы видим, сводится к увеличению инертности стержня.)

Д. Футорский

Список читателей, приславших правильные решения задач из задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач Ф573—Ф587.

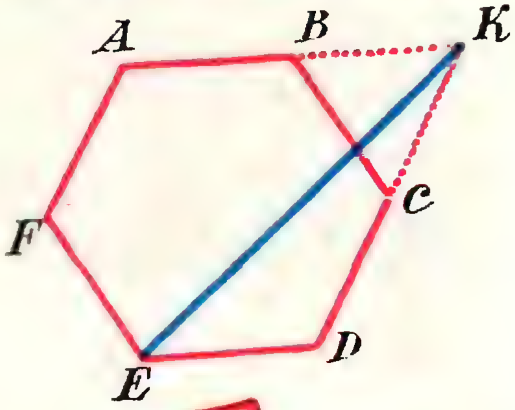
Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф573—Ф587**, справились с задачами **Ф573, Ф577, Ф581** и **Ф585**. Остальные задачи правильно решили: *В. Абаджаев* (Львов) **75, 76, 79, 82**; *А. Абрамочкин* (Киев) **74—76, 80, 82**; *В. Аветисов* (Баку) **83, 84**; *М. Алексеев* (Обнинск) **75**; *Э. Алискиндеров* (с. Даш АзССР) **74**; *И. Аполонский* (Жуковский) **74—76, 78—80, 83, 84**; *З. Априамашвили* (с. Арали ГрССР) **74, 75, 78**; *Л. Арушанов* (Баку) **74, 76, 82**; *Р. Бабаев* (Баку) **76, 78, 79, 82—84**; *Л. Балюк* (с. Журавки Крымской обл.) **74—76, 78**; *Д. Барадулин* (Киев) **82**; *А. Барышников* (Москва) **78**; *В. Белоус* (Днепропетровск) **76, 78—80, 82**; *И. Бельчинский* (Москва) **74, 75, 82**; *А. Беляев* (Витебск) **74**; *А. Белянский* (Семипалатинск) **76**; *О. Березовский* (Днепропетровск) **74**; *В. Беренцов* (Челябинск) **79**; *А. Бессарабский* (п. Запрудня Московской обл.) **74—76, 78—80, 82—84, 86, 87**; *И. Бессонов* (Реутов) **74—76, 78—80, 82—84**; *А. Божко* (Алма-Ата) **74, 76**; *И. Боколишвили* (Тбилиси) **82**; *А. Боричев* (Ленинград) **74, 76**; *И. Боровиков* (Красноярск) **82**; *С. Боханов* (Новополоцк) **84**; *Л. Брагинский* (Волгодонск) **74, 80, 82, 84, 87**; *Л. Брагинский* (Киев) **78, 82**; *В. Бридан* (Николаев) **84**; *В. Булгаков* (Узловая) **80**; *С. Вагнер* (Джезказган) **74, 76, 78—80, 82—84**; *В. Васильев* (Великие Луки) **74, 76, 78—80, 82**; *О. Васильев* (Казань) **83**; *Б. Вейцман* (Одесса) **74, 80, 82—84, 87**; *А. Велько* (п. Сахарный завод Минской обл.) **80**; *П. Ветрук* (Тернополь) **75, 76**; *Е. Войтенко* (Киев) **74, 76, 79, 80, 82**; *А. Вольнов* (Киев) **84**; *В. Ворона* (Славянск) **74, 75, 79, 80, 82—84**; *Е. Выродов* (Подольск) **74, 78—80, 82—84**; *Р. Габдуллин* (д. Старобаишево БашАССР) **82, 86**; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) **74, 76**; *В. Глебкин* (п. Красково Московской обл.) **74, 80**.

(Продолжение см. на с. 41)

«Квант» для младших школьников

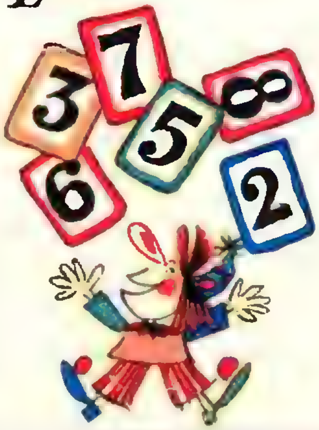
Задачи

1. У школьника было несколько монет достоинством в 15 коп. и 20 коп., причем двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, заплатив две монеты за билет в кино. Половину оставшихся у него денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?



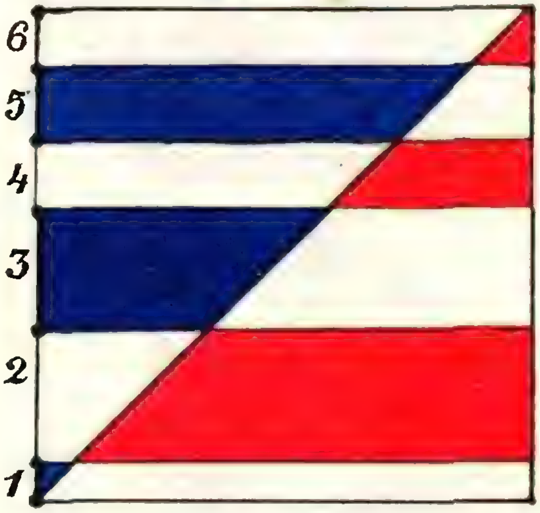
2. Разрежьте квадрат на три части так, чтобы из них можно было сложить тупоугольный треугольник.

3. Стороны AB и CD ($|AB| = |CD| = 1$) правильного шестиугольника $ABCDEF$ продолжены до пересечения в точке K (см. рисунок). Докажите, что $|EK| = \sqrt{7}$.

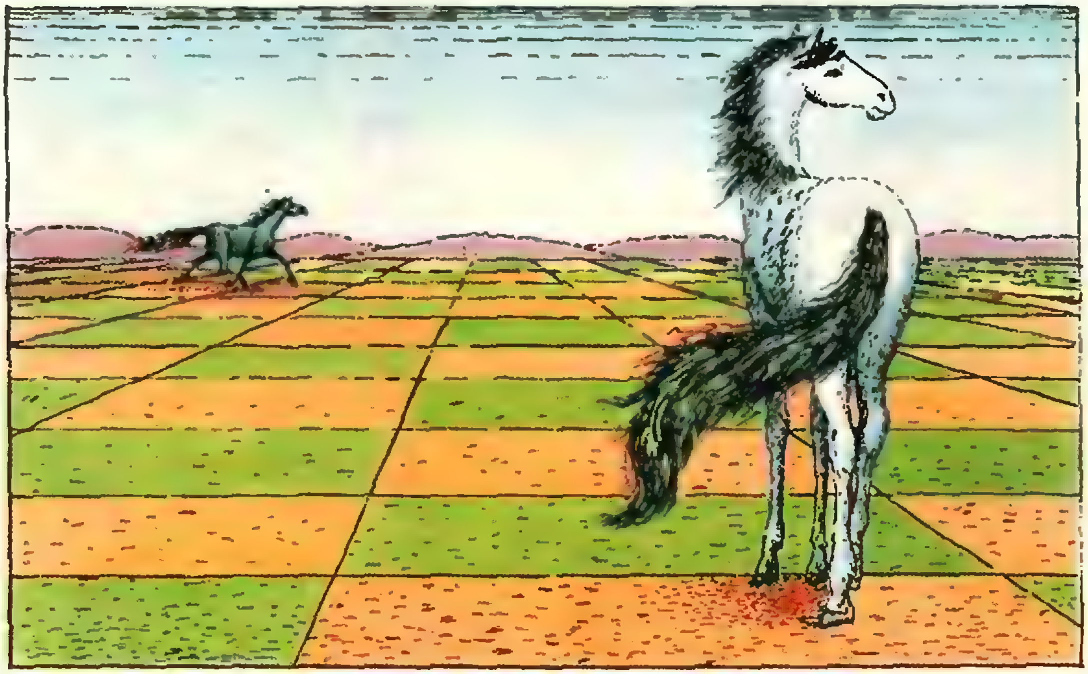


4. На карточках, изображенных на рисунке, написаны цифры. Сложите с их помощью четырехзначное число, являющееся полным квадратом.

5. На стороне квадрата взято несколько точек так, что сумма длин первого, третьего и т. д. отрезков (см. рисунок) совпадает с суммой длин второго, четвертого и т. д. отрезков. Через взятые точки проведены прямые, параллельные другой стороне квадрата. Докажите, что суммарная площадь синих «полосок» и суммарная площадь красных «полосок» одинаковы.



Эти задачи нам предложили
М. Комушенко, А. Швецов, А. Эйвазов и *В. Произволов*



С. Белый

Разноцветная математика

«Творчество математика в такой же степени есть создание прекрасного, как творчество живописца или поэта, — совокупность идей, подобно совокупности красок или слов, должна обладать внутренней гармонией. Красота есть первый пробный камень для математической идеи; в мире нет места уродливой математике»,— говорил известный английский математик Годфри Гарольд Харди.

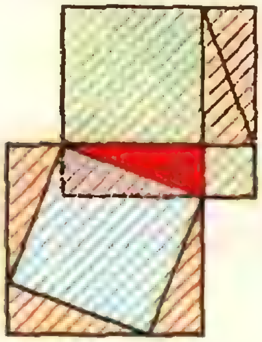


Рис. 1.

Однако есть и более явные связи математики с живописью: математикам очень часто помогает... цвет. Да, да — цвет! Наверняка не раз на уроках геометрии ваш учитель математики использовал цветные мелки, отмечая ими конгруэнтные отрезки, равновеликие фигуры, одинаковые углы... Взгляните, например, на рисунок 1. Там красным цветом выделен центральный прямоугольный треугольник, а красной штриховкой — еще шесть ему конгруэнтных. Теперь нетрудно увидеть, что сумма площадей двух заштрихованных зеленым квадратов равна площади квадрата, заштрихованного синим. Доказана теорема Пифагора!

Но, оказывается, раскраска может стать даже методом решения задач.

Начнем с задачи-головоломки: *найдем проход к центру лабиринта, изображенного на рисунке 2.* Для этого закрасим все «тупики» лабиринта, то есть те его участки, из которых нет хода (см. рис. 3). Тогда то, что останется незакрашенным, и будет искомым путем. Попробуйте испытать этот метод на лабиринте, изображенном на рисунке 4. Укажите все пути, ведущие к центру; подсчитайте, сколько их и найдите самый короткий.

Следующий пример навеян известной шахматной задачей: *обойти конем всю шахматную доску и вернуться на исходное поле*. У нее много различных решений. А вот можно ли обойти доску другой формы? Например, прямоугольную доску размером 7×9 полей? Оказывается, нельзя. И доказать это нам опять поможет «раскраска».

Раскрасим доску размером 7×9 полей «в шахматном порядке», начиная с углового поля: черное поле, белое поле, черное поле, белое поле, ... Тогда все угловые поля доски будут черными; более того, черных полей будет 32, а белых — 31 (почему?). Но после каждого хода конь меняет цвет поля, на котором он стоял. Поэтому если бы конь обошел все поля доски и вернулся на исходное поле, то он побывал бы на одинаковом количестве черных и белых полей. Поскольку на нашей доске черных полей больше, чем белых, хотя бы одно черное поле останется непосещенным нашим конем-путешественником.

Ну, а можно ли обойти конем доску размером 4×8 полей? Оказывается, тоже нельзя. Красивое доказательство этого факта получается, если раскрасить эту доску уже не в два, а в четыре цвета — как на рисунке 5.

Заметим, что с полей синего цвета конь может попасть только на поля желтого цвета и наоборот — на поля синего цвета он может попасть только с полей желтого цвета. Поэтому на пути коня синее поле должно предшествовать желтому полю и непосредственно следовать за желтым: ...ж — с — ж — с — ж... (см. рис. 6).

С полей же желтого цвета конь может перейти еще на поля зеленого цвета. С другой стороны, если конь перейдет с желтого поля на зеленое, то для того чтобы перейти на поле синего цвета, ему предварительно придется побывать на поле желтого цвета. Отсюда следует, что в замкнутом маршруте число желтых полей превосходит число синих (понять это вам поможет рисунок 6!). Но поскольку в действительности число желтых и синих полей одинаково,

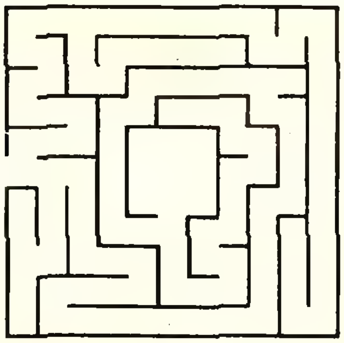


Рис. 2.

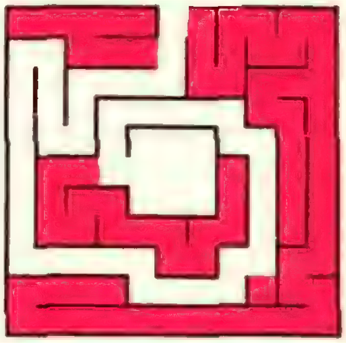


Рис. 3.

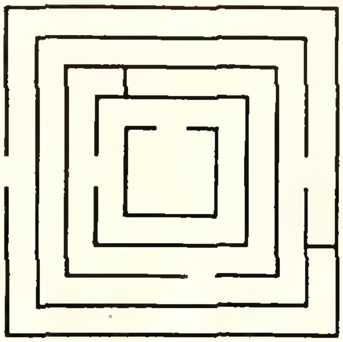


Рис. 4.

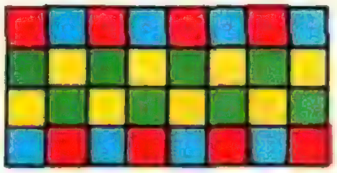


Рис. 5.

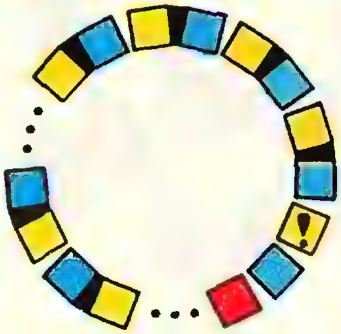


Рис. 6.

полученное противоречие доказывает, что обойти конем доску размером 4×8 полей невозможно.

Еще один пример: *можно ли куб размером 6×6×6 сложить из 27 «кирпичей» размером 1×2×4?*

Будем считать, что куб 6×6×6 составлен из 27 «блоков» размером 2×2×2, раскрашенных в синий и белый цвета и расположенных в «шахматном порядке» (рис. 7); пусть при этом будет 14 синих «блоков» и 13 белых «блоков». Теперь заметим, что как бы мы ни располагали «кирпич» 1×2×4 внутри большого куба, половина составляющих его единичных кубиков (1×1×1) окажутся синими и половина — белыми. Поэтому если бы куб размером 6×6×6 можно было сложить из 27 кирпичей 1×2×4, то при «шахматной укладке» этого куба «блоками» 2×2×2 в нем белых единичных кубиков было бы столько же, сколько синих. На самом же деле у нас 108 белых единичных кубиков и 112 — синих. Поэтому куб 6×6×6 из 27 кирпичей 1×2×4 сложить нельзя.

После всего рассказанного вы уже не удивитесь, узнав, что в математике существует много задач и теорем о различных раскрасках. Наиболее знаменитая из них — *проблема четырех красок**), состоявшая в том, чтобы доказать или опровергнуть следующую гипотезу:

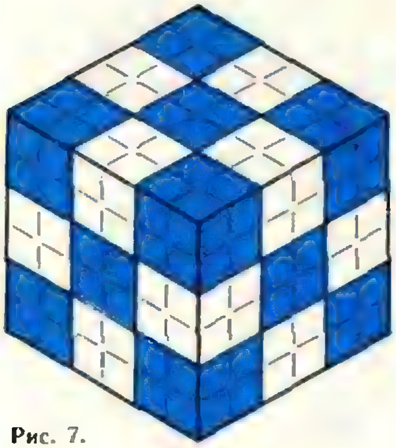


Рис. 7.

«Любую карту на плоскости можно раскрасить не более чем в четыре цвета так, чтобы любые две соседние страны были раскрашены в разные цвета» (страны считаются соседними, если они имеют общий участок границы; страны, имеющие лишь отдельные общие точки, соседними не считаются). Впервые об этой задаче упомянул в письме к Гамильтону английский математик Де Морган (1852 г.). Затем ее сформулировал с трибуны Британского географического общества выдающийся английский математик Артур Кэли (1878 г.). С тех пор проблемой четырех красок «переболели» тысячи любителей и математиков. Почти сто лет она казалась неприступной. В результате многолетней кропотливой работы было доказано, что любая карта, содержащая не более 41 страны, может быть раскрашена в четыре цвета требуемым образом; но это, конечно, далеко не решало всей проблемы. Лишь совсем недавно, в сентябре 1976 года, в журнале Американского математического общества «Bulletin of American Mathematical Society» появилось сообщение американских математиков Аппеля и Хакена, доказавших знаменитую гипотезу (замечательно, что в доказательстве «принимала участие», и весьма существенное, ЭВМ).

Вместе с тем еще в конце XIX века было установлено, что *любую карту на плоскости можно правильно раскрасить пятью красками* («правильно» означает — так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет). Попробуйте найти самостоятельно доказательство этого факта. Но вначале — поэкспериментируйте.

1. *Нарисуйте карту из четырех стран, которую нельзя было бы правильно раскрасить двумя или тремя красками.*

2. *Проведите несколько прямых; докажите, что образуемую ими карту можно правильно раскрасить двумя красками.*

---

*) О проблеме четырех красок см. «Квант»: 1972, № 4, с. 33; 1974, № 2, с. 58; 1974, № 4, с. 23 и 1977, № 1, с. 60.

Г. Перевалов

Что значит «знать»?

Вероятно, многие из читателей «Кванта» собираются после окончания школы поступать в вуз. Конечно, всех волнует вопрос, какие требования предъявляются к знаниям. Что и как нужно знать? Попробуем объяснить это на нескольких примерах.

Математика состоит из аксиом, теорем и доказательств. Наряду с этим в математике фундаментальную роль играют определения. Знать математику — это значит знать все ее части. Причем к каждой части нужен свой особый подход.

Например, что значит знать определение предела функции? Вот что мы услышали на уроке математики в одной из московских школ.

* * *

Учитель. *Что означает равенство*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b? \qquad (1)$$

Ученик. *Равенство* (1) *означает, что число* b *является пределом функции* f *при* x*, стремящемся к* a*.*

Учитель. *Это еще не ответ. В чем* с м ы с л *равенства* (1)?

Ученик. *Равенство* (1) *означает, что для любого положительного числа* ε *найдется такое положительное число* δ*, что при всех* $x \neq a$*, удовлетворяющих неравенству* $|x-a| < \delta$*, будет выполняться неравенство* $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Учитель. *Верно. Теперь найди предел функции* $f(x) = 2x+3$ *при* x*, стремящемся к* 1.

Ученик (пишет).

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x+3) = 5. \qquad (2)$$

Учитель. *Каков же точный смысл равенства* (2)?

Ученик. *Для любого положительного числа* ε *найдется такое положительное* δ*, что при всех* $x \neq 1$*, удовлетворяющих неравенству*

$$|x-1| < \delta, \qquad (3)$$

будет выполняться неравенство

$$|(2x+3)-5| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Учитель. *Совершенно верно. А теперь «поработай» с определением: докажи с его помощью равенство* (2).

Ученик. *Возьмем произвольное число* $\varepsilon > 0$*. Чтобы найти* δ*, перепишем* (4) *так:*

$$2|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \varepsilon/2.$$

Положим $\delta = \varepsilon/2$*. Тогда* $\delta > 0$ *и для всех* $x \neq 1$ *таких, что* $|x-1| < \delta$*, выполняется неравенство* (4)*. Значит, число* 5 *действительно является пределом функции* $f(x) = 2x+3$ *при* x*, стремящемся к* 1.

Учитель. *Очень хорошо. А не мог бы ты дать геометрическую иллюстрацию определения предела функции?*

Ученик. *Равенство* (1) *означает, что какую бы* ε*-окрестность* $]b-\varepsilon;\ b+\varepsilon[$ *точки* b *мы ни взяли,*

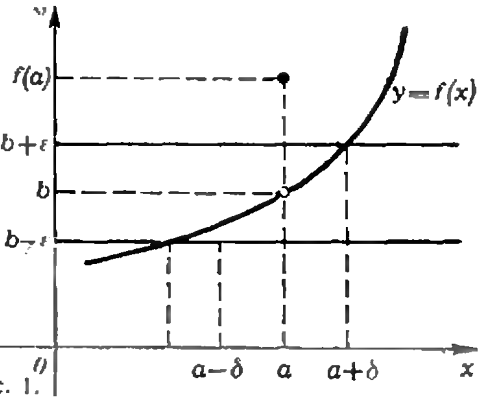


Рис. 1.

найдется такая δ-окрестность $]a-\delta;\ a+\delta[$ *точки* a, *для любой точки* $x_0 \in\ ]a-\delta;\ a+\delta[$ *которой, кроме, быть может, точки* a (см. рис. 1), *значение функции* $f(x_0)$ *принадлежит взятой* ε*-окрестности, то есть*

$$f(x_0) \in\ ]b-\varepsilon;\ b+\varepsilon[,$$
$$b-\varepsilon < f(x_0) < b+\varepsilon,$$
$$-\varepsilon < f(x_0)-b < \varepsilon,$$
$$|f(x_0)-b| < \varepsilon.$$

Когда b *действительно является пределом функции* f *при* x, *стремящемся к* a, *то по заданному* $\varepsilon>0$ *нужное* δ *можно найти при помощи чертежа: через точки* $b+\varepsilon$ *и* $b-\varepsilon$ *на оси ординат проведем прямые, параллельные оси абсцисс, точки пересечения этих прямых с графиком функции* f *спроектируем на ось абсцисс; расстояние от точки* $x=a$ *до ближайшей проекции и будет искомым* δ.

Учитель. *Ты не вполне прав. Этот способ годится не всегда. Во-первых, точек пересечения может вообще не быть; так будет, например, если график функции* f *расположен внутри некоторой полоски (рис. 2). Во-вторых, среди проекций точек пересечения может не быть ближайшей. Например, для функции*

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x>0,\\ x, & \text{если } x\leqslant 0\end{cases}$$

(*см. рис.* 3; *поскольку график функции* f *на отрезке* $\left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$ *имеет бесконечное число колебаний, нарисовать его на этом отрезке точно и полностью, конечно, невозможно*)

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

Но при $\varepsilon=\frac{1}{2}$ *прямая* $y=-\frac{1}{2}+\varepsilon=0$ *пересекается с графиком функции* f *в точках* $x=1/\pi k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, *а прямая* $y=-\frac{1}{2}-\varepsilon$ — *в точках* $x=1/(3/2\pi+2\pi k)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

* * *

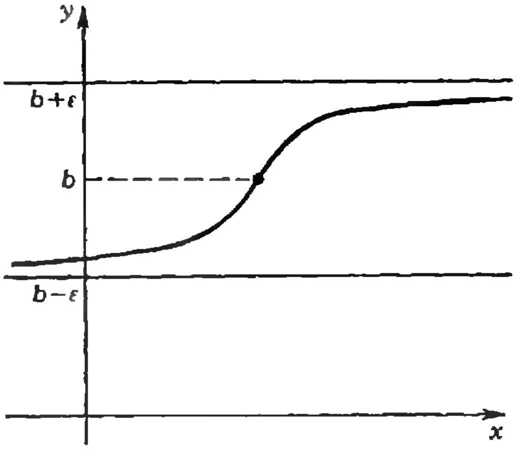


Рис. 2.

Не правда ли, ученика «допрашивали» довольно пристрастно? Но все ли это, что нужно знать про предел функции? Нет, еще не все. Например, надо уметь по графику функции находить ее предел при x, стремящемся к данной точке. Так, функция f, график которой изображен на рисунке 4, при x, стремящемся к a_1, предела не имеет, поскольку не существует окрестности этой точки, для всех точек $x\neq a_1$ которой выполнялось бы неравенство $|f(x)-b_1|<\varepsilon$ (функция определена только справа от a_1). При x, стремящемся к a_2, у функции f также нет предела, так как никакое число b не удовлетворяет определению предела[*]).

При x, стремящемся к a_3, функция f имеет предел b_3 : $\lim\limits_{x\to a_3} f(x)=b_3$, но $b_3\neq f(a_3)$. Говорят, что в точке

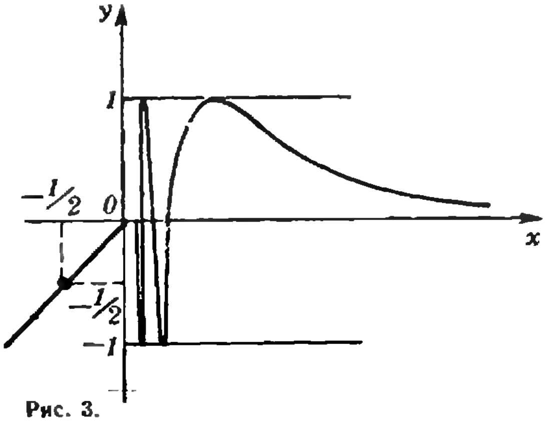


Рис. 3.

---

[*]) В этом легко убедиться, если взять $\varepsilon=\min(|b-b_2'|,\ |b-b_2''|)$ (в частности, $\varepsilon=\frac{b_2''-b_1''}{2}$).

$x=a_3$ функция f имеет *разрыв*. При x, стремящемся к a_4, функция f также имеет предел: $\lim\limits_{x\to a_4} f(x)=b_4$, причем $b_4=f(a_4)$. Говорят, что в точке a_4 функция f *непрерывна*. Существует предел функции f и при x, стремящемся к a_5: $\lim\limits_{x\to a_5} f(x)=b_5$, хотя функция f в этой точке не определена, $a_5 \notin D(f)$.

Вот примерно все, что нужно знать об определении предела функции.

Теперь уже можно ответить на вопрос — что значит *знать определение*. Знать определение — это не только уметь правильно его сформулировать, но и уметь проиллюстрировать его на рисунке или на примере, показать в работе, применить на практике. Вот с такой «меркой» к знанию определения и подходят экзаменаторы на вступительных экзаменах.

А что значит — *знать теорему?* Прежде всего, надо правильно ее сформулировать. Далее: надо знать смысл всех терминов, встречающихся в формулировке теоремы, уметь разъяснить и определить их. Ведь прежде чем доказывать теорему о свойствах некоторого математического объекта, надо, конечно, понимать, что это за объект. Например, невозможно доказать теорему о производной суммы двух функций, не зная определения *производной*.

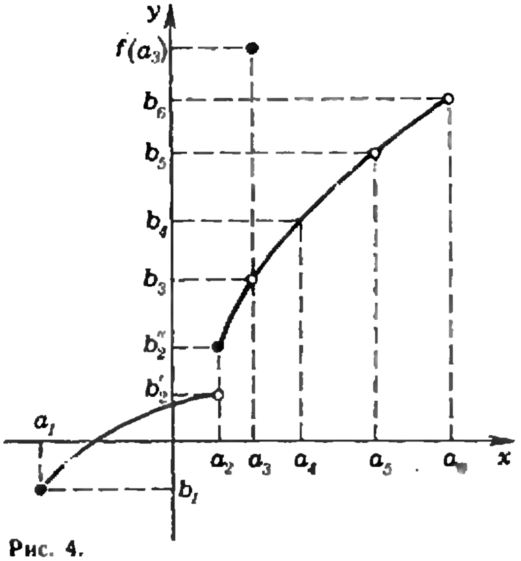


Рис. 4.

Очень полезно также уметь привести пример, опровергающий утверждение, полученное из теоремы отбрасыванием какого-нибудь из ее условий.

Упражнение 1. Опровергните теоремы:

а) *если последовательность монотонна, то она имеет предел;*

б) *если последовательность ограничена, то она имеет предел* *).

Теоремы, содержащие необходимые и достаточные условия, надо уметь расчленять на две: чтобы одна выражала необходимость условия, а другая — его достаточность.

Упражнение 2. Проделайте такую операцию со следующей теоремой**): *функция является обратимой тогда и только тогда, когда каждое свое значение она принимает только один раз.*

---

*) См. теорему Вейерштрасса («Алгебра и начала анализа 9», п. 31).

**) «Алгебра и начала анализа 10», с. 170.

О диофантовом анализе

(Начало см. на с. 16)

Легко сообразить, что в уравнении $x^2-2y^2=1$ число x — нечетное, $x\geqslant 3$. Пусть $x=2n+1$ $(n\geqslant 1)$. Тогда $2n(n+1)=y^2$, откуда следует, что y — число четное. Положим $y=2m$ $(m\geqslant 1$, поскольку $y\geqslant 2)$. Получим $n(n+1)=2m^2$, то есть уравнение вида $T_n=K_m$. Это означает, что уравнение $T_n=K_m$ имеет бесконечное множество решений, так как каждое решение $(x;\ y)$ уравнения $x^2-2y^2=1$ (а их бесконечное множество) порождает решение уравнения $T_n=K_m$, получаемое по формулам $n=\frac{x-1}{2}$, $m=\frac{y}{2}$.

Задача 5. Докажите, что решения (в натуральных числах) уравнения $T_n=K_m$ могут быть описаны следующими двумя способами:

а) $$n_{k+1}=3n_k+4m_k+1,\quad m_{k+1}=2n_k+3m_k+1,\quad n_1=1,\ m_1=1;$$

б) $$n_{k+2}=6n_{k+1}-n_k,\quad m_{k+2}=6m_{k+1}-m_k,\quad n_1=1,\ n_2=8,\ m_1=1,\ m_2=6.$$

Л. Асламазов

Электромагнитная индукция

ЭДС индукции в движущихся проводниках

При движении проводника в магнитном поле в нем возникает электродвижущая сила индукции

$$\mathcal{E}_i = |\vec{B}|\,l\,|\vec{v}|\sin\alpha, \tag{1}$$

где $\vec{B}$ — индукция магнитного поля, l — длина проводника, $\vec{v}$ — его скорость, α — угол между направлением движения проводника и индукцией магнитного поля*). В случае разомкнутого проводника на его концах появляется разность потенциалов, равная ЭДС индукции. При замыкании проводника на внешнюю цепь возникает индукционный ток.

Задача 1. *Металлический стержень скользит с постоянной скоростью $\vec{v}$ по проводящим рельсам в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости рельсов (рис. 1). Концы рельсов замкнуты на проводник сопротивлением R и конденсатор емкостью C. Считая сопротивление рельсов и стержня пренебрежимо малым, найти ток в проводнике и заряд на конденсаторе. Расстояние между рельсами l.*

Так как движущийся стержень, проводник и конденсатор соединены параллельно, величина ЭДС индукции равна напряжению на концах проводника:

$$\mathcal{E}_i = |\vec{B}|\,l\,|\vec{v}| = IR$$

и напряжению на конденсаторе:

$$\mathcal{E}_i = |\vec{B}|\,l\,|\vec{v}| = Q/C.$$

Поэтому ток в проводнике

$$I = |\vec{B}|\,l\,|\vec{v}|/R,$$

а заряд на конденсаторе

$$Q = |\vec{B}|\,l\,|\vec{v}|\,C.$$

Задача 2. *Два одинаковых стержня длиной l каждый вращаются, не мешая друг другу, на одной проводящей оси с угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Концы стержней скользят по металлическому кольцу, которое находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости кольца (рис. 2). Сопротивление каждого стержня R, сопротивление кольца пренебрежимо мало. Найти токи в стержнях и разности потенциалов на их концах.*

Стержень, вращающийся в магнитном поле, можно представить состоящим из отдельных маленьких участков, каждый из которых движется поступательно со скоростью $\vec{v}_r$ (рис. 3). Модуль этой скорости $|\vec{v}_r| = \omega r$, где r — расстояние от выделенного участка до оси вращения. В каждом участке возникает ЭДС индукции

$$\Delta\mathcal{E}_i = |\vec{B}|\,\Delta r\,|\vec{v}_r| = |\vec{B}|\,\Delta r\,\omega r.$$

Полная ЭДС индукции, наводимая в стержне,

$$\mathcal{E}_i = \int_0^l |\vec{B}|\,\omega r\,dr = \frac{|\vec{B}|\,\omega l^2}{2}.$$

Так как сопротивление кольца можно не учитывать, электрическая

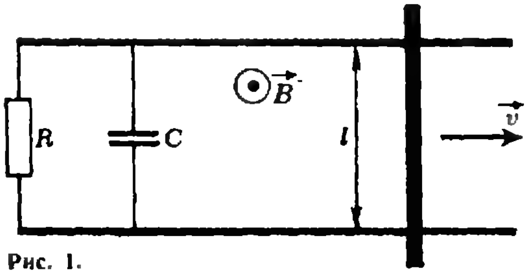


Рис. 1.

---

*) Подробнее о причинах возникновения ЭДС индукции в движущемся проводнике можно прочитать, например, в статье Ю. Зайчикова «Сила Лоренца и ее работа», «Квант», 1979, № 2. (*Прим. ред.*)

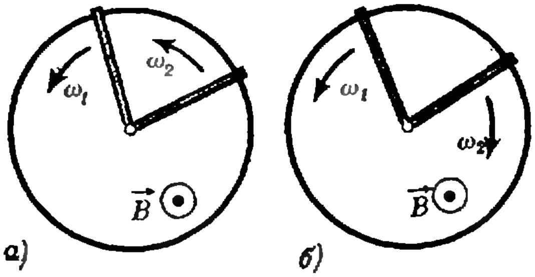


Рис. 2.

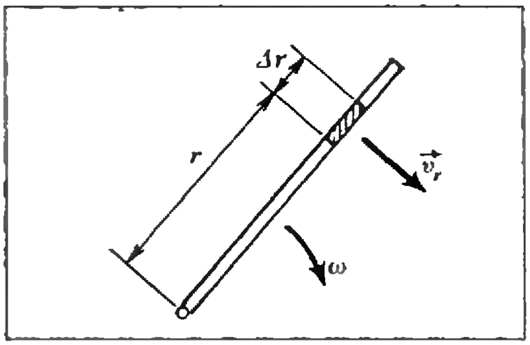


Рис. 3.

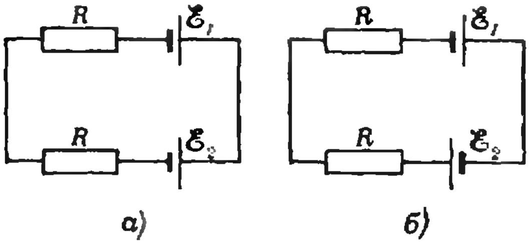


Рис. 4.

схема рассматриваемой задачи сводится к двум источникам с электродвижущими силами $\mathcal{E}_1 = |\vec{B}|\omega_1 l^2/2$ и $\mathcal{E}_2 = |\vec{B}|\omega_2 l^2/2$ и одинаковыми внутренними сопротивлениями R. Источники соединены параллельно в случае вращения стержней в одну сторону (рис. 4,*а*) и последовательно — при вращении в разные стороны (рис. 4,*б*). Следовательно, в первом случае ток в стержнях равен

$$I_а = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{2R} = \frac{|\vec{B}|l^2}{4R}(\omega_1 - \omega_2),$$

а во втором —

$$I_б = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{2R} = \frac{|\vec{B}|l^2}{4R}(\omega_1 + \omega_2).$$

Разности потенциалов на концах обоих стержней одинаковы. Для первого стержня, например, разность потенциалов на его концах равна разности ЭДС индукции и падения напряжения на сопротивлении R:

$$U_а = \mathcal{E}_1 - I_а R = |\vec{B}|l^2(\omega_1 + \omega_2)/4.$$

$$U_б = \mathcal{E}_1 - I_б R = |\vec{B}|l^2(\omega_1 - \omega_2)/4.$$

Заметим, что при вращении стержней с одинаковыми угловыми скоростями в одну сторону ток в стержнях равен нулю (как при параллельном соединении одинаковых источников), а при вращении в разные стороны равна нулю разность потенциалов на концах стержней (как при последовательном соединении одинаковых источников).

Изменение магнитного потока и ЭДС индукции

ЭДС индукции возникает не только при движении проводника в магнитном поле, но и при изменении величины магнитного потока через поверхность, ограниченную проводящим контуром. В таком случае, согласно закону Фарадея, в контуре наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (2)$$

Здесь $\Phi = |\vec{B}|S\cos\alpha$ — магнитный поток ($\vec{B}$ — индукция магнитного поля, S — площадь поверхности, охватываемой контуром, α — угол между индукцией и нормалью к поверхности), $\frac{d\Phi}{dt}$ — скорость изменения магнитного потока. Знак «минус» указывает, что возникающий в контуре индукционный ток препятствует изменению магнитного потока.

Физические причины возникновения ЭДС индукции при движении проводника и при изменении магнитного потока различны. Однако формулой (2) можно пользоваться и для нахождения ЭДС, возникающей в контуре вследствие движения проводника в магнитном поле. (В этом можно убедиться, например, вернувшись к задаче 1. Сделайте это самостоятельно.)

Задача 3. *Проволочная катушка находится в магнитном поле, параллельном оси катушки. При включении магнитного поля за время Δt_1 в катушке возникает ЭДС индук-*

ции $\mathscr{E}_1$. Какая ЭДС индукции наведется в катушке при повороте ее оси на угол α за время Δt_2?

При выключении магнитного поля изменение магнитного потока через каждый виток катушки, взятое с обратным знаком, равно

$$-\Delta\Phi_1 = |\vec{B}|S,$$

где $|\vec{B}|$ — абсолютная величина начальной индукции магнитного поля, а S — площадь поперечного сечения катушки (конечное значение индукции равно нулю). В соответствии с законом Фарадея (2) в катушке возникает ЭДС индукции

$$\mathscr{E}_1 = n\frac{|\vec{B}|S}{\Delta t_1},$$

где n — число витков в катушке. Отсюда

$$n|\vec{B}|S = \mathscr{E}_1\Delta t_1.$$

При повороте катушки магнитный поток меняется вследствие изменения угла между нормалью к плоскостям витков, направленной по оси катушки, и вектором индукции магнитного поля (рис. 5). Начальный поток $\Phi_{\text{нач}} = |\vec{B}|S$, а после поворота на угол α $\Phi_{\text{кон}} = |\vec{B}|S\cos\alpha$. Поэтому

$$-\Delta\Phi_2 = |\vec{B}|S(1-\cos\alpha)$$

и возникающая в катушке ЭДС индукции равна

$$\mathscr{E}_2 = \frac{n|\vec{B}|S(1-\cos\alpha)}{\Delta t_2}.$$

Подставляя в последнюю формулу значение величины $n|\vec{B}|S$, получаем

$$\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}(1-\cos\alpha).$$

Задача 4. *Плоская проволочная рамка находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной ее плоскости. Рамка представляет собой квадрат со стороной a. Затем ее: а) изгибают в прямоугольник с отношением сторон 1:2; б) вытягивают в одну линию; в) изгибают в два квадрата с отношением площадей 1:4 (рис. 6). Найти заряды, протекающие по рамке при каждом изменении ее формы. Сопротивление рамки R.*

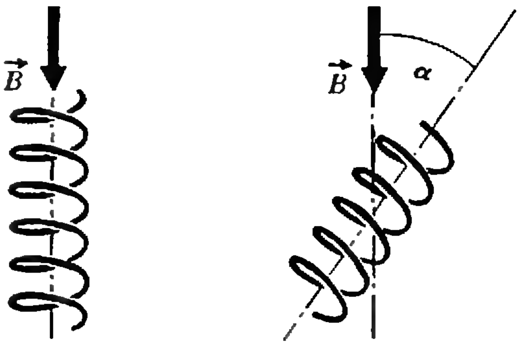


Рис. 5.

Заряд, протекающий по контуру, определяется по формуле

$$Q = I\Delta t = \frac{|\mathscr{E}_i|}{R}\Delta t = \frac{|\Delta\Phi|}{R},$$

где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром, а R — сопротивление контура (заряд зависит не от скорости изменения магнитного потока, а от самого изменения!).

Таким образом, для решения задачи необходимо вычислить соответствующие изменения магнитного потока. В случаях а) и б) эти изменения происходят только вследствие изменения площади поверхности, охватываемой контуром (индукция магнитного поля и направление нормали к плоскости рамки не меняются):

$$\Delta\Phi = |\vec{B}|\Delta S.$$

Так как периметр рамки постоянен, изменение площади в случае а) равно

$$\Delta S_{а} = \left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{4}{3}a\right) - a^2 = -\frac{1}{9}a^2$$

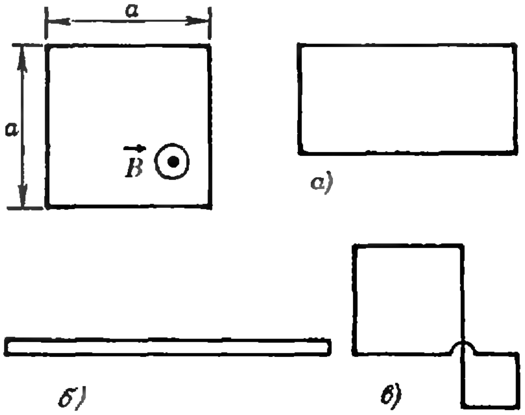


Рис. 6.

и по рамке протекает заряд

$$Q_{\text{а}} = \frac{|\vec{B}||\Delta S_a|}{R} = \frac{|\vec{B}|a^2}{9R}.$$

В случае б) конечная площадь равна нулю, поэтому

$$\Delta S_{\text{б}} = -a^2$$

и

$$Q_{\text{б}} = \frac{|\vec{B}||\Delta S_{\text{б}}|}{R} = \frac{|\vec{B}|a^2}{R}.$$

В случае в) рамку перегибают так, что направление нормали у одного из квадратов оказывается противоположным начальному направлению. Следовательно, полный поток магнитной индукции в этом случае равен разности магнитных потоков через отдельные квадраты:

$$\Phi_{\text{кон}} = |\vec{B}|(S_1 - S_2),$$

где $S_1 = (2/3a)^2 = 4/9a^2$ и $S_2 = S_1/4 = a^2/9$ — площади большего и меньшего квадратов. Тогда

$$\Delta S_{\text{в}} = \left(\frac{4}{9}a^2 - \frac{a^2}{9}\right) - a^2 = -\frac{2}{3}a^2$$

и по рамке протекает заряд

$$Q_{\text{в}} = \frac{|\vec{B}||\Delta S_{\text{в}}|}{R} = \frac{2|\vec{B}|a^2}{3R}.$$

Вихревое электрическое поле и его работа

Причиной появления индукционного тока в контуре, помещенном в переменное магнитное поле, является вихревое электрическое поле, которое возникает в пространстве при изменении магнитного поля. Это поле и приводит в движение электроны в проводящем контуре. В отличие от электростатического поля работа при перемещении заряда по замкнутому контуру здесь не равна нулю: она равна $\mathcal{E}_i$, умноженной на величину перемещаемого заряда.

З а д а ч а 5. *В камере ускорителя по окружности постоянного радиуса R движется тонкий пучок из n электронов, равномерно распределенных по орбите. Магнитный поток через площадь, охватываемую пучком, линейно растет со временем: $\Phi = \alpha t$. В некоторый момент времени величина тока в камере ускорителя равна I_0. Каким станет ток I после того, как частицы сделают один оборот?*

Величина тока I в камере определяется зарядом, проходящим через поперечное сечение за единицу времени. Если линейная скорость электронов v, то за время $t = 2\pi R/v$ через выделенное сечение проходят все n электронов. Поэтому ток

$$I = \frac{ne}{t} = \frac{nev}{2\pi R}.$$

Начальное значение тока позволяет найти начальную скорость электронов:

$$v_0 = \frac{2\pi R I_0}{ne}.$$

Переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, которое и ускоряет электроны. За время одного оборота электрона электрическое поле совершает работу

$$A = e|\mathcal{E}_i| = e\left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = e\alpha.$$

Эта работа идет на изменение кинетической энергии электрона:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = e\alpha.$$

Отсюда находим конечную скорость электронов:

$$v = \sqrt{\frac{2e\alpha}{m} + v_0^2} = \sqrt{\frac{2e\alpha}{m} + \frac{4\pi^2R^2I_0^2}{n^2e^2}}$$

и ток в камере:

$$I = \frac{ne}{2\pi R}v = \frac{ne}{2\pi R}\sqrt{\frac{2e\alpha}{m} + \frac{4\pi^2R^2I_0^2}{n^2e^2}}.$$

ЭДС самоиндукции

Изменение магнитного потока через площадь, охватываемую контуром, может происходить вследствие изменения тока в самом контуре. В таком случае в контуре также возникает электродвижущая сила, которую называют ЭДС самоиндукции, а само явление называют самоиндукцией. Связь магнитного потока Φ с величиной тока I определяется формулой

$$\Phi = LI,$$

где L — индуктивность контура. Тог-

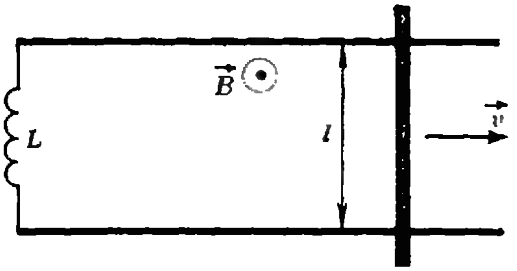


Рис. 7.

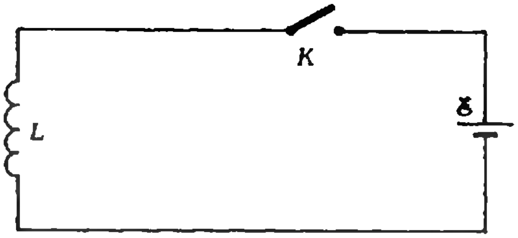


Рис. 8.

да, в соответствии с законом Фарадея (2), ЭДС самоиндукции равна

$$\mathscr{E}_и = -L\frac{dI}{dt}.$$

Задача 6. *Стержень скользит с постоянной скоростью $\vec v$ по рельсам, находящимся в магнитном поле с индукцией $\vec B$, перпендикулярной плоскости рельсов (рис. 7). Концы рельсов замкнуты на соленоид с индуктивностью L. Какой ток течет через соленоид? Сопротивление соленоида, рельсов и стержня пренебрежимо мало. Расстояние между рельсами l.*

Поскольку на соленоиде, рельсах и стержне падения напряжения нет, сумма ЭДС индукции, наводимой в движущемся стержне, и ЭДС самоиндукции, возникающей в соленоиде вследствие изменения тока в нем, равна нулю:

$$\mathscr{E}_i + \mathscr{E}_{is} = 0.$$

Здесь $\mathscr{E}_i = |\vec B|\,l\,|\vec v|$ и $\mathscr{E}_{is} = -L\frac{dI}{dt}$.

Так как ЭДС индукции не зависит от времени (стержень движется равномерно), должна быть постоянной и ЭДС самоиндукции. Следовательно, скорость изменения тока в соленоиде постоянна и равна

$$\frac{dI}{dt} = \frac{|\vec B|\,l\,|\vec v|}{L},$$

а ток в соленоиде меняется со временем по линейному закону

$$I = \frac{|\vec B|\,l\,|\vec v|}{L}\,t.$$

Задача 7. *Соленоид с индуктивностью L подсоединяется через ключ K к источнику с постоянной ЭДС $\mathscr{E}$ (рис. 8). Какую мощность потребляет соленоид от источника при частоте переключения ключа ν? Сопротивлением соленоида, источника и подводящих проводов пренебречь. Считать, что ключ отключают на очень короткое время.*

При замыкании ключа в соленоиде возникает ток, который линейно растет со временем: $I = \mathscr{E}t/L$ (см. решение предыдущей задачи). За время $T = 1/\nu$ ток увеличивается до $I_{max} = \mathscr{E}T/L$. При размыкании ключа ток уменьшается до нуля за очень короткое время (много меньшее T). График зависимости тока от времени имеет вид, показанный на рисунке 9.

При увеличении тока I за время Δt по цепи проходит заряд $\Delta Q = I\Delta t$, а за период T переместится заряд

$$Q = \int_0^T I\,dt = \int_0^T \frac{\mathscr{E}t}{L}\,dt = \frac{\mathscr{E}T^2}{2L} = \frac{\mathscr{E}}{2L\nu^2}$$

(этот заряд численно равен площади фигуры, заштрихованной на рисунке 9). При этом источник совершает работу

$$A = Q\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}^2}{2L\nu^2}.$$

Следовательно, потребляемая мощ-

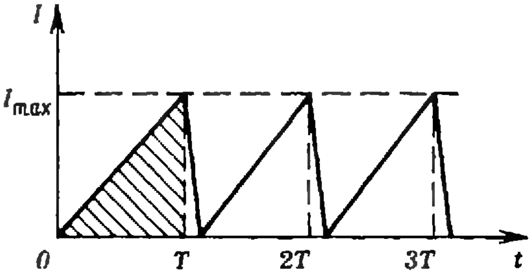


Рис. 9.

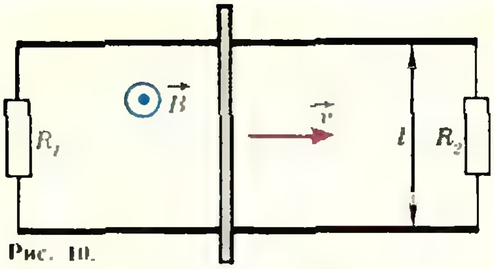


Рис. 10.

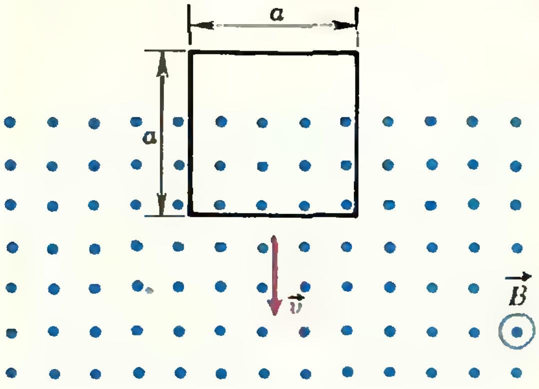


Рис. 11.

ность равна

$$P = \frac{A}{T} = A\nu = \frac{\mathcal{E}^2}{2L\nu}.$$

Упражнения

1. Металлический стержень движется с постоянной скоростью $\vec{v}$ по рельсам, концы которых замкнуты на проводники сопротивлениями R_1 и R_2 (рис. 10). Рельсы находятся в магнитном поле с индукцией B, перпендикулярной плоскости рельсов. Расстояние между рельсами l. Какой ток течет через стержень, если его сопротивление и сопротивление рельсов пренебрежимо малы? Какую мощность необходимо развивать, чтобы перемещать стержень с постоянной скоростью?

2. Как изменится ток в металлической рамке, вращающейся в постоянном магнитном поле с индукцией, направленной перпендикулярно оси вращения, при увеличении частоты вращения вдвое?

3. Проволочный квадрат со стороной a вдвигается со скоростью $\vec{v}$ в поле постоянного магнита с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости квадрата (рис. 11). Какой ток течет по проволоке, если сопротивление квадрата R? По какому закону будет меняться ток со временем, если вдвигать квадрат с постоянным ускорением? Индуктивностью проволочного квадрата пренебречь.

4. Кольцо из сверхпроводника, по которому течет ток, изгибается в виде восьмерки, а затем перегибается вдвое. Как изменится при этом ток в кольце?

5. В короткозамкнутую катушку вдвигают постоянный магнит: один раз быстро, а другой — медленно. Одинаковый ли заряд протечет по катушке в обоих случаях? Будут ли одинаковы количества теплоты, выделяющиеся в катушке?

6. Покажите, что индуктивность однослойной катушки пропорциональна квадрату числа витков n.

7. Ток в катушке нарастает пропорционально времени. Каков характер зависимости тока от времени в другой катушке, индуктивно связанной с первой и замкнутой на постоянное сопротивление?

8. С какой минимальной частотой можно переключать ключ в задаче 7 в статье, если известно, что соленоид выдерживает максимальный ток I_0?

(Начало см. на с. 28)

82; *Б. Гольдфарб* (Москва) 74; *В. Горбунов* (Коммунарск) 79, 80, 82—84, 86, 87; *С. Городько* (Днепропетровск) 74, 76, 78, 79; *А. Григоренко* (Макеевка Донецкой обл.) 79, 80, 82—84, 87; *И. Грузберг* (Пермь) 74, 76, 78—80, 84; *И. Губин* (Ереван) 75, 76, 80, 82; *А. Гуляев* (Москва) 78, 80, 82, 84; *М. Гундилович* (Городея) 82; *Л. Гуральник* (Житомир) 76, 82; *А. Давоян* (Ленинакан) 78, 82; *М. Данилин* (Новоаннинский) 75, 76, 78; *И. Даниловский* (Горький) 78—80, 82, 84; *В. Дворцевой* (Липецк) 84; *И. Деребас* (Магнитогорск) 74; *С. Довбыш* (Москва) 74, 76; *А. Долинин* (Владимир) 76; *А. Дремин* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 80, 82; *Ю. Елисеев* (Великие Луки) 80, 82; *И. Елишевич* (Чернигов) 75, 76, 79, 80, 82, 84; *Е. Желиговская* (Москва) 74—76, 83, 84, 87; *Н. Житенев* (п. Черноголовка Московской обл.) 74, 76, 78—80, 82—84; *В. Жордочкин* (Орск) 80, 82, 84; *А. Заневский* (Ленниград) 78—80, 82; *А. Захарьян* (Чернигов) 75, 76; *М. Зейфман* (Вологда) 74, 76, 78—80, 82—84; *И. Зильберберг* (Алма-Ата) 80, 82—84; *С. Зиневский* (с. Хорошее Озеро Черниговской обл.) 84; *А. Золотых* (Курск) 82; *В. Зубко* (Ивано-Франковск) 79, 80, 82; *И. Иванов* (Саратов) 75, 76, 78—80, 82—84, 87; *В. Ивахненко* (Киев) 83; *В. Изергин* (Новосибирск) 78, 84; *В. Израилит* (Днепропетровск) 75, 80, 82, 84; *А. Израэли* (Тбилиси) 75; *О. Исупова* (Оренбург) 76; *А. Канель* (Москва) 74—76; *В. Катин* (Житомир) 75, 76, 78, 79, 82—84, 86, 87; *Э. Кафаров* (Баку) 80; *А. Клинк* (Ковров) 76, 82; *Е. Когин* (Днепропетровск) 75, 76, 78—80, 82—84, 86; *А. Кожевников* (Днепропетровск) 76, 78—80, 82; *Г. Кожоридзе* (Телави) 82—84, 86; *В. Козловский* (Новолукомль) 75, 76, 78—80, 82, 84, 86, 87; *А. Колдоркин* (Куйбышев) 74—76; *Г. Коломойцев* (Сумгаит) 74—76, 78—80, 82—84, 87; *В. Комов* (Александров) 74—76, 78—80, 82—84, 87; *В. Коньшин* (Ростов-на-Дону) 84; *В. Коробов* (Кировоград) 74, 76, 80, 83, 84; *Г. Коротков*

(Окончание см. на с. 56)

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет)

1. Сколько корней имеет уравнение

$$f(x)-af'(x)=0,$$

если $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, a, x_1, x_2, x_3, x_4 — действительные числа $(x_1<x_2<x_3<x_4)$?

2. Решить неравенство (при $a\in\mathbf{R}$)

$$\log_a(1-8a^{-x})\geqslant 2(1-x).$$

3. Решить уравнение (при $a\in\mathbf{R}$)

$$a\cdot\sin x+\operatorname{tg}x+1=\frac{1}{\cos x}.$$

4. В равнобедренную трапецию $ABCD$ вписана окружность радиуса R; K — точка пересечения диагоналей трапеции, $[AB]$ — ее большее основание, $\widehat{KBA}=\alpha$. Найти радиус окружности, касающейся данной окружности и отрезков $[KB]$, $[KC]$ диагоналей.

5. Точки M, N, P, Q расположены в пространстве так, что $(MN)\perp(PQ)$, $(MP)\perp(NQ)$. Доказать, что и $(MQ)\perp(NP)$.

Вариант 2

(факультет прикладной математики — процессов управления)

1. Для каких a $(a\in[0;\ 1])$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямыми $x=0$, $x=1$, $y=f(a)$, имеет наибольшее и наименьшее значения, если $f(x)=x^\alpha+3x^\beta$, α, β — действительные числа, причем $\alpha>1$, $\beta>1$?

2. При каких a $(a\in\mathbf{R})$ любое решение неравенства

$$\frac{\log_3(x^2-3x+7)}{\log_3(3x+2)}<1$$

будет также решением неравенства $x^2+(5-2a)x\leqslant 10a$?

3. Решить уравнение (при $a\in\mathbf{R}$)

$$(8a^2+1)\sin^3 x-$$
$$-(4a^2+1)\sin x+2a\cdot\cos^3 x=0.$$

4. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b, длина биссектрисы прямого угла равна l. Верно ли, что $l<\sqrt{\frac{ab}{2}}$?

5. Сфера проходит через центр шара, вписанного в правильный тетраэдр, и касается трех ребер тетраэдра, исходящих из одной вершины. Найти радиус сферы, если длина ребра тетраэдра равна a.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Ширина реки равна a м, скорость ее течения — w м/сек, скорость пловца в стоячей воде — v м/сек $(v<w)$, а скорость его движения на суше — u м/сек. За какое наименьшее время пловец может попасть в точку, расположенную на противоположном берегу напротив того места, с которого он начинает переправу? Считать, что в воде пловец не изменяет выбранного им в начале переправы движения и что вектор скорости течения реки параллелен ее берегам, которые предполагаются прямолинейными.

2. При каких a $(a\in\mathbf{R})$ точка $(a;\ a^2)$ расположена внутри треугольника, ограниченного прямыми $y=x+1$, $y=3-x$, $y=-2x$?

3. Решить уравнение

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1+\sin 4x.$$

4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если

$$x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

5. Три большие окружности одинакового радиуса R касаются попарно друг друга. Три маленькие окружности имеют одинаковый радиус и касаются попарно друг друга. Найти радиус маленькой окружности, если каждая из маленьких окружностей касается также двух больших.

А. Пономаренко

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9, \\ x+y=20. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{9^x+3^x-2} \geqslant 9-3^x.$$

3. Вокруг шара объемом V описан конус таким образом, что его объем — наименьший из всех возможных. Найти объем конуса.

4. При каком значении a прямая $y=a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$ и $y=2+x-x^2$, пополам?

5. Решить уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=y^2-4y+5.$$

Вариант 2

(факультет кибернетики)

1. Пусть

$$\max(A, B)=\begin{cases} A, \text{ если } A \geqslant B \\ B, \text{ если } B \geqslant A. \end{cases}$$

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной частями линий $\max(x, y)=1$ и $x^2+y^2=1$, лежащих в первом квадранте.

2. Зная радиус r основания конуса, определить радиус сечения, которое параллельно основанию и делит объем конуса пополам.

3. Решить уравнение

$$2\sin^2 x-5\sin x\cdot\cos x-8\cos^2 x=-2.$$

4. При каких значениях a уравнение $ax^2=\ln x$ имеет один корень?

Вариант 3

(физический и радиофизический факультеты)

1. Точка движется прямолинейно по закону

$$s(t)=-\frac{1}{6}t^3+3t^2-5$$

(время измеряется в секундах, пройденный путь в метрах). Определить:

1) момент времени, когда ускорение точки равно нулю;

2) с какой скоростью движется в этот момент точка?

2. В конус, высота которого равна радиусу основания, вписан шар. Найти отношение объема шара к объему конуса.

3. Решить неравенство

$$x+2<\sqrt{x+14}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(\log_2 x)+\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} y)=1, \\ xy^2=4. \end{cases}$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{24}\right).$$

Задачи устного экзамена

1. Решить уравнения

а) $\log_3(\cos x)+\log_{\frac{1}{3}}(-\sin x)=0;$

б) $\operatorname{tg}|x|=|\operatorname{tg} x|;$

в) $\pi\sin x=\left|x-\frac{\pi}{4}\right|-\left|x-\frac{3\pi}{4}\right|.$

2. Решить неравенство

$$|x+2|^{\frac{1}{x^2-x-6}}>|x+2|^{\frac{2}{x-3}}.$$

3. Найти промежутки монотонности и точки экстремумов функции

$$y=||x^2-1|-2|.$$

Построить график этой функции.

4. Построить график функции

$$y=\begin{cases} l^{-x}-1, \text{ если } x<0, \\ \sqrt{4x-x^2}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

5. При каких a функция

$$f(x)=x^3+3(a-7)x^2+3(a^2-9)x+1$$

имеет положительную точку максимума?

6. При каких m функция

$$f(x)=2e^x-me^{-x}+(1+2m)x-3$$

монотонно возрастает на всей оси?

7. При каких a уравнение

$$3x\lg x=1+a\lg x$$

имеет: а) одно решение; б) два решения?

8. Сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение

$$x^2\cdot e^{2-|x|}=4a.$$

9. Сколько корней, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$, имеет уравнение

$$3\sin x+\sin 3x=2a$$

в зависимости от параметра a?

10. При каком a сумма кубов корней уравнения

$$6x^2+6(a-1)x-5a+2a^2=0$$

наибольшая?

11. На плоскости изобразить множество точек

$$\{(x; y)\,|\,x^2+y^2-2x-2y+1=0\}.$$

Написать уравнение образа этого множества при параллельном переносе $\vec{p}=(0; -1)$.

12. Найти все значения a, при которых множество

$$\{(x; y)\,|\,x^2+y^2+2x \leqslant 1\} \cap \{(x; y)\,|\,x-y+a \geqslant 0\}$$

содержит только одну точку. Найти эту точку.

13. Фигура ограничена графиком функции $y=\sqrt{x}$, прямой $y=2$ и осью ординат. В какой точке графика данной функции необходимо провести к ней касательную, чтобы она отсекала от указанной фигуры треугольник наибольшей площади?

14. Точка $(x;\ y;\ z)$ лежит на плоскости $x+y+z=6$. Доказать, что $x^2+y^2+z^2\geqslant 12$.

15. Доказать, что для произвольного натурального числа n выполняется равенство

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}.$$

16. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Прямая l, параллельная (CM), пересекает (BC), (CA) и (AB) соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Доказать, что $\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

17. Окружность K_1 касается внутренним образом окружности K_2 в точке A, $[BC]$ — хорда окружности K_2, касающаяся окружности K_1 в точке D. Доказать, что $\widehat{BAD}=\widehat{DAC}$.

18. В прямоугольном треугольнике ABC $[BD]$ — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу AC. Доказать, что

$$\frac{1}{|BD|^2}=\frac{1}{|AB|^2}+\frac{1}{|BC|^2}.$$

19. Доказать, что в произвольном треугольнике

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c},$$

где h_a, h_b, h_c — длины высот треугольника, r — радиус вписанной окружности.

Н. Перестюк, М. Ядренко

Ростовский государственный университет

(механико-математический факультет)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(отделение математики)

1. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в данный конус с высотой H и радиусом основания R.

2. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^x-4\right).$$

3. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}.$$

Вариант 2

(отделение механики)

1. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

2. Известно, что прямая $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{32}$ является касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x$. Найти координаты точки касания.

3. Решить неравенство

$$\log_2(4^x-5\cdot 2^x+2)>2.$$

4. На $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ найти решения уравнения

$$\sin 7x+\cos^2 2x=\sin^2 2x+\sin x.$$

Вариант 3

(отделение прикладной математики)

1. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды имеет заданную площадь S и наклонена к плоскости основания под углом, величина которого равна α. При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

2. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Найти числа p и q, при которых векторы $p\vec{a}+q\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{a}+p\vec{b}+q\vec{c}$ коллинеарны.

3. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg(x^2)}+2>3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg(-x)}$$

4. Решить уравнение

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

Я. Ерусалимский, Т. Коршикова,
А. Хейфиц

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

Решите любые пять из следующих задач:

1. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y=-x^2+6x-2$ и $y=x^2-2x+4$.

2. Решить уравнение

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=0.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{0,1}(x^2+x-2)>\log_{0,1}(x+3).$$

4. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты вершин A (3; 1; 2), B (0; −1; −1), C (−1; −1; 0). Найти длину диагонали BD.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина стороны основания равна a, длина высоты равна h, M — точка пересечения медиан грани BSC. Найти угол наклона прямой AM к плоскости основания пирамиды.

6. Назовем *матрицей* таблицу вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где a, b, c, d — действительные числа. Если $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix}$, то $A=B$ *означает, что* $a=l$, $b=m$, $c=n$, $d=p$. *Произведением* $A\cdot B$ матриц A и B назовем матрицу

$$\begin{pmatrix} al+bn & am+bp \\ cl+dn & cm+dp \end{pmatrix}.$$

а) Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

б) Найти матрицу X такую, что $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Приобретено некоторое число билетов в театр и некоторое число билетов в кино. За билеты в театр заплатили 24 руб., за билеты в кино — 14 руб. Каждый билет в кино на 1 руб. дешевле, чем билет в театр. Сколько куплено билетов в театр, если их на 2 меньше, чем билетов в кино?

2. Построить график функции

$$y=\frac{x^4}{4}-2x^2.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=-x^2+4x$.

4. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Плоский угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды и площадь ее боковой поверхности.

5. Решить уравнение

$$\sin x=1+\cos x.$$

Физика

Задачи устного экзамена

(физический факультет)

1. В последнюю секунду своего свободного падения тело прошло половину всего пути. С какой высоты и сколько времени падало тело?

2. Человек находится на краю круглой горизонтальной платформы радиусом $R=4$ м, которая вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы. С какой угловой скоростью должна вращаться платформа, чтобы человек не смог удержаться на ней? Коэффициент трения $\mu=0{,}2$.

3. Поезд массой $m=1000$ т при торможении с ускорением $|\vec{a}|=0{,}2$ м/с² остановился через $t=100$ с. Какое количество теплоты выделилось при торможении?

4. В теплоизолированном сосуде содержится смесь воды массой $m_1=200$ г и льда массой $m_2=40$ г при температуре $t_1=t_2=0$°C. В сосуд вводится водяной пар массой $m_3=10$ г при температуре $t_3=100$°C. Определить температуру после установления теплового равновесия. Удельная теплота парообразования воды $r=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг · К).

5. При выстреле вертикально вверх свинцовая пуля ударилась о неупругое тело и расплавилась. На какой высоте произошло это столкновение, если начальная скорость пули $|\vec{v}_0|=400$ м/с? Считать, что 50% выделившегося количества теплоты пошло на плавление. Удельная теплота плавления свинца $\lambda=2{,}5\cdot10^4$ Дж/кг.

6. До какой температуры следует изобарически нагреть газ, чтобы его плотность уменьшилась вдвое по сравнению с плотностью при начальной температуре $t_0=0$°C?

7. Два точечных заряда $q_1=6{,}6\cdot10^{-9}$ Кл и $q_2=1{,}32\cdot10^{-8}$ Кл находятся на расстоянии $r=40$ см друг от друга. Какую надо совершить работу, чтобы сблизить их до расстояния $r_1=25$ см?

8. Некоторая цепь, имеющая сопротивление $R=200$ Ом, питается от источника постоянного напряжения. Для измерения силы тока в цепь включили амперметр с внутренним сопротивлением $r=1$ Ом. Какова была сила тока в цепи до включения амперметра, если амперметр показал ток $I=5$ А?

9. В сеть напряжением $U=220$ В включены три одинаковых лампочки: две параллельно, а третья последовательно. Начертить схему и определить напряжение на каждой из ламп. В какой из них выделяется наибольшая мощность?

10. Какой силы ток течет в цепи электрического кипятильника, если $V=10$ л воды нагревается от $t_1=20$°C до $t_2=100$°C в течение $\tau=30$ мин? КПД кипятильника $\eta=75\%$, напряжение в сети $U=220$ В. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг · К).

А. Березман, К. Дуничев,
О. Овчинников

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

(математический факультет)

Вариант 1

1. Найти значение выражения

$$\left(\frac{(x^2+a^2)^{-1/2}+(x^2-a^2)^{-1/2}}{(x^2-a^2)^{-1/2}-(x^2+a^2)^{-1/2}}\right)^{-2}$$

при $x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}$. $a>0$, $m>0$, $n>0$, $m>n$.

2. Решить уравнение

$$\log_6\sqrt{x-2}+\frac{1}{2}\log_6(x-11)=1.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=2^x;\ y=2;\ x=-1.$$

4. Найти экстремумы функции

$$y=x+\sin 2x.$$

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом α при вершине, все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ. Объем шара, вписанного в пирамиду, равен V. Найти объем пирамиды.

Вариант 2

1. Упростить

$$\cos 0+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+$$
$$+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}.$$

2. Решить систему

$$\begin{cases}2(\log_y x+\log_x y)=5,\\ xy=8.\end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$2^{2x-3}=4^{x^2-3x-1}$$

4. Написать уравнение горизонтальной касательной к графику функции $y=e^x+e^{-x}$.

5. Основание прямого параллелепипеда — ромб, у которого меньшая диагональ равна d и острый угол равен α. Площадь боковой поверхности равна S. Найти объем параллелепипеда.

Физика

Задачи устного экзамена

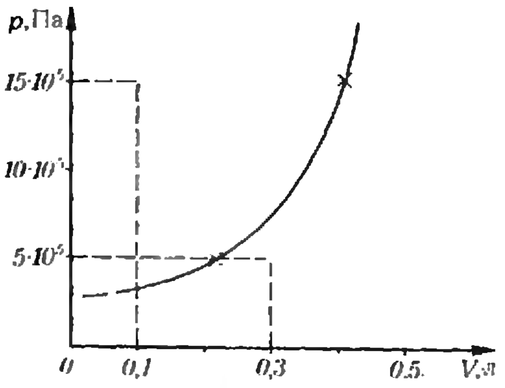
(физический факультет)

1. Расстояние между двумя станциями, равное $s=18$ км, поезд проходит со средней скоростью $v_{ср}=54$ км/ч, причем на разгон он тратит $t_1=2$ мин, затем идет с постоянной скоростью и на замедление до полной остановки тратит $t_2=1$ мин. Определить наибольшую скорость движения поезда.

2. Волны распространяются вдоль резинового шнура со скоростью $v=3$ м/с при частоте $\nu=2$ Гц. Какова разность фаз между точками, отстоящими друг от друга на $l=75$ см?

3. Определите, для какой массы водорода при температуре $t=0°C$ начерчен график, изображенный на рисунке.

4. Над поверхностью $S=5$ км^2 слой воздуха толщиной $h=1000$ м имеет температуру $t_1=20°C$ при относительной влажности $r=73\%$. Воздух охладился до $t_2=10°C$. Найти массу выпавшего дождя. Плотность насыщенного водяного пара при температурах t_1 и t_2 равна $\rho_{н1}=17{,}3$ г/м^3 и $\rho_{н2}=9{,}4$ г/м^3 соответственно.



5. Пылинка массой $m=10^{-8}$ г находится в однородном электрическом поле между пластинками с разностью потенциалов $U=6000$ В. Расстояние между пластинками $d=5$ см. Каким зарядом обладает пылинка, если сила тяжести, действующая на нее, уравновешивается электрической силой?

6. Батарея из $n=50$ последовательно соединенных элементов с ЭДС $\mathcal{E}=1{,}4$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}4$ Ом у каждого элемента питает телеграфный аппарат с сопротивлением $R=90$ Ом. Ток подводится по железному проводу сечением $S=3$ мм^2 и длиной $l=20$ км. Найти силу тока в цепи и напряжение на зажимах аппарата. Удельное сопротивление железа $\rho=0{,}98\cdot10^{-7}$ Ом · м.

7. Лифт массой $m=1{,}2$ т поднимается на $h=15$ м за $t=0{,}5$ мин. Напряжение на зажимах мотора $U=220$ В, его КПД $\eta=90\%$. Найти силу тока в моторе.

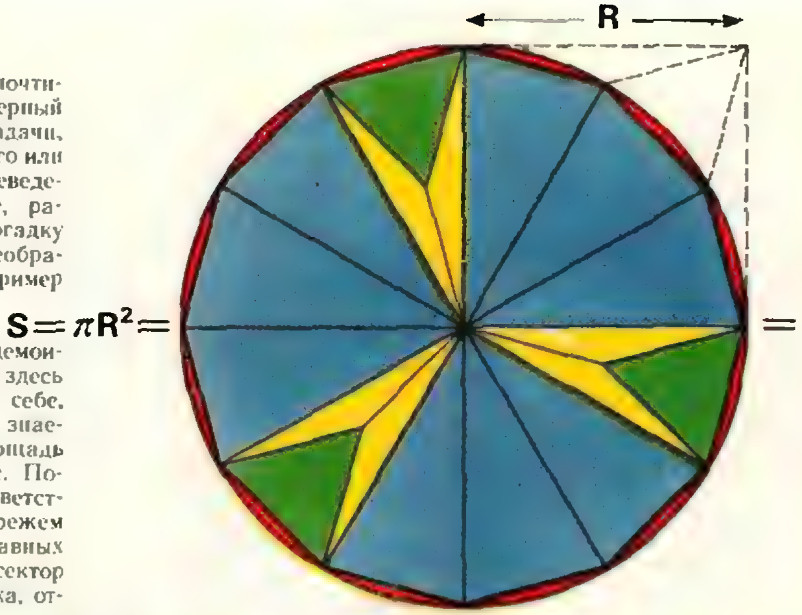
8. Деталь машины надо покрыть слоем меди толщиной $d=0{,}5$ мм. Сколько времени потребуется для этого, если электролиз производится током, плотность которого $j=1{,}5$ А/дм^2? Электрохимический эквивалент меди $k=0{,}33$ мг/Кл; плотность меди $\rho=8{,}9$ г/см^3.

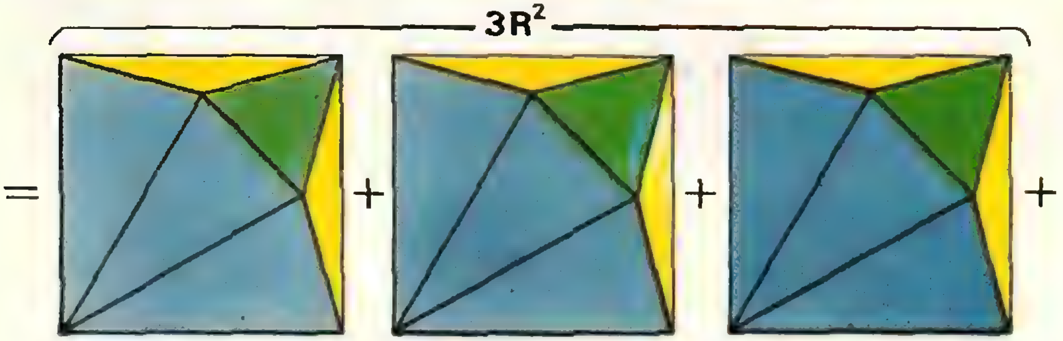
9. Дуга Петрова питается переменным током ($\mathcal{E}_{max}=110$ В, $T=0{,}02$ с). Сопротивление горячей дуги $R=1{,}5$ Ом. Какой индуктивностью должна обладать катушка, включенная в цепь последовательно с дугой, если $I_{max}=30$ А?

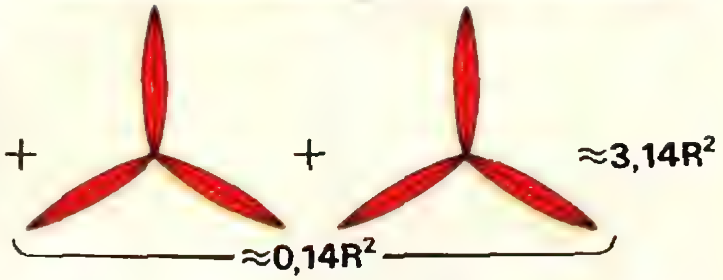
10. Оптическая сила собирающей линзы $D=5$ дптр. Светящаяся точка находится на расстоянии $d=30$ см от линзы на ее оптической оси. Где и каким будет изображение этой точки? Построить изображение.

М. Калинина. О. Оноприенко

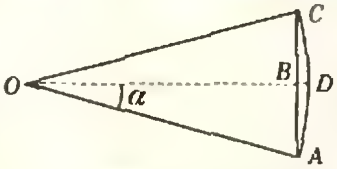
О числе π







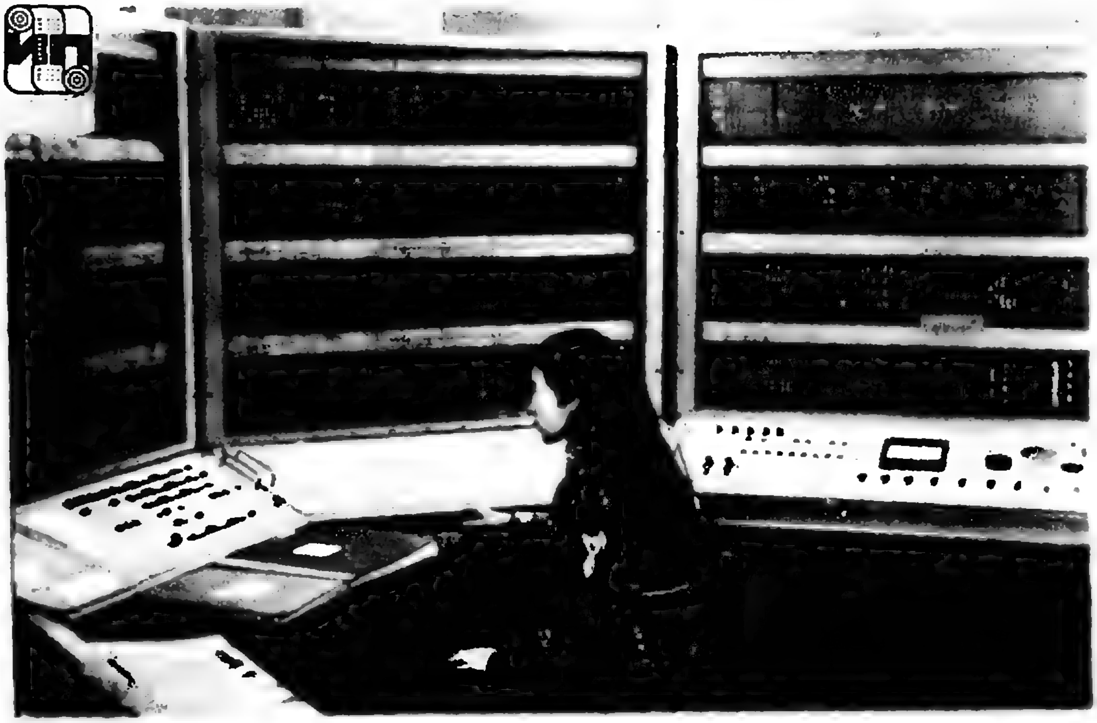
Что легче, что предпочтительнее — угадать верный ответ математической задачи, потом строго доказать его или искать его в полном неведении? Предпочтительнее, разумеется, первое. Догадку облегчают удачные преобразования. Забавный пример таких преобразований демонстрирует помещенный здесь рисунок. Представьте себе, читатель, что вы еще не знаете, как выражается площадь круга через его радиус. Попробуем угадать соответствующую формулу. Разрежем круг на двенадцать равных секторов и каждый сектор обрежем до треугольника, отбрасывая сегменты, как обозначено на рисунке красным. Каждый четвертый из получившихся треугольников разрежем на один равносторонний и два равнобедренных треугольника, как показано на рисунке. Из получившихся треугольников сложим три квадрата со стороной, равной радиусу круга R. Итак, приближенно, с точностью до отброшенных сегментов, площадь круга равна $3R^2$. Учет отброшенных сегментов заставляет взять в этой формуле чуть больший коэффициент перед R^2. Какое же число, чуть большее трех и относящееся к кругу, могло бы здесь пригодиться? Конечно, $\pi = 3{,}14...$ Вот мы и угадали формулу для площади круга с радиусом R — вот она: $S = \pi R^2$.



Строгости ради стоило бы оценить суммарную площадь сегментов, приближенно равную, согласно нашей догадке, $0{,}14\ R^2$. Как показано на рисунке, заменим сегмент треугольником ACD. Площадь такого треугольника равна произведению $2AB \cdot BD$, сомножители легко выражаются через тригонометрические функции угла α, а их в свою очередь можно оценить, учтя, что синус малого угла приближенно равен самому углу, выраженному в радианной мере. Выкладки, приведенные рядом с рисунком, дают с точностью до двух знаков после запятой величину $0{,}11\ R^2$, весьма близкую к ожидаемой. После этого у нас есть все основания полагать, что площадь круга с радиусом R действительно равна πR^2.

Ю. Побожий

$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832$



А. Салтовский

Организация ввода и вывода в ЭВМ

Эта статья продолжает серию публикаций об устройстве ЭВМ («Память ЭВМ» в «Кванте» № 4 и «Как работает процессор» в «Кванте № 5).

Пакетный и диалоговый режимы

Скорость работы процессоров современных ЭВМ достигает сотен тысяч и миллионов операций в секунду. С помощью различных технических решений в таком же темпе удается осуществить обмен информацией между процессором и памятью.

Сложнее обстоит дело с доставкой информации в ЭВМ и с выдачей из машины результатов вычислений. Эти очень разные функции выполняют *устройства ввода-вывода* (УВВ).

Непосредственное общение человека с ЭВМ в процессе так называемого «ручного» ввода программы и данных с пульта, когда каждое отдельное машинное слово вводится в машину человеком-оператором, весьма трудоемко даже при небольших программах. При таком режиме работы не может быть и речи об эффективном использовании ЭВМ. Противоречие между высоким быстродействием процессора и памяти, с одной стороны, и человеческим несовершенством с другой, разрешают следующими двумя основными способами.

При первом способе информацию, предназначенную для ввода в ЭВМ, заранее подготавливают на каком-нибудь промежуточном информационном носителе, например на *перфокартах, перфолентах* или *магнитных лентах.* Устройства, помогающие выполнить подготовительную работу, предшествующую вводу в ЭВМ программы и данных, называют *устройствами подготовки,* добавляя при этом наименование информаци-

Фотографии В. Полякова и И. Федорченко

онного носителя — на перфокартах, на перфоленте или на магнитной ленте (фото 1). Подготовка информации на промежуточном носителе может производиться без лишней спешки, поскольку устройства подготовки данных работают независимо от ЭВМ и необходимость состязаться в скорости с машиной отпадает. В то же время подготовленную (отперфорированную на картах или перфоленте, или записанную на магнитную ленту) программу можно ввести в ЭВМ с очень высокой скоростью благодаря специальным считывающим устройствам ввода: для каждого типа носителя существует свое специфическое устройство ввода. По сравнению с «ручным» вводом информации с пульта управления ЭВМ, способ предварительной подготовки информации позволяет сократить простои дорогостоящего скоростного оборудования ЭВМ. Такой режим ввода информации в машину называется *пакетным*.

Второй способ ввода-вывода информации сравнительно молод: фактом своего существования он обязан появлению мощных ЭВМ последних поколений — машин, более быстродействующих, с большим объемом оперативной памяти, чем машины 50-х и начала 60-х годов. Внешне этот способ мало отличается от существовавшего на заре появления ЭВМ «ручного» ввода: средством общения человека с машиной служит пульт управления ЭВМ, а также подсоединенные к ЭВМ *выносные пульты — терминалы*. Правда, пульт несколько усовершенствовался: сообщения машины высвечиваются на телевизионном экране в виде легко читаемых текстов. «Отвечающая» часть современных пультов очень напоминает клавиатуру пишущей машинки. Человек, немного «побеседовавший» с машиной с помощью подобного пульта или терминала, очень быстро привыкает к такой форме общения с ЭВМ. Такой пульт — терминал может быть удален от машины на большое расстояние. В качестве терминалов сейчас наиболее распространены пульты с телевизионным экраном и клавиатурой — *дисплеи* (фото 2). В этой же роли могут выступать и подключенные к ЭВМ *электрические пишущие машинки* и *телетайпы*.

Самым важным, пожалуй, является то обстоятельство, что в современных вычислительных системах вместо единственного пульта (как у машин первых поколений) число терминалов выросло до нескольких десятков. При этом у каждого из работающих за терминалами пользователей создается иллюзия единоличной работы с ЭВМ: та информация, которую запрашивает каждый из программистов, сразу высвечивается на экране, а та информация, которую программисты вводят в ЭВМ, немедленно размещается в нужном месте памяти. Такой режим общения с машиной называют *диалоговым*.

Квант времени для «беседы» с ЭВМ

Возможность оперативного диалогового общения человека с ЭВМ основана на том, что практически «мгновенная» (с точки зрения человека) реакция машины фактически протекает за сравнительно большие интер-

Фото 1.

валы времени (с точки зрения высокоскоростных ЭВМ): 40—100 миллисекунд ((40—100) • 10^{-3} с). Если ЭВМ способна, например, выполнять 10^6 операций в секунду, то за каждое «сразу» и «немедленно» ЭВМ сможет выполнить от 40 до 100 тысяч операций. Если каждому из пользователей — программистов — выделить, например, порцию времени в 5 миллисекунд, то ЭВМ за такое время сможет «продвинуть» ход диалога с каждым из них на 5000 команд. Вот почему каждый пользователь уверен, что он один работает с ЭВМ. Правда, часть времени работы ЭВМ «забирает» программа обслуживания и управления — *операционная система*. Если в нашем примере предположить, что человеческое «сразу» — это 100 миллисекунд, то примерно половина этого времени — 50 миллисекунд — будет затрачена на работу программы операционной системы. Тогда из расчета, что каждому из пользователей выделяется для работы с ЭВМ порции времени прямого доступа в 5 миллисекунд, можно сказать, что ЭВМ сумеет «одновременно», сохраняя иллюзию мгновенных ответов, общаться с десятью программистами. Описанная здесь система работы чисто иллюстративна. Важно лишь отметить, что в ней машинное время распределяется между пользователями строго регламентировано. В этом операционной системе помогают электронные часы машины (так называемый «таймер») и система прерываний (см. «Как работает процессор», «Квант», № 5). Подобные системы называют *системами разделения времени*.

Операции элементарного обмена УВВ — Память

УВВ помогают организовывать связь ЭВМ с внешним миром. Помощь состоит в том, что УВВ обеспечивают преобразование информации, получаемой извне, к виду, удобному для обработки в ЭВМ. УВВ отрабатывает и обратное преобразование: полученные машиной решения задач выводятся из машины на печатающее устройство. Обычное его название — *АЦПУ, алфавитно-цифровое печатающее устройство* (фото 3). Современные ЭВМ в числе средств вывода могут иметь и более «экзотические» устройства — *графопостроитель*, изображающий на бумаге рисунки, хранимые в закодированном виде в памяти ЭВМ; *фотоввод* — устройство, которое световым лучом строит изображение (слайд) на фотопленке; *кинопостроитель*, обеспечивающий вывод серии рисуемых на пленке кадров, то есть мультфильмов, и т. п.

Фото 2.

Работой УВВ управляют *команды ввода-вывода*. Они составляют часть системы команд машины. Команда ввода-вывода обычно содержит следующую информацию:

Фото 3.

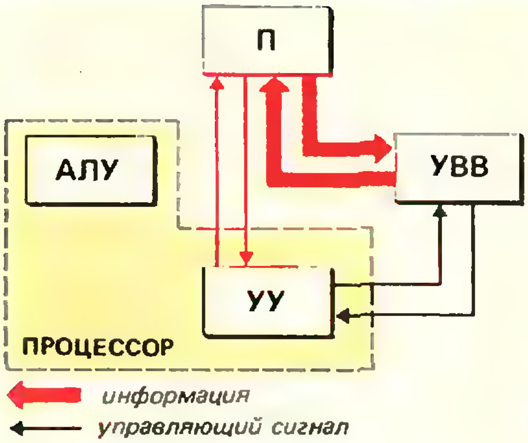


Рис. 1.

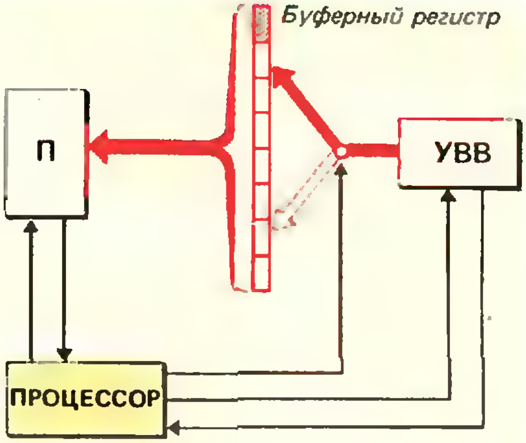


Рис. 2.

— тип (чаще, номер) УВВ, с которым планирует работать программист;

— характер работы — УВВ, как правило, могут работать в разных режимах;

— количество информации, которую надо передать в том или ином направлении.

Кроме того, команда ввода-вывода содержит управляющую информацию о том, по какому адресу (по каким адресам) в памяти находится информация, предназначенная для вывода из ЭВМ, или адрес (адреса), по которому необходимо разместить информацию, поступающую в ЭВМ от устройства ввода.

Обычно общение программиста с ЭВМ начинается и заканчивается командами ввода-вывода. В самом начале в память вводят программу и данные, предварительно подготовленные, например, на перфокартах. В конце сеанса общения результат выдается, например, на АЦПУ. Из этой упрощенной схемы видно, что на время отработки команды ввода-вывода устройство управления (УУ) соединяет память *информационным трактом* с выбранным УВВ (рис. 1). Информационный тракт — это оперативное кратковременное хранилище передаваемой от устройства к устройству информации. Одна из его характеристик — *ширина:* количество одновременно передаваемой информации. Поскольку ширина информационного тракта от УВВ к П зачастую меньше, чем машинное слово, то подготавливаемую к передаче информацию стали предварительно накапливать в специальных *буферных регистрах* (рис. 2). Так, например, современные ЭВМ серии ЕС допускают обмен информацией с памятью двойными словами (64 бита), а основной обменной порцией в передачах УВВ — память является байт (8 битов). Восемь байтов собирают на буферном 64-битовом регистре, и, после того как буферный регистр окажется заполненным, запрашивается связь с памятью.

В ранних моделях машин в моменты связи УВВ — память арифметико-логическое устройство (АЛУ) простаивало. В лучшем случае АЛУ занималось подсчетом количества передаваемой информации в байтах или машинных словах. С появлением скоростной памяти паузы, в течение которых происходит сборка или разборка информации, стали использовать для информационного обмена между П и АЛУ. Это значительно повысило эффективность работы ЭВМ, особенно машин, работающих в многопрограммном режиме.

Канал — это специализированный процессор

Системы ввода-вывода современных ЭВМ должны

— преобразовывать информацию к виду, удобному для переработки в ЭВМ, и производить, когда это необходимо, обратное преобразование;

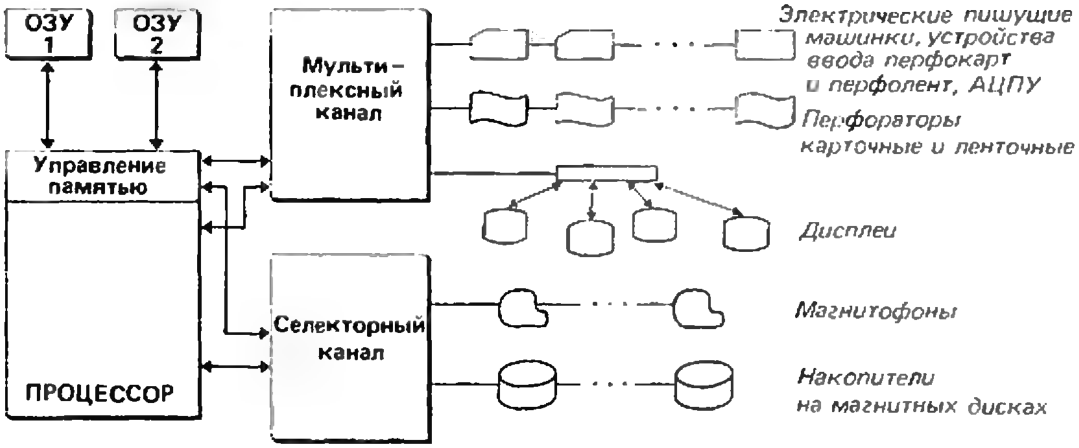

ОЗУ 1
ОЗУ 2
Мульти-плексный канал
Управление памятью
ПРОЦЕССОР
Селекторный канал
Электрические пишущие машинки, устройства ввода перфокарт и перфолент, АЦПУ
Перфораторы карточные и ленточные
Дисплеи
Магнитофоны
Накопители на магнитных дисках

Рис. 3.

подключаться к памяти для обмена информацией с УВВ, притом только тогда, когда это действительно необходимо, и выполнять во время пауз сборку или разборку информации;

— обеспечивать возможность распараллеливания работы с другими устройствами ЭВМ, в частности с АЛУ;

— пользоваться средствами процессора только тогда, когда в этом есть необходимость: например, для анализа ошибочной ситуации или для включения операций ввода-вывода.

При этом способ подключения УВВ к системе ввода-вывода должен быть, по возможности, универсальным для разнотипных УВВ.

В современных ЭВМ перечисленные требования к системам ввода-вывода реализуются устройствами, которые называют *процессорами ввода-вывода*. В машинах серии ЕС их называют *каналами*.

На рисунке 3 представлена структурная схема ЕС-1060. По современным представлениям это достаточно мощная ЭВМ, обладающая двумя каналами — селекторным и мультиплексным, — отличающимися друг от друга, прежде всего, скоростными характеристиками: для селекторного канала пропускная способность доходит до 1,25 Мбайт ($1{,}25 \times 2^{20}$ байт) в секунду; к селекторному каналу присоединяются скоростные УВВ — накопители на магнитных дисках (фото 4), ленточные магнитофоны. Максимальная пропускная способность для информационных потоков, проходящих через мультиплексный канал, составляет 600 Кбайт (600×2^{10} байт) в секунду. К мультиплексному каналу подсоединяются «тихоходные устройства — это перфораторы, считыватели перфокарт и перфолент, дисплеи, электрические пишущие машинки, АЦПУ.

Формат канальной команды

Подобно тому как действия ЭВМ определяются управляющей ею программой, работой специализированного процессора — канала — управляет *канальная программа*, предварительно записанная в память. Канальная программа состоит из последовательности *канальных команд*, каждая из которых заставляет канал

Фото 4.

выполнять определенную работу. В некотором смысле канал — это мини-ЭВМ, занимающаяся не обработкой, а транспортировкой информации. Типовой формат канальной команды представлен на рисунке 4. Основными полями в этом формате являются:

— *поле команды (код операции)*; поскольку устройство ввода-вывода может работать в разных режимах, в поле команды кодируют характер работы, которую должны выполнить выбранный канал и соответствующее УВВ; самыми характерными операциями являются «Чтение» и «Запись»;

— *поле адреса данных*, то есть поле, в которое записывают начальный адрес массива информации, предназначенной к транспортировке через канал от УВВ (или к УВВ);

— *поле признаков*, в котором уточняются некоторые детали информационного обмена;

— *поле счетчика*, которое указывает количество байтов информации, участвующих в обмене.

Обработка команды в канале

Система команд ЕС ЭВМ также содержит команды ввода-вывода, но в отличие от команд ввода-вывода предшествовавших моделей ЭВМ они лишь начинают выполнение операции ввода-вывода. Так, например, команда ввода-вывода в ЕС ЭВМ, которая называется *Начать ввод-вывод*, отрабатывается в ЭВМ следующим образом:

— сначала команда извлекается из памяти на регистр команд; УУ процессора «узнает» ее, то есть определяет, что речь идет именно о команде начать ввод-вывод; затем с помощью информации, содержащейся в адресном поле команды, определяются номера канала и устройства ввода-вывода, с которым предстоит начать обмен (рис. 5а);

— у каждого из УВВ, присоединенного к каналу, есть собственный номер; когда какое-либо из устройств ввода-вывода признало выставленный номер своим, то оно «подтверждает» получение приглашения на связь; информация «подтверждения» содержит сведения о том, что УВВ с таким номером действительно готово к работе (в частности, не выключено из сети); выполняя процедуру начальной выборки УВВ, канал одновременно обращается в одну из фиксированно распределенных ячеек памяти — там хранится *адресное слово канала* (АСК); АСК пересылается в канал; в АСК, в частности, содержится начальный адрес канальной программы (рис. 5б), по которой предстоит работать в процессе информационного обмена;

— канал обращается к памяти по адресу, указанному в АСК, и из-

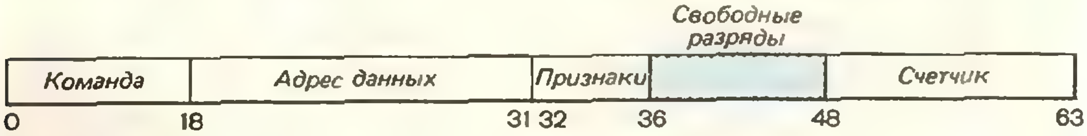


Рис. 4.

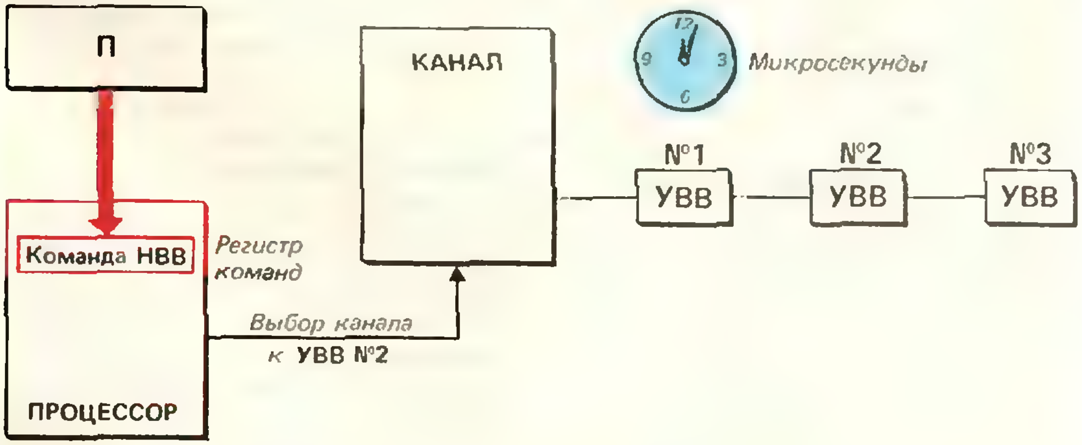


Рис. 5а.

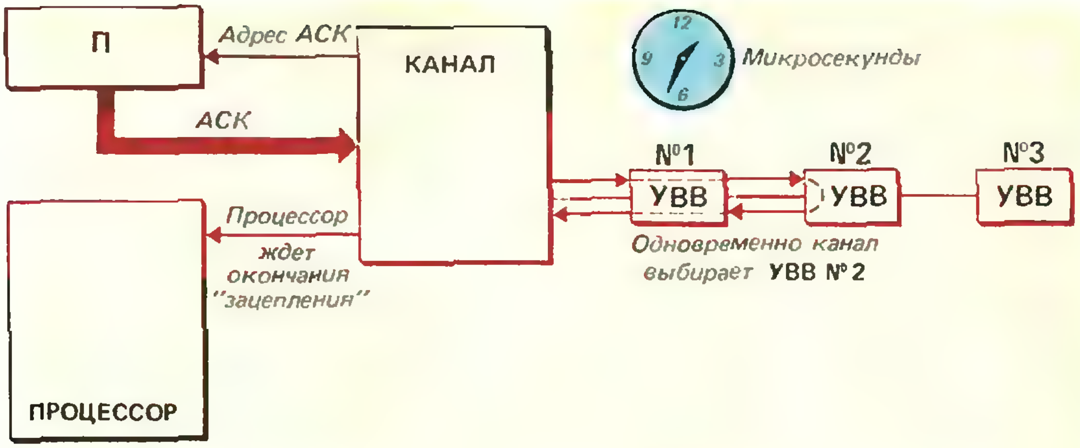

П
Адрес АСК
КАНАЛ
АСК
Микросекунды
12
3
6
9
№1
№2
№3
УВВ
УВВ
УВВ
Процессор
ждет
окончания
"зацепления"
Одновременно канал
выбирает УВВ №2
ПРОЦЕССОР

Рис. 5б.

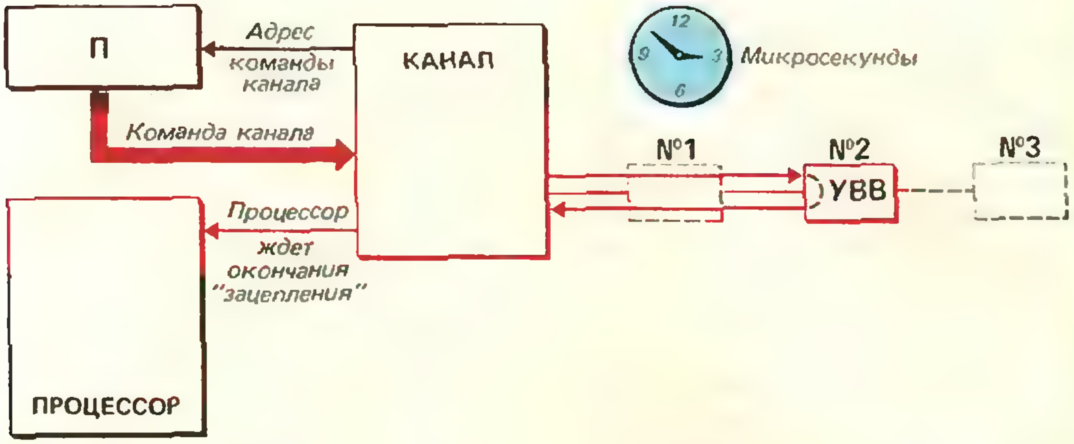

П
Адрес
команды
канала
КАНАЛ
Команда канала
Микросекунды
12
3
6
9
№1
№2
№3
УВВ
Процессор
ждет
окончания
"зацепления"
ПРОЦЕССОР

Рис. 5в.

влекает первую канальную команду из канальной программы; впрочем, эта программа может состоять из единственной канальной команды (рис. 5в);

— канал начинает расшифровку канальной команды: он пересылает команду (разряды 0—7 канальной команды) в УВВ, «узнавшее» свой номер в самом начале «зацепления» процессора с каналом; если УВВ способно выполнить предложенную команду, то оно «ответит» каналу, разрешая «перекачку» информации (рис. 5г);

— после этого процессор «отцепляется» от канала и занимается обработкой другой информации; канал, «заряженный» управляющей информацией, работает с памятью, предоставляя время от времени память в распоряжение процессора;

— когда канал нормально отработает первую канальную команду (не зафиксировав никаких поломок оборудования, никаких замятых перфокарт и т. д.), ход дальнейшей работы канала будет определен с помощью управляющей информации в поле признаков (рис. 4) канальной команды; в частности, если в нем указан признак «Цепочка команд» или признак «Цепочка данных», то связь канала с памятью может продолжаться дальше; их о ношения в этом случае не касаются процессора (рис. 5д);

— если обмен информацией завершен, то канал прерывает работу процессора; перед прерыванием канал подготавливает на буферном регистре *слово состояния канала* (ССК), в котором сообщает в закодированной форме все обстоятельства окончания сеанса связи, запрос на прерывание поступает в процессор и одновременно ССК записывается в одну из фиксированных ячеек памяти; операционная система расшифро-

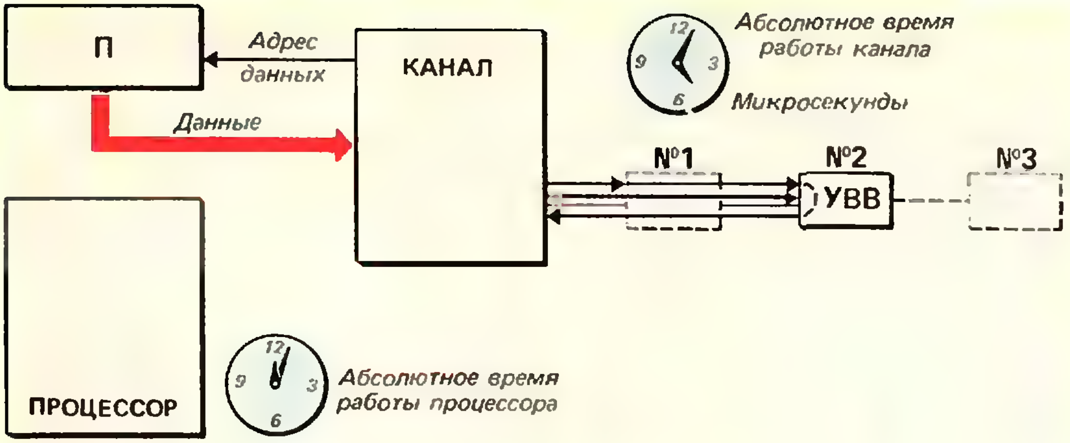

П
Адрес данных
КАНАЛ
Абсолютное время работы канала
12
9
3
6
Микросекунды
Данные
№1
№2
№3
УВВ
ПРОЦЕССОР
12
9
3
6
Абсолютное время работы процессора

Рис. 5г.

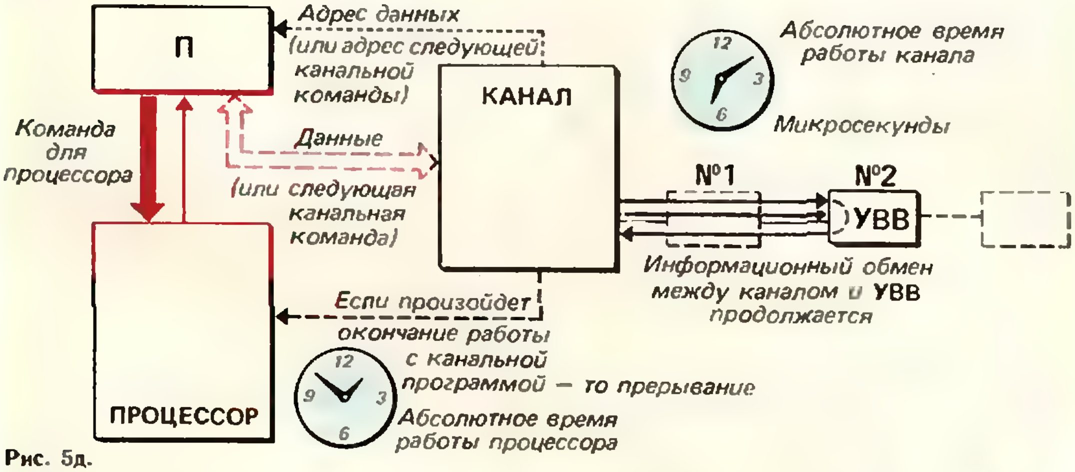

П
Адрес данных (или адрес следующей канальной команды)
КАНАЛ
Абсолютное время работы канала
12
9
3
6
Микросекунды
Команда для процессора
Данные (или следующая канальная команда)
№1
№2
УВВ
Информационный обмен между каналом и УВВ продолжается
Если произойдет окончание работы с канальной программой — то прерывание
ПРОЦЕССОР
12
9
3
6
Абсолютное время работы процессора

Рис. 5д.

вывает обстоятельства окончания обмена и, в зависимости от них, принимает решение: например, продолжить работу или отпечатать оператору просьбу сменить катушку магнитной ленты на магнитофоне и т. п.

Несмотря на то что извлечение канальной команды напоминает сюжет знаменитой сказки: иголка — в яйце, яйцо — в утке, утка — в зайце..., эффективность подобной организации ввода-вывода чрезвычайно высока.

Контроль информационного обмена

Все процессы передачи информации в ЭВМ контролируются. Для контроля всякий информационный тракт сопровождается дополнительными разрядами, которые называются *контрольными*. Их назначение — дополнить сумму передаваемых в данный отрезок времени (такт) разрядов до нечетного числа. Например, нулевой байт сопровождается единицей в контрольном разряде. Таким образом, для передачи байта используют 9 проводов (по девятому идет контрольный бит). Контрольный разряд формируется в источнике информации с помощью специальной логической схемы; приемник информации, получив байт, также генерирует контрольный бит. Передача информации считается успешно завершенной, если контрольные биты источника и приемника совпали. Этот способ контроля называют *«сверткой по модулю 2»*. Легко видеть, что такой способ не обнаруживает ошибки в четном числе разрядов. Существуют методы аппаратного контроля, позволяющие «отловить» и двойные ошибки.

Что читать дальше:

1. Флорес А. Организация вычислительных машин. (М., «Мир», 1972).

2. Флорес А. Внешние устройства ЭВМ (М., «Мир», 1977).

(Окончание Начало см на с 28, 41)

(с Трянино БашАССР) 74; *К Крапивной* (Запорожье) 75, 76, 78—80, 82; *И Крисиков* (Киев) 78—80, 82—84, 86; *А Крейнес* (Кольчугино) 75, 80, 82; *Р Крис* (Киев) 75, 76, 78—80, 82; *И Кроливец* (Краматорск) 76; *Е Кузнецов* (Кишинев) 76; *П Кузнецов* (Киев) 75, 82, 83, 84, 87; *А Кузьмин* (Алма Ата) 74, 76, 80, 83, 84, 86, 87; *С Курчатов* (Саратов) 74—76, 78—80, 82—84, 87; *Л Кустов* (Киев) 74, 76; *Э Кучинский* (Нижний Тагил) 78, 80, 82; *А Кушнеров* (Москва) 82; *Б Лапидус* (Москва) 75, 80; *А Латыкин* (Авдеевка) 74; *В Леонов* (Воронеж) 76, 79, 80, 82, 84; *Е Лисянская* (Харьков) 74—76, 78, 83, 84; *И Лукьянчук* (Киев) 75, 76, 82; *Ф Лю* (Чимкент) 78; *В Любовицкий* (Кострома) 74, 75, 79; *Л Ляпин* (Гомель) 74—76, 79, 82; *А Мазуркевич* (Лыткарино) 74—76, 78, 82; *Д Майоров* (Кирово-Чепецк) 75; *З Мардарашвили* (Кутаиси) 82; *Г Марус* (Арсеньев) 80, 84; *В Матчишин* (Целиноград) 74, 76; *С Махортых* (Лисичанск) 84; *Е Меденников* (Ульяновск) 79, 80, 82; *М Межуева* (Челябинск) 76; *И Миклашевич* (Минск) 76; *А Микула* (Жидачов) 79, 83, 84, 86, 87; *А Минаев* (Саратов) 74—76, 80, 82, 84; *А Мингалеев* (Уфа) 84; *А Михайлов* (Москва) 74—76, 78, 79, 82; *И Михайлов* (Кемерово) 79, 80; *С Михайловский* (Виноградовский р-и Архангельской обл) 74, 76, 83; *Г Молчанов* (Саратов) 74—76, 78—80, 82—84; *Р Набоков* (Москва) 78—80, 82; *С Надточий* (Москва) 83, 84; *А Назаренко* (Киев) 76, 80, 82—84, 86, 87; *И Насалик* (Рогатин) 82; *Г Нечаева* (Курск) 82; *Е Николаев* (Ульяновск) 80, 82; *Д Нишнианидзе* (Кутаиси) 78, 80, 82; *Д Овсянников* (Ленинград) 74, 76, 79, 80, 82—84, 86; *В Оглоблин* (Иркутск) 78—80; *В Оринянский* (Ямполь Винницкой обл) 76; *А Орлов* (п Черноголовка Московской обл) 74, 82; *А Осипов* (Сосновый Бор Ленинградской обл) 83, 84; *Я Оскотский* (Ленинград) 74—76; *А Павлычев* (Рига) 75, 82, 84; *О Панащенко* (Киев) 74, 76, 78—80, 82—84, 86; *М Пантаев* (Москва) 82; *В Пентегов* (Киев) 75, 76, 82, 83; *Г Перельман* (Ленинград) 75, 76, 79, 83, 84; *К Пивницкая* (Москва) 82; *С Пишекин* (Череповец) 78, 80, 84; *А Подвязников* (Мосальск) 80; *Ф Полекшанов* (д Ново-Дедовск Гомельской обл) 76, 82; *А Полисский* (Киев) 79, 82, 83; *Е Поляков* (Калининград Московской обл) 84; *А Пономарев* (Николаев) 82; *Н Пояркова* (Днепродзержинск) 84; *Ю Прохоров* (Орехово-Зуево) 75, 76, 78; *Г Пряхин* (Москва) 78, 82; *Е Рабкин* (Гомель) 74, 82—84; *С Равняго* (Золочев Львовской обл) 76; *В Рожков* (Кривое Озеро) 82; *С Рулев* (Краматорск) 74—76, 82; *А Русецкий* (Тбилиси) 78, 80; *Г Рыбкин* (Смоленск) 74, 75, 78—80, 82; *М Рюхтин* (Алма Ата) 76; *С Рязанцева* (Борисоглебск) 80, 82; *А Сагура* (Запорожье) 75, 76, 78, 80, 82; *В Сиракули* (Ижевск) 84; *С Сафонов* (Киев) 75, 76; *Б Сафронов* (Донецк) 78, 79, 82; *С Селифонова* (с Попелево Калужской обл) 76, 78, 82; *А Семенов* (Стерлитамак) 83; *Н Семенов* (Киев) 76, 84, 87; *М Семенченко* (Ленинград) 78—80, 82; *Т Сергейцев* (Челябинск) 74—76, 78—80, 82—84; *В Середа* (Львов) 74—76, 78—80, 84, 87; *А Сивенцев* (Свердловск) 78, 82—84, 87; *В Сидорин* (Реутов) 79, 84; *А Симонян* (Ереван) 75; *Н Сирых* (Ярославль) 79, 84; *И Скавронский* (Андижан) 80; *А Скок* (Талгар) 74—76, 78, 82; *О Скопцов* (Ангарск) 74, 78—80; *О Славин* (Москва) 74, 76; *П Смирнов* (Тула) 78, 80; *С Смирнов* (Ташкент) 79, 80, 82; *Г Солдак* (Минск) 75, 76, 78—80, 82—84, 87; *С Солодухин* (Шуя) 82; *Д Сорока* (Запорожье) 74—76, 79—84, 87; *А Сромин* (Ленинград) 74, 76; *И Ставицкий* (Фрунзе) 75, 76; *О Стаховская* (Капустин Яр) 80, 82; *С Стешенко* (с Малоданиловское Харьковской обл) 74; *П Страдынь* (Рига) 74, 76; *А Стрешинский* (Донецк) 74, 76, 83, 84; *П Струбицкий* (Тернополь) 76, 78, 80; *Д Стыркас* (п Черноголовка Московской обл) 76; *И Тавин* (Ковров) 83; *А Тагаев* (Новосибирск) 83; *А Тарасов* (Москва) 82; *К Тарасов* (Львов) 83; *А Телиженко* (Одесса) 82; *Р Угриновский* (Хмельницк) 78; *А Урникис* (п Куляй ЛитССР) 80, 84; *В Усачев* (Ромны Сумской обл) 82; *В Усов* (Томск) 80, 82, 84, 86; *Л Уткин* (Вологда) 78, 80, 83, 84, 86; *А Фарбер* (Баку) 79, 80, 82, 84; *П Фастовец* (п Староконстантинов Хмельницкой обл) 80, 82; *Н Федин* (Омск) 78—80, 82—84, 87; *А Федюкович* (Пинск) 80; *В Федюкович* (Киев) 74, 76, 78; *Д Филиппов* (Москва) 78, 80; *В Фисенко* (Джамбул) 80; *А Флеров* (Рига) 80, 82, 84, 86; *И Фоменко* (Днепропетровск) 78, 80, 82—84, 87; *М Фурман* (Мозырь) 80, 82; *С Хосид* (Алма-Ата) 83, 84, 86, 87; *Л Хризман* (Киев) 78, 80, 82, 84, 87; *Ю Цыганков* (Дрожжановский р-н ТАССР) 78—80, 82, 84, 86; *В Чалий* (Рогатин) 75, 76; *Е Чулкин* (с Рябово УдАССР) 80, 82, 84; *А Чумадин* (Баку) 82, 83; *В Шаблинский* (Киев) 80, 82, 83, 86, 87; *С Шарый* (Семипалатинск) 78, 80, 82—84, 86, 87; *И Швец* (Желтые Воды) 78, 82—84, 86, 87; *В Шершнев* (Москва) 78, 80; *В Шик* (Сумгаит) 84; *А Шимановский* (Гомель) 74, 75, 78—80, 82, 84; *С Шишков* (Москва) 78, 80, 82; *И Шкридюк* (Ногинск) 79, 80, 82—84, 87; *М Эренбург* (Днепропетровск) 78—80, 82; *В Юсупов* (Баку) 83; *И Ячиков* (Магнитогорск) 79, 80.

Поправка

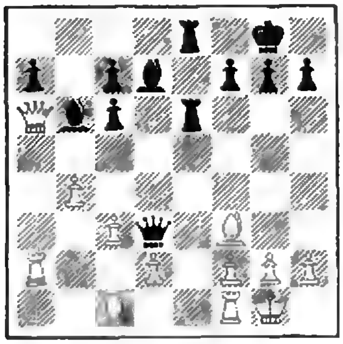
В «Кванте» № 3 в статье «Московский государственный университет им М В Ломоносова» по вине типографии и редактора допущены следующие опечатки на с 45 в уравнении задачи 5 правая часть должна быть 4 (а не 0), в решении этой задачи пропущен знак минус перед корнем x_1 (ответ, однако, указан правильно), на с 46 в неравенстве в условии задачи 5 под знаком $\log_5$ перед числом 11 должен стоять минус (а не плюс) В ответах на с 62 в левом столбце (Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета) в задаче 1 вместо $\pi/3$ должно быть $\pi/6$ и в задаче 5 (с учетом поправки условия) ответ должен быть $]\ \infty\ \ -2[\,\cup\,]-2,\ 2-\sqrt{15}[\,\cup\,]6,\ +\infty[$

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.

Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

В предыдущем номере нашей «Шахматной странички» мы познакомили вас со знаменитой дебютной комбинацией, в которой белые уже на шестом ходу жертвуют ферзя и объявляют неприятельскому королю мат в два хода («мат Легаля»). Эффектные жертвы ферзя всегда производят сильное впечатление и надолго остаются в памяти шахматистов. Сегодня мы покажем вам еще несколько комбинаций, в которых в жертву приносится ферзь. Все они по праву относятся к жемчужинам шахматного творчества.

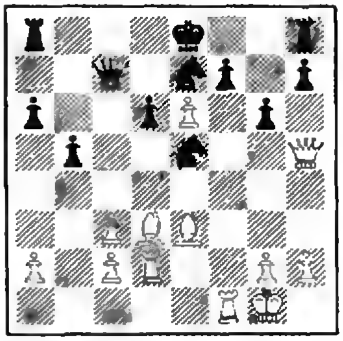
Первая комбинация принадлежит гениальному американскому шахматисту прошлого века, неофициальному чемпиону мира Паулю Морфи.



Л. Паульсен — П. Морфи.

Эта позиция встретилась в его партии с Л. Паульсеном из турнира в Нью-Йорке 1857 года — первом турнире, в котором играл П. Морфи. Здесь последовало: **1...Ф:f3!! 2. gf Лg6+ 3. Kph1 Ch3 4. Лd1** (на 4. Лg1 следует мат в три хода, беззащитны черные и после 4. Фd3 f5 5. Фc4+ Kpf8!) **4...Cg2+ 5. Kpg1 C:f3+ 6. Kpf1 Cg2+ 7. Kpg1 Ch3+** (Морфи избирает самый простой путь к победе, однако черные могли объявить форсированный мат в четыре хода: 7...Ce4+ 8. Kpf1 Cf5! 9. Фe2 Ch3+ 10. Kpe1 Лg1×) **8. Kph1 C:f2 9. Фf1 C:f1 10. Л:f1 Лe2 11. Лa1 Лh6 12. d4 Ce3.** Белые сдались.

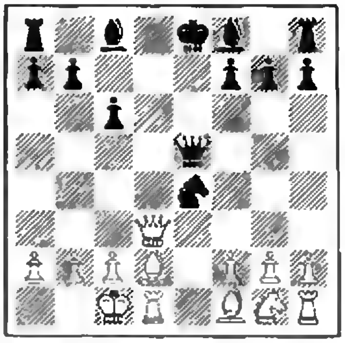
Следующая жертва ферзя принадлежит другому великому мастеру комбинации М. Талю. Эти две партии разделяют более чем 110 лет!



М. Таль — А. Суэтин.

1. Ф:e5! de 2. ef+, и черные сдались. На 2...Kpf8 следует 3. Ch6×, а на 2...Kpd7 решает 3. Cf5++ Kpc6 4. Ce4+ Kd5 5. C:d5+Kpd7 6. C:a8+ Kpe7 7. Cg5+ Kpf8 8. Ch6+ Kpe7 9. f8Ф+.

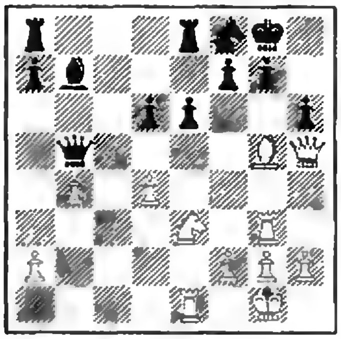
Интереснейшая комбинация на следующей диаграмме встретилась ровно 70 лет назад в партии двух выдающихся гроссмейстеров Рети и Тартаковера.



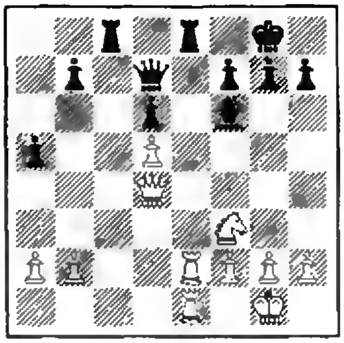
Р. Рети — С. Тартаковер.

Белые уже отдали фигуру, и теперь расстаются и с ферзем: **1. Фd8+!! Kp:d8 2. Cg5++ Kpc7** (2...Kpe8 3. Лd8×) **3. Cd8×.**

Предлагаем вам самим найти две комбинации с жертвой ферзя, давно ставшие классическими (задачи 1, 2), первая из них называется «мельницей», вторая иллюстрирует тему «отвлечение»



1. К. Торре — Эм. Ласкер. Белые начинают и выигрывают.



2. Адамс — К. Торре. Белые начинают и выигрывают.

Обе они содержат геометрические мотивы. Партии сыграны талантливым мексиканским мастером начала века К. Торре, причем в одном случае он является автором комбинации, а в другом — соавтором.

* *
*

Напоминаем читателям «Шахматной странички», что в следующем номере «Кванта» открывается наш «Шахматный конкурс», победители которого будут награждены шахматно-математической литературой с автографом чемпиона мира А. Карпова.

Метод неподвижных точек

1. Например,

$$f(x)=\begin{cases} b \text{ при } x\in[a;\ (a+b)/2] \\ a \text{ при } x\in\,](a+b)/2;\ b]. \end{cases}$$

2. Например, годятся функции, изображенные на рисунках 1 а и 1 б.
3. Например, круговое кольцо и его поворот вокруг центра на угол, не кратный 2π.

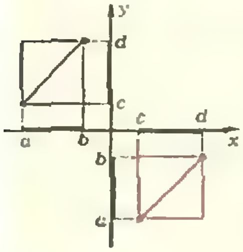


Рис. 1а.

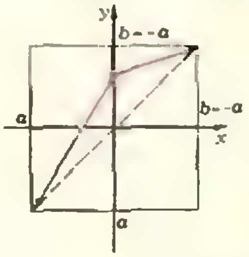


Рис. 1б.

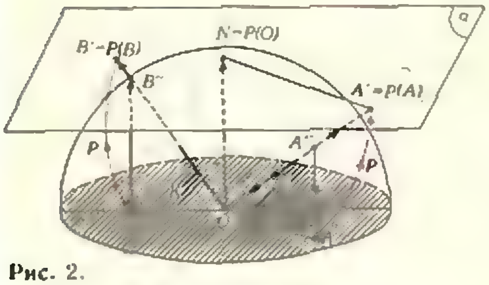


Рис. 2.

4. Например, $P^{-1}T_vP$, где T_v — параллельный перенос плоскости α на ненулевой вектор $\vec{v}$, а P — взаимно однозначное отображение круга K на плоскость α, показанное на рисунке 2.
5. Указание: воспользуйтесь идеей решения упражнения 1.
6. Указание: доказательство аналогично доказательству того, что точка c (в первой теореме) неподвижна.

Электромагнитная индукция

1. $I=\dfrac{|\vec{B}|l|\vec{v}|(R_1+R_2)}{R_1R_2}$;

$$P=\frac{|\vec{B}|^2\ l^2|\vec{v}|^2(R_1+R_2)}{R_1R_2}.$$

2. Амплитуда тока и его частота увеличатся вдвое.
3. $I=|\vec{B}|a|\vec{v}|/R$; если квадрат вдвигать с постоянным ускорением, ток будет изменяться по линейному закону.
4. Ток в кольце увеличится вдвое.
5. Протекающие по катушке заряды одинаковы, а количество теплоты, выделяющееся в катушке, в первом случае больше.
6. Указание. Во-первых, полная индукция магнитного поля пропорциональна числу витков катушки. Во-вторых, полная площадь поверхности, охватываемой витками катушки, тоже пропорциональна числу витков.
7. Во второй катушке течет постоянный ток.
8. $v_{\min}=\dfrac{\mathcal{E}}{LI_0}$.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Вариант 1

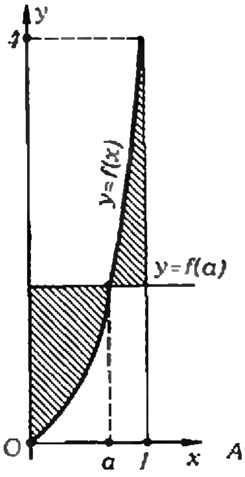
1. 4 (при любом $\alpha\in\mathbf{R}$). Указание. При $\alpha\neq0$ разделите обе части уравнения на $\alpha f(x)$ и сделайте набросок графика функции $y=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. 2. $[\log_a(4+\sqrt{16+a^2});\ 3\log_a 2[$ при $a\in\,]0;\ 1[$, $[\log_a(4+\sqrt{16+a^2});\ +\infty[$ при $a\in\,]1;\ +\infty[$. При $a\in\,]-\infty;\ 0]\cup\{1\}$ левая часть неравенства не имеет смысла. 3. $x=2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$ при всех $a\in\mathbf{R}$, $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\left(\pi-\arccos\dfrac{a+2}{a\sqrt{2}}\right)+2\pi l$ $(l\in\mathbf{Z})$ при $a\in\,]-\infty;\ -1[\,\cup\,]-1;\ -2(\sqrt{2}-1)]\cup[2(\sqrt{2}+1);\ +\infty[$. Указание. Данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} a\cdot\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}+(\sin x+\cos x)=1, \\ \cos x\neq0. \end{cases}$$

4. $R(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$. 5. Указание. $\vec{MQ}=\vec{MP}+\vec{PQ}$, $\vec{NP}=\vec{NQ}+\vec{QP}$.

Вариант 2

1. Наибольшее — при $a=1$, наименьшее — при $a=\dfrac{1}{2}$. Указание. Фигура, о которой говорится в задаче, заштрихована на рисунке 3. 2. $\left]\dfrac{5}{2};\ +\infty\right[$. 3. $x=\dfrac{\pi}{2}k$ $(k\in\mathbf{Z})$ при $a=0$; $x_1=\mathrm{arcctg}\,(2a)+\pi k$, $x_2=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,(4a)+\dfrac{\pi}{2}l$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$ при $a\neq0$ Указание. Представьте левую часть уравнения в виде квадратного трехчлена относительно a. 4. Да. Указание. Выразите l через a и b. 5. $\dfrac{1}{8}\sqrt{2}\,(3-\sqrt{3})\,a$. Указание. Пусть $SABC$ — данный правильный тетраэдр, M — середина стороны BC, H — основание высоты тетраэдра, проведенной из S, K — середина ребра SA, $O_1=(MK)\cap(SH)$ (рис. 4). Тогда O_1 — центр шара, вписанного в тетраэдр, $|O_1H|$ — его радиус. Центр O_2 сферы, о которой говорится в условии, лежит на $[SO_1]$, причем если $(O_2D)\perp(AS)$ $(D\in AS)$, то $|O_2O_1|=|O_2D|$ — искомый радиус.



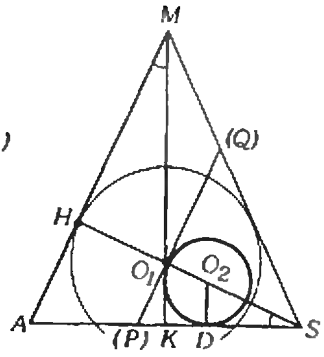


Рис. 3. **Рис. 4.**

Вариант 3

1. $\frac{a}{uv}\sqrt{(u+w)^2-v^2c}$ Указание Очевидно, всякая стратегия переправы равносильна некоторой стратегии, при которой пловец сначала плывет, потом идет по противоположному берегу. Плыть ему, очевидно, надо против течения. Если вектор $\vec{v}$ представить в виде $\vec{v}=x\vec{b}+y\vec{w}$, где $\vec{b}$ — единичный вектор, перпендикулярный вектору $\vec{w}$ и направленный в сторону противоположного берега, то время движения пловца в воде равно $\frac{a}{x}$, на суше $\frac{a}{xu}(w-\sqrt{v^2-x^2})$ 2. $\left]-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -2\right[$ 3. $x_1=\frac{\pi}{2}k$, $x_2=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{8}{3}+\frac{\pi}{2}l$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$ 4. $\frac{4}{3}$

Указание $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{3n-2}-\frac{\frac{1}{3}}{3n+1}$$

5. $(5-2\sqrt{6})R$

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Вариант 1

1. $\{(2,\ 18),\ (18,\ 2)\}$ 2. $\left[\log_3\frac{83}{19},\ +\infty\right[$ 3. $2V$ 4. $\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ 5. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$, $y=2$ Указание Поскольку при всех $x\neq\pi+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\leqslant 1,$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=1\Leftrightarrow\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$$

и при всех y

$$y^2-4y+5\geqslant 1,$$

данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1\\ y^2-4y+5=1\end{cases}$$

Вариант 2

1. $1-\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{r}{\sqrt[3]{2}}$ 3. $x_1=\operatorname{arctg}2+\pi k$, $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi l$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$ 4. $]-\infty,\ 0]\cup\left\{\frac{1}{2e}\right\}$

Вариант 3

1. 1) 6 с, 2) 18 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ 2. $20\sqrt{2}-28$ 3. $[-14,\ 2]$ 4. $\left\{\left(64,\ \frac{1}{4}\right)\right\}$ 5. $\max\limits_{\mathbf{R}}y=\frac{3}{4}$, $\min\limits_{\mathbf{R}}y=-\frac{1}{4}$

Задачи устного экзамена

1. а) $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$, б) $x\in\left[\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right[$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ )$ и $x\in\left]-\frac{\pi}{2}+\pi l,\ \pi l\right]$ $(l=0,\ -1,\ -2,\ )$, в) $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k=1,\ 2,\ )$, $x_2=(-1)^{l+1}\frac{\pi}{6}+\pi l$ $(l=0,\ -1,\ -2,\ )$ 2. $]-\infty,\ -3[\ \cup\ \left]-2,\ -\frac{3}{2}\right]\cup[-1,\ 3[$ 3. На промежутках $]-\infty,\ -\sqrt{3}]$, $[-1,\ 0]$ и $[1,\ \sqrt{3}]$ функция убывает, на промежутках $[-\sqrt{3},\ -1]$, $[0,\ 1]$ и $[\sqrt{3},\ +\infty[$ — возрастает, точки $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ — точки ее минимума, точки $x=-1$, $x=1$ — точки максимума

5. $]-\infty,\ -3[\ \cup\ \left]3,\ \frac{29}{7}\right[$ Указание Точка минимума данной функции лежит правее ее точки максимума. Трехчлен $x^2+2\alpha x+\beta$ тогда и только тогда имеет два положительных корня, когда

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta>0\\ \alpha<0\\ \beta>0\end{cases}$$

6. $m\geqslant 0$ Указание $f'(x)=e^{-x}[2e^{2x}+(2m+1)e^x+m]$

7. а) $]-\infty,\ 0]$, б) $]0,\ +\infty[$ Указание Данное уравнение равносильно уравнению

$$\lg x=\frac{\frac{1}{3}}{x-\frac{a}{3}}$$

8. Один корень при $a=0$, два — при $a=1$, четыре — при $0<a<1$, при $a<0$ и при $a>1$ корней нет Указание Постройте график функции $y=\frac{1}{4}x^2e^{2-x}$ (для поведения при $x\to+\infty$ см п. 117 пособия «Алгебра и начала анализа 10») 9. Два корня при $a\in\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}\cup]-1,\ 0[\cup]0,\ 1[$, три корня при $a\in\{-1,\ 0,\ 1\}$, четыре корня при $a\in]-\sqrt{2},\ -1[\cup]1,\ \sqrt{2}[$, при $|a|>\sqrt{2}$ корней нет 10. $-\frac{1}{2}$ 12. $a=-1$, искомая точка $(0,\ -1)$ 13. В точке $\left(\frac{16}{9},\ \frac{4}{3}\right)$ 14. Указание См задачу № 28 в § 45 пособия «Геометрия 9—10» 15. Указание Примените метод математической индукции 16. Указание См § 22 пособия «Геометрия 9—10» Проведите через C прямую, параллельную (AB), и через B прямую, параллельную (CM) 17. Указание При гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{|AK_2|}{|AK_1|}$ точка D переходит в точку $D_1\in K_2$, а касательная (BC) к окружности K_1 в параллельную ей касательную к окружности K_2

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

(см «Квант» № 5)

Математика

Вариант 1

1. а) $]-\infty,\ -1[\cup\left]\frac{5}{4},\ +\infty\right[$, б) $\{-1\}$, в) $]-1,\ 1[\cup\left\{\frac{5}{4}\right\}$, г) $\{1\}$ 2 $\left]0,\ \frac{1}{6}\right[\cup\left]\frac{3}{2},\ +\infty\right[$ 3. $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ 0\right[\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ +\infty\right[$ 4. -1 5. $\frac{1}{3}\sqrt{15}\pi R^3$.

Вариант 2

1. $\frac{1}{4}$ 2 $x=a^2-4a$ при $a>2$ 3. 6

4. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$ при $a=-\frac{3}{2}$, $x=(-1)^k\frac{\arcsin(1-\sqrt{2a+3})}{2}+\frac{\pi}{2}k\quad(k\in\mathbf{Z})$ при $a\in\left]-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right]$ (впрочем, случай $a=-\frac{3}{2}$ можно не писать отдельно)

5. $\frac{3a^3}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2\cos\alpha+1}$

Вариант 3

1. $]0,\ 1[$ 2. $S_1=\frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1}$ при $|x|\neq1$, $S_1=n+1$ при $|x|=1$, $S_2=\frac{2x[nx^{2n+2}-(n+1)x^{2n}+1]}{(x^2-1)^2}$ при $|x|\neq1$, $S_2=n(n+1)$ при $x=1$, $S_2=-n(n+1)$ при $x=-1$ 4. $\{-1\}$ 5. $\frac{2}{3}h^3\cdot\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin\beta$

Физика

Физический факультет
и факультет радиофизики и электроники

1. Цилиндр опрокинется при угле $\alpha=\mathrm{arctg}\,D/h\approx22°$
2. $\frac{V_п}{V_с}=\frac{\rho_с-(1-n)\rho_в}{(1-n)\rho_с-\rho_п}=260$ (здесь $\rho_в=1{,}0\times10^3$ кг/м³ — плотность воды)
3. $T=(1+n)\Delta T$
4. $q=\frac{n-1}{n}\mathcal{E}C$
5. $I=\sqrt{\frac{|\vec{F}||\vec{v}|}{R}}\approx0{,}3$ А
6. Угол падения света подобрать нельзя
7. $\Gamma_2=\frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1-1}=\frac{2}{3}$

Механико-математический факультет
и факультет прикладной математики

1. $x_{max}=\Delta l+\sqrt{(\Delta l)^2+2h\Delta l}=20$ см
2. $l=\frac{N_2^2}{N_2^2-N_1^2}\Delta l=64$ см
3. $l=h+\rho gh^2/p$ (здесь ρ — плотность ртути)
4. Напряжение будет достаточным
5. $q=\pi D^2|\vec{B}|/4R$
6. $\beta\approx(n_ф-n_к)\alpha=0{,}12°$
7. $d=F/n$

Химический факультет

1. $\frac{N_1}{N_2}=\frac{3}{\cos\alpha}-2=4$
2. $T=\frac{1-n}{n}\Delta T=297$ К (здесь $n=0{,}01$)
3. $R_1=U/I-(n-1)R_2$
4. $R_1=0{,}96R_2$
5. $U_з=\frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}\right)$ (здесь h — постоянная Планка, c — скорость света, e — заряд электрона)

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

(см «Квант» № 5)

Математика

Вариант 1

1. $\frac{1}{12}$ Решение Обозначим точку пересечения медиан треугольника ABC через O Площади треугольников PQR, POQ, QOR, ROP, AOB, BOC, COA обозначим соответственно через q, q_1, q_2, q_3, Q_1, Q_2, Q_3 Тогда $\frac{|OP|}{|OA|}=\frac{1}{3}$ (так как $|OA|=\frac{2}{3}|AK|$ и $\frac{|AP|}{|PK|}=1$), $\frac{|OQ|}{|OB|}=\frac{1}{2}$, $\frac{|OR|}{|OC|}=\frac{1}{6}$ Из $S_{ABL}=S_{CBL}$ и $S_{AOL}=S_{COL}$ следует $S_{ABO}=S_{CBO}$ Аналогично $S_{CBO}=S_{ACO}$ Значит, $Q_1=Q_2=Q_3=\frac{1}{3}$ Поэтому $\frac{q_1}{Q_1}=\frac{|OP|\cdot|OQ|}{|OA|\cdot|OB|}=\frac{1}{8}$

Аналогично $\frac{q_2}{Q_2}=\frac{1}{12}$, $\frac{q_3}{Q_3}=\frac{1}{24}$. Тогда $q=q_1+q_2+q_3=\frac{1}{12}$.

2. $\left]\frac{2}{3}\sqrt{21};\ +\infty\right[$. **3.** $x=\pm\frac{5}{6}\pi+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

4. $\left]\frac{5}{3};\ +\infty\right[$.

Вариант 2

1. $\frac{11}{12}$. **2.** $\left[\frac{-5+\sqrt{13}}{2};\ 1\right]$. **3.** $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. **4.** $\left[-1;\ \frac{7}{3}\right]$.

Физика

Вариант 1

3. В калориметре будет смесь из $m_1'\approx 0{,}3$ кг воды и $m_2'\approx 0{,}7$ кг льда; температура смеси $t=0\,^\circ$C.

4. $F=\frac{l^2-a^2}{4l}=0{,}12$ м.

Вариант 2

3. Турист находится в точке с координатами $x=x_0+s\cos\alpha\approx-1{,}5$ км и $y=y_0+s\sin\alpha\approx\approx 4{,}5$ км.

4. $R=U/I-r\approx 0{,}34$ Ом (здесь $I=S\sqrt{\frac{D[c(T-T_0)+\lambda]}{\rho\tau}}$ — ток при коротком замыкании, $r=\rho l/S$ — сопротивление предохранителя).

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

(см. «Квант» № 5)

Математика

Вариант 1

1. 10 км/ч. Решение. Если положить $|AC|=x$ (км), то

$$\frac{x}{v_0}+\frac{120-x}{v_1}=\frac{x}{v_1}+\frac{120-x}{v_0},$$

откуда $x=60$. Если t — время (в часах), необходимое мотоциклисту, движущемуся со скоростью v_0 км/ч, для преодоления расстояния от A до C, то

$$\begin{cases} v_0t=60,\\ v_0(8-t)+\frac{a(8-t)^2}{2}=60.\end{cases}$$

Отсюда, учитывая условие $a=2v_0$, получаем

$$v_0^2-15v_0+50=0$$

или $v_0\in\{5,\ 10\}$. Значение $v_0=5$ не удовлетворяет условию, так как тогда даже на преодоление расстояния от A до C уйдет уже 12 часов. Второе значение удовлетворяет всем условиям задачи.

2. $]-1-\sqrt{5};\ -3[\ \cup\ ]-1+\sqrt{5};\ 5[$.

3. $x=\frac{13}{6}\pi+4\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. Указание. $\sqrt{3}\cos x+\sin x-2=2\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right]$.

4. $\frac{|CE|}{|DE|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Указание. Продолжим сторону DC и проведем прямую $BK\parallel(AC)$ (рис. 5); тогда середина O отрезка CK — центр окружности, о которой говорится в условии.

5. $3+2\sqrt{3}$. Указание. Шар касается плоскостей SAC и SAB; значит, его центр O принадлежит биссектору SAD двугранного угла $SABC$ с ребром SA (здесь D — середина стороны BC). Шар касается также плоскостей SBC и ABC; значит, O принадлежит биссектору двугранного угла с ребром BC и линейным углом ADS. Таким образом, O лежит на продолжении биссектрисы KD угла ADS (рис. 6). В плоскости ADS проведем прямую $OE\perp(AD)$ и прямую $OF\perp(AS)$. Тогда $(OE)\perp(ABC)$ и $|OE|=R$. Опустим из точки E перпендикуляр EP на плоскость ASC. Поскольку $(OE)\parallel(ASC)$, $|EP|=R$. Так как $(EAC)\perp(ASC)$, $P\in(AC)$. Из $\triangle AEP$ находим R.

Вариант 2

1. Первый — 200 км, второй — 100 км.

2. $\left\{(2;\ 1),\ (-2;\ -1),\ \left(\sqrt{6};\ \frac{1}{3}\sqrt{6}\right),\ \left(-\sqrt{6};\ -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)\right\}$.

3. $x=\frac{\pi}{3}+(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{13}-\sqrt{3}}{4}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению

$$4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+4\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0;$$

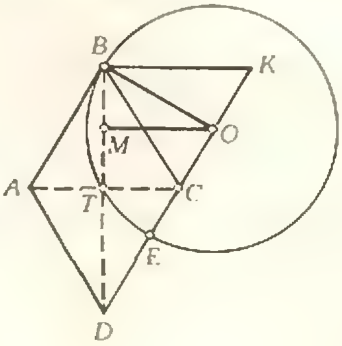


Рис. 5.

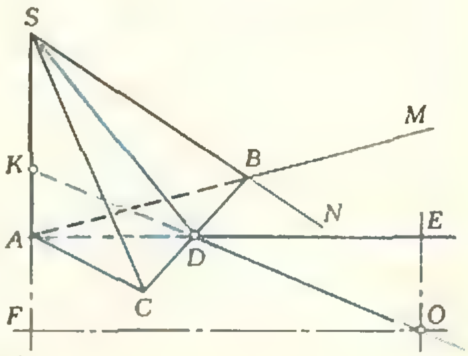


Рис. 6.

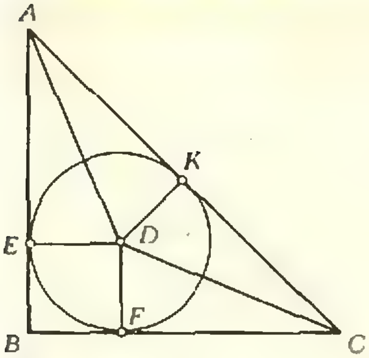


Рис. 7.

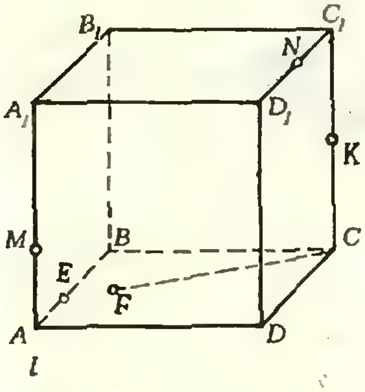


Рис. 8.

$$2x+\frac{\pi}{3}=2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\pi.$$

4. $\frac{5}{16}\pi(3-2\sqrt{2})a^2$. Указание. Пересечение есть сектор круга, окружность которого вписана в $\triangle ABC$ (рис. 7).

5. 1. Указание. Проведем плоскость через l и (MN). Пусть $[ME]$ — пересечение этой плоскости с гранью ABB_1A_1 (рис. 8). Тогда $(ME)\parallel(NK)$ — прямые NK, MN, ME и l образуют параллелограмм. Из подобия треугольников MAE и C_1NK легко вывести $|ME|<|NK|$. Значит, этот параллелограмм пересекается с гранью $ABCD$ и прямая l пересекается с ней (в точке F), а не с ее продолжением. Из подобия треугольников A_1MN и CKF легко найти $|KF|$.

Физика

Вариант 1

1. В горизонтальном направлении на тело массой m действует только сила трения: $ma_{\text{гор}}=|\vec{F}_{\text{тр}}|$. Отсюда

$$|\vec{F}_{\text{тр}}|=m|\vec{a}|\cos\alpha=mg\sin\alpha\cos\alpha.$$

2. Запишем начальные и конечные значения давлений в различных участках трубки. Начальные давления: $p_{AB}=2\varrho gh=p$, $p_{CD}=\varrho gh=p/2$, $p_{EF}=0$. Конечные давления: $p_F=\varrho gh+p'_{CD}=p/2+p'_{CD}$, $p'_{CD}=\varrho gh+p'_{AB}=p/2+p'_{AB}$. По закону Бойля — Мариотта $p_{AB}h=p'_{AB}x$ и $p_{CD}h=p'_{CD}(3h-x)$, где x и $3h-x$ — конечные длины участков AB и CD соответственно. В итоге получаем уравнение $6p_F^2-12pp_F+5p^2=0$, откуда $p_F=p(1+1/\sqrt{6})$ (второй корень — со знаком «минус» в скобке — отброшен, так как по смыслу задачи давление должно увеличиться).

3. По закону Фарадея напряжение на катушке $U_L=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Так как ток в цепи растет прямо пропорционально времени, U_L со временем не изменяется и в любой момент t $U_L=L\frac{I}{t}$. Следовательно, и напряжение на конденсаторе, равное напряжению на катушке, тоже остается постоянным: $\frac{Q_0}{C_0}=\frac{Q_0-q}{C}$, где Q_0 — начальный заряд на конденсаторе, q — заряд, ушедший с пластин конденсатора за время t, C — емкость конденсатора в момент t. Из равенства $L\frac{I}{t}=\frac{Q_0}{C_0}$ найдем I: $I=\frac{Q_0}{LC_0}t$. Тогда ушедший с конденсатора заряд $q=I_{\text{ср}}t=\frac{I}{2}t=\frac{Q_0}{2LC_0}t^2$. Из постоянства напряжения на конденсаторе найдем C:

$$C=C_0\frac{Q_0-q}{Q_0}=C_0\left(1-\frac{t^2}{2LC_0}\right).$$

4. При минимальной частоте вращения для ведра с водой в верхнем положении можно записать: $m\omega^2l=mg$. Отсюда $\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$. Выбирая $l\sim1$ м, $g=10$ м/с², получаем $\nu\sim0{,}5$ Гц.

5. Сразу же заметим, что никакой интерференции света в этом опыте наблюдаться не может, так как электрическая лампочка — источник некогерентного излучения. На рисунке 9 изображена схема эксперимента. Здесь S — лампочка, S_1 и S_2 — ее первые изображения в зеркалах (в действительности изображений бесконечно много, но для качественного объяснения явления достаточно рассмотреть лишь два изображения). На участок CD экрана падает лишь прямой свет от лампочки, а на участки BC и DE падает как прямой свет, так и отраженный свет от зеркал. Вот почему участки BC и DE выглядят светлее участка CD. Далее картина повторяется по обе стороны от центральной полосы.

Вариант 2

1. Искомое расстояние l найдем из закона сохранения энергии, перейдя в систему отсчета, где заряженная плоскость покоится:

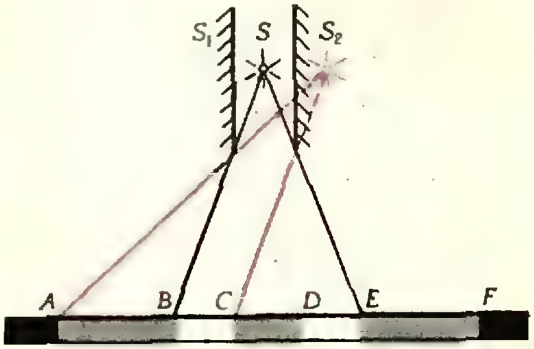


Рис. 9.

$$l = l_0 - \frac{m(|\vec{v}|\sin\alpha - |\vec{u}|)^2 e_0}{\sigma q}.$$

2. Запишем равенство моментов сил относительно точки подвеса: $mg(R-x) = Mgx$. Отсюда найдем плечо x силы $\overrightarrow{Mg}$: $x = \frac{mR}{m+M}$. Из рисунка к условию задачи следует, что $\sin\alpha = \frac{x}{R+l}$. Тогда окончательно

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{(1+l/R)(1+M/m)}.$$

3. Запишем условия равновесия поршня до проникновения гелия: $p_0 + mg/S = p_{O_2}$ и после выравнивания концентрации гелия по всему сосуду: $mg/S = p'_{O_2}$. По закону Бойля — Мариотта $p_{O_2}lS = p'_{O_2}(l+x)S$. Окончательно для величины x смещения поршня получим $x = \frac{p_0 S}{mg}l$.

4. Как известно, $p = |\vec{F}|/S$. Выбираем $|\vec{F}| \sim 1$ Н, толщина линии $d \sim 0{,}2$ мм $= 2 \cdot 10^{-4}$ м. Тогда $p = \frac{|\vec{F}|}{S} = \frac{|\vec{F}|}{\pi d^2/4} \sim 3 \cdot 10^7$ Па.

5. Очевидно, один из источников дает постоянное напряжение, а второй — переменное. При переменном токе дуга существенно слабее, чем при постоянном (проявляется большое реактивное сопротивление катушки индуктивности).

Вариант 3

1. При температуре $t_1 = 100$°C давление паров воды равно 10^5 Па, то есть $p/3$. Следовательно, парциальное давление воздуха под поршнем станет равным $2/3\,p$. Из объединенного газового закона найдем новое расстояние x от поршня до поверхности воды:

$$\frac{ph}{T} = \frac{2/3px}{T_1}, \text{ и } x = \frac{3}{2}\frac{T_1}{T}h \approx 2h.$$

2. Разность потенциалов между точками AA' $U_{AA'} = U$, а между точками BB' $U_{BB'} = \frac{U}{3} = U\frac{|r-R|}{r+R}$. Знак модуля присутствует потому, что вольтметр указывает абсолютное значение напряжения. Учитывая оба знака разности $r-R$, получим

$$R = \begin{cases} r/2 \text{ при } R < r \\ 2r \text{ при } R > r. \end{cases}$$

3. Минимальная скорость достигается, когда центр тяжести части каната массой $m_1 = m\frac{2\pi R}{l}$, образовавшей круговую петлю, оказывается поднятым на высоту R: $\frac{m|\vec{v}_{\min}|^2}{2} = m_1 gR$. Отсюда $|\vec{v}_{\min}| = 2R\sqrt{\frac{\pi g}{l}}$.

4. Выталкивающая сила, действующая на тело человека со стороны воздуха, равна по модулю $F_{\text{выт}} = \varrho_{\text{возд}}Vg$. Объем V выразим через массу человека m, учитывая, что плотность тела практически равна плотности воды: $V = \frac{m}{\varrho_{\text{воды}}}$. Таким образом, $F_{\text{выт}} \sim \frac{\varrho_{\text{возд}}}{\varrho_{\text{воды}}}mg$. Плотность воздуха $\varrho_{\text{возд}}$ оценим по закону Менделеева — Клапейрона и закону Авогадро: $\varrho_{\text{возд}} \sim \frac{p\mu}{RT} = \frac{p\mu T_0}{p_0 V_0 T}$. Здесь $p_0 = 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К, $V_0 = 2{,}24 \cdot 10^{-2}$ м^3. Взяв $p \sim p_0 = 10^5$ Па, $T \sim 300$ К и зная $\varrho_{\text{воды}} = 10^3$ кг/м^3, получаем, что $\varrho_{\text{воды}}/\varrho_{\text{возд}} \sim 760$. Следовательно, выталкивающая сила меньше силы тяжести приблизительно в 760 раз. Окончательно для массы $m \sim 70$ кг, $F_{\text{выт}} \sim 1$ Н.

5. В начальный момент манометр показывает резкое падение давления. Оно обусловлено, в основном, увеличением объема воздуха под поршнем. Затем давление увеличивается, превышая первоначальное значение. Это связано с тем, что ацетон интенсивно испаряется, при этом давление его паров, а значит, и суммарное давление паров и воздуха, увеличивается. Росту давления способствует и рост температуры смеси до температуры окружающей среды.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1. Решение:

$$\begin{array}{ccccc} 7 & = & 9 & - & 2 \\ - & & - & & \times \\ 3 & = & 1 & + & 2 \\ = & & = & & = \\ 4 & = & 8 & - & 4 \end{array}$$

При этих значениях букв можно составить очень много тождеств. Вот некоторые из них:

ОЛ − ИМ + ПИ + АД : А = 80,
(О + Л − И − М − П) · (ИА + Д) : А = 80,
(О : (Л − И) + МП) · И + А + Д + А = 80,
(О · Л − ИМ) + ПИА − ДА = 80,
О : (Л − И) · МПИ : А + Д : А = 80,
(ОЛ − И + М) · (ПИ : А − Д : А) = 80.

2. $(63! - 61!) = 61!(62 \cdot 63 - 1) = 61!\,((71-9)(71-8)-1) = 61!\,(71^2 - 17 \cdot 71 + 71) = 61! \cdot 71 \cdot 55$.

3. См. рисунок 10.

4. Так как Саша может стоять рядом только с Мишей, он — либо первый, либо последний. Но впереди Миши стоит Юра, следовательно, Миша не может быть вторым, а поэтому Миша — предпоследний, и Саша — последний.
Очевидно, Олег стоит впереди Юры, а так как Володя не стоит рядом с Олегом, он может находиться только между Юрой и Мишей, то есть в середине. Друзья стоят в очереди в следующем порядке: Олег, Юра, Володя, Миша и Саша.

5. В двоичной системе счисления.

6. На рисунке 11 указан способ разрезания данного треугольника на 8 равносторонних треугольников. Чтобы получить 11 треугольников, достаточно один из полученных треугольников разрезать на четыре.

(см. «Квант» № 5)

1. Можно: на рисунке 12 показан один квадрат. Такие квадраты образуются при каждом из 12 ребер куба.

2. 1 — Тикōн Педот, 2 — Тикōн Вась, 3 — Педот Вась, 4 — Педот Тикōн, 5 — Тикōн Падей, 6 — Падей Ōстап, 7 — Падей Иаля, 8 — Ōстап Тикōн.

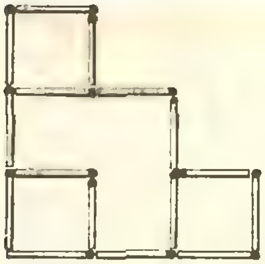


Рис. 10.

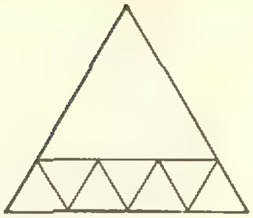


Рис. 11.

3. $\frac{25}{4}$ и $\frac{5}{4}$.

4. Могут: в бочке 4 насадки.
Действительно, из первого условия следует, что две бочки уравнены с 20 ведрами кваса. Поэтому одна бочка содержит 10 ведер кваса. Так как 19 бочек + 1 насадка + 15,5 ведер уравниваются с 20 бочками + 8 ведрами, то
1 насадка + 15,5 ведер — 8 ведер = 20 бочек — 19 бочек;
1 насадка + 7,5 ведер = 1 бочка;
1 насадка + 7,5 ведер = 10 ведер;
1 насадка = 2,5 ведер.
Следовательно, в бочке 4 насадки.

5. См. рисунок 13: $A \cong A_1$, $B \cong B_1$ и так далее.

6. $\overline{aba} = 100a + 10b + a = 101a + 10b = 14 \cdot 7a + 3a + 7b + 3b = 7(14a + b) + 3(a + b)$. Если $a + b = 7k$, то $\overline{aba} = 7(14a + b + 3k)$ делится на 7.

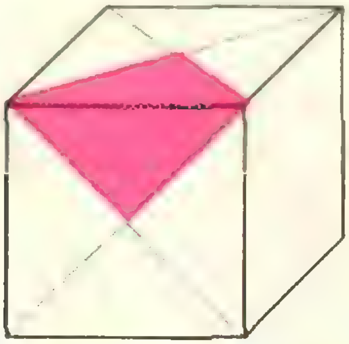


Рис. 12.

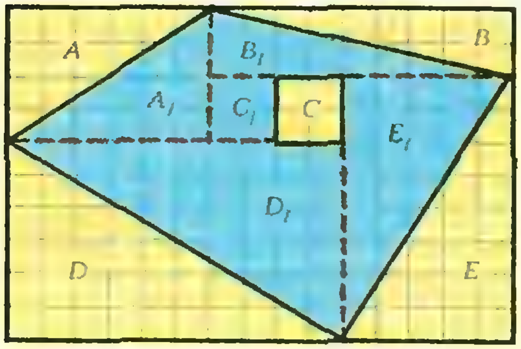


Рис. 13.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 5)

1. **1. f4 Фa1 2. f5 a2** (черные пытаются освободиться, иначе после превращения белой пешки в ферзя следует Фf3 и Фh1×) **3. f6 Кa3 4. f7 Сb1** (4...Кс4 5. f8Ф Кe5 6. Фa8 Кg4+ 7. Кр:h3 и 8. Фg2×) **5. f8Ф Лс2 6. Фf3 Лed2** (черных губит избыток фигур, мешающих друг другу; успей они сыграть Лс1 и Лес2, белым бы не сдобровать) **7. Ф:h3+ Крe2 8. Фh5+ Крf1 9. Крg3! Кс4** (9...Лс1 10. Крf3 Крg1 11. Фg4+ и 12. Фg2×) **10. Фh1+ Крe2 11. Крg2 и 12. Фf1×.**

2. **1. Кр:e1 Фa1 2. h3!** (пешка не торопится, тонкость выяснится позднее) **2...Фa2** (фигур-то у черных много, но двигаться в состоянии один ферзь) **3. h4 Фa1 4. h5 Фa2 5. h6 Фa1 6. h7 Фa2 7. h8К!** (неожиданное решение, для победы белым нужен конь) **7...Фa1 8. Кf7 Фa2 9. Кg5 Фa1 10. Кe6 Фa2 11. К:c5 Фa1 12. Кb7 Фa2 13. Кd6 Фa1 14. К:c4 Фa2 15. Кa5 Фa1 16. К:b3×!** (если бы белые на втором ходу двинули свою пешку сразу на два поля, то у них бы ничего не вышло — всякий раз, когда новоявленный конь нападал на поле b3, черный ферзь защищал его, и дело кончилось бы миром).

3. **1. Лg4+!** (белые ставят под бой третью фигуру) **1...Крh5 2. Кf7 Кр:g4 3. Кh6+ Крh5 4. К:g8 Крg6 5. Сf8!!** (после 5. Сh6? Крf7 белые в цугцванге) **5...Крf7 6. Сh6!** (взаимный цугцванг) **6...Кр:g8 7. Кр:e6** (снова взаимный цугцванг) **7...Крh8 8. Крf7 e5 9. Сg7×.**
Этюд содержит интересный ложный след: 5. Сh8? Крf7! (5...h5? 6. К:e7+ Крh7 7. Сf6 с выигрышем) 6. Кh6+ Крg6 7. Кg8 Крf7 8. Кh6+ Крg6 9. Кg4 h5!! 10. Кf2 Крh7, и слон пойман.

4. **0...С:c7** (черные начали войну, их ход не засчитывается) **1. Л:a7+ Крb8 2. Л:c7 Крa8 3. Кb6+ Крb8 4. Лb7×!**

Номер готовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова,
Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
А. Пономарева, М. Сидоров, И. Смирнова

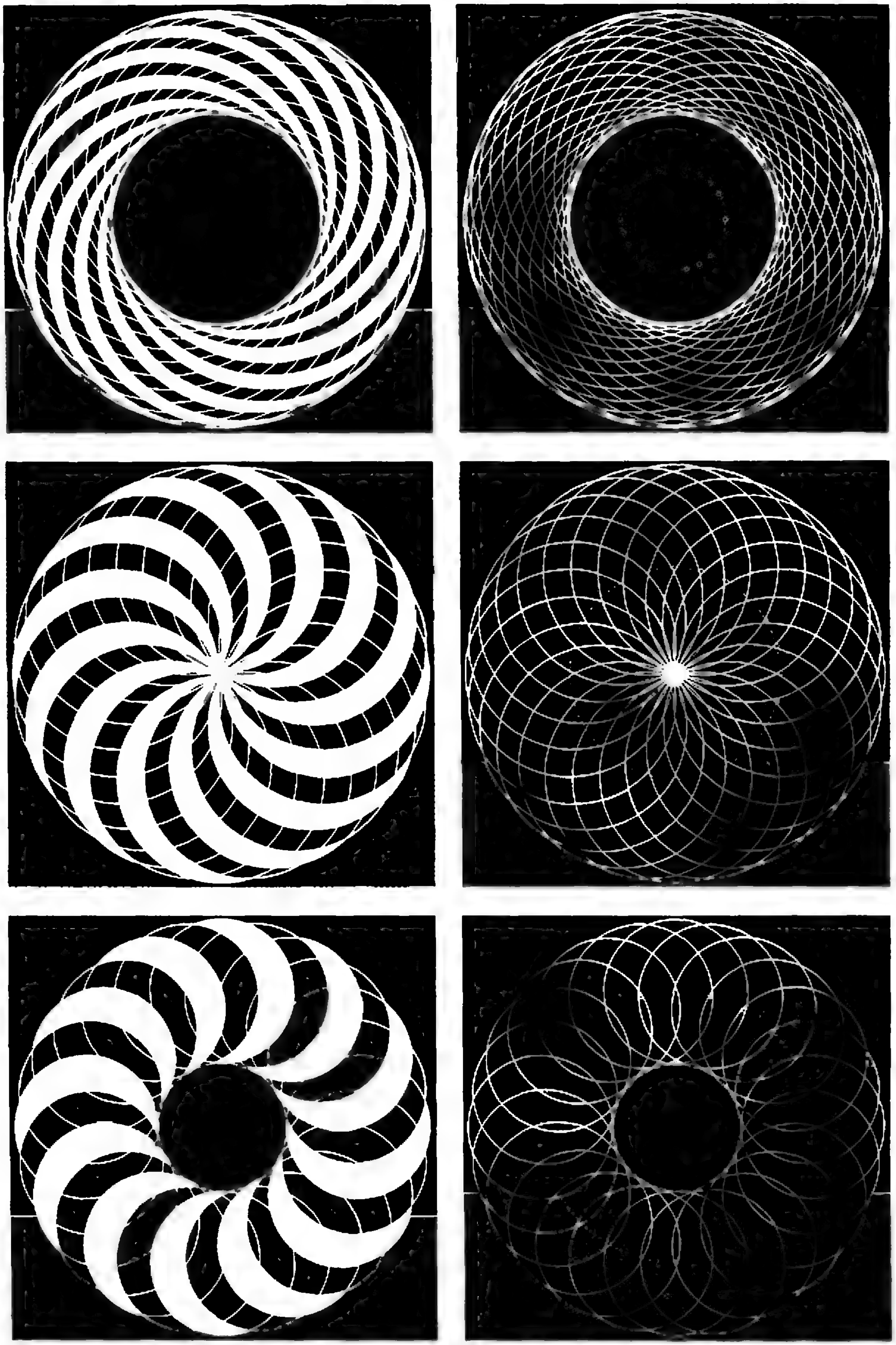
Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Е. Сидоркина, В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 28/III-80
Подписано в печать 20/V-80
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,95 Т-09581
Цена 30 коп. Заказ 835
Тираж 268 075

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
г. Чехов, Московской области



Эти фигуры, напоминающие вращения окружности около ее касательной или около не пересекающей ее прямой (тор), все получены одинаковым приемом: из семейства окружностей одинакового радиуса с центрами, лежащими на одной окружности.

1. ДВУХКОПЕЕЧНАЯ МОНЕТА. У моей дочери есть копилка, но я разрешаю ей собирать только *медные* монеты (дабы не разориться). Однажды мне срочно понадобилась двухкопеечная монета, чтобы позвонить, и я захотел разбить копилку.

«Не делай этого, если не уверен, что в копилке наверняка есть двухкопеечная,— заявила дочь. На копилке указаны количество монет M и сумма N, которую они составляют. В каждом конкретном случае значений M и N легко можно решить, наверняка ли в копилке есть двухкопеечная монета, или она может как быть, так и не быть».

«Ты права»,— согласился я и, едва взглянув на запись на копилке, разбил ее.

Как я догадался, что в копилке наверняка найдется хотя бы одна двухкопеечная монета?

2. ЛАМПОЧКИ. Ежедневно, каждый вечер, из сарая забираются дрова. Для освещения сарая нужно на короткое время включить свет. При включении света в сети возникают экстратоки замыкания, в результате чего лампочка может перегореть. При каждодневном включении и выключении света средний срок службы лампочки составляет месяц.

Электроэнергия в сарае бесплатная, поэтому, с целью экономии лампочек, свет в сарае можно вообще не выключать. Однако и тогда, из-за случайных флуктуаций тока в сети, лампочка перегорает в среднем опять же за месяц.

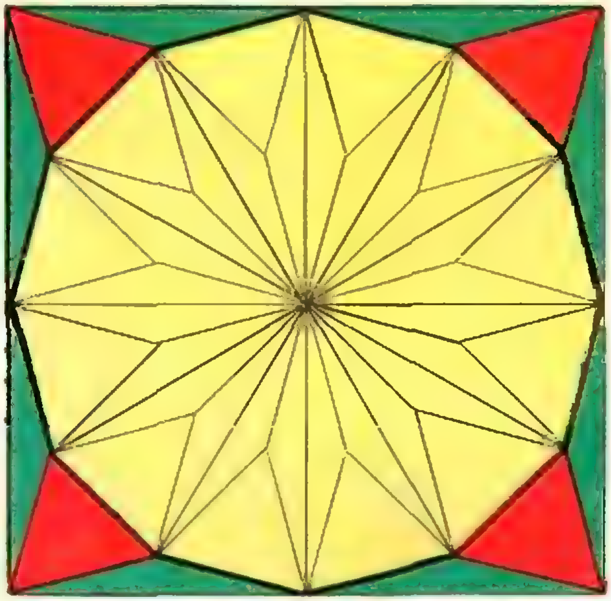
Таким образом, в обоих режимах пользования светом в сарае лампочка в среднем за месяц выходит из строя. Каким образом можно продлить средний срок службы лампочки и чему равен максимальный срок?

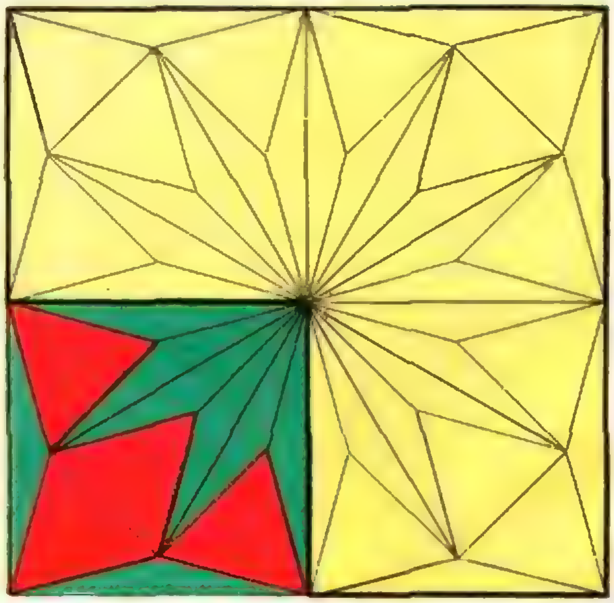
М. Мамикон

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Как вы думаете: сколько правильных многоугольников, вписанных в окружность единичного радиуса, имеют площадь, величина которой выражается рациональным числом? Оказывается, всего два — квадрат и двенадцатиугольник; их площади равны, соответственно, двум и трем. Очень красивое доказательство того, что площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в единичную окружность, равна трем, принадлежит венгерскому математику, активному организатору венгерских математических олимпиад для школьников Й. Кюршаку (1864—1933). Доказательство следует из приводимого рисунка, где квадрат со стороной 2 так разбит на правильные треугольники и равнобедренные треугольники с углами 15°, 15° и 150°, что часть из них замащивает площадь правильного двенадцатиугольника, а с другой стороны, тот же набор треугольников замащивает три квадрата единичной площади. Это доказательство также является красивой демонстрацией теоремы Больяи — Гервина о том, что *любые два равновеликих многоугольника можно разбить на попарно конгруэнтные части.*

А. П.





НОМЕР
7

Основан в 1970 году

Квант

7
1980

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 Праздник молодежи мира
4 *В. Болтянский.* Транзитивные множества и правильные многогранники
10 *В. Орлов.* Голография

Лаборатория «Кванта»

19 *А. Варламов, А. Шапиро.* Об «ovo»

Задачник «Кванта»

22 Задачи М631—М635; Ф643—Ф647
24 Решения задач М573, М575—М577; Ф583—Ф585, Ф588

«Квант» — Олимпиаде

31 ЭВМ на олимпиаде
33 *Ю. Первин.* Обработка протоколов соревнований по прыжкам в высоту
36 *И. Лапушонок.* Программное обеспечение фехтовальных турниров
38 *А. Савин.* Олимпийские кольца

Практикум абитуриента

41 *В. Приходько, В. Пыж, О. Уваров.* Поупражняйся и проверь себя

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году

42 Московский институт инженеров железнодорожного транспорта
43 Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе
45 Московский энергетический институт
46 Московский институт электронного машиностроения
47 Московский институт стали и сплавов
48 Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии
49 Московский архитектурный институт
49 Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана
51 Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. академика И. М. Губкина
52 Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Рецензии, библиография

53 *А. Егоров, М. Смолянский.* Новые книги
54 **Шахматная страничка**
55 **Ответы, указания, решения**
Шахматный конкурс *(3 с. обл.)*
Наша обложка *(18)*
Смесь *(9, 40)*

На первой странице обложки показана разноцветная кольчуга из сцепленных колец. О сцепленных кольцах можно прочитать на с. 38

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1980

Праздник молодежи мира

Сейчас внимание всего мира приковано к Москве, где спортсмены ведут прекрасный спор в силе, ловкости и быстроте.

Избрание столицы СССР в качестве хозяйки XXII летних Олимпийских игр — явление закономерное, обусловленное историческим ходом развития спорта. Сегодня весь мир признает огромный вклад, который спортсмены нашей страны внесли в укрепление современного олимпийского движения.

Четыре года назад, когда подобный праздник мирового спорта проходил в Монреале, в своей телеграмме членам Международного олимпийского комитета, Организационному комитету и участникам XXI летних Олимпийских игр Леонид Ильич Брежнев писал:

«СССР поддерживал и будет поддерживать современное олимпийское движение. Сейчас советские люди ведут подготовку Московской Олимпиады 1980 года и сделают все для того, чтобы она прошла на высоком уровне, дала новые импульсы благородным идеям дружбы и мира».

Советская столица сделала все, чтобы гостеприимно подготовиться к празднику олимпийцев планеты. Все москвичи, более того — все советские люди, восприняли Олимпиаду как свое родное, кровное дело.

И вот годы труда, годы волнений позади. Завершена грандиозная созидательная работа. Да, грандиозная: ведь одновременно сооружались или реконструировались 76 различных крупных объектов; некоторые из них не имеют себе равных и, по существу, являются уникальными. Среди них крытый стадион на 45 000 зрителей и плавательный бассейн на проспекте Мира, футбольно-легкоатлетический комплекс ЦСКА, гребной канал, кольцевая трасса и крытый велодром в Крылатском, Дворцы спорта в Измайлове и Сокольниках, конно-спортивная база профсоюзов в районе Битцы, спортивный зал «Дружба». Проведена генеральная реконструкция Центрального стадиона имени В. И. Ленина, где состоялась церемония открытия Игр, проходят состязания по семи видам спорта. Возведены новые гостиницы и отели, построен олимпийский аэровокзал «Шереметьево-2», приведены в образцовый порядок все службы огромного города, одевшегося в праздничный наряд.

Одной из важнейших черт Олимпиады-80 является ее культурная программа, выполнение которой началось еще в прошлом году. В лучших театрах и концертных залах, на открытых сценических площадках, в музеях, выставочных залах идет широкий показ советского многонационального искусства. Разве не знаменательно, что только в дни Олимпиады в нашей столице состоится около 600 спектаклей и 1500 концертов! Все это, включая показ произведений советского киноискусства, вернисажи, экскурсии по историческим местам города и его окрестностям, позволит участникам и гостям Олимпиады ощутить духовное богатство нашего народа, нашей страны, понять, какое место занимает удовлетворение культурных запросов советских людей в нашем образе жизни, представить, какой значительный вклад мы вносим в сокровищницу мировой культуры.

И все-таки Олимпиада — это, прежде всего, праздник спорта, состязание лучших в извечном стремлении Человека быть выше, дальше, быстрее. По самым скромным подсчетам на старты состязаний по 25 видам программы вышли более 10 000 лучших спортсменов, представляющих все континенты нашей планеты. Это юноши и девушки, для которых жизненно важным является стремление к духовному и физическому совершенству, к разносторонности, к красоте и силе. Студент физического факультета Берлинского университета пловец Ганс Кнаппе, кандидат биологических наук советская спортсменка Елена Петушкова, будущий астроном студент Парижского университета Луи Жемель, лаборантка Мельбурнского центра математических исследований Гейл Нилл... Среди участников молодые ученые и поэты, государственные служащие, художники — люди самых разнообразных профессий, различных жизненных интересов. Их объединил спорт, спорт собирает их в одну семью под сенью пяти олимпийских колец.

Москва раскрыла им, их тренерам, официальным лицам, сотням тысяч гостей, собравшимся на призывный свет Олимпийского огня, свои дружеские объятия. И совсем не трудно понять, почему столько заботы, любви, сердечности мы проявляем ко всему, что касается начавшегося праздника. Советские люди видят в нем не только крупнейшее спортивное событие, но и еще один важный шаг в сторону упрочения взаимопонимания, мира и дружбы между народами в полном соответствии с высокими идеалами олимпийского движения.

«В советской столице мне довелось быть летом 1979 года,— рассказывает аспирант кафедры теоретической физики государственного университета в Гаване, выдающийся мастер волейбола Э. Родригес.— Мы приняли участие в турнире женских команд по программе VII летней спартакиады народов СССР. Это был великолепный праздник спорта. Он прошел в новом игровом комплексе «Дружба» и на площадках переоборудованной малой арены стадиона в Лужниках. Организация, судейство соревнований были отличными. Все это гарантирует проведение Олимпиады на еще более высоком уровне.»

Да, то, что сделала олимпийская Москва, вызывает восхищение и одобрение всех честных людей в мире.

«Готовность советской столицы к проведению Олимпиады никогда не вызывала сомнения,— пишет болгарская газета «Народен спорт».— И все-таки не может не приводить в изумление все, что сделано здесь. Участников соревнований и многочисленных гостей ждут первоклассные стадионы, Дворцы спорта, плавательные бассейны. А главное — их ждет истинное радушие великого города».

Да, истинное радушие великого города ждет спортсменов около ста государств всех пяти континентов, направляющихся на XXII летние Олимпийские игры. Среди них представители ГДР и Франции, Великобритании и Австралии, Индии и Социалистической Республики Вьетнам, Болгарии и Демократической Республики Афганистан, Сирии и Кубы... Дети разных стран и народов направляются в Москву, чтобы встретиться здесь под олимпийским стягом.

Наперекор администрации президента США Картера и ее немногочисленным последователям из лагеря империализма, наперекор явным и тайным врагам Игр, олимпийский огонь, зажженный в столице первого в мире социалистического государства рабочих и крестьян, несомненно, согреет нашу планету, заставит отступить поборников «холодной войны».

Олимпийские игры стали большим и важным событием в общем процессе сближения народов. Организаторы XXII Олимпиады, широкие слои советской общественности сделали все, чтобы идеалы братства и дружбы, которыми руководствуется олимпийское движение, восторжествовали и на этот раз, найдя реальное воплощение в празднике мирового спорта, проходящем в нашей Москве.

В. Болтянский

Транзитивные множества и правильные многогранники

Группа самосовмещений фигуры

Перемещение f называется *самосовмещением* фигуры F, если оно переводит эту фигуру в себя: $f(F)=F$. Легко доказать, что множество всех самосовмещений фигуры F является группой (определение *группы* см., например, в «Кванте», 1976, № 10); условимся обозначать *группу самосовмещений* фигуры F через $\Gamma(F)$.

Задачи

1. Укажите все самосовмещения: а) окружности; б) прямой; в) отрезка.

2. Укажите фигуру F, для которой группа $\Gamma(F)$ содержит ровно три самосовмещения.

Группа самосовмещений фигуры F существенно связана с «геометрией» этой фигуры. Пусть, например, P — параллелограмм, не являющийся ни прямоугольником, ни ромбом. Существуют два перемещения, переводящие P в себя: тождественное отображение e и симметрия r относительно точки пересечения диагоналей.

Задача 3. Докажите, что не существует самосовмещений такого параллелограмма P, отличных от e и r.

Из того, что $\Gamma(P)$ содержит центральную симметрию r, вытекают все основные свойства параллелограмма: конгруэнтность и параллельность противоположных сторон, конгруэнтность противоположных углов и т. д.

Группа самосовмещений ромба Q, не являющегося квадратом, содержит, кроме e и r, две осевые симметрии s_1, s_2 относительно диагоналей, то есть $\Gamma(Q)=\{e, r, s_1, s_2\}$. Из наличия в группе $\Gamma(Q)$ дополнительных (по сравнению с параллелограммом общего вида) самосовмещений вытекают специфические свойства ромба (помимо свойств, присущих всякому параллелограмму): перпендикулярность диагоналей, совпадение диагоналей с биссектрисами углов и т. д.

Задачи

4. Перечислите все четырехугольники, у которых группа самосовмещений содержит ровно два элемента.

5. Докажите, что если фигура F является ограниченной (то есть содержится в некотором круге), то $\Gamma(F)$ не может содержать параллельный перенос, отличный от e.

Транзитивные множества на плоскости

Множество H называется *транзитивным*, если любая точка этого множества может быть переведена в любую другую его точку некоторым самосовмещением множества H. На рисунке 1 изображен квадрат, от которого отрезаны четыре конгруэнтных равнобедренных прямоугольных треугольника. Множество всех вершин получившегося восьмиугольника транзитивно.

Теорема 1. *Если H — ограниченное транзитивное множество на плоскости, то существует окружность, содержащая H.*

Доказательство. Поскольку H — ограниченное множество, оно, по определению, содержится в некотором круге. Тогда существует и круг наименьшего радиуса,

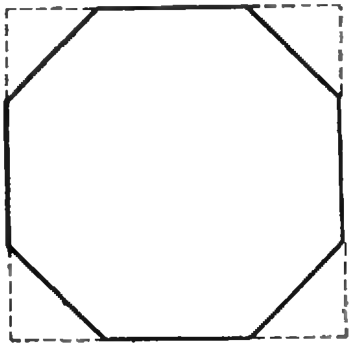


Рис. 1.

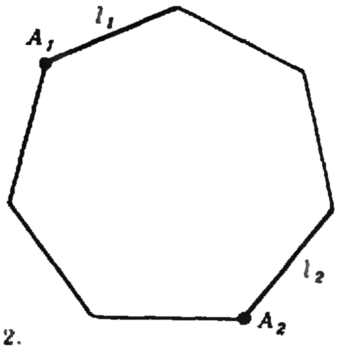


Рис. 2.

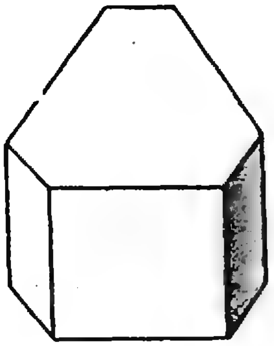


Рис. 3.

содержащий H. Пусть K — такой наименьший круг, O — его центр.

Возьмем две произвольные точки A, B множества H. Покажем, что $|AO|=|BO|$. Отсюда будет следовать, что H лежит на некоторой окружности (легко видеть, что эта окружность ограничивает круг K).

В силу транзитивности множества H существует такое самосовмещение $f \in \Gamma(H)$, что $f(A)=B$. Из $H \subset K$ следует $f(H) \subset f(K)$. Но $f(H)=H$. Значит, $H \subset f(K)$. Таким образом, $H \subset K \cap f(K)$.

Поскольку f — перемещение, $f(K)$ — круг, конгруэнтный кругу K. Если бы круги K, $f(K)$ не совпадали, существовал бы круг меньшего радиуса, содержащий $K \cap f(K)$, а потому и H, что противоречило бы выбору круга K. Итак, $f(K)=K$, а значит, и $f(O)=O$.

Из $f(A)=B$, $f(O)=O$, и того, что f — перемещение, следует $|AO|=|BO|$.

Очевидно, пустое, любое одноэлементное и любое двухэлементное множества транзитивны.

Задачи

6. Докажите, что если транзитивное множество содержит $2k+1$ точек ($k>0$), то эти точки служат вершинами правильного многоугольника.

7. а) Докажите, что если транзитивное множество содержит 4 точки, то эти точки являются вершинами прямоугольника.

б) Докажите, что если транзитивное множество содержит $2k$ точек ($k>2$), то эти точки служат вершинами двух правильных k-угольников, вписанных в одну окружность.

8. Докажите, что бесконечное ограниченное транзитивное множество H всюду плотно заполняет содержащую его окружность (то есть не существует дуги этой окружности, свободной от точек множества H).

А существуют ли неограниченные транзитивные множества? Конечно, существуют: например, вся плоскость и любая прямая на ней. Попробуйте придумать хотя бы еще один пример.

Многоугольник, множество всех вершин которого транзитивно, условимся называть *транзитивным многоугольником*. Очевидно, любой правильный многоугольник является транзитивным. Однако правильный многоугольник P обладает более глубоким свойством, которое можно назвать *сильной транзитивностью:* если A_1, A_2 — две произвольные вершины, а l_1, l_2 — стороны, примыкающие к этим вершинам (рис. 2), то существует самосовмещение $f \in \Gamma(P)$, удовлетворяющее условиям: $f(A_1)=A_2$, $f(l_1)=l_2$.

Если многоугольник P обладает свойством сильной транзитивности, то он правильный.

Задача 9. Докажите, что для правильного n-угольника P группа $\Gamma(P)$ содержит $2n$ перемещений. Убедитесь, что ровно половина из этих перемещений — осевые симметрии.

Транзитивные множества в пространстве

Можно рассматривать транзитивные множества и в пространстве. Например, множество всех вершин прямой призмы, в основании которой лежит транзитивный многоугольник (рис. 3), транзитивно.

Теорема 2. *Если H — ограниченное транзитивное множество в пространстве, то существует сфера, содержащая H.*

Доказательство — то же, что и на плоскости, только вместо наименьшего круга надо рассматривать наименьший шар, содержащий H. Придирчивый читатель может, однако, заметить, что доказательства эти — неполные: надо еще установить существование наименьшего круга (или шара), содержащего заданное ограниченное множество H (это можно вывести, например, из теоремы Вейерштрасса). Приведем поэтому другое доказательство; оно не содержит пробелов, но пригодно лишь для конечного множества H.

Лемма. *Пусть* $H=\{A_1, \ldots, A_n\}$ *— конечное множество точек. Тогда существует, и притом только одна, точка O, для которой*

$$\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}.$$

(Такая точка называется *центром тяжести* точек $A_1, \ldots, A_n$.)

Доказательство. Возьмем произвольную точку Q и обозначим через $\vec{a}$ вектор $\frac{1}{n}\ (\overrightarrow{QA_1}+\ldots+\overrightarrow{QA_n})$, а через O — такую точку, что $\overrightarrow{QO}=\vec{a}$. Тогда

$$\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QA_1})+\ldots$$
$$\ldots+(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QA_n})=n\,\overrightarrow{OQ}+(\overrightarrow{QA_1}+\ldots$$
$$\ldots+\overrightarrow{QA_n})=n(-\vec{a})+n\vec{a}=\vec{0},$$

то есть точка O — искомая.

Докажем ее единственность. Пусть $\overrightarrow{O'A_1}+\ldots+\overrightarrow{O'A_n}=\vec{0}$. Тогда

$$(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OA_1})+\ldots+(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OA_n})=\vec{0},$$

то есть $n\overrightarrow{O'O}=\vec{0}$, а потому $\overrightarrow{O'O}=\vec{0}$, и значит, точки O и O' совпадают.

Докажем теперь теорему 2. Пусть $H=\{A_1, \ldots, A_n\}$ — транзитивное множество и O — центр тяжести точек $A_1, \ldots, A_n$. Возьмем произвольное самосовмещение f множества H и обозначим образы точек $A_1, \ldots, A_n$, O при перемещении f через $A'_1, \ldots, A'_n$, O'. Из равенства $\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$ следует, что $\overrightarrow{O'A'_1}+\ldots+\overrightarrow{O'A'_n}=\vec{0}$. Но ведь $A'_1, \ldots, A'_n$ — это те же точки $A_1, \ldots, A_n$, только взятые в каком-то другом порядке (поскольку $f(H)=H$). Поэтому соотношение $\overrightarrow{O'A'_1}+\ldots+\overrightarrow{O'A'_n}=\vec{0}$ можно, переставляя нужным образом слагаемые, записать в виде $\overrightarrow{O'A_1}+\ldots+\overrightarrow{O'A_n}=\vec{0}$. Согласно лемме O' совпадает с O, то есть $f(O)=O$. Итак, при любом самосовмещении множества H точка O переходит в себя. Отсюда, как и в доказательстве теоремы 1, вытекает, что все точки множества H находятся на одинаковом расстоянии от O.

Из нашего доказательства видно, что *если $H=\{A_1, \ldots, A_n\}$ — транзитивное множество, не расположенное в одной плоскости, и O — центр сферы, содержащей множество H, то $\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.*

Многогранник, множество всех вершин которого является транзитивным, условимся называть *транзитивным многогранником.* Согласно теореме 2 существует сфера, проходящая через все его вершины (*описанная сфера*). А из сделанного замечания вытекает, что если $A_1, \ldots, A_n$ — все вершины транзитивного многогранника и O — центр описанной около него сферы, то $\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

Правильные многогранники

Для многогранников свойство *сильной транзитивности* формулируется следующим образом: пусть A_1, A_2 — произвольные вершины многогранника M, l_1, l_2 — ребра, примыкающие к A_1, A_2, и γ_1, γ_2 — грани, примыкающие к l_1, l_2; тогда должно существовать самосовмещение $f \in \Gamma(M)$, удовлетворяющее условиям $f(A_1)=A_2$, $f(l_1)=l_2$, $f(\gamma_1)=\gamma_2$. Многогранник, обладающий свойством сильной транзитивности, называется *правильным многогранником* [*].

Задачи

10. Докажите, что самосовмещение $f \in \Gamma(M)$, удовлетворяющее условиям $f(A_1)=A_2$, $f(l_1)=l_2$, $f(\gamma_1)=\gamma_2$ (о которых идет речь в определении сильной транзитивности), единственно.

11. Докажите, что число элементов группы $\Gamma(M)$ вчетверо больше числа ребер правильного многогранника M.

Пусть M — правильный многогранник, γ — его грань, A_1 и A_2 — две ее вершины и l_1, l_2 — стороны многоугольника γ, примыкающие к вершинам A_1, A_2. В силу свойства сильной транзитивности существует самосовмещение $f \in \Gamma(M)$, удовлет-

---

[*] Данное определение правильного многогранника эквивалентно школьному («Геометрия 9—10», § 54). «В одну сторону» это будет сейчас доказано.

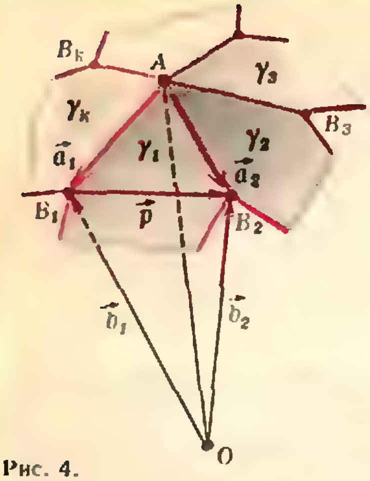


Рис. 4.

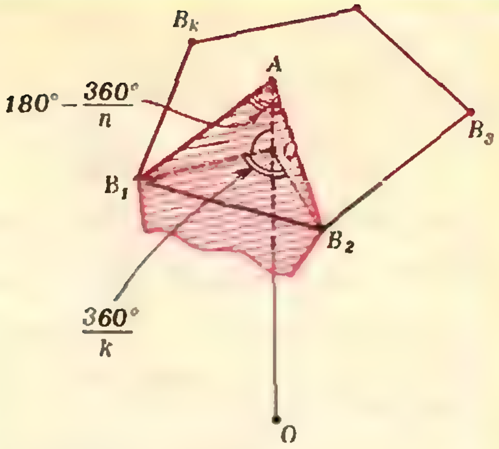


Рис. 5.

воряющее условиям $f(\gamma)=\gamma$, $f(A_1)=A_2$, $f(l_1)=l_2$. Первое из этих равенств означает, что $f \in \Gamma(\gamma)$. Мы видим, что многоугольник γ сильно транзитивный, то есть правильный.

Из свойства сильной транзитивности многогранника M вытекает также, что все его грани конгруэнтны. Далее, из свойства транзитивности (даже обычной, не сильной) следует, что к каждой вершине примыкает одинаковое число граней. Итак, *все грани правильного многогранника являются конгруэнтными правильными многоугольниками и к каждой вершине примыкает одинаковое число граней.*

Лемма. *Пусть M — правильный многогранник, A — одна из его вершин, AB_1, ..., AB_k — примыкающие к ней ребра. Тогда многоугольник $B_1...B_k$ — правильный.*

Доказательство. Обозначим через γ_1, ..., γ_k грани, примыкающие к вершине A, а через O центр описанной около многогранника M сферы (рис. 4). Так как $|OB_1|=|OB_2|=R$, где R — радиус описанной сферы, векторы $\vec{b}_1=\overrightarrow{OB_1}$, $\vec{b}_2=\overrightarrow{OB_2}$ и $\vec{p}=\overrightarrow{B_1B_2}$ удовлетворяют условию $\vec{b}_1^2=\vec{b}_2^2=(\vec{b}_1+\vec{p})^2$, то есть $2\vec{b}_1\vec{p}=-\vec{p}^2$. Так как, кроме того, $|AB_1|=|AB_2|=a$, где a — длина ребра многогранника M, векторы $\overrightarrow{AB_1}=\vec{a}_1$, $\overrightarrow{AB_2}=\vec{a}_2$ удовлетворяют условию $\vec{a}_1^2=\vec{a}_2^2=(\vec{a}_1+\vec{p})^2$, то есть $2\vec{a}_1\vec{p}=-\vec{p}^2$. Таким образом, $2\vec{a}_1\vec{p}=2\vec{b}_1\vec{p}$, то есть $\vec{p}(\vec{a}_1-\vec{b}_1)=0$, а это означает, что $(AO)\perp(B_1B_2)$. Такой же подсчет показывает, что каждая из прямых (B_1B_3), ..., (B_1B_k) перпендикулярна (AO). Следовательно, плоскость Π, проходящая через точку B_1 и перпендикулярная прямой AO, содержит все точки B_1, B_2, ..., B_k. Далее, в силу свойства сильной транзитивности существует самосовмещение $f \in \Gamma(M)$, переводящее вершину A, ребро AB_1 и грань γ_1 соответственно в вершину A, ребро AB_2 и грань γ_2. В частности, $f(B_1)=B_2$. При этом самосовмещении две стороны грани γ_1, примыкающие к A, перейдут в две стороны грани γ_2, примыкающие к A, то есть AB_1 перейдет в AB_2, а AB_2 — в AB_3 (рис. 4). Итак, $f(B_2)=B_3$. Рассуждая аналогично, находим, что при перемещении f точки B_1, ..., B_k циклически переставляются: $f(B_1)=B_2$, $f(B_2)=B_3$, ..., $f(B_{k-1})=B_k$, $f(B_k)=B_1$. Отсюда и вытекает, что многоугольник $B_1...B_k$, расположенный в плоскости Π, является правильным.

Доказанная лемма позволяет легко вычислить основные параметры правильных многогранников. Найдем, например, радиус сферы, описанной около правильного многогранника с k гранями при каждой вершине, являющимися правильными n-угольниками (длину ребра обозначим через a). Имеем: $\widehat{AB_1B_2}=\frac{180°}{n}$ (грань γ_1 является правильным n-угольником). Из треугольника AB_1B_2 находим длину $|B_1B_2|$ стороны правильного k-угольника $B_1B_2...B_k$:

$|B_1B_2| = 2a\cos\frac{180^\circ}{n}$, после чего *находим радиус* $r = |QB_1|$ описанной около него окружности (рис. 5):

$$r = \frac{|B_1B_2|}{2\sin 180^\circ/k} = a\cdot\frac{\cos 180^\circ/n}{\sin 180^\circ/k}.$$

Далее, из треугольника QAB_1 и OAB_1 находим $\frac{r^2}{a^2} + \frac{|AQ|^2}{a^2} = 1$, $|AQ| = \frac{a^2}{2R}$, то есть $\frac{r^2}{a^2} + \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = 1$. Подставляя сюда вместо r его значение, получаем после упрощений:

$$R = \frac{a}{2\sqrt{1-\left(\frac{\cos 180^\circ/n}{\sin 180^\circ/n}\right)^2}}. \qquad (*)$$

Формула (*) не только дает выражение для радиуса сферы, описанной около данного правильного многогранника, но и позволяет указать, какие значения могут принимать n и k. В самом деле, поскольку $n \geqslant 3$, $\frac{180^\circ}{n} \leqslant 60^\circ$, $\cos\frac{180^\circ}{n} \geqslant \frac{1}{2}$; следовательно, $\sin\frac{180^\circ}{k} > \frac{1}{2}$ (иначе подкоренное выражение не будет положительным), откуда $k < 6$. Придавая числу k возможные значения $k = 3, 4, 5$, находим, что подкоренное выражение положительно лишь в пяти случаях, которые и соответствуют пяти возможным правильным многогранникам (см. «Геометрию 9—10», с. 133).

Задачи

12. Пользуясь формулой (*), найдите радиус сферы, описанной около каждого из правильных многогранников. (Ответы к этой и последующим задачам будут приведены в следующем номере «Кванта».

Указание. Найдите длины сторон треугольников на рисунке 6 и выведите отсюда, что $\cos 36^\circ = \frac{\xi}{2}$, $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt[4]{5}}{2\sqrt{\xi}}$, $\sqrt{3-4\cos^2 36^\circ} = \frac{1}{\xi}$, где $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

13. Для каждого правильного многогранника найдите угол, под которым его ребро видно из центра описанной сферы.

14. Вычислите площадь поверхности каждого из правильных многогранников, зная длину a его ребра.

15. Докажите, что для каждого правильного многогранника существует сфера, касающаяся всех его ребер.

16. Вычислите высоту h правильной пирамиды, основанием которой служит грань правильного многогранника, а вершина совпадает с центром O описанной около многогранника сферы. Докажите, что сфера радиуса h с центром O содержится в правильном многограннике и касается всех его граней (*вписанная сфера*).

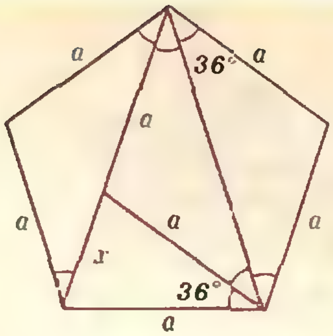


Рис. 6.

17. Вычислите объем каждого из правильных многогранников, зная длину a его ребра.

18. Пусть M — правильный многогранник. Через M^* обозначим многогранник, вершинами которого служат центры окружностей, описанных вокруг граней многогранника M. *Докажите, что многогранник* M^* (он называется *двойственным* к многограннику M) является правильным. Какой многогранник двойствен кубу? Додекаэдру?

19. Пусть α — величина двугранного угла правильного многогранника M, а β^* — угол, под которым ребро двойственного многогранника M^* *видно из центра* описанной сферы. Докажите, что $\alpha + \beta^* = 180^\circ$. Пользуясь этим, вычислите двугранный угол каждого из правильных многогранников.

20. Докажите, что середины ребер правильного многогранника служат вершинами транзитивного многогранника.

На рисунке 7 изображен кубооктаэдр — многогранник, вершинами которого служат середины ребер куба (или середины ребер октаэдра). Форму кубооктаэдра имеют многие кристаллы; например, при определенных условиях — кристаллы поваренной соли.

В нашем рассказе о правильных многогранниках остался невыясненным вопрос о их *существовании*. Ведь все вычисления проведены в предположении, что существует правильный многогранник, гранями которого служат правильные n-угольники, и у которого к каждой вершине примыкает k граней. Конеч-

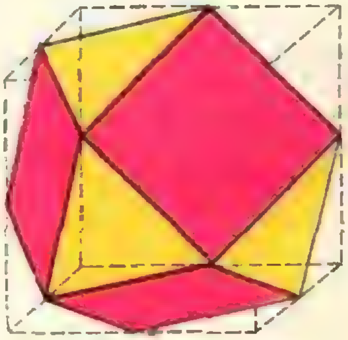


Рис. 7.

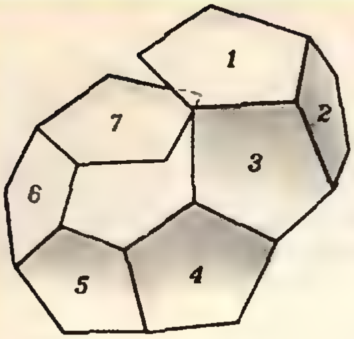


Рис. 8.

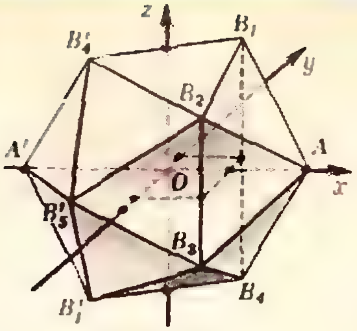


Рис. 9.

но, зная величину двугранного угла (задача 19), можно попытаться склеить требуемый правильный многогранник: один правильный n-угольник приклеиваем под нужным углом к другому, к ним приклеиваем третий и т. д. Но где уверенность, что склеиваемый многогранник «замкнется», а не получится что-то вроде изображенного на рисунке 8?

Существование можно доказать фактическим построением правильного многогранника в координатах. Поместим начало координат в центр описанной около будущего многогранника сферы. Будем считать, для простоты, что вершина A лежит на положительной полуоси абсцисс, то есть имеет координаты $(R;\ 0;\ 0)$, а соседние с ней вершины $B_1, \ldots, B_k$ имеют абсциссу $x = R\cos\alpha$, где α — угол, под которым ребро видно из центра описанной сферы. Так как многоугольник $B_1 \ldots B_k$ — правильный и находится в плоскости, перпендикулярной (OA), можно считать, что точка B_l имеет координаты $\left(R\cos\alpha;\ r\cos\frac{2\pi l}{k};\ r\sin\frac{2\pi l}{k}\right)$; $l = 1, \ldots, k$, где r — радиус описанной около многоугольника $B_1 \ldots B_k$ окружности. В случае, например, икосаэдра это дает вершины $A, B_1, \ldots, B_5$. Остальные вершины симметричны этим относительно начала координат (рис. 9). Наиболее простые выражения для координат получаются при $R = \sqrt{5}$ (тогда $R\cos\alpha = 1$, $r = 2$): $A = (\sqrt{5};\ 0;\ 0)$; $B_5 = (1;\ 2;\ 0)$;

$$B_1 = \left(1;\ \frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right);$$

$$B_2 = \left(1;\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right);$$

координаты остальных точек получаются изменением знаков. Чтобы проверить, что действительно получился правильный икосаэдр, достаточно убедиться в конгруэнтности всех ребер; это нетрудно сделать с помощью формулы расстояния между двумя точками в координатах.

Задачи наших читателей

1. Найдите все выпуклые четырехугольники, удовлетворяющие следующему условию: четыре прямые, проходящие через вершины четырехугольника и делящие его

а) площадь

б) периметр

пополам, пересекаются в одной точке.

В. Дубровский,
И. Жук

2. а) Впишите квадрат в правильный пятиугольник.

б) Докажите, что правильный пятиугольник нельзя вписать в правильный шестиугольник.

в) Докажите, что при $n>5$ правильный n-угольник нельзя вписать в правильный $(n+1)$-угольник.

3. Положим

$\sin_1(x) = \sin x$,
$\sin_2(x) = \sin(\sin_1(x))$,
$\sin_3(x) = \sin(\sin_2(x))$, …
$\cos_1(x) = \cos x$,
$\cos_2(x) = \cos(\cos_1(x))$,
$\cos_3(x) = \cos(\cos_2(x))$, …

а) Постройте графики функций

$y = \sin_2(x)$, $y = \sin_3(x)$,
$y = \cos_2(x)$, $y = \cos_3(x)$.

б) При каких n уравнение $\sin_n(x) = \cos_n(x)$ имеет решение на $[0;\ \pi/2]$?

И. Жук

4. Докажите неравенства

$$9r < h_a + h_b + h_c < \frac{2}{3}\,\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{R},$$

где h_a, h_b, h_c — длины высот данного треугольника, m_a, m_b, m_c — длины его медиан, r — радиус вписанной в треугольник окружности, R — радиус окружности, описанной около него.

М. Ибрагимов

В. Орлов

Голография

> *Кто, волны, вас остановил,*
> *Кто оковал ваш бег могучий,*
> *Кто в пруд безмолвный и дремучий*
> *Поток мятежный обратил?*
>
> . . . .
>
> *Взыграйте, ветры, взройте воды,*
> *Разрушьте гибельный оплот!*
> *Где ты, гроза — символ свободы?*
> *Промчись поверх невольных вод.*
>
> А. С. Пушкин

А. С. Пушкин, написав в 1823 году строки, вынесенные нами в эпиграф, безусловно, не думал о голографии. А вот современные физики смогли бы ответить на вопросы, поставленные в стихотворении, следующим образом. «Остановил» волны и «оковал» их «бег могучий» английский физик Деннис Габор в 1947 году, предложив метод записи и восстановления волнового фронта. «Пруд безмолвный и дремучий» — это голограмма. Достаточно посмотреть на вид голограммы (рисунок 1), чтобы убедиться в правоте пушкинских слов,— разобраться в «дремучем» переплетении сложного интерференционного узора на голограмме, кажется, невозможно. «Гроза — символ свободы» — это луч лазера, разрушающий «гибельный оплот» и восстанавливающий изображение, скрытое в голограмме.

За свое открытие Габор в 1971 году получил Нобелевскую премию.

Что это такое — голография

Голография — это метод записи и восстановления изображений. Но то же самое можно сказать о фотографии. Чем же отличается голография от фотографии?

При фотографировании предмета регистрируется, по существу, распределение в плоскости фотопластинки амплитуд световых волн, отраженных предметом,— ведь почернение пластинки определяется интенсивностью света, а интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды световой волны.

При голографировании на пластинке фиксируется распределение в плоскости пластинки амплитуд, фаз и частот колебаний в световых волнах, отраженных предметом.

Для получения устойчивой волновой картины в плоскости пластинки Габор предложил использовать явление интерференции. В результате сложения падающей на предмет световой волны — ее называют опорной волной — с отраженной от предмета волной — ее называют сигнальной — возникает устойчивая интерференционная картина. При этом в разных точках пространства амплитуды результирующих колебаний различны, но в каждой точке амплитуда остается неизменной во времени. Для расчета амплитуды проще всего воспользоваться методом векторных диаграмм (см. «Физика 10», с. 51).

При сложении двух колебаний с одной и той же частотой ω и начальными фазами φ_1 и φ_2 результирующее колебание, согласно принципу суперпозиции, будет иметь вид

$$x_{\text{р}} = x_1 + x_2 = X_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + X_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = X_{\text{р}} \cos(\omega t + \varphi)$$

(см. рисунок 2). Амплитуду $X_{\text{р}}$ и фазу φ результирующего колебания можно найти из векторной диаграммы:

$$X_{\text{р}}^2 = X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_1\sin\varphi_1 + X_2\sin\varphi_2}{X_1\cos\varphi_1 + X_2\cos\varphi_2}.$$

Следовательно, «запись» интенсивности результирующей волны содержит информацию о разности фаз между составляющими волнами. Если фаза одной из них (опорной) известна, то по разности фаз $\Delta\varphi$ или по фазе φ результирующего ко-

Рис. 1.

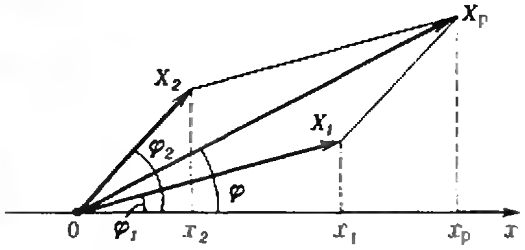


Рис. 2.

лебания можно, в принципе, определить фазу второй (сигнальной) волны, рассеянной объектом. Как образно сказал профессор В. А. Фабрикант, «интерференция переводит на язык интенсивностей фазовые соотношения световых волн, что и делает возможной их запись на фотопластинке».

Анализ явления интерференции позволил Габору доказать, что амплитуду и фазу монохроматической волны, рассеянной объектом, можно зарегистрировать фотографическим способом, если эта волна проинтерферирует с опорной монохроматической волной той же частоты. Фотопластинка с зарегистрированной на ней интерференционной картиной называется голограммой. В дословном переводе с греческого это означает «полная запись» — запись пространственной структуры волны, отраженной предметом.

Световую волну, рассеянную любым предметом, можно рассматривать как совокупность вторичных волн, источниками которых являются отдельные точки этого предмета. Следовательно, для того чтобы понять образование голограммы сложного объекта, надо детально разобраться, как получается простейшая голограмма — голограмма точки.

Простейшая голограмма — зонная решетка Френеля

На рисунке 3 изображена картина наложения двух монохроматических волн одинаковой частоты: сферической волны, испускаемой точкой S, и плоской опорной волны. Сплошные черные окружности и прямые показывают положения волновых фронтов сферической и плоской волны через время T, равное периоду колебаний. Штриховые окружности и прямые показывают положения волновых фронтов через время, равное $T/2$. (Более точно — эти линии фиксируют сечение волнового фронта плоскостью чертежа.)

В точках пересечения сплошных окружностей и сплошных прямых, а также штриховых окружностей и штриховых прямых, выполняются условия интерференционных максимумов:

$$\Delta\varphi = 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_p^2 = X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 = (X_1 + X_2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_p = X_1 + X_2.$$

Красные линии на рисунке 3, соединяющие эти точки, являются множеством точек, для которых выполняются условия интерференционных максимумов.

В точках пересечения сплошных окружностей и штриховых прямых, а также штриховых окружностей и сплошных прямых, выполняются условия интерференционных минимумов:

$$\Delta\varphi = \pm\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 5\pi \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_p^2 = X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2 = (X_1 - X_2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_p = X_1 - X_2.$$

Синие линии на рисунке 3, соединяющие эти точки, являются множеством точек, для которых выполняются условия минимумов.

Расположив фотопластинку в плоскости NN', перпендикулярной к плоскости чертежа, мы получим на ней чередующиеся светлые и темные кольца. Радиусы светлых колец, как видно из рисунка 3, определяются выражением

$$r_k = \sqrt{(a+k\lambda)^2 - a^2} = \sqrt{2ka\lambda + k^2\lambda^2} \approx$$
$$\approx \sqrt{2ka\lambda}, \qquad (*)$$

где a — расстояние от точки S до фотопластинки, λ — длина волны,

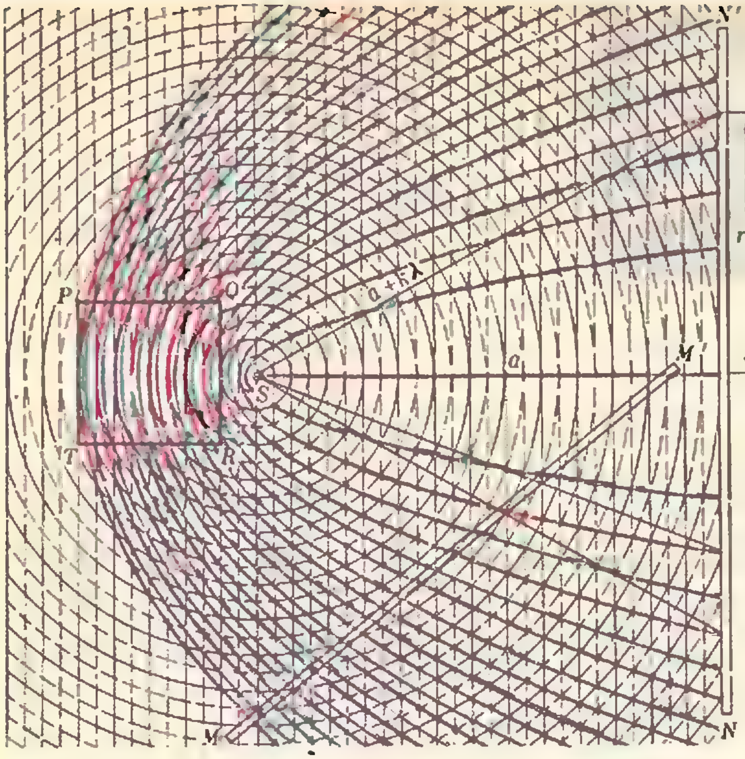


Рис. 3.

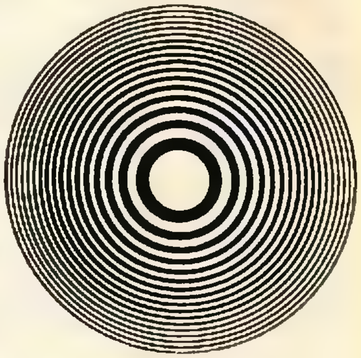


Рис. 4.

k — порядковый номер кольца; мы пренебрегли величиной $k^2\lambda^2$ по сравнению с $2ka\lambda$, так как $a \gg k\lambda$.

Полученное выражение для радиусов колец интерференционной картины совпадает с выражением для радиусов колец так называемой зонной пластинки (зонной решетки) Френеля, хорошо известной в физике более 150 лет*).

Итак, простейшая голограмма — голограмма точки — представляет собой зонную пластинку Френеля. (Увеличенная фотография зонной пластинки представлена на рисунке 4.) Единственным отличием голограммы точки от классической зонной пластинки является плавный переход от темных колец к светлым.

Восстановление сферической волны с помощью простейшей голограммы — зонной пластинки

Для восстановления изображения по голограмме Габор предложил освещать голограмму опорной волной. Рассмотрим процесс восстановления изображения точки с помощью зонной пластинки. Осветим пластинку такой же плоской волной (такой же длины), как и опорная, с помощью которой была получена голограмма точки. Пластинку при этом расположим так, чтобы она была параллельна фронту плоской волны (рисунок 5).

Любой малый участок зонной пластинки можно рассматривать как дифракционную решетку. Выделим на пластинке узкую полоску. Она представляет собой решетку, период которой непостоянен — он равен $d_k = \Delta r_k = r_{k+1} - r_k$ и, как видно из выражения (*), уменьшается по мере удаления от центра пластинки к периферии. Рассмотрим небольшой участок решетки. Поскольку r_k медленно меняется с ростом k, можно считать, что на малом участке решетки период ее постоянен и равен приблизительно постоянной величине $d = \Delta r_k$ — расстоянию между двумя соседними светлыми полосами (то есть расстоянию по радиусу между двумя соседними кольцами).

---

*) Со свойствами зонных пластинок вы познакомитесь, прочитав статью О. Кабардина и Н. Шефера, опубликованную в «Кванте» № 1 за 1979 год.

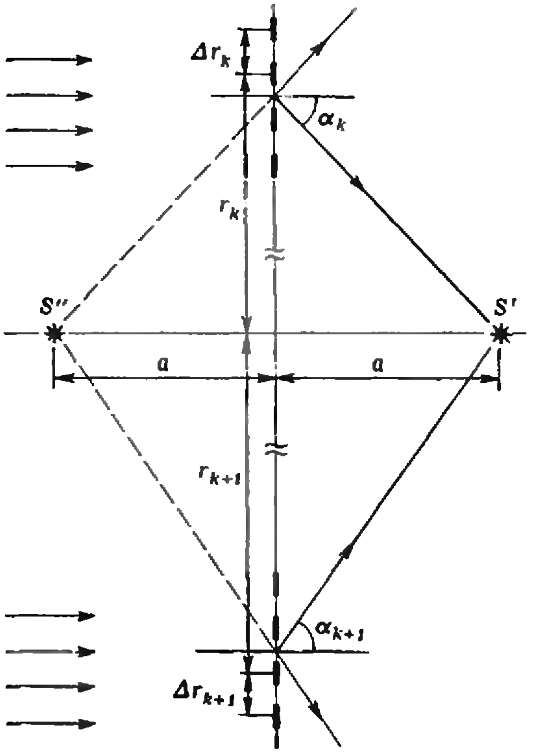


Рис. 5.

Каждая точка в щели решетки, на которую падает световая волна, является источником вторичных световых волн, распространяющихся во всех направлениях. Направления, распространяясь по которым вторичные световые волны от выбранного нами участка решетки усиливают друг друга, определяются условием

$$d \sin \alpha_k = \pm n\lambda \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \ (**)$$

(см. «Физика 10», с. 183). Максимум энергии приходится на световые пучки нулевого ($n=0$) и первого ($n=1$) порядков. Следовательно, наибольшее усиление вторичных световых волн происходит по направлениям, определяемым углами

$$\alpha_0 = 0, \ \sin \alpha_k = \pm \frac{\lambda}{d} = \pm \frac{\lambda}{\Delta r_k}.$$

Значение Δr_k найдем, воспользовавшись (*):

$$\Delta r_k = r_{k+1} - r_k = \frac{r_{k+1}^2 - r_k^2}{r_{k+1} + r_k} \approx \frac{2a\lambda}{2r_k} = \frac{a\lambda}{r_k}.$$

Таким образом,

$$\sin \alpha_k = \pm \frac{r_k}{a}.$$

Как видно из выражения для $\sin \alpha_k$, с ростом k величина α_k растет. Иными словами, чем дальше от центра пластинки, тем больше угол, под которым распространяются лучи из пучков первого порядка. В результате все лучи, отклоненные на углы $\sin \alpha_k = +\frac{r_k}{a}$, пересекаются в одной точке S', создавая действительное изображение точки S; лучи, отклоненные на углы $\sin \alpha_k = -\frac{r_k}{a}$, пересекаются на своих продолжениях в точке S'', создавая мнимое изображение точки S. При этом точки S' и S'' находятся на расстоянии a от пластины.

Докажем это. Как видно из рисунка 5, расстояние x от зонной пластинки до точек S' и S'' равно

$$x = r_k \operatorname{ctg} \alpha_k = \frac{r_k\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_k}}{\sin \alpha_k} = \frac{r_k\sqrt{1 - r_k^2/a^2}}{r_k/a} \approx a.$$

Таким образом, при освещении голограммы точки S опорной плоской волной мы получим два изображения точки S: действительное изображение S' и мнимое изображение S'', находящиеся по разные стороны от пластинки на расстоянии a от нее.

Свойство зонных пластинок фокусировать волны, создавая действительное изображение предмета, было хорошо известно еще в XIX веке. Свойство их создавать мнимое изображение было оценено лишь в голографии, так как именно расходящиеся пучки света восстанавливают неискаженное изображение объекта, являясь точной копией сигнальной световой волны.

Для пояснения сказанного рассмотрим две точки A и B предмета, расположенные при получении голограммы на расстояниях a и b от фотопластинки. Эти точки рассеивают световые волны, которые, интерферируя с опорной плоской волной, создадут на голограмме две зонные пластинки с различными радиусами колец. (Это следует из выражения для r_k.) Действительные и мнимые изображения точек A и B при восстановлении полученной голограммы окажутся на расстояниях a и b от голограммы. Как видно из

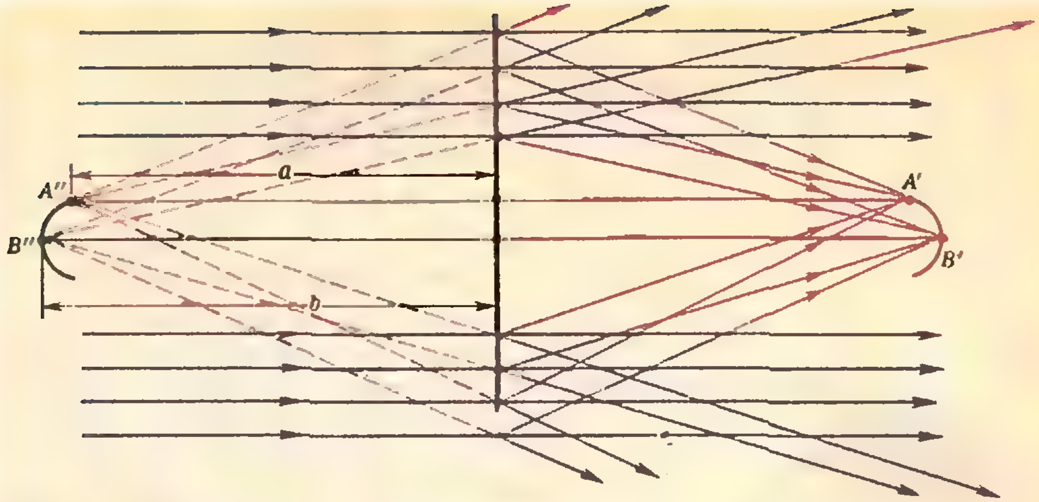


Рис. 6.

рисунка 6, в мнимом изображении предмета мы видим точку B'' дальше точки A''. Именно так и были взаимно расположены точки A и B при получении голограммы. В действительном изображении точка B'' расположена ближе к нам, чем точка A'. Таким образом, действительное изображение предмета, получаемое с помощью голограммы, является искаженным: выпуклые места воспринимаются как вогнутые и наоборот. Такое искажение получило название псевдоскопичности.

Рассмотренная нами схема получения голограммы была предложена и впервые осуществлена самим Габором. Эта схема обладает существенными недостатками. Действительное и мнимое изображения предмета при рассмотрении «анфас» оказываются на одной прямой и создают взаимные помехи.

Для разделения действительного и мнимого изображений американские ученые Э. Лейт и Дж. Ю. Упатниекс в 1961 году предложили, а в 1963 году осуществили двухлучевую схему голографирования. По этой схеме луч лазера разделяется на два луча — опорный и сигнальный (рисунок 7, *а*). Сигнальный луч направляется на предмет, отражается от него и попадает на фотопластинку, где интерферирует с опорным лучом. Как видно из рисунка 7, *б*, действительное изображение предмета не мешает наблюдателю рассматривать мнимое изображение этого предмета.

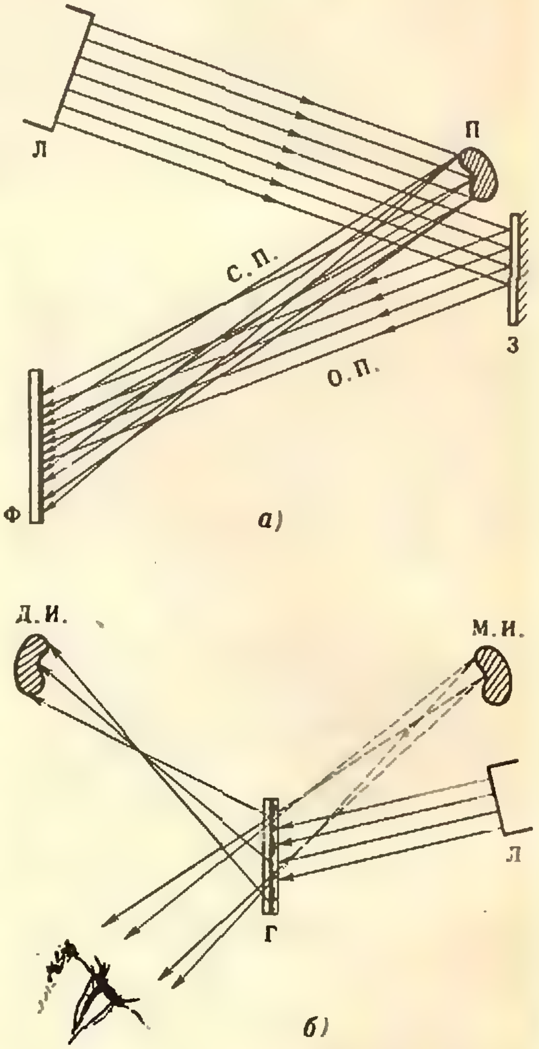


Рис. 7. П — предмет, Л — лазер, З — зеркало, С. П.— сигнальный пучок, О. П.— опорный пучок; Г — голограмма, Д. И.— действительное изображение, М. И.— мнимое изображение.

Голограмму по схеме Лейта и Уатниекса можно получить, расположив фотопластинку в плоскости *MM'* (см. рисунок 3).

Голография с записью в трехмерной среде

В 1962 году советский физик Ю. Н. Денисюк предложил запись интерференционной картины на фотопластинку с толстым эмульсионным слоем. Толщина эмульсионного слоя может быть порядка 20 длин волн света.

На рисунке 3 прямоугольник *PQRT* — участок толстослойной эмульсии (сечение плоскостью рисунка). При достаточной толщине эмульсионного слоя опорная и сигнальная волна интерферируют внутри слоя. При этом в местах интерференционных максимумов выделяется максимальное количество серебра. Множество точек максимумов на рисунке 3 (красные кривые) — это параболы*). Так что в пространстве (в объеме эмульсии) точки интерференционных максимумов образуют параболоиды. Иными словами, в эмульсионном слое образуется как бы система соосных полупрозрачных параболических зеркал с общим фокусом — точкой *S*.

Голограмму, полученную на пластинке с толстослойной эмульсией, называют объемной. Чтобы получить изображение точки *S* с помощью объемной голограммы, надо осветить голограмму плоской световой волной, фронт которой параллелен плоскости пластинки. При этом длина плоской волны совсем не обязательно должна быть равна длине опорной волны. В этом состоит основное преимущество объемной голограммы и оно приводит к замечательным следствиям. Чтобы понять, о чем идет речь, разберемся, как восстанавливается изображение с помощью объемной голограммы.

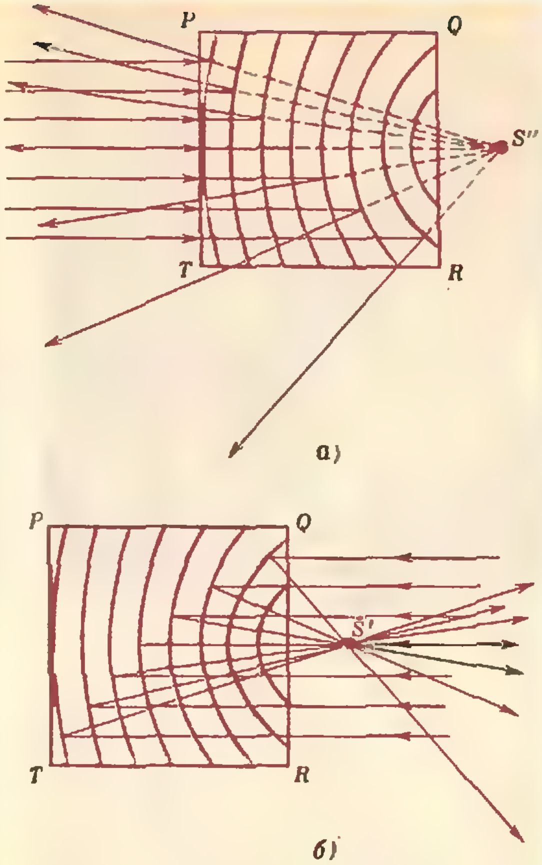


Рис. 8.

Параллельные лучи света, проникая внутрь эмульсии, попадают на первое параболическое зеркало; частично они отражаются от него, частично проходят дальше, попадая на второе параболическое зеркало; здесь опять часть лучей отражается, часть проникает в глубь эмульсии, попадая на третье зеркало, и т. д. На рисунке 8 изображен ход лучей при освещении голограммы с двух противоположных сторон. Если плоская волна падает на поверхность *PT* голограммы (рисунок 8, *а*), то лучи, отраженные от выпуклых поверхностей зеркал, на своих продолжениях собираются в фокусе параболоидов — в точке *S''*, которая и является мнимым изображением точки *S*. При освещении голограммы со стороны поверхности *QR* (рисунок 8, *б*) лучи, отражающиеся от вогнутых поверхностей зеркал, собираются в точке S', создавая действительное изображение точки S*).

---

*) Напомним, что парабола есть множество точек на плоскости, одинаково удаленных от некоторой точки — фокуса — и прямой — директрисы. Точка *S* на рисунке 3 — фокус всего семейства парабол (и синих, и красных); прямые линии, изображающие фронт плоской волны,— директрисы разных парабол.

Как видно, с помощью объемной голограммы создается отдельно либо действительное, либо мнимое изображение предмета, а не оба вместе, как это имеет место в плоских голограммах. Действительное изображение псевдоскопично, поэтому работают, как правило, с мнимым изображением.

В принципе для восстановления фронта волны достаточно образования в эмульсионном слое одной поверхности интерференционных максимумов (одного параболического зеркала). Тот факт, что в толстослойной эмульсии образуется несколько таких поверхностей, позволяет восстанавливать изображение с помощью белого света. При этом изображение будет получено в том же цвете, что и цвет опорной волны. Волны именно этой цветовой компоненты белого света при отражении от разных зеркальных параболоидов будут приходить в фокус всегда в фазе и, складываясь, усиливаться. Волны всех остальных цветовых компонент, отраженные от зеркал, будут приходить в фокус в разных фазах, и усиления их не будет.

Наиболее эффективны объемные голограммы при получении цветных изображений. С этой целью объект освещают светом от трех лазеров, длины волн которых λ_1, λ_2, λ_3 подобраны так, чтобы наиболее полно передать цвет предмета. Обычно используют сочетание красного, желтого и синего цветов. Каждый лазер создает в эмульсионном слое свою систему полупрозрачных зеркальных поверхностей. При освещении такой голограммы светом от трех лазеров, использовавшихся при ее создании, три «одноцветных» изображения оказываются совмещенными в пространстве и образуют цветное изображение предмета.

Цветное изображение получается и в том случае, если осветить такую голограмму солнечным светом. В этом случае система зеркал, выделяя и отражая компоненты солнечного света с длинами волн λ_1, λ_2, λ_3, создает в определенном месте пространства цветное изображение предмета.

За создание теории объемных голограмм Ю. Н. Денисюк в 1970 году был удостоен Ленинской премии.

Свойства и особенности голограмм

Демонстрация изображений, восстановленных с помощью голограммы, поражает воображение любой аудитории. Изображение настолько «реально», что хочется пощупать его, чтобы убедиться, что это только изображение, а не сам предмет. Изображение можно рассматривать под различными углами; можно, перефокусировав глаз, рассматривать близкие и далекие части предмета, наблюдать игру световых бликов на предмете. На рисунках 9 и 10 представлены фотографии изображения, полученного с помощью одной голограммы, сделанные из различных точек наблюдения.

Очень важными свойствами голограммы являются возможность восстановления всего изображения с помощью отдельных участков голограммы и слабая чувствительность голограммы к пылинкам, царапинам и мелким дефектам регистрирующей среды. Эти свойства обусловлены тем, что каждая точка пластинки при экспонировании облучается светом, рассеянным всеми точками предмета, и свет, отраженный каждой точкой предмета, освещает всю пластинку. Эти свойства голограммы легко проверить с помощью самодельной зонной пластинки: изображение, полученное с помощью пластинки, сохраняется при экранировании части пластинки.

Перечисленные нами замечательные свойства голограмм обеспечивают возможность широкого применения голографического метода не только в области оптических длин

---

*) О замечательном свойстве параболических зеркал фокусировать параллельные лучи рассказывалось в статье М. Файнгольда «Этот удивительный параболоид» («Квант», 1975, № 12)

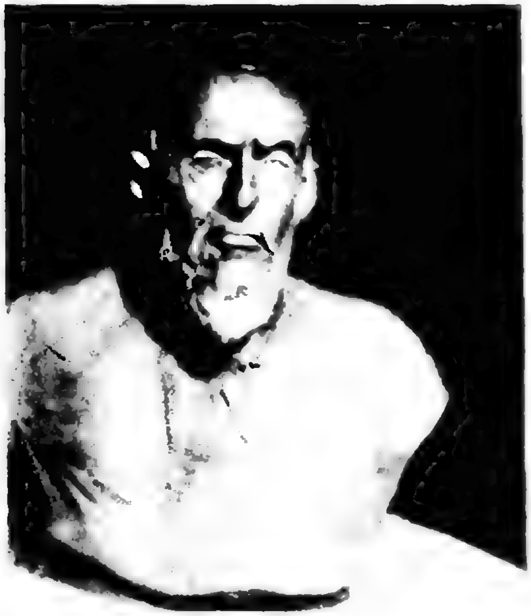


Рис. 9.

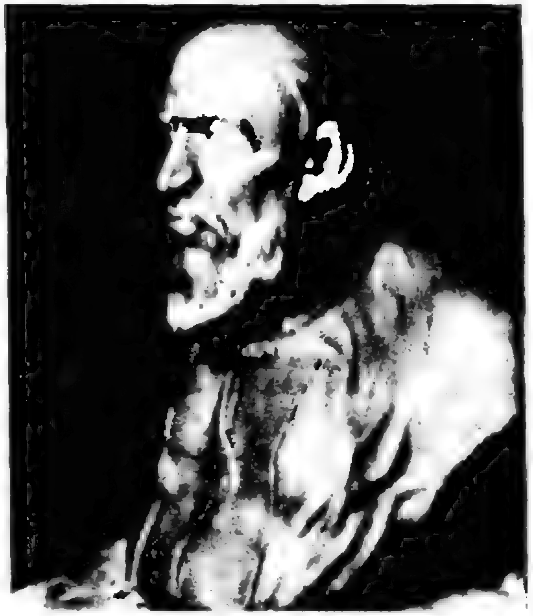


Рис. 10.

волн, но и в любых волновых процессах (в акустике, в радиодиапазоне, в сейсмических процессах и т. д.). Голографический метод позволяет решать задачи, которые не могут быть решены никакими другими методами.

Заключение

В заключение статьи хотелось бы ответить на такой вопрос: почему голография — в принципе простой способ фотозаписи интерференционной картины, образованной двумя когерентными пучками,— создана лишь совсем недавно? Действительно, явления интерференции и дифракции были хорошо исследованы еще в XIX веке; в середине XIX века была изобретена фотография; так что Габору для открытия голографии не потребовались знания каких-либо новых достижений науки. Однако потребовалось глубокое понимание явлений интерференции и дифракции и, конечно, изобретательный ум, чтобы объединить все известные элементы голографии в одну яркую идею. Пример создания голографии хорошо иллюстрирует мысль, что в наше время многие новые и ценные идеи и открытия рождаются на основе старых, хорошо известных понятий.

Кроме того, необходимо подчеркнуть, что наряду с принципиальными трудностями в развитии голографии существуют и чисто технические. Даже в 1947 году идея Габора была еще преждевременной, так как для изготовления качественных голограмм были необходимы источники монохроматического когерентного света. Такие источники — лазеры — появились лишь в 1960 году. Для создания голограмм хорошего качества необходимы фотоматериалы с высокой разрешающей способностью. Как мы видели, при получении объемных голограмм расстояния между параболическими зеркалами внутри эмульсионного слоя оказываются порядка длины волны. Именно этой величиной и должна определяться разрешающая способность эмульсии. Для видимого света $\lambda \sim 10^{-6}$ м; это означает, что на одном миллиметре фотопластинки должно разрешаться («видеться» разделенными) $\sim 10^3$ линий. Такие материалы созданы лишь в последние годы. Большое количество технических трудностей стоит в настоящее время перед создателями голографического кино и телевидения. Но очень многое уже сделано, чтобы эти трудности преодолеть.

(Список литературы см. на с. 18.)

Литература

1. Л. Д. Бахрах, Г. А. Гаврилов. Голография. М., «Знание», серия «Физика», 1979, № 6.

2. У. Кок. Лазеры и голография. М., «Мир», 1971.

3. Р. Кольер, К. Беркхарт, Л. Лин. Оптическая голография. М., «Мир», 1973.

4. Э. Лейт, Дж. Ю. Упатниекс. Фотография в лучах лазера (в сб. «Над чем думают физики», выпуск 11, М., «Наука», 1977).

5. Ю. И. Островский. Голография. М., «Знание», 1970.

6. Дж. Строук. Введение в когерентную оптику и голографию. М., «Мир», 1967.

7. Л. В. Тарасов. Оптика, рожденная лазером. М., «Просвещение», 1977.

8. М. Франсон. Голография. М., «Мир», 1972.

9. С. Э. Фриш. Проблемы волновой оптики. М., «Знание», 1973.

10. А. М. Васильев, А. Т. Глазунов, В. А. Фабрикант. Физика и техника. М., «Знание», 1977.

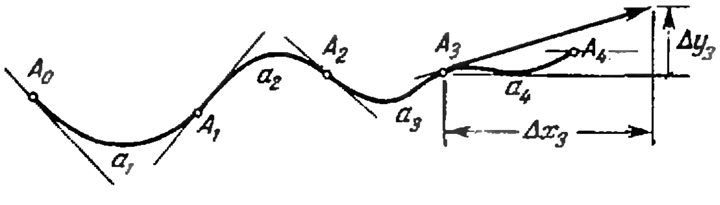
Наша обложка

Семейство кубических парабол

Посмотрите на вторую страницу обложки — на ней показано семейство из 169 кубических парабол, образующее замысловатый узор, «автор» которого — ЭВМ. В этой заметке будет рассказано, как подобные кривые используются на практике.

В машинной графике нередко возникает потребность вычерчивать плавные кривые линии. Иногда это должны быть вполне определенные кривые, соответствующие заданным уравнениям. В других случаях кривая первоначально задается «на глаз» или получается по результатам экспериментальных измерений. Такие «неизвестные» кривые обычно заменяют близким к ним известным и, по возможности, несложными для расчетов кривыми. Если исходная кривая имеет сложную конфигурацию, ее разбивают на ряд дуг и каждую дугу заменяют аналитически несложной линией. Конечно, смежные дуги должны сопрягаться плавно, то есть в общих точках они должны иметь общую касательную. Допустим, экспериментально полученную или нарисованную художником кривую мы разбили на дуги a_1, a_2, a_3, a_4 (см. рисунок). В точках сопряжения A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 нарисованы касательные. Сами точки сопряжения мы можем задать для ЭВМ координатами, направление касательных • — угловыми коэффициентами или компонентами их направляющих векторов (для точки A_3 нарисован такой вектор и указаны его компоненты Δx_3, Δy_3). Как известно, угловой коэффициент равен $k_i = \Delta y_i/\Delta x_i$. Таким образом, каждую из четырех дуг, которые составят общую кривую, нам надо провести по четырем начальным условиям (положение двух точек и наклон касательных в двух точках). Какой выбрать для этого тип кривой? В аналитическом смысле это должна быть «четырехпараметрическая» кривая, то есть, грубо говоря, ее уравнение должно иметь 4 коэффициента. Чтобы получить конкретную дугу, надо определить соответствующие значения этих четырех коэффициентов и указать интервал изменения аргумента. Наверное, простейшим решением нашей задачи является дуга кубической параболы, точнее, часть графика кубического полинома:

$$y = A + B\cdot x + C\cdot x^2 + D\cdot x^3.$$

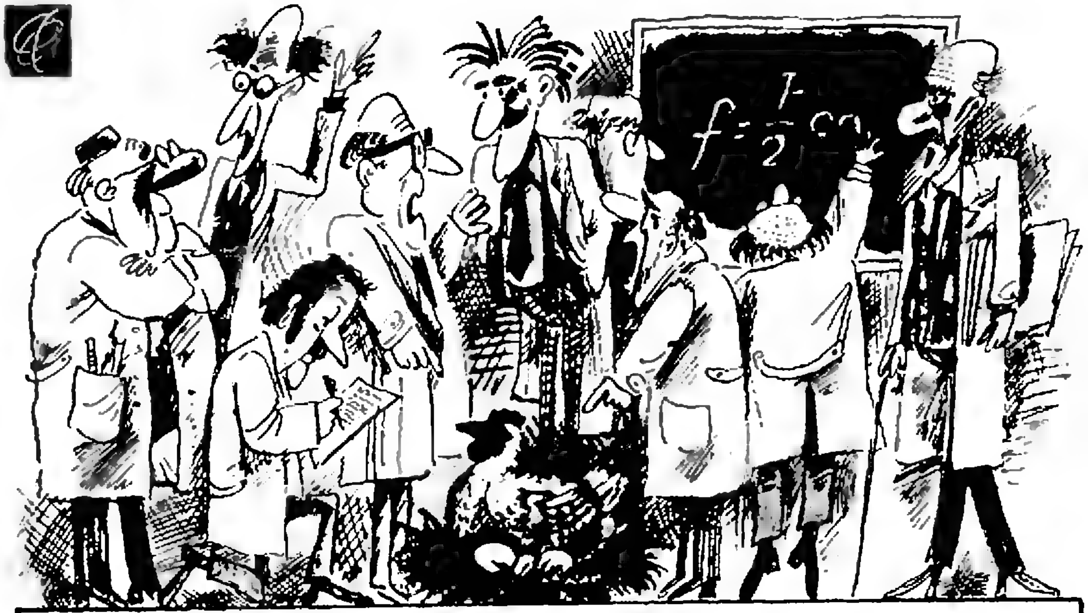


Зная координаты начальной и конечной точки, а также направление касательных в этих точках, легко получить систему из четырех уравнений для определения коэффициентов A, B, C, D.

Этот простой способ построения кривых не вполне универсален. Точки с вертикальными касательными для него «недоступны». Провести замкнутую или самопересекающуюся линию, даже если разделить ее на ряд дуг, этим способом сложно. Но, конечно, у математиков-программистов есть в запасе много более хитрых и усовершенствованных способов построения различных кривых.

На нашей обложке — машинный чертеж из дуг кубического полинома (рисунок повернут на 90°). Каждая из 13 верхних точек соединена дугой с 13-ю нижними точками. В каждой из 26 исходных точек задана своя касательная. Дуги, пересекаясь, неожиданно образуют кружевной узор с рядами «узелков». Подумайте, почему так происходит. Как расположены горизонтальные прямые, содержащие «узелки»?

Ю. Котов



А. Варламов
А. Шапиро

ОБ „OVO“

Главное в том, что, как бы осторожно мы ни старались вбить яйцо в чашку, мы не можем изменить законов физики. Яйцо может не растечься, а у умелого кулинара никогда не растечется, но оно неизбежно будет падать по вертикали с ускорением силы тяжести согласно закону Джоуля — Ленца.

Из книги В. Похлебкина «Тайны хорошей кухни».

«Ab ovo» — в переводе с латыни это буквально означает «от яйца». В переносном же смысле это выражение употребляют, когда хотят указать на изначальность, первичность чего-либо. Именно этот переносный смысл и вкладывали древние как основной в слова «ab ovo». Сами того не ведая, они тем самым разрешили в пользу яйца существующий с незапамятных времен софизм: что появилось раньше — курица или яйцо? Мы этот вопрос оставим в стороне, а займемся некоторыми физическими явлениями, избрав в качестве орудия исследования... куриное яйцо.

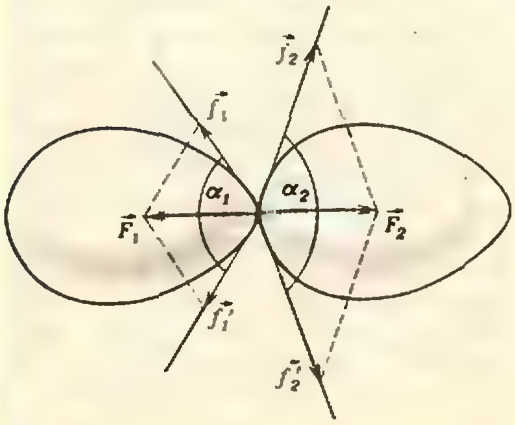
Кто не помнит роковой причины раздора между Лилипутией и империей Блефуску, описанного в «Путешествиях Гулливера»? Этой причиной был указ императора Лилипутии, предписывающий всем его подданным под страхом смертной казни разбивать яйца с острого конца. Гулливер полагал, что выбор конца, с которого следует разбивать яйцо,— дело хозяйское. С какого хочешь — с того и разбивай. Авторы полностью согласны с Гулливером, но все-таки: с какого конца яйцо легче разбить? Решение этой задачи поможет вам выбрать правильную тактику при «сражениях на вареных яйцах», которые так часто возникают за завтраком в пионерских лагерях.

Как правильно поступать: нападать на противника или ждать нападения самому? выбрать большое яйцо или маленькое? держать его острым или тупым концом к противнику? — вот основные вопросы тактики в таком сражении. Бытует мнение, что выигрывает нападающий. Однако при равномерном движении яйца безразлично — нападать самому или ждать нападения противника. Чтобы убедиться в этом, не надо бить яйца; достаточно вспомнить принцип относительности Галилея и «перейти» в систему отсчета, в которой нападающий покоится. В такой системе он автоматически из «агрессора» превращается в «пострадавшую сторону».

Рассмотрим теперь сам процесс столкновения двух яиц. Мы будем считать, что яйца совершенно одинаковые — и по размерам, и по форме, и скорлупа у них «рассчитана» на одну и ту же предельную нагрузку T. Сталкиваются яйца разными концами — одно тупым, другое острым.

Согласно III закону Ньютона силы, действующие в процессе столкновения со стороны одного яйца на другое, равны по абсолютной величине и направлены в противоположные стороны. Представим силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ как суммы сил $\vec{f}_1$, $\vec{f}'_1$ и $\vec{f}_2$, $\vec{f}'_2$, соответственно направленных по касательным к соприкасающимся поверхностям яиц. Абсолютная величина силы $\vec{f}$ зависит от угла между касательными: $f=\frac{F}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, чем больше угол между касательными, тем больше «разрывающие» силы, возникающие при соударении. Так что, действительно, выгоднее сражаться, держа яйцо острым концом к противнику. Имеется и еще один довод в пользу такой стратегии: в яйце у тупого конца расположен «воздушный мешок», и из-за этого тупой конец менее прочный (попробуйте объяснить этот факт).

Обратим внимание читателя на то, что приведенный анализ сил указывает путь к победе с помощью маленькой хитрости. Не нарушая принципа относительности Галилея, нападающий имеет дополнительный шанс на победу, даже если его противник опытен и сражается острым концом: воспользовавшись своей активной позицией, он может ударить противника не в острие, а чуть сбоку, где кривизна и яйцо колется легче.



...Несколько лет назад в магазинах продавалась забавная игрушка — изготовленный из пластмассы волчок с хвостиком. Раскрутив его за хвостик, можно было наблюдать необычное явление: в некоторый момент волчок переворачивается и становится «вверх ногами» — на свой хвостик. При этом потенциальная энергия волчка в поле тяжести земли возрастает! Объяснение этому явлению много лет назад дал английский физик Томсон. (С тех пор такой волчок называют волчком Томсона.)

Оказывается, вареное яйцо может вести себя так же, как волчок Томсона. Возьмем гладкую кафельную плитку и быстро раскрутим на ней сваренное вкрутую яйцо. После двух — трех оборотов яйцо встанет на свой острый конец и будет вращаться вдоль продольной оси! И только после значительного замедления вращения яйцо, под влиянием сил тяжести и трения, начнет все больше раскачиваться из стороны в сторону, пока его боковая сторона не коснется подставки. Этот опыт удается только в том случае, если яйцо хорошо «проварено». Сырое яйцо так вращаться не будет. Трение между слоями жидкости в яйце и между жидкостью и скорлупой существенно тормозит вращение, поэтому раскрутить сырое яйцо до нужной скорости не удается. Благодаря такому различию в поведении вареного и сырого яиц их всегда можно различить, не разбивая,— для этого яйцо достаточно просто раскрутить на столе. Сырое яйцо, совершив несколько оборотов, остановится, а вареное будет вращаться долго.

...В предыдущих опытах нам нужно было вареное яйцо. А как правильно его сварить, чтобы яйцо не треснуло? Почему опытная хозяйка варит яйца в соленой воде? На эти кулинарные вопросы вы не найдете ответа даже в толстой поваренной книге.

При варке яйца в пресной воде оно лежит на дне (его плотность больше плотности воды). При кипении вблизи дна возникают вихревые потоки воды, которые могут привести к раскалыванию скорлупы при ударе о стенки или дно кастрюли. При этом белок выливается через образовавшуюся трещину и затвердевает хлопьями.

Один мой знакомый шестиклассник Вася объяснил необходимость соления воды так: «Если в кастрюлю с яйцом сыпать соль ложками, то при достаточном количестве соли, растворившейся в воде, яйцо всплывет, так как плотность соленой воды станет больше плотности яйца. И яйцо не будет стукаться о дно».

Коля, член кружка юных физиков, предложил свое объяснение: «Наличие соли в воде приводит к увеличению ее теплопроводности, а это способствует более спокойному кипению и равномерному обогреву яйца».

Увлеченная биологией Валя отнесла влияние соли совсем к другой области явлений: «Присутствие соли в воде приводит к лучшей сворачиваемости белка. Поэтому если яйцо и треснет, то в соленой воде немедленно образуется пробка из свернувшегося белка, которая закупорит трещину, и яйцо не вытечет».

Как видите, объяснения самые разные. А вы что думаете по этому поводу?

...Итак, яйцо сварилось. Выньте его ложкой из кипятка и быстро, пока яйцо еще влажное, возьмите его в руки. Хотя яйцо горячее, удержать его в руках можно. Однако, когда яйцо высохнет (это произойдет очень быстро), вы не сможете его держать в руках — очень горячо. С чем связано это явление?

Ответив на предыдущий вопрос, попытайтесь яйцо очистить. Вы увидите, что скорлупа накрепко прилипла и вырывается только с кусками белка. Этого можно было избежать, если бы вы сразу из кипятка опустили яйцо в холодную воду: у белка и скорлупы различные коэффициенты объемного расширения, и при резком охлаждении белок сжимается сильнее, чем скорлупа, и сам от нее «отлипает». Яйцо легко чистится.

...Пока мы видели, как проявляются в свойствах куриного яйца законы механики, гидродинамики и молекулярной физики. А какие электрические явления можно наблюдать с помощью яйца?

Яйцо — диэлектрик. Именно это свойство яичной скорлупы и использовал Майкл Фарадей для демонстрации явления электризации.

Возьмите сырое яйцо и проколите иглой в нем две дырочки. Дуя в одну из них, вы можете вылить все содержимое яйца, и у вас в руках останется пустая целая скорлупа. Поднесите теперь к ней наэлектризованную эбонитовую палочку или обыкновенную пластмассовую расческу, которой вы только что причесались. Теперь, куда бы вы ни перемещали палочку или расческу, скорлупа, как собачонка на привязи, неотступно будет следовать за ними. Подумайте, почему.

...Можно, не разбивая яйца, узнать — свежее оно или нет? Можно. Опустите сырое яйцо в воду. Если яйцо тонет — оно свежее, если всплывает — испортившееся. Дело в том, что в несвежем яйце происходят процессы разложения белка и желтка. Эти процессы сопровождаются выделением сероводорода, который «улетучивается» из яйца через мельчайшие поры в скорлупе. Поэтому плотность яйца уменьшается.

Но ведь не придешь же в магазин со своей кастрюлей, чтобы проверять, свежие яйца или нет?! Можно поступить проще: посмотрите яйцо «на просвет»: если оно просвечивает — значит, свежее, если оно темное — значит, несвежее. Сероводород, выделяющийся в испорченном яйце, уменьшает его прозрачность.

В заключение попробуйте проделать следующий опыт-фокус. Возьмите две рюмки для яиц и поставьте их вплотную. В одну из них положите сваренное вкрутую яйцо. Сильно дуньте в зазор между яйцом и стенкой рюмки. Яйцо выпрыгнет из рюмки и перепрыгнет в соседнюю. Попытайтесь объяснить этот фокус.

Пытливому и наблюдательному человеку в самых простых вещах может открыться много новых и сложных явлений. Поэтому почаще удивляйтесь окружающему вас миру, задавайте вопросы и стремитесь прежде всего сами отыскивать ответы.

задачник Кванта

Задачи

М631 — М635; Ф643 — Ф647

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих из рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 сентября 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 80», и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М631, М632» или «Ф643». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

Задачи этого номера предлагались на заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

М631. Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получающееся число 192021... ...7980 на 1980? (8)

В. Федотов

М632. Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию «Салют». Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза 18 тонн. Имеется семь транспортных кораблей «Прогресс», каждый из которых может доставить на орбиту 3 тонны груза. Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Докажите, что они смогут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз. (8—9)

А. Колотов

М633. На диаметре AC некоторой окружности дана точка E. Проведите через нее хорду BD так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была наибольшей. (9)

И. Шарыгин

М634. Обозначим через $S(n)$ сумму всех цифр натурального числа n.

а) Существует ли натуральное n такое, что $n+S(n)=1980$?

б) Докажите, что хотя бы одно из любых двух последовательных натуральных чисел представимо в виде $n+S(n)$ для некоторого третьего натурального числа n. (8)

С. Конягин

М635. Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболевали, навещая своих больных друзей. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно день, причем после этого у него по крайней мере еще один день есть иммунитет — т. е. он здоров и заболеть опять в этот день не может. Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их. Докажите, что:

а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго;

б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится. (8)

А. Колотов

Ф643. С южного и северного полюсов Земли одновременно стартуют две ракеты с одинаковыми начальными скоростями, направленными горизонтально. Через время $\tau = 3$ ч 20 мин ракеты оказались на максимальном удалении друг от друга. Определить максимальное расстояние между ракетами. Ускорение свободного падения на Земле считать известным. Радиус Земли $R_з = 6400$ км. (10)

С. Козел

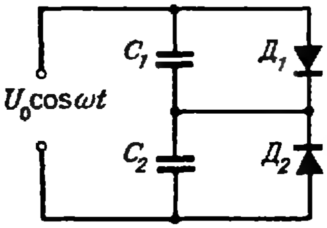


Рис. 1.

Ф644. Цепь, состоящая из двух конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 $(C_2 > C_1)$ и двух идеальных диодов $Д_1$ и $Д_2$ (рис. 1) подключена к источнику переменного напряжения $u = U_0 \cos \omega t$. Определите зависимость напряжения на конденсаторах от времени в установившемся режиме. Изобразите полученные зависимости на графике. Сопротивление идеального диода в прямом направлении равно нулю, в обратном — бесконечности. (10)

В. Скороваров

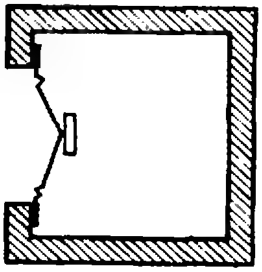


Рис. 2.

Ф645. Громкоговоритель имеет диффузор с площадью поперечного сечения $S = 300$ см^2 и массой $m = 5$ г. Резонансная частота диффузора $\nu_0 = 50$ Гц. Какой окажется его резонансная частота, если поместить громкоговоритель на стенке закрытого ящика объема $V = 40$ л (рис. 2). Расчет провести в предположении, что температура воздуха внутри ящика не изменяется при колебании диффузора. (10)

А. Зильберман

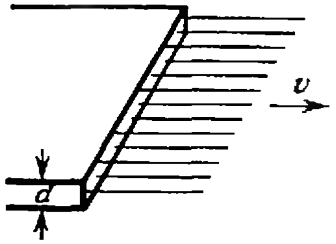


Рис. 3.

Ф646. Направленный поток электронов вылетает из тонкой широкой щели со скоростью $v = 10^5$ м/с (рис. 3). Концентрация электронов в потоке $n = 10^{10}$ частиц/м^3. На каком расстоянии от щели толщина пучка увеличится в 2 раза? Масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, диэлектрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. (9)

А. Зильберман

Ф647. Крупная дождевая капля покинула облако в безветренную погоду на большой высоте. В момент, когда ускорение капли было равным 7,5 м/с^2, ее скорость составляла 20 м/с. Вблизи Земли капля падала с постоянной скоростью и, попав на боковое стекло автомобиля, оставила на нем след под углом 30° к вертикали. Оштрафует ли инспектор ГАИ водителя за превышение скорости, если разрешенная скорость движения автомобиля 60 км/ч? Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной квадрату скорости капли. (9)

В. Белонучкин

Решения задач

М573, М575—М577; Ф583—Ф585, Ф588

М573. *Через точку O а) на плоскости; б) в пространстве проведено 1979 прямых, никакие две из которых не перпендикулярны друг другу. На прямой l_1 взята произвольная точка A_1, отличная от O. Докажите, что можно выбрать на каждой из остальных прямых по точке $A_i \in l_i$ ($i = 2, 3, \ldots, 1979$) так, чтобы следующие 1979 пар прямых были взаимно перпендикулярны:*

$(A_1A_3) \perp l_2,$
$(A_2A_4) \perp l_3, \ldots,$
$(A_{i-1}A_{i+1}) \perp l_i, \ldots$
$\ldots, (A_{1977}A_{1979}) \perp l_{1978},$
$(A_{1978}A_1) \perp l_{1979},$
$(A_{1979}A_2) \perp l_1.$

Выберем на каждой прямой l_i по единичному вектору e_i. Тогда для точек $A_i \in l_i$ можно написать $\overrightarrow{OA_i} = a_i\overrightarrow{e_i}$. Условие перпендикулярности прямых A_iA_{i+2} и l_{i+1} можно записать в виде $\overrightarrow{A_iA_{i+2}} \cdot \overrightarrow{e_{i+1}} = 0$, или, поскольку

$$\overrightarrow{A_iA_{i+2}} = \overrightarrow{OA_{i+2}} - \overrightarrow{OA_i},$$

$$(a_{i+2}\overrightarrow{e_{i+2}} - a_i\overrightarrow{e_i}) \cdot \overrightarrow{e_{i+1}} = 0,$$

то есть

$$a_{i+2}\overrightarrow{e_{i+1}} \cdot \overrightarrow{e_{i+2}} = a_i\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_{i+1}}.$$

Положим $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_{i+1}} = c_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 1979$; c_i — косинус угла между вектором $\overrightarrow{e_i}$ и следующим по номеру вектором $\overrightarrow{e_{i+1}}$; $c_i \neq 0$). Мы получим формулу

$$a_{i+2} = a_i\frac{c_i}{c_{i+1}}, \qquad (*)$$

которая позволяет последовательно определить по точке A_1 точки $A_3, A_5, \ldots, A_{1977}, A_{1979}, A_2, A_4, \ldots, A_{1978}$ и, наконец, снова точку A'_1 на прямой l_1, которая будет совпадать с точкой A_1: в силу формулы $(*)$

$$a'_1 = a_1\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_3}{c_4} \cdot \ldots \cdot \frac{c_{1979}}{c_1} \cdot \frac{c_2}{c_3} \cdot \ldots \cdot \frac{c_{1978}}{c_{1979}} = a_1.$$

(Формулу $(*)$, конечно же, можно получить, рассматривая также проекции точек A_i, A_{i+2} на прямую l_{i+1}, — эти проекции должны совпадать, так как $(A_iA_{i+2}) \perp l_{i+1}$).

Н. Васильев

◆

М575. *На прямой по порядку расположены точки $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, что длины отрезков $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ не превосходят 1. Требуется отметить $k-1$ из точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ красным цветом так, чтобы длины любых двух из k частей, на которые отрезок A_0A_n разбивается красными точками, отличались не более, чем на 1. Докажите, что это всегда можно сделать*

а) для $k = 3$;

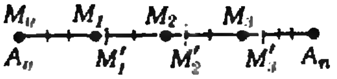
б) для каждого натурального $k < n$.

Сначала сформулируем условие задачи несколько иначе. Будем рассматривать всевозможные расстановки $k+1$ фишек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_k$ в точках $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Расстановку назовем *правильной*, если M_i расположена не правее, чем M_{i+1}, и расстояния между M_i и M_{i+1} различаются не более, чем на 1 ($0 \leqslant i < k$). Тогда исходная задача превратится в такую: *доказать, что существует правильная расстановка фишек $M_0, M_1, \ldots, M_k$ такая, что M_0 находится в A_0, а M_k — в A_n*. Может, конечно, оказаться, что в этой расстановке M_i и M_j попали в одну точку, но тогда, очевидно, $|A_0\ A_n| < k-1$ (подумайте сами, что надо делать в этом случае).

Покажем, как из произвольной правильной расстановки фишек получить другую правильную, в которой часть фишек сдвинется вправо, а M_0 останется на месте. Введем предварительно некоторые обозначения.

Пусть мы имеем расстановку фишек $M_0, M_1, \ldots, M_k$. Будем через M_i обозначать также ту точку A_j, в которой находится фишка M_i, а через M'_i — точку A_{j+1} (если она существует — см. рисунок). В частности, $|M_iM'_i| < 1$. Мы покажем, как часть фишек переставить с M_i на M'_i с сохранением правильности расстановки.

Выберем среди расстояний $|M_iM_{i+1}|$ минимальное; пусть это $|M_sM_{s+1}| = a$. Тогда $a \leqslant |M_iM_{i+1}| \leqslant a+1$ при всех i (так как расстановка правильная). Если нам удастся передвинуть часть фишек вправо с сохранением этих неравенств, то новая расстановка будет правильной. Посмотрим, нет ли среди фишек $M_1, M_2, \ldots, M_k$ такой фишки M_i, для которой $|M_{i-1}M'_i| \leqslant a+1$, то есть такой, при сдвиге которой вправо все новые расстояния между фишками не превысят $a+1$. Все такие фишки назовем *левоподвижными*. Оказывается, левоподвижные фишки существуют. Действительно, такова, например, фишка M_{s+1}: $|M_sM'_{s+1}| = |M_sM_{s+1}| + |M_{s+1}M'_{s+1}| = a + |M_sM'_{s+1}| \leqslant a+1$.



Теперь посмотрим, нет ли среди фишек M_0, M_1, ..., M_{k-1} такой, для которой $|M_i'M_{i+1}| \geqslant a$, то есть такой, при сдвиге которой вправо ни одно из расстояний между фишками не станет меньше a. Такие фишки назовем *правоподвижными*. Правоподвижной, естественно, будет и фишка M_k.

Заметим, что если M_i не является левоподвижной, то $|M_{i-1}'M_i'| > a$. В самом деле,

$$|M_{i-1}'M_i'| = |M_{i-1}M_i'| - |M_{i-1}M_{i-1}'| > (a+1) - \\ - |M_{i-1}M_{i-1}'| \geqslant (a+1) - 1 = a.$$

А если фишка M_i не является правоподвижной, то

$$|M_i'M_{i+1}'| = |M_i'M_{i+1}| + |M_{i+1}M_{i+1}'| \leqslant a+1.$$

Теперь из всех левоподвижных фишек выберем самую правую. Пусть это будет M_l. Среди всех правоподвижных фишек из M_l, M_{l+1}, ..., M_k выберем самую левую. Пусть это будет M_r (возможно, $l=r$). Теперь сдвинем фишки M_l, M_{l+1}, ..., M_r в положения M_l', M_{l+1}', ..., M_r' соответственно и покажем, что последовательность M_0, ..., M_k останется правильной.

$$|M_{l-1}M_l'| > |M_{l-1}M_l| \geqslant a \quad \text{и} \quad |M_{l-1}M_l'| \leqslant a+1,$$

так как фишка M_l — левоподвижная.

$$|M_r'M_{r+1}| < |M_rM_{r+1}| \leqslant a+1 \text{ и } |M_r'M_{r+1}| \geqslant a,$$

так как фишка M_r — правоподвижная.

При $l \leqslant i < r$, согласно сделанным выше замечаниям относительно свойств неподвижных фишек, $a < |M_i'M_{i+1}'| \leqslant a+1$, так как фишка M_{i+1} — не левоподвижная (она стоит правее M_l — самой правой левоподвижной фишки), и M_i — не правоподвижная (она стоит левее M_r — самой левой правоподвижной фишки). Поэтому для всех расстояний $|M_{i-1}M_i|$ остается верным неравенство $a \leqslant |M_{i-1}M_i| \leqslant a+1$, $i = 1, 2, ..., k$. Надо, правда, еще доказать, что фишка M_i не может оказаться правее фишки M_{i+1}, но это понятно, так как если раньше было $M_i' = M_{i+1}$, то фишка M_{i+1} — левоподвижная и, значит, фишка M_i двигаться не могла. Итак, мы добились следующего: из любой правильной последовательности сдвигом некоторой части фишек M_1, M_2, ..., M_k на соседние точки (M_i сдвигалось в M_i') вправо получена новая правильная последовательность.

Отметим интересную роль, которую сыграли в этом процессе фишки M_0 и M_k. Они сами в операции, быть может, не участвовали, но их наличие обеспечило существование необходимых нам фишек M_l и M_r.

Теперь завершить доказательство совсем просто. Поместим все фишки M_0, ..., M_k в A_0*) — эта последовательность, очевидно, правильная — и начнем применять процесс.

Расстановка фишек по точкам все время меняется, причем каждая фишка движется лишь вправо. Ясно, что после некоторого количества таких операций фишка M_k придет в точку A_n, что и требовалось.

Другие известные решения задачи используют такую процедуру (говоря в терминах приведенного выше решения): сначала фишки M_0 и M_k закрепляют в точках A_0 и A_n соответственно, а остальные расставляют произвольно; затем передвижением фишек M_1, M_2, ..., M_{k-1} добиваются требуемого. (Этот подход сразу кажется наиболее естественным, поэтому так неожиданна идея изложенного решения: не закреплять фишку M_k.)

В. Гальперин

◆

M576. *На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар $(A; B)$ этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$.*

Эту задачу можно решать многими различными способами. Приведем два из них.

Первое решение. Применим индукцию по числу векторов. Для $n=2$ имеем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, сумма которых есть $\vec{0}$. Пусть утверждение справедливо для n векторов. Рассмотрим систему из $n+1$ векторов. Заменим в этой системе два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ их суммой $\overrightarrow{AC}$. Векторы новой системы будут продолжать удовлетворять условию задачи. Поэтому, по предположению индукции, их сумма равна $\overrightarrow{0}$. Но сумма векторов исходной системы, очевидно, равна сумме векторов полученной системы.

---

*) Или в точки A_0, A_1, A_2, ..., A_k.

Второе решение. Запишем каждый из данных векторов в виде $\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{OA_i}$, где O — произвольная фиксированная точка. В силу условия задачи, в рассматриваемую сумму каждый из векторов $\overrightarrow{OA_i}$ войдет со знаком «+» столько же раз, сколько со знаком «−». Значит, вся сумма равна 0.

В. Произволов

◆

М577. *Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размерами*

а) 8×8 клеток,

б) $n \times n$ клеток

для того чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка? (Фишки ставятся в центры полей.)

Ответ: $2n$ фишек при n четном (в частности, 16 при $n=8$), и $2n+1$ — при n нечетном.

Одна из возможных расстановок фишек показана на рисунках 1 и 2. Докажем, что меньшим количеством фишек обойтись не удается.

Начнем с более трудного случая нечетного n (рис. 2). Очевидно, на каждом из красных отрезков, параллельных диагоналям и расположенных вне голубого квадрата, должно стоять по фишке; этих отрезков $2n-2$. На каждом из голубых отрезков тоже должна стоять фишка. Покажем, что для этого придется добавить еще не менее трех фишек; действительно, чтобы двумя фишками «закрыть» все четыре стороны голубого квадрата, их пришлось бы поставить в противоположные вершины этого квадрата, но тогда осталась бы свободной одна диагональ квадрата.

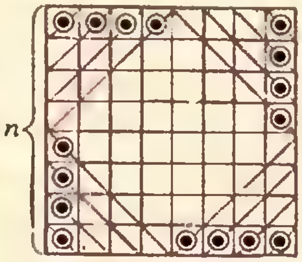


Рис. 1.

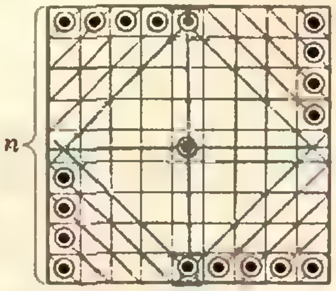


Рис. 2.

Случай четного n теперь очевиден: здесь просто указывается $2n$ непересекающихся отрезков, параллельных диагоналям (рис. 1).

Предлагаем читателям выяснить, сколько существует различных расстановок наименьшего количества фишек, удовлетворяющих условию (для разных n), и обобщить задачу на случай прямоугольных досок размером $m \times n$. Было бы также интересно исследовать различные пространственные аналоги этой задачи (возникающие здесь вопросы, видимо, очень трудны; см. статью «Расстановка кубиков» — «Квант», 1972, № 4)

Н. Васильев

◆

Ф583. *Наблюдатель движется с постоянной скоростью вдоль некоторой наклонной прямой. Брошенное под углом к горизонту тело пересекает траекторию наблюдателя дважды с интервалом времени τ. Оба раза тело нахо-*

В системе отсчета, связанной с Землей, обозначим $\vec{v}_0$ скорость наблюдателя, а $\vec{v}_1$ скорость тела в тот момент времени t_0, в который оно в первый раз пересекает траекторию наблюдателя. В системе отсчета, движущейся равномерно со скоростью $\vec{v}_0$, наблюдатель неподвижен, а тело в момент времени t_0 имеет скорость $\vec{v} = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_0) = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$. Так как эта система отсчета движется относительно Земли равномерно, ускорение *дится впереди наблюдателя на одном и том же расстоянии от него. Как выглядит с точки зрения наблюдателя траектория тела?*

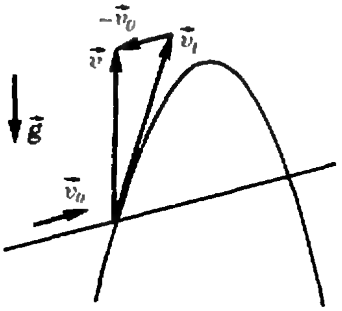
После второго пересечения наблюдатель измеряет пути, пройденные телом за последовательные равные промежутки времени длительностью τ. Найдите отношение этих путей.

тела в этой системе такое же, как ускорение относительно Земли, то есть равно $\vec{g}$ ($g = 9{,}8$ м/с²).

Следовательно, в системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ относительно Земли, тело движется по параболе.

По условию задачи тело пересекает наклонную прямую оба раза на одном и том же расстоянии от наблюдателя впереди него. Это означает, что с точки зрения наблюдателя тело движется по вертикальной прямой, то есть как тело, брошенное вертикально вверх.

Векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_1$ таковы, что вектор $\vec{v}$ вертикален (см. рисунок).



В движущейся системе отсчета уравнение движения тела в проекции на вертикальную ось Y, направленную вверх, имеет вид

$$y = y_0 + vt - \frac{gt^2}{2}.$$

При $t = t_0 = 0$ (отсчет времени начинаем с момента первого пересечения телом траектории наблюдателя) и при $t = \tau$ значения координаты тела совпадают: $y = y_0$, то есть

$$y_0 = y_0 + vt - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Отсюда

$$v\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0 \Rightarrow v = \frac{g\tau}{2}.$$

Следовательно, уравнение движения тела в движущейся системе отсчета имеет вид

$$y = y_0 + \frac{g\tau}{2}t - \frac{gt^2}{2}.$$

Найдем отношение путей, проходимых телом за последовательно равные промежутки времени τ. При $t = n\tau$

$$y_n = y_0 + n\frac{g\tau^2}{2} - n^2\frac{g\tau^2}{2};$$

при $t = (n+1)\tau$

$$y_{n+1} = y_0 + (n+1)\frac{g\tau^2}{2} - (n+1)^2\frac{g\tau^2}{2};$$

таким образом,

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = ng\tau^2.$$

За первый промежуток времени τ изменение координаты тела равно нулю: $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0$ ($n = 0$); за второй промежуток времени τ (после второго пересечения телом траектории наблюдателя) — $\Delta y_1 = g\tau^2$; $\Delta y_2 = 2g\tau^2$ и т. д.

Следовательно, отношение путей, проходимых телом после второго пересечения траектории наблюдателя за последовательно равные промежутки времени τ, равно

$$\Delta y_1 : \Delta y_2 : \Delta y_3 ... = 1 : 2 : 3 ...$$

М. Кацай

Ф584. *В небольшую тонкостенную металлическую кастрюлю налили 0,5 л воды, поставили кастрюлю на плиту и, измеряя температуру воды в различные моменты времени, построили график зависимости температуры от времени. Затем воду вылили, в кастрюлю налили 0,7 кг спирта и, поставив кастрюлю на ту же самую плиту, построили график зависимости температуры спирта от времени. Оба графика приведены на рисунке 1. Пользуясь этими графиками,*

◆

Обозначим q количество теплоты, отдаваемое плитой за единицу времени. За малый промежуток времени $\Delta\tau$ количество теплоты, отдаваемое плитой, равно $Q = q\Delta\tau$. Это тепло расходуется на подогрев кастрюли, на подогрев жидкости и на теплоотдачу в окружающее пространство. При малом $\Delta\tau$ температура Θ кастрюли с жидкостью меняется незначительно, и поэтому можно считать, что теплоотдача Q_1 пропорциональна разности температур кастрюли (Θ) и окружающей среды (Θ_0) и времени $\Delta\tau$, то есть $Q_1 = \alpha(\Theta - \Theta_0)\Delta\tau$, где α — коэффициент пропорциональности.

Запишем закон сохранения энергии для случая, когда на плите стоит кастрюля с водой:

$$Q = q\Delta\tau = c_в m_в \Delta\Theta + C\Delta\Theta + \alpha(\Theta - \Theta_0)\Delta\tau, \qquad (1)$$

где $c_в = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) — удельная теплоемкость воды, $m_в = 0{,}5$ кг — масса воды, $\Delta\Theta$ — изменение температуры воды *определите удельную теплоемкость спирта и удельную теплоту его парообразования, если за 30 минут кипения количество спирта в кастрюле уменьшилось вдвое. Теплоемкость кастрюли 200 Дж/К. Испарением с поверхности жидкости пренебречь.*

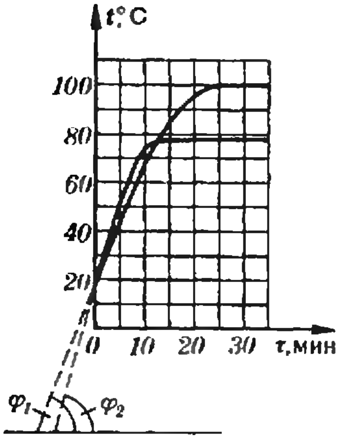


Рис. 1.

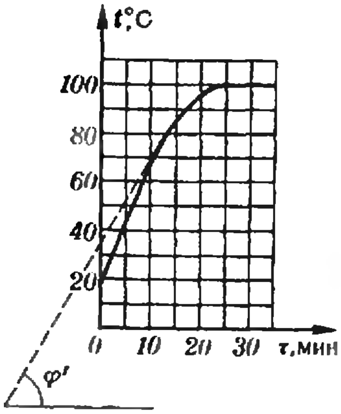


Рис. 2.

и кастрюли за время $\Delta\tau$, C — теплоемкость кастрюли, Θ — «начальная» температура воды и кастрюли.

В том случае, когда на плите стоит кастрюля со спиртом,

$$Q = q\Delta\tau = c_с m_с \Delta\Theta' + C\Delta\Theta' + \alpha(\Theta - \Theta_0)\Delta\tau, \qquad (2)$$

где $c_с$ — удельная теплоемкость спирта, $m_с$ — масса спирта, $\Delta\Theta'$ — изменение температуры спирта и кастрюли за время $\Delta\tau$, Θ — «начальная» температура спирта и кастрюли.

Из (1) и (2) найдем отношения $\Delta t/\Delta\tau$ и $\Delta t'/\Delta\tau$:

$$\frac{\Delta\Theta}{\Delta\tau} = \frac{q - \alpha(\Theta - \Theta_0)}{c_в m_в + C}, \qquad (3)$$

$$\frac{\Delta\Theta'}{\Delta\tau} = \frac{q - \alpha(\Theta - \Theta_0)}{c_с m_с + C}. \qquad (4)$$

Поделим (3) на (4):

$$\frac{\Delta\Theta/\Delta\tau}{\Delta\Theta'/\Delta\tau} = \frac{c_с m_с + C}{c_в m_в + C}.$$

Отсюда

$$c_с = \frac{\Delta\Theta/\Delta\tau}{\Delta\Theta'/\Delta\tau}\,\frac{c_в m_в + C}{m_с} - \frac{C}{m_с}.$$

Отношение $\Delta\Theta/\Delta\tau$ при $\Delta\tau \to 0$ стремится к тангенсу угла наклона касательной к графику зависимости $t(\tau)$ для кастрюли с водой в точке с ординатой Θ. Аналогично, $\Delta\Theta'/\Delta\tau$ при $\tau \to 0$ стремится к тангенсу угла наклона касательной к графику зависимости $t(\tau)$ для кастрюли со спиртом в точке с ординатой Θ.

Таким образом,

$$c_с = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2}\,\frac{c_в m_в + C}{m_с} - \frac{C}{m_с}. \qquad (5)$$

Для большей точности касательные к графику будем проводить при низких Θ (см. рис. 1: на этом участке графики $t(\tau)$ практически прямые линии). Определив значения $\operatorname{tg}\varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2$ и подставив в (5) численные значения величин, найдем

$$c_с \approx 2{,}4 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Теперь найдем удельную теплоту парообразования спирта. При кипении температура спирта не меняется. Тепло, выделяемое плитой за время T, расходуется на испарение спирта и на теплоотдачу. Согласно закону сохранения энергии,

$$qT = \Delta m\lambda + \alpha(\Theta_к - \Theta_0)T, \qquad (6)$$

где $\Delta m = 0{,}35$ кг — масса спирта, испарившегося за время $T = 30$ мин, λ — удельная теплота парообразования спирта, $\Theta_к = 78$°C — температура кипения спирта. Из (6) находим выражение для λ:

$$\lambda = \frac{q - \alpha(\Theta_к - \Theta_0)}{\Delta m/T}. \qquad (7)$$

Теплоотдачу $\alpha(\Theta_к - t_0)$ за единицу времени при температуре $\Theta_к$ мы можем найти из выражения (1), подставив в него $\Theta = \Theta_к$ и учтя, что $\Delta\Theta/\Delta\tau$ при $\tau \to 0$ стремится к тангенсу угла наклона касательной к графику $t(\tau)$ (для кастрюли с водой), проведенной в точке с ординатой $\Theta_к = 78$°C. Таким образом, из (1) находим

$$\alpha(\Theta_к - \Theta_0) = q - (c_в m_в + C)\operatorname{tg}\varphi'$$

(множитель $\operatorname{tg}\varphi'$ имеет размерность К/мин).

Подставив это выражение в (7), получим окончательное выражение для удельной теплоты парообразования спирта:

$$\lambda = \frac{c_в m_в + C}{\Delta m/T}\operatorname{tg}\varphi'.$$

Определив по графику (рис. 2) φ' и подставив численные значения величин, найдем λ.

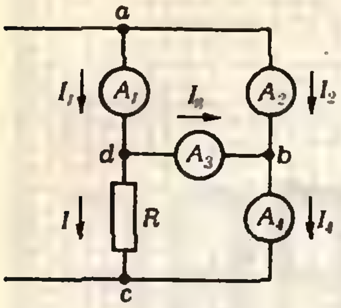
И. Слободецкий

◆

Ф585. *Четыре одинаковых амперметра и резистор включены так, как показано на рисунке. Амперметр A_1 показывает 2 А, амперметр A_2 по-*

Будем считать, что токи в цепи направлены так, как показано на рисунке.

Напряжение между точками b и a равно $U_{ba} = I_2 r$, где r — внутреннее сопротивление амперметра; в то же время, $U_{ba} = I_1 r + I_3 r$. Таким образом, *казывает 3 А. Какие токи протекают через амперметры A_3, A_4 и резистор? Найдите отношение внутреннего сопротивления амперметра к сопротивлению резистора.*



Ф588. *Рисунок 1 (вид сверху) сделан с фотографии шлейфов дыма, тянущихся от трех паровозов, которые движутся по прямолинейному участку железнодорожного пути. Скорость первого паровоза $|\vec{v}_1| = 50$ км/ч, а второго — $|\vec{v}_2| = 70$ км/ч; направления их движения указаны на рисунке стрелками. Какова скорость третьего паровоза?*

$$I_1 r + I_3 r = I_2 r \Rightarrow I_3 = I_2 - I_1 = 1 \text{ А}.$$

Через амперметр A_4 течет ток

$$I_4 = I_2 + I_3 = 4 \text{ А}.$$

Через резистор течет ток

$$I = I_1 - I_3 = 1 \text{ А}.$$

Напряжение между точками c и d равно $U_{cd} = IR$; в то же время $U_{cd} = I_3 r + I_4 r$. Таким образом,

$$IR = (I_3 + I_4) r.$$

Отсюда находим отношение r/R:

$$\frac{r}{R} = \frac{I}{I_3 + I_4} = \frac{1}{5}.$$

В. Скороваров

◆

Прежде всего выясним, чем определяется направление шлейфа дыма. Клуб дыма, выпущенный паровозом в точке A, через время t будет снесен ветром в точку C такую, что $\vec{AC} = \vec{u}t$, где $\vec{u}$ — скорость ветра (рис. 2). Поезд же через время t окажется в точке B такой, что $\vec{AB} = \vec{v}t$, где $\vec{v}$ — скорость поезда. Очевидно, что направление шлейфа дыма идет вдоль вектора разности векторов $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$, или, что то же, вдоль вектора $\vec{d}$, равного разности векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

Найдем скорость ветра. Нарисуем в произвольном масштабе вектор $\vec{v}_1$; затем из начала O вектора $\vec{v}_1$ проведем в том же масштабе вектор $\vec{v}_2$; из концов векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ проведем прямые, параллельные соответствующим шлейфам дыма (рис. 3). Точку K пересечения этих прямых соединим с точкой O. Вектор $\vec{OK}$ и представляет в выбранном нами масштабе вектор скорости ветра, так как вектор разности $\vec{OK} - \vec{v}_1$ идет вдоль шлейфа дыма от первого паровоза, а вектор разности $\vec{OK} - \vec{v}_2$ идет вдоль шлейфа дыма от второго паровоза. Теперь нетрудно найти скорость $\vec{v}_3$ третьего паровоза. Направление шлейфа дыма, выпускаемого им, должно идти вдоль вектора разности $\vec{OK} - \vec{v}_3$. Проведем через K прямую, параллельную шлейфу дыма от третьего паровоза. Пересечение этой прямой с вектором $\vec{v}_2$ определяет $\vec{v}_3$. Измерив длину $\vec{v}_3$, зная масштаб, в котором построены все векторы, найдем $|\vec{v}_3|$:

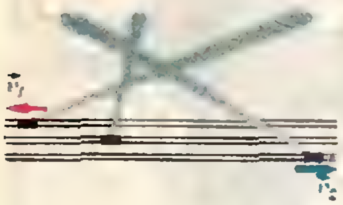


Рис. 1.

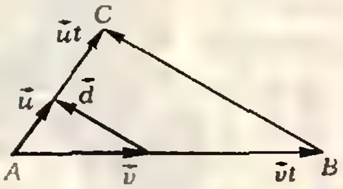


Рис. 2.

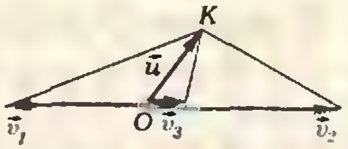
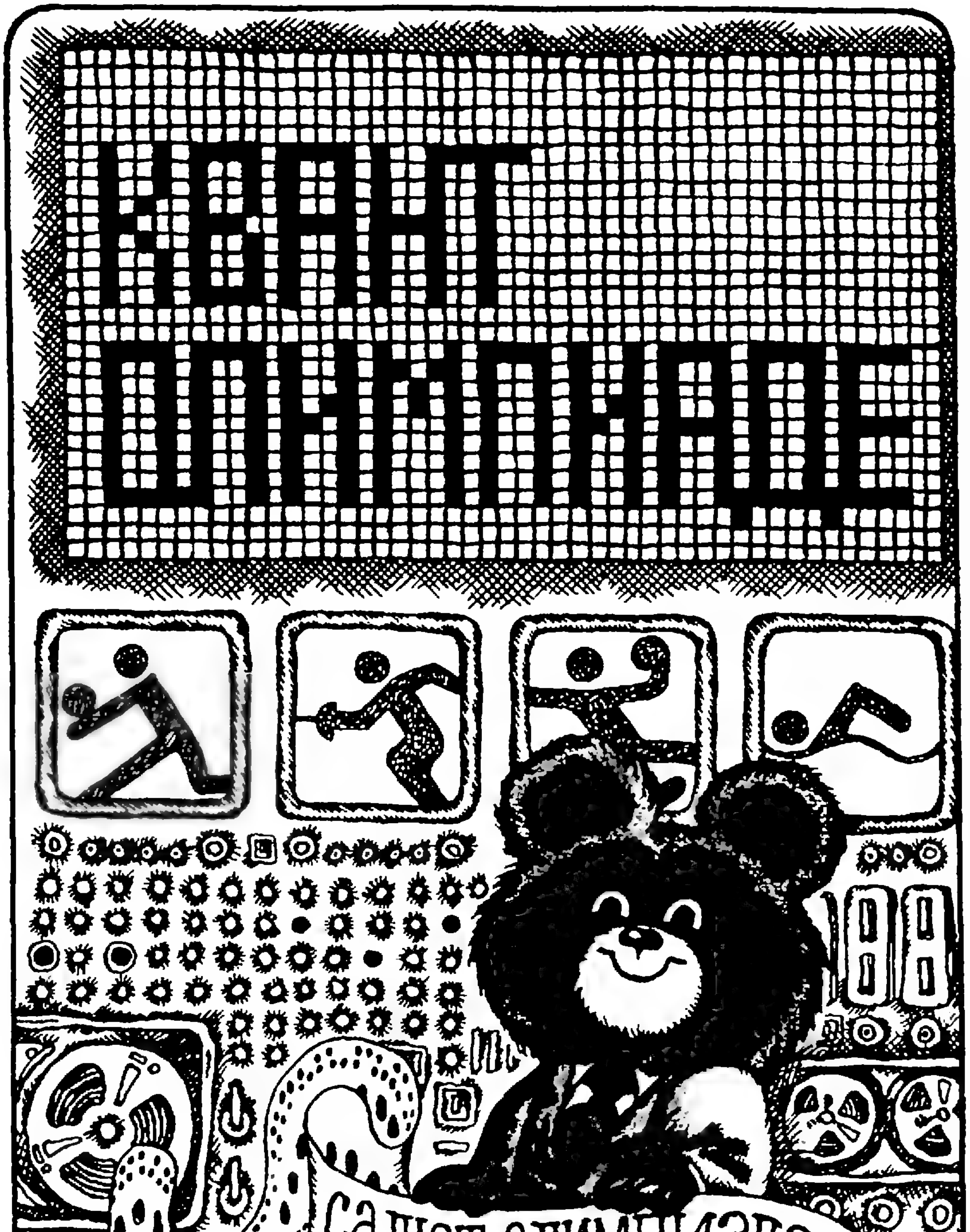


Рис. 3.

$$|\vec{v}_3| = 40 \text{ км/ч}.$$

И. Слободецкий


КВАНТ
ОЛИМПИАДЕ
салют, олимпиада!

ЭВМ на Олимпиаде

Спортивные применения ЭВМ необычайно широки — от статистического анализа итогов футбольного чемпионата до вычерчивания схем защиты и нападения, от составления расписания баскетбольного турнира до обработки результатов наблюдений за психофизиологическим состоянием спортсменов, от прогнозирования результатов спортивных игр до оформления протоколов боксерских поединков.

На XXII Олимпийских играх в Москве вычислительные машины будут полноправными членами Оргкомитета, судейских коллегий, пресс-центров.

Раздел «Искусство программирования» олимпийского номера «Кванта» предлагает рассказ о двух рядовых задачах Олимпиады, решаемых ЭВМ на переднем крае спортивных сражений — у судейских столиков в прыжковом секторе стадиона и на фехтовальной дорожке. Здесь помещены алгоритмы двух задач, связанных с обработкой оперативных документов спортивных состязаний. Эти алгоритмы были в свое время запрограммированы на Коболе и Бэйсике — языках программирования, возможно, знакомых некоторым из наших читателей, но, во всяком случае, еще не описывавшихся на страницах квантовской Заочной школы программирования.

Предлагаем по каждому из этих алгоритмов составить программу на языке Рапира, который знаком читателям «Кванта» по урокам 5—8 Заочной школы программирования («Квант», 1980, №№1—3). Ваши программы вы можете присылать по тому же адресу, по которому вы пишете в Заочную школу.

Робик и Рапира, которые вы проходили на уроках Заочной школы — это *диалоговые* языки программирования: составлять, запускать и исправлять программы на этих языках можно прямо за пультом терминала.

В примерах программ, приводившихся на уроках Заочной школы, предполагалось, что за терминалом работает автор программы или, во всяком случае, пользователь, знакомый с соответствующими языком программирования. В статьях, публикуемых в этом номере, рассказывается о программах, с которыми работают судьи и спортсмены, то есть пользователи, как правило, с программированием не знакомые.

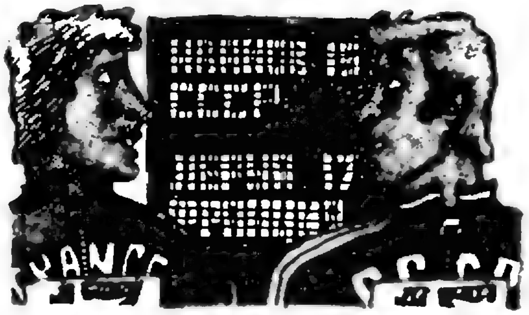
Поэтому диалог должен быть организован так, чтобы пользователю не приходилось задумываться над присваиваниями, вызовами процедур и другими особенностями программ. Если же во время работы программы понадобилось выяснить у пользователя значение некоторого имени, необходимо воспользоваться стандартной функцией ВВОД. Например, если в какой-либо процедуре встретится оператор

```
ВВОД(0)→ФАМИЛИЯ;
```

то на экране терминала появится приглашение к диалогу — символ «—», и машина будет ждать, пока пользователь наберет на клавиатуре нужный текст. Этот текст и будет считаться *результатом* функции, то есть он будет присвоен имени ФАМИЛИЯ.

Если в качестве параметра функции ВВОД указано число 0, как в приведенном выше примере, то набранная на клавиатуре информация считается *текстом*, то есть к ней добавляются апострофы справа и слева. Если, например, пользователь в ответ на приглашение набрал слово ИВАНОВ, то значением имени ФАМИЛИЯ станет текст 'ИВАНОВ', а если пользователь наберет 510, значением имени станет *текст* '510'.

В том случае, если нужно спросить у пользователя *число*, с которым будут потом выполняться какие-либо арифметические действия, парамет-

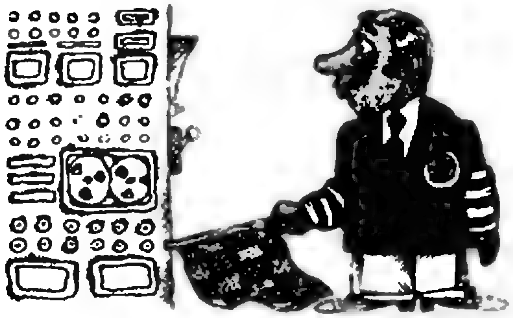


ром функции ВВОД должна быть единица, а не ноль.

Приведем пример небольшой процедуры с использованием функции ВВОД и протокол диалога пользователя с ЭВМ при выполнении этой процедуры.

Допустим, нужно запомнить фамилию, стартовый номер, название страны. Сведения о каждом участнике удобно запоминать в виде кортежа, а сведения по всем участникам образуют множество таких кортежей. Дадим этому множеству имя СПИСОК. В приведенном ниже примере текст, печатаемый машиной, выделен красным шрифтом.

```
ПРОЦ ЗАПИСЬ;
<* *> — > СПИСОК;
ПЕЧАТЬ ('УКАЖИТЕ ЧИСЛО
УЧАСТНИКОВ');
ВВОД (1) — > ЧИСЛО; 1 — > СЧЕТЧИК;
ПОКА СЧЕТЧИК = <ЧИСЛО::
   ПЕЧАТЬ ('ФАМИЛИЯ УЧАСТНИКА');
   ВВОД (0) — >ФАМИЛИЯ;
   ПЕЧАТЬ ('СТАРТОВЫЙ НОМЕР');
   ПЕЧАТЬ ('СТРАНА'); ВВОД(0) — >
СТРАНА;
   СЧЕТЧИК+1 — > СЧЕТЧИК;
 —СПИСОК +<*<ФАМИЛИЯ, НОМЕР,
   СТРАНА>*>—>СПИСОК;
ВСЕ
КНЦ;
ЗАПИСЬ;
УКАЖИТЕ ЧИСЛО УЧАСТНИКОВ
 -3
ФАМИЛИЯ УЧАСТНИКА
   ИВАНОВ
СТАРТОВЫЙ НОМЕР
   15
СТРАНА
   СССР
ФАМИЛИЯ УЧАСТНИКА
 — ЛЕРУА
СТАРТОВЫЙ НОМЕР
  17
СТРАНА
 —ФРАНЦИЯ
```



В результате будет сформировано множество СПИСОК: <*< ИВАНОВ, 15, СССР>, <ЛЕРУА, 17, ФРАНЦИЯ>*>

Обратите внимание, что мы не приводим здесь пример программы, печатающей список участников. Программирование красивых, «форматированных» распечаток — достаточно серьезная задача, которая будет рассматриваться на уроках Заочной школы программирования в «Кванте» после летних каникул. Но это не мешает вам, конечно, попытаться найти способы красивой выдачи списков, таблиц, протоколов.

Итак, попробуйте применить свои знания Рапиры и те правила ввода, которые вам сегодня были рассказаны. Читатели, приславшие лучшие спортивные программы, будут награждены олимпийскими сувенирами.

Представляем авторов, выступающих сегодня в разделе «Искусство программирования»:

о прыжках в высоту написал Ю. А. Первин, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР, судья республиканской категории по легкой атлетике;

о фехтовании пишет Илона Лапушонок, студентка III курса Московского физико-технического института, воспитанница Сибирского фехтовального клуба «Виктория»; программу для турниров своего клуба она сделала, когда училась в 10 классе 130 школы г. Новосибирска.

Ю Первин

Обработка протоколов соревнований по прыжкам в высоту

Прыжки в высоту — один из наиболее захватывающих видов легкоатлетических соревнований, где соперники демонстрируют не только свою физическую и техническую подготовку, но и разные тактические приемы. Так, участник может вступить в соревнование не обязательно с начальной высоты, пропустить высоту уже в ходе соревнований или даже, после сделанной им первой или второй неудачной попытки на данной высоте, не использовать на ней свои остальные попытки (соответственно две или одну) и прыгать на следующей высоте.

Такие отклонения от «стандартного» хода соревнований существенно усложняют распределение мест при одинаковых результатах участников.

При определении мест судьи руководствуются такими правилами:

1. Лучшим из участников является тот, кто взял наибольшую установленную в ходе соревнований высоту

2. Среди участников, показавших одинаковый результат, лучшим считается спортсмен, взявший последнюю высоту с наименьшего числа попыток

3. Если у нескольких участников окажется равное число попыток на последней высоте, то преимущество дает наименьшее число неудачных попыток по всем высотам этого соревнования

4 Если и после этого некоторые участники окажутся в равном положении, то впереди будет считаться тот, кто сделал наименьшее общее количество попыток (удачных и неудачных) по всем высотам

Теоретически возможна, конечно, ситуация, когда даже последнее правило не определяет победителя однозначно Тогда правила соревнований предусматривают так называемую *перепрыжку* Наша же программа в этом случае удовлетворяется назначением всем таким участникам одинакового (наилучшего) места

Легко заметить «циклический» характер применения правил 1—4 сначала они применяются для определения победителя (или распределения мест среди участников, показавших одинаковый с победителем результат), затем эти же правила используются для определения лучшего из оставшихся участников с результатом, меньшим, чем у победителя Поэтому при хранении в памяти ЭВМ строки протокола соревнования, соответствующей каждому отдельному участнику, рекомендуется иметь служебные пометки, используемые при обработке протокола и формируемые программой (а не судьей^1)

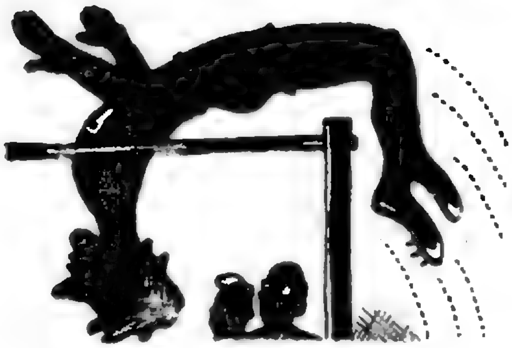
Одна из этих пометок — «*» — фиксирует тех участников, места которых уже определены Нужна эта пометка для исключения из рассмотрения уже обработанных строк протокола Другая пометка — «^{1}» — временно ставится (тоже программным путем) для всех участников с одинаковым результатом Правила 2, 3, и 4 из перечисленных выше применяются к тем строкам протокола, которые имеют пометку «^{1}» Важно подчеркнуть, что эти рассуждения о служебных пометках представляют собой не изложение судейских правил, а только рекомендацию программисту для составления программы — перечисленные пометки судья не только не проставляет, но и не видит — ими оперирует программа

Кроме описанных выше правил соревнований, для создания алгоритма обработки судейских протоколов по прыжкам в высоту важно принять соглашения

— о способе ввода данных в память ЭВМ,

— о структуре данных (форме описания протокола).

Будем считать, что судья на этом виде соревнований вводит результаты в машину, набирая их непосредственно на клавиатуре терминала-дисплея, при этом используется стандартная функция ВВОД (см с 00) Работа начинается вводом установленной высоты. Затем, следуя сообщениям машины — вызов на старт участника (его фамилия, стартовый номер, клубная принадлежность и номер попытки) и предупреждение к готовности следующего участника — судья приглашает к прыжку спортсменов одного за другим в том порядке, в котором они внесены в протокол



Список вызываемых на попытку спортсменов может оказаться неполным: по правилам часть участников может пропустить начальную высоту.

Если вызванный участник отказывается от попытки, судья вводит прочерк «—», который записывается программой на места, предусмотренные для отметок о результатах соответствующих попыток на этой высоте.

Неудачная попытка отмечается судьей, который вводит при этом символ «X». Три «X» на одной высоте означают, что участник не справился с этой высотой и закончил соревнование (в памяти машины эта информация преобразуется в служебную пометку «.»).

Если участник отказался от одной или двух оставшихся попыток, перенеся их на следующую высоту, то на следующей высоте он может получить пометку «.» после, соответственно, двух или одной неудач. Результатом спортсмена, закончившего соревнование, считается наибольшая взятая им высота. Служебная пометка «.» («закончил») позволяет ЭВМ приглашать к прыжкам только участников, продолжающих соревнование (у них нет пометки «.»). После завершения всех прыжков перед подсчетом результатов пометки «.» должны быть стерты.

Удачную попытку — покорение высоты — судья отмечает вводом символа «V».

Структуру данных можно без труда описать, посмотрев на форму протокола (см. таблицу). В таком городском соревновании могли бы принять участие герои романа И. Ильфа и Е. Петрова «Золотой теленок». Результаты спортсменов, конечно, значительно ниже олимпийских: ведь ни весьма подвижный О. Бендер, ни заботившийся о своей спортивной форме А. Корейко никогда не претендовали на олимпийские медали. Зато составленная по предполагаемому заданию программа может с равным успехом обслу-

Протокол соревнований по прыжкам в высоту на первенство г. Черноморска

стадион «Олимп», 19 июля 1980 г.

№ п/п	Фамилия участника	Стартовый номер	Спортклуб	Результаты																					Лучший результат	Место
				175			180			185			190			195			200			205				
				1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3		
1.	Птибурдуков	114	Пегас	X	X	V	X	X	V	X	V		V			X	X	X								
2	Бендер	116	Антилопа	—	—	—	X	V		V			X	V		—	—	—	X	X	V	X	X	X		
3.	Лоханкин	117	Воронья слободка	—	—	—	V			V			X	X	V	X	X	V	X	X	X					
4.	Берлага	118	Геркулес	V			V			V			X	—	—	X	V		X	X	V	X	X	X		
5.	Борисохлебский	122	Геркулес	V			V			X	X	V	X	X	V	X	X	V	X	X	X					
6.	Бомзе	123	Геркулес	X	V		X	X	V	X	X	V	X	X	X											
7.	Корейко	124	Геркулес	V			V			X	—	—	V			X	X	V	X	X	V	X	X	X		
8.	Паниковский	127	Антилопа	X	X	V	V			V			V			X	V		X	X	X					
9.	Гигиенишвили	128	Воронья слободка	V			—	—	—	—	—	—	X	X	V	X	X	V	X	V		X	X	X		

Главный судья соревнований
А. Балаганов

живать как первенство школы, так и Олимпийские игры.

Для описания данных полезно воспользоваться понятиями, введенными в языке Рапира («Квант», 1980, № 2). Несколько рекомендаций:

— Результат каждого участника на одной высоте, то есть сведения о выполнении им, вообще говоря, трех попыток, представляется в виде кортежа

<ВЫСОТА, 'ПОПЫТКИ'>

здесь ВЫСОТА — значение (в сантиметрах) высоты под планкой, а 'ПОПЫТКИ' — строка, состоящая из трех символов; значениями этих символов могут быть знаки «x», «V», «—» или пробел; если ПОПЫТКИ содержат сведения только об одной или двух попытках (например, высота взята с первой попытки и, следовательно, нет необходимости что-либо отмечать на месте остальных попыток этой высоты), то на месте остальных попыток записывается пробел, например:

<190, '×× V'>, <195, 'V␣␣'>,
<200,'␣ ␣ ␣'>

(символ «—» — изображение невидимого пробела).

— Совокупность результатов одного участника представляется кортежем, имя которого РЕЗУЛЬТАТЫ, а элементы — отдельные результаты.

— Каждая строка протокола — это сведения об одном участнике; они образуют кортеж, именуемый УЧАСТНИК:

<№, ФАМИЛИЯ, СТАРТОВЫЙ НОМЕР, СПОРТИВНЫЙ КЛУБ, РЕЗУЛЬТАТЫ, ЛУЧШИЙ РЕЗУЛЬТАТ, МЕСТО>

— Совокупность кортежей УЧАСТНИК образует множество с именем ПРОТОКОЛ, которое, собственно, и представляет собой результат работы программы — это множество надо отпечатать в виде заполненной таблицы.

— Кортеж УЧАСТНИК необходим только для формирования окончательного результата; для промежуточных же этапов работы сведения об участнике должны быть дополнены

а) односимвольной строкой СЛУЖЕБНАЯ ПОМЕТКА, значениями которой могут быть «.», «!», «^» или пробел.

б) целым значением ЧИСЛО НЕУДАЧНЫХ ПОПЫТОК,

в) целым значением ОБЩЕЕ ЧИСЛО ПОПЫТОК;

последние две величины используются в программе при применении правил 3 и 4 распределения мест.

Попробуйте составить на Рапире программу, обеспечивающую обработку протоколов соревнований по прыжкам в высоту и состоящую из трех (неравных) частей:

1) ввод постоянной части протокола — порядковые номера, фамилии и стартовые номера участников, их клубная принадлежность;

2) ввод результатов соревнований — заполнение центральной части протокола;

3) распределение участников по местам — заполнение последних граф протокола.

Для программирования второй части программы полезно будет проанализировать распечатку фрагментов имевшего место на наших соревнованиях диалога между судьей и ЭВМ (его сообщения набраны для определенности красным шрифтом):

```
—175
ПРЫГАЕТ ПТИБУРДУКОВ № 114
«ПЕГАС»
ПЕРВАЯ ПОПЫТКА
ПРИГОТОВИТЬСЯ БЕРЛАГА № 118
— x
ПРЫГАЕТ   БЕРЛАГА   № 118
«ГЕРКУЛЕС»
ПЕРВАЯ ПОПЫТКА
ПРИГОТОВИТЬСЯ
БОРИСОХЛЕБСКИЙ № 122
—V
...
ПРЫГАЕТ ГИГИЕНИШВИЛИ
№ 128
«ВОРОНЬЯ СЛОБОДКА»
ТРЕТЬЯ ПОПЫТКА
— x
УЧАСТНИК   ГИГИЕНИШВИЛИ
№ 128
СОРЕВНОВАНИЯ ЗАКОНЧИЛ
```

И. Лапушонок

Программное обеспечение фехтовальных турниров

В соревнованиях по фехтованию все участники разбиваются на первоначальные группы (пульки), в которых они ведут бои каждый с каждым по установленному порядку. В пульке может быть от пяти до десяти человек, причем желательно, чтобы во всех пульках было равное количество спортсменов. Место, которое занял участник в пульке, определяется числом побед, а при равном числе побед — по коэффициенту *k*:

$$k = \frac{\text{нанесенные уколы}}{\text{полученные уколы}}$$

Определенное количество лучших участников из каждой пульки (обычно 3 или 4) выходит в следующую ступень. В следующей ступени участники опять разбиваются на пульки (если участников больше десяти) и снова ведут бои. Когда очередная ступень будет состоять меньше, чем из 10 человек, она объявляется финальной и победители в ней объявляются победителями турнира.

Программное обеспечение соревнований по фехтованию состоит из следующих процедур:

— расчет возможных вариантов пулек (ПУЛЬКА);

— ввод фамилий участников и запись их в множество (УЧАСТНИКИ);

— распределение фамилий участников по пулькам (ГРУППЫ);

— определение порядка боев для каждой пульки и запись результатов этих боев в кортеж (СЧЕТ);

— подсчет количества побед каждого участника и в конечном счете места в пульке (БАЛЛЫ);

— выдача протокола пульки (ПРОТОКОЛ);

— запись участников следующей ступени в множество (СТУПЕНЬ);

— управляющая процедура УПРАВЛЕНИЕ с процедурой ПЕРЕБОЙ (повторный бой).

Система работает в диалоговом режиме. Она была первоначально написана на языке Бэйсик. Читателям мы предлагаем повторить эти программы на Рапире.

Контроль над ведением соревнований и включение процедур в нужной последовательности осуществляет процедура УПРАВЛЕНИЕ.

Полуформально эту программу можно было бы описать так:

```
ПРОЦ УПРАВЛЕНИЕ;
   .УЧАСТНИКИ;
   1—> ПРИЗНАК;
   ПОКА ПРИЗНАК > =0::
      .ПУЛЬКА; .ГРУППЫ;
      ДЛЯ ВСЕХ ГРУПП::
         .СЧЕТ; .БАЛЛЫ; ПРОТОКОЛ
         ВСЕ;
         ЕСЛИ ЧИСЛО УЧАСТНИКОВ <10
         ТО ПРИЗНАК—1—> ПРИЗНАК
         ИНАЧЕ .СТУПЕНЬ
         ВСЕ
      ВСЕ;
   ПРОВЕРКА НЕОБХОДИМОСТИ
   ВЫЗОВА ПРОЦЕДУРЫ ПЕРЕБОЙ
КНЦ;
```

Не формальными (с точки зрения Рапиры) являются здесь всего два места. Они выделены курсивом. Во-первых, это строка

ДЛЯ ВСЕХ ГРУПП::

означающая обязательное, повторяющееся выполнение всех трех последующих процедур СЧЕТ, БАЛЛЫ и ПРОТОКОЛ для всех пулек одной ступени; ваша задача — реализовать это неформальное предписание известными вам средствами Рапиры.

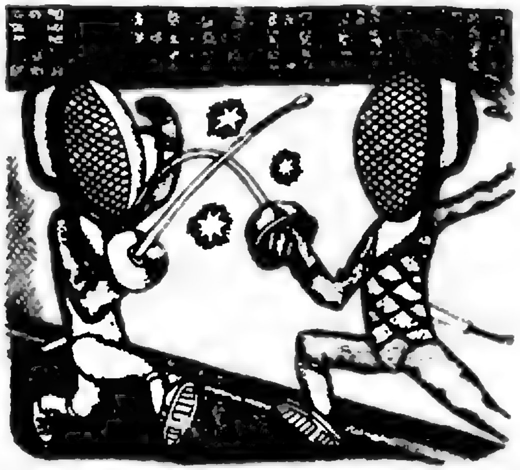
Во-вторых, строки

ПРОВЕРКА НЕОБХОДИМОСТИ
ВЫЗОВА ПРОЦЕДУРЫ ПЕРЕБОЙ

вам не трудно будет развернуть в формальное описание условного оператора ЕСЛИ, учитывающего, что процедура ПЕРЕБОЙ начинает работу в случае, если у 2—4 участников (у любой пары из них, у троих или даже у четверых) равное количество побед и равные коэффициенты.

Кроме того, в описании процедуры УПРАВЛЕНИЕ нужны, по-видимому, пояснения двух переменных. Переменная ЧИСЛО УЧАСТНИКОВ вводится судьей в начале работы программы (в процедуре УЧАСТНИКИ) и может быть изменена (уменьшена) только в ходе выполнения процедуры СТУПЕНЬ. Переменная ПРИЗНАК используется для того, чтобы зафиксировать финальную пульку.

Процедура УЧАСТНИКИ служит для начального ввода и запоминания фамилий участников. Вводятся они с терминала в порядке, установленном жеребьевкой (для программиста



важно, что порядок в списке участников к моменту ввода его в память точно известен). Процедура ГРУППЫ выбирает из записанных участников состав пульки. Например, в первую пульку будут записаны участники, чьи фамилии вводились, скажем, с номерами 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37. Перед началом пульки выдается распечатка — номера и фамилии участников. Пример:

```
        ПУЛЬКА 1
№ 1 ИВАНОВ Д.
№ 2 ВОЛКОВ И.
№ 3 КУЗНЕЦОВ М.
№ 4 ЛЕБЕДЕВ А.
№ 5 ЛЬВОВ В.
```

Наиболее интересными являются процедуры ПУЛЬКА, СЧЕТ и БАЛЛЫ, так как в них отражена специфика фехтовальных турниров. ПУЛЬКА выводит возможные варианты разбивки участников по пулькам. Пример машинной выдачи этой процедуры:

```
СКОЛЬКО ЧЕЛОВЕК ПРИНИМАЕТ УЧА-
    СТИЕ В ТУРНИРЕ?
— 43
6 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ 6 ГРУПП
    И 7 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ 1
    ГРУПП.
7 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ 5 ГРУПП
    И 8 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ
    1 ГРУПП.
5 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ 5 ГРУПП
    И 6 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ
    3 ГРУПП.
```

Здесь судья ввел только одно число — 43.

СЧЕТ выводит таблицу порядка боев для каждой пульки. Кроме того, эта процедура непосредственно предписывает ведение боев, вызывает участников на дорожку, предупреждает о следующем бое, принимает результаты, записывая их в кортеж. Этот же кортеж используется и в процедуре БАЛЛЫ, которая подсчитывает число побед, коэффициенты, места.

Ниже показана распечатка таблицы боев и хода турнира с записью результатов. Результат — это пара чисел. Первое из них означает число уколов, нанесенных первым из вызванных участников второму; второй элемент пары — число уколов, полученных первым участником; например, результат 3,5 в бое участников 1—2 означает, что участник № 1 нанес 3 укола, а получил 5. Сообщения судьи в приводимом диалоге набраны красным шрифтом.

```
СКОЛЬКО ЧЕЛОВЕК УЧАСТВУЕТ
    В ЭТОЙ ПУЛЬКЕ?
— 5
ПОРЯДОК БОЕВ ДЛЯ 5 УЧАСТНИКОВ
1—2, 3—4, 5—1, 2—3, 5—4, 1—3, 2—5,
    4—1, 3—5, 4—2,*)
НА ДОРОЖКУ 1—2 ПРИГОТОВИТЬСЯ
    3—4
РЕЗУЛЬТАТ?
— 3.5
НА ДОРОЖКУ 3—4 ПРИГОТОВИТЬСЯ
    5—1
РЕЗУЛЬТАТ?
— 5.0
...**)
ПОСЛЕДНЯЯ ПАРА 4—2
РЕЗУЛЬТАТ?
— 5.3
```

Протокол, оформленный по итогам этой пульки, показан в таблице.

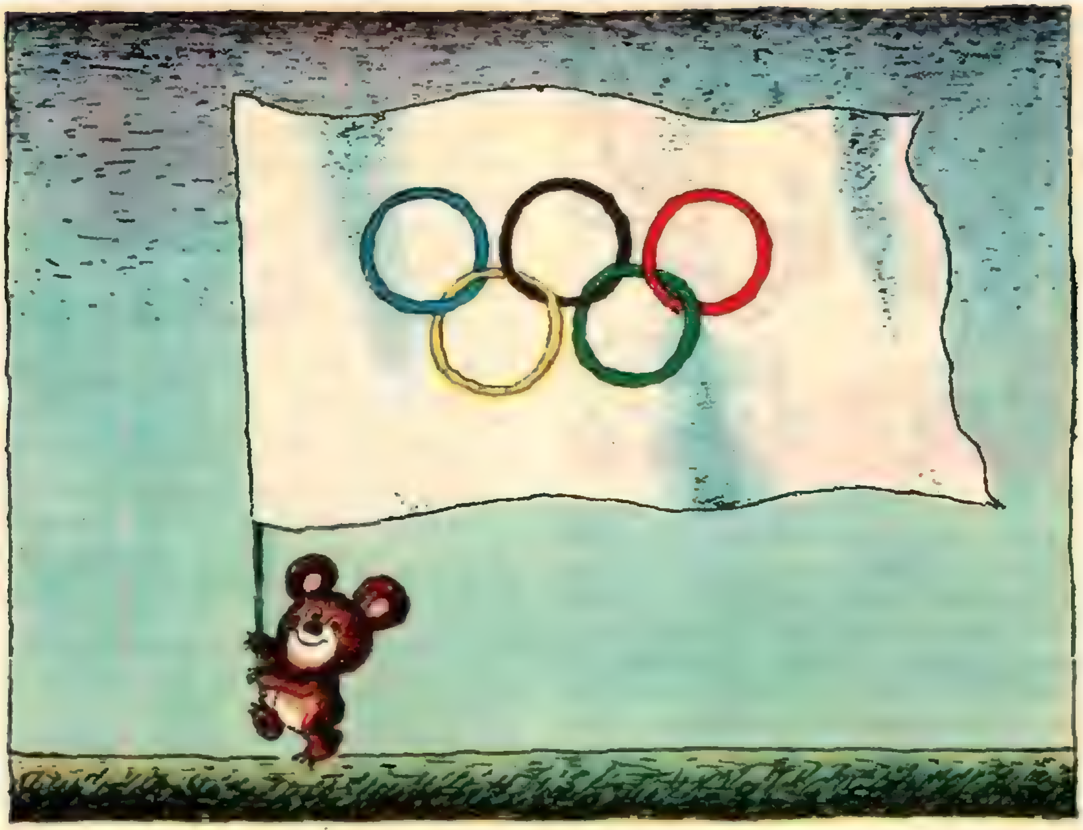
Участники	№	1	2	3	4	5	П	НУ	ПУ	М
Иванов Д.	1	*	3	5	2	0	1	10	19	5
Волков И.	2	5	*	5	3	1	2	14	21	3
Кузнецов М	3	4	3	*	5	1	1	13	15	4
Лебедев А.	4	5	5	0	*	3	2	13	15	2
Львов В.	5	5	5	5	5	*	4	20	5	1

П — число побед
НУ — число нанесенных уколов
ПУ — число полученных уколов
М — место

---

*) На самом деле ЭВМ печатает эти цифры в колонку без запятых.

**) Здесь аналогично ЭВМ печатает результаты боев еще семи пар.



А. Сивин

Олимпийские кольца

1980-й год — год проведения XXII Олимпийских игр в Москве. Неудивительно, что не только москвичи, но и жители всех городов и сел нашей страны уже привыкли видеть на страницах газет и журналов, на плакатах и сувенирах эмблему олимпиады — пять сцепленных колец, символизирующих пять обитаемых континентов земного шара.

Давайте повнимательнее приглядимся к этой лаконичной эмблеме (рис. 1): три кольца сверху, два снизу — вот, вроде бы, и все. Но взгляните на рисунок 2. Здесь вновь пять сцепленных колец — три сверху, два снизу, но что-то не то. Что именно? Эти кольца *сцеплены более сложно* — рисунок, который они образуют, напоминает часть кольчуги древнего воина, тогда как кольца олимпийской эмблемы сцеплены в обычную цепочку.

Конечно же, пять колец можно сцепить и не только так, как на рисунках 1 и 2.

На рисунках 3 и 4 изображены *зацепления*, в которых каждое кольцо сцеплено с одинаковым количест-

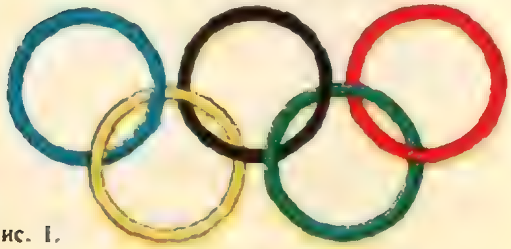


Рис. 1.

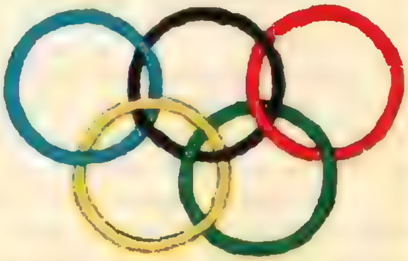


Рис 2.

вом колец — с двумя на рисунке 3 и с четырьмя на рисунке 4. Первое зацепление легко получить из колец олимпийской эмблемы, сцепив между собой концевые кольца цепочки, а второе можно получить, сцепив сначала два кольца, затем сцепив с каждым из них третье, потом с каждым из трех четвертое, и наконец, с каждым из четырех — пятое кольцо.

А можно ли так сцепить пять колец, чтобы каждое было сцеплено ровно с тремя другими? Попробуйте, однако должен вас предупредить, что все ваши попытки окажутся безуспешными. Почему? А вот почему.

Предположим, что такое сцепление удалось осуществить. Привяжем к какому-нибудь кольцу ярлычок с номером 1; это кольцо у нас сцеплено еще с тремя кольцами и не сцеплено ровно с одним. Давайте к этому кольцу привяжем ярлычок с номером 2. В свою очередь кольцо с номером 2 должно быть сцеплено со всеми остальными кольцами, кроме кольца с номером 1. Возьмем какое-нибудь из еще не пронумерованных колец и прицепим к нему ярлычок с номером 3 — оно, как мы знаем, сцеплено с кольцами № 1 и № 2, поэтому должно быть сцеплено с одним из еще не пронумерованных колец (которому мы дадим номер 4) и не сцеплено с последним кольцом (ему мы дадим номер 5). Посмотрим на кольца № 4 и № 5. Если они сцеплены, то тогда кольцо № 4 сцеплено со всеми четырьмя оставшимися кольцами, а мы предположили, что каждое кольцо сцеплено ровно с тремя другими. Значит, кольца № 4 и № 5 не сцеплены, но в таком случае кольцо № 5 будет не сцеплено с двумя кольцами: № 3 и № 4, а сцеплено только с двумя, что опять противоречит предположению. Таким образом, наше предположение о возможности сцепления пяти колец так, чтобы каждое было сцеплено ровно с тремя, оказалось неверным.

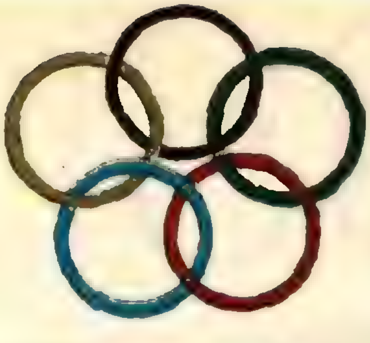


Рис. 3.

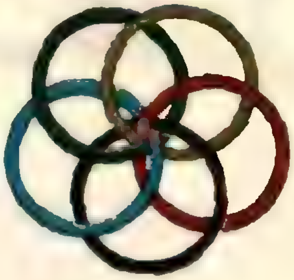


Рис. 4.

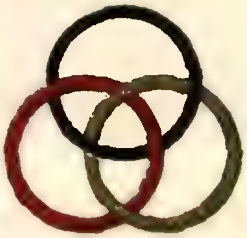


Рис. 5.

А на рисунке 5 изображено совершенно удивительное зацепление трех колец. Никакие два из них не сцеплены между собой, но попробуйте их расцепить — у вас ничего не получится. Однако если разрезать любое из этих колец, то все кольца окажутся расцепленными. Эти кольца называются *кольцами Борромео.* (Подобным же образом зацеплены и три дырчатые плоскости на первой странице обложки этого номера журнала. Присмотритесь — никакие две из них не зацеплены, а разнять их невозможно.)

Ну, а можно ли подобный «фокус» устроить с пятью кольцами? Взглянув на рисунок 6, вы увидите пример такого зацепления. Если разрезать среднее (зеленое) кольцо, то все кольца можно будет разнять, а если разрезать какое-либо другое кольцо, то можно будет снять его и еще одно кольцо, а остальные три образуют кольца Борромео. Конечно же, у вас уже возник вопрос: «А можно ли так сцепить пять колец, чтобы никакие два не были сцеплены и при разрезании любого кольца все кольца можно было бы разнять?» Оказывается, и это возможно. Посмотрите на

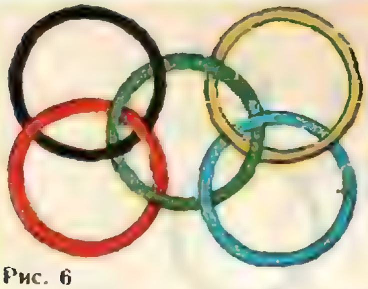


Рис. 6

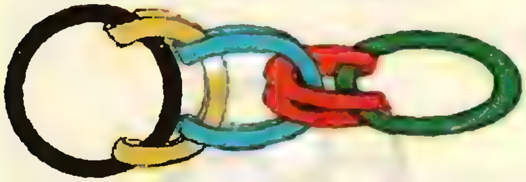


Рис. 7.

рисунок 7. Из него хорошо виден процесс такого сцепления; кроме того, на нем прекрасно видно, что никакие два кольца не сцеплены между собой и что разорвав любое кольцо, можно разъединить все кольца. Более того, такой процесс можно совершить с любым количеством колец, большим двух.

К сожалению, мне не удалось расположить эту конструкцию на столе в виде розетки (как сцепления колец на предыдущих рисунках). Попробуйте сделать это сами и, если получится, присылайте в редакцию ваши рисунки — лучшие мы опубликуем.

И еще несколько задач:

1. Имеется 6 колец. Докажите, что их можно сцепить так, чтобы каждое было сцеплено

а) с двумя другими кольцами;
б) с тремя другими кольцами;
в) с четырьмя другими кольцами;
г) с пятью другими кольцами;

2. Имеется 7 колец. Докажите, что их можно сцепить так, чтобы каждое было сцеплено

а) с двумя другими кольцами;
б) с четырьмя другими кольцами;
в) с шестью другими кольцами,

и невозможно сцепить так, что каждое было сцеплено

г) с тремя другими кольцами;
д) с пятью другими кольцами.

3. Докажите, что n колец можно сцепить так, чтобы каждое было сцеплено ровно с k другими кольцами, в том и только в том случае, если хотя бы одно из чисел n и k является четным.

Дело каждого из нас

По традиции, ежегодные итоговые сессии Малой академии наук школьников Крыма «Искатель» посвящаются одной теме. Состоявшаяся прошлым летом XVII сессия проходила под девизом «Охрана окружающей среды — дело каждого из нас».

На сессии были подведены итоги длившейся почти год необычной экспедиции членов «Искателя» по родному Крыму. Тысячи школьников знакомились с тем, как охраняется чистота горных рек и озер, как укрепляются берега и благоустраиваются замечательные черноморские пляжи, как сохраняются птичьи базары, как люди берегут леса и пополняют их животный мир. Участники экспедиции узнали о том, как регулируется отлов рыбы в Черном море, как ведется исследование жизни дельфинов и многое-многое другое.

Проблему охраны окружающей среды с равной заинтересованностью изучали юные биологи и астрономы, химики и кибернетики, археологи и математики. Более двухсот сообщений, так называемых творческих взносов, подготовили члены всех девяти секций «Искателя». Вот некоторые из них: «Биологическая защита земли — тонкий озоновый слой», «Опасность биологического загрязнения других планет», «Исследование астроклимата в Ялте» — доклады, подготовленные юными астрономами; «ЭВМ на службе у ихтиологов», «Экологические границы космических экспериментов» — работы юных кибернетиков; «Роль земных растений в очистке воздуха», «Исследование фитонцидных свойств растений», «Лекарственные растения» — примеры творческих взносов юных биологов; «Физико-химические проблемы утилизации мусора», «Солнечное будущее энергетики», «Водородная энергетика» взносы членов секции физики.

В работе сессии участвовала большая группа ученых Крыма, Киева и Москвы. Представительная комиссия в составе четырех докторов и десяти кандидатов наук отвечала на многочисленные вопросы школьников на пресс-конференции.

Члены «Искателя» обратились ко всем школьникам с призывом:

изучайте природу родного края, особенности его растительности и животного мира;

будьте пропагандистами охраны природы;

учитесь основам ухода за растениями и животными, воспитывайте в себе любовь к природе;

будьте активными помощниками взрослых в деле охраны окружающей среды;

личным трудом содействуйте увеличению числа зеленых насаждений, проявляйте заботу о птицах;

будьте нетерпимыми к проявлениям безответственного отношения к природе.

В. Касаткин

В. Приходько,
В. Пыж,
О. Уваров

Поупражняйся и проверь себя

Попробуйте решить задачи, предлагавшиеся в 1978—1979 гг. на письменных вступительных экзаменах на физическом, физико-техническом и радиофизическом факультетах Харьковского государственного университета им. А. М. Горького — одного из старейших вузов нашей страны, который в этом году отмечает свой 175-летний юбилей.

1. Найти наибольшее в примере а) и наименьшее в примере б) значения функции $\varphi_q(x)$ в зависимости от параметра q:

а) $\varphi_q(x)=\frac{q^2}{x}-\frac{1}{x-2}$, $x\in[3;\ 4]$, $q\in\ ]1;\ +\infty[$;

б) $\varphi_q(x)=\frac{1}{x^4-4qx^2+5q^2}$, $x\in[-1;\ 2]$, $q\in\mathbf{R}$.

2. При каком значении параметра a касательные к параболам $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке их пересечения образуют угол φ:

а) $y_1(x)=x^2+3x$, $y_2(x)=x^2+x+a$, $\varphi=\pi/3$, $a>-1$;

б) $y_1(x)=x^2+3x-4$, $y_2(x)=x^2-x+a$, $\varphi=\pi/4$, $a>-2$.

3. Для всех допустимых значений параметра a найти значения x, удовлетворяющие уравнениям:

а) $\int\limits_0^{2^x}(t-\log_2 a)\,dt=2\log_2\frac{2}{a}$;

б) $4\cdot\int\limits_0^{\log_{2-a}x}(t^3-2at)\,dt=5a^2$.

4. Найти $L(a)$, выполнив предельный переход при всех допустимых значениях параметра a:

а) $L(a)=\sqrt{\lim\limits_{x\to a}\frac{3(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(x^2-4ax+3a^2)}{2x(x^3-a^3)}}$;

б) $L(a)=\log_{2a}\left[\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax(a^2-a+x)}{\sqrt{1-ax}-\sqrt{1+ax}}\right]$.

5. Найти наибольшее значение минимума функции $f(x)$:

а) $f(x)=a^{2x}-2\cdot a^{x+2}+4\cdot a^2+7$;

б) $f(x)=\log_a^2 x+\log_a x^{4a}-6a+2$.

6. а) Найти сумму S всех попарных скалярных произведений различных векторов, начала которых находятся в одной из вершин октаэдра, а концы — в остальных его вершинах, если длина ребра октаэдра равна l.

б) Найти сумму S всех попарных скалярных произведений различных векторов, начала которых находятся в одной из вершин куба, а концы — в остальных его вершинах, если длина ребра куба равна l.

7. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. $P\in[C_1D_1]$, $|C_1P|=|PD_1|$, Q — центр грани AA_1B_1B. Найти:

1° расстояние между скрещивающимися прямыми (PQ) и (AC);

2° расстояние между скрещивающимися прямыми (PQ) и (AC_1).

б) Расстояние между двумя скрещивающимися под углом α прямыми i_1 и i_2 равно h. Найти расстояние между точками $A\in i_1$ и $B\in i_2$, равноотстоящими от оснований $C\in i_1$ и $D\in i_2$ общего перпендикуляра (CD) к этим прямым, если $|AC|=|BD|=a$.

8. Найти p и q из условий:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{px^2+1}{qx+2}+x-2\right)=-1$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x+1}+px+q\right)=1$.

9. Исследовать функцию $y(x)$ и построить ее график:

а) $y=\cos(3\arcsin x)$;

б) $y=\sin(2\operatorname{arctg}x)$.

10. Решить неравенство для всех допустимых значений параметра a:

а) $\sqrt{1-x^2} \geqslant 2x+a$;

б) $\sqrt{a^2-x^2} > 4-2x$.

11. Доказать, что при $x \in]0;\ 4]$ справедливы неравенства:

а) $6x-4\ln x \geqslant x^2$;

б) $8x-6\ln x \geqslant x^2$.

12. Решить уравнения:

а) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\sin^2 x\right)+\operatorname{tg}(\pi \sin x)=0$;

б) $\sin 5x+\sin x=$
$=2\operatorname{ctg} 2x \cdot \sin 11x \cdot \sin 10x$.

13. а) Две вершины треугольника ABC находятся в точках A $(-1;\ -1)$ и B $(4;\ 5)$, а третья вершина лежит на прямой $y=5(x-3)$. Площадь треугольника равна 9,5. Найти координаты вершины C.

б) Через три точки A $(0;\ 4)$, B $(1;\ 9)$, C $(3;\ 7)$ проведена парабола $y=ax^2+bx+c$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A так, что площадь фигуры, ограниченной этой прямой и параболой, равна $8/3$.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Площадь прямоугольного поля равна S кв. м. Если его длину увеличить на b метров, а ширину уменьшить на c метров, то площадь не изменится. Определить его длину и ширину, если известно, что $S=\frac{k^2}{b^3c^3}-\frac{k}{bc}$, $k>b^2c^2$.

2. Через диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость AKD_1 под углом α к плоскости основания $ABCD$, пересекающая его по прямой AK, $K \in CD$, составляющей угол $\beta<45°$ с ребром AD длиной a. Определить расстояние от вершины D до плоскости сечения.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} xy=20 \\ x^{\lg y}=2. \end{cases}$$

4. Доказать тождество

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}-1=\frac{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

5. В какой точке кривой $y=ax^2+bx+c$ нужно провести касательную к ней для того, чтобы касательная проходила через начало координат?

Вариант 2

1. Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в пункт $Б$. Первый остановился через 42 минуты, не доехав 1 км, а второй через 52 минуты, не доехав 2 км до $Б$. Если бы первый велосипедист проехал столько же километров, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то первому потребовалось бы на 17 минут меньше, чем второму. Сколько километров между пунктами A и $Б$?

2. Доказать, что если длины сторон треугольника ABC удовлетворяют соотношению $a^2+b^2=5c^2$, то две его медианы, проведенные из вершин A и B, взаимно перпендикулярны.

3. Решить уравнение

$$\log_x\sqrt{5}+\log_x 5x=2\frac{1}{4}+\log_x^2\sqrt{5}.$$

4. Решить уравнение

$$\sin(45°+x)-\sin(45°-x)=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2\sqrt{2}}.$$

5. К кривой $y=1-\frac{x^2}{a^2}$ проведены касательные в точках ее пересечения с осью абсцисс. Определить координаты точки пересечения касательных.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Найти начальную и конечную скорости камня, брошенного горизонтально с высоты

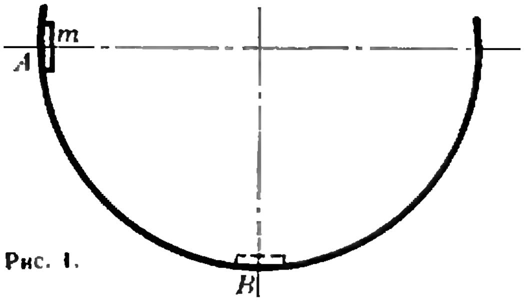


Рис. 1.

$H = 5$ м, если по горизонтали он пролетел расстояние $s = 10$ м.

2. Плоское тело массой $m = 1$ кг скользит по круговому желобу, расположенному в вертикальной плоскости (рис. 1). С какой силой давит тело на желоб в наинизшей точке B, если оно отпущено из точки A, находящейся на горизонтальной оси желоба, без начальной скорости?

3. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $|\vec{v}_0| = 49$ м/с. На какой высоте его кинетическая энергия будет равна потенциальной?

4. Сколько молекул воздуха выходит из комнаты объемом V_0 при повышении температуры от T_1 до T_2? Атмосферное давление p_0.

5. На рисунке 2 дан график изменения состояния идеального газа в координатах V, T. Представьте этот процесс на графиках в координатах p, V и p, T.

6. Конденсатор емкостью $C_1 = 20$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $U_1 = 100$ В, соединили параллельно с заряженным до разности потенциалов $U_2 = 40$ В конденсатором, емкость которого неизвестна. Определить емкость C_2 второго конденсатора, если разность потенциалов после соединения оказалась равной $U = 80$ В.

7. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода в чайнике закипает через $t_1 = 1500$ с, при включении другой — через $t_2 = 3000$ с. Через какое время закипит вода в чайнике, если включить обе обмотки: а) последовательно; б) параллельно?

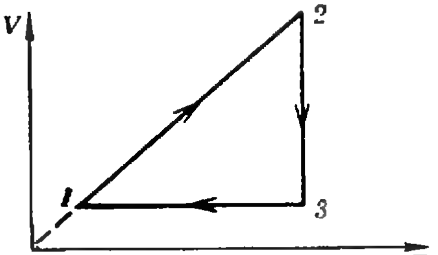


Рис. 2.

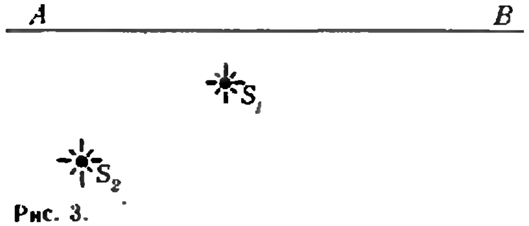


Рис. 3.

8. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 1000$ В, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное к направлению его движения. Индукция поля $|\vec{B}| = 1{,}19 \times 10^{-1}$ Тл. Найти радиус кривизны траектории электрона и период обращения его по окружности.

9. На рисунке 3 даны положения оптической оси AB линзы, источника света S_1 и его изображения S_2. Найти построением положение центра линзы и ее фокусов.

10. Линза дает действительное изображение предмета с увеличением $\Gamma = 2$. Определить фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением $f = 0{,}24$ м.

Р. Лагидзе, Н. Паньшин,
В. Шишов, В. Шубко

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

В этом году Московскому ордена Ленина авиационному институту им. Серго Орджоникидзе (МАИ) исполняется 50 лет. За сравнительно небольшой срок институт превратился в один из крупнейших машиностроительных вузов страны. Выпускники института работают на переднем крае авиационной промышленности, в новейших областях науки и техники. Достаточно сказать, что в МАИ учились летчики-космонавты СССР В. Н. Волков, А. С. Иванченков, В. Н. Кубасов, В. В. Лебедев, В. И. Севастьянов.

Институт имеет девять факультетов: самолетостроения и вертолетостроения, летательных аппаратов, двигателей летательных аппаратов, систем автоматического управления летательными аппаратами, радиоэлектроники летательных аппаратов, экономики и организации производства летательных аппаратов, установок летательных аппаратов, прикладной математики, общеинженерной подготовки.

С первых курсов студенты института широко привлекаются к научно-исследовательской работе на кафедрах и в студенческих конструкторских бюро. Так, студенты спроектировали и построили легкий спортивный самолет «Квант», который в 1979 году установил два мировых рекорда, участвовали в разработке аэробуса ИЛ-86. 26 октября 1978 года на космическую орбиту был выведен первый студенческий искусственный спутник Земли, разработанный студентами МАИ.

Большие возможности предоставлены любителям спорта: в спортивном клубе МАИ насчитывается более 30 секций.

Во Дворце культуры института студенты всегда могут найти занятия по душе: играть в студенческом театре миниатюр или агиттеатре, вокально-инструментальном ансамбле или театральном коллективе.

Ниже приводятся материалы вступительных экзаменов в МАИ.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(экзамен по алгебре и началам анализа на общетехнических факультетах)

1. Дайте определение показательной функции. Сформулируйте и докажите свойства функции $y = a^x$, $0 < a < 1$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{6x - x^2 - 5} = 2x - 6.$$

3. Сформулируйте правило для отыскания наименьшего и наибольшего значений функции, дифференцируемой на промежутке. Вычислите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2 - 3x^2 - x^3$ на отрезке $[-3; 1]$. Постройте на этом отрезке график функции.

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_4 \frac{x+1}{x+2}} < \frac{1}{\log_4 (x+3)}.$$

5. Найдите множество всех чисел $a \in \mathbf{R}$, для каждого из которых прямая, проходящая через точку $M\ (1; 2)$, пересекает график функции $y = \frac{a}{x}$ в двух точках, сумма ординат которых равна a.

Вариант 2

(экзамен на факультете прикладной математики)

1. Исследуйте на экстремумы и монотонность функцию $y = \frac{2x}{x^2 + 9}$ и постройте ее график.

2. Найдите все решения уравнения

$$(4\cos x + 1)^2 - 2|4\cos x + 1| = 3,$$

принадлежащие отрезку $[0; 7]$.

3. Решите неравенство

$$\log_{(3x+5)}(9x^2 + 8x + 8) > 2.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S величина угла между смежными боковыми гранями равна α и боковые ребра имеют длину, равную 1. Найдите: 1) скалярное произведение $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB}$; 2) длину вектора $\overrightarrow{AK}$, если точка K — середина ребра BS.

5. Прямая касается параболы $y = -x^2 + 4x + 1$ и параболы $y = 3x^2 + 4x + 7/3$. Напишите уравнение этой прямой. При каких целых значениях k и b прямая $y = kx + b$ не имеет общих точек ни с одной из парабол?

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Законы отражения света. Построение изображений в сферических зеркалах. Фокус зеркала.

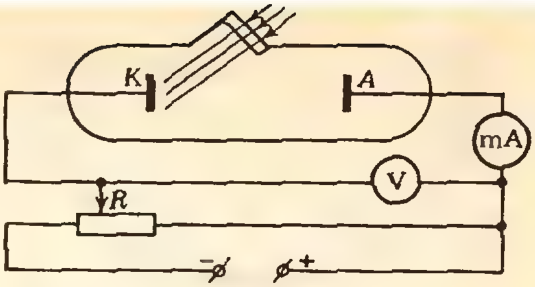


Рис. 1.

2. Для подготовки летчиков-космонавтов к перегрузкам применяют специальные центрифуги. При какой частоте вращения центрифуги радиусом $R = 5$ м спинка сидения давит на летчика с такой же силой, которая возникает при ускорении ракеты $|\vec{a}| = 3g$?

3. Рамка площадью $S = 100$ см² находится в поперечном магнитном поле с индукцией $|\vec{B}_0| = 0{,}1$ Тл. Какова зависимость от времени индукционного тока, возникающего в рамке, если магнитное поле начинает изменяться по закону $|\vec{B}| = |\vec{B}_0| \frac{mt}{n + t^2}$, где $m = 1$ с, $n = 3$ с²? Сопротивление рамки $R = 10^{-3}$ Ом. Чему равно максимальное значение тока?

4. Сухой атмосферный воздух состоит из кислорода, азота и аргона (доля остальных газов мала). Определить массу и число молекул этих газов в объеме $V = 1$ м³ атмосферного воздуха при нормальных условиях. Парциальные давления и молярные массы газов соответственно равны $p_{O_2} = 2{,}1 \cdot 10^4$ Па, $p_{N_2} = 7{,}8 \cdot 10^4$ Па, $p_{Ar} = 10^3$ Па, $\mu_{O_2} = 32 \times \times 10^{-3}$ кг/моль, $\mu_{N_2} = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\mu_{Ar} = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

5. На рисунке 1 изображена схема опыта, в котором вырываемые с поверхности катода K фотоэлектроны оказываются в задерживающем электрическом поле. Величина поля может меняться передвижением движка реостата R. Подсчитать разность потенциалов между катодом K и анодом A, при которой

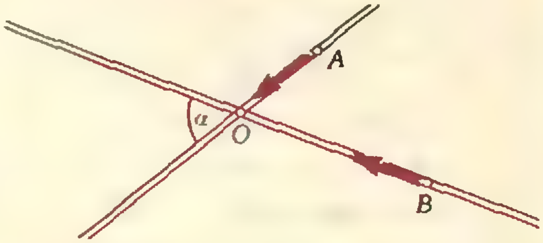


Рис. 2.

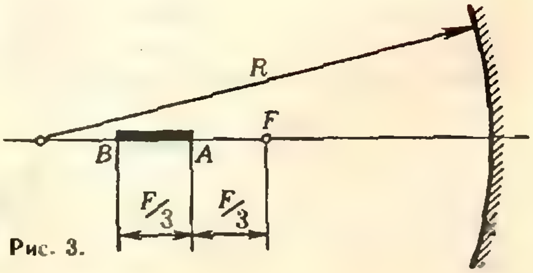


Рис. 3.

фототок в цепи прекратится, если катод облучается светом с длиной волны $\lambda = 8{,}2 \cdot 10^{-8}$ м, а работа выхода электронов из металла катода $A_{\text{вых}} = 5{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Вариант 2

1. Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести.

2. Автомобили A и B движутся равномерно с одинаковыми скоростями по прямым, пересекающимся в точке O дорогам (рис. 2). Определить минимальное расстояние между автомобилями, если в начальный момент времени $|AO| = 1$ км, $|BO| = 2$ км, угол между дорогами $\alpha = 60°$. Скорость автомобилей $|\vec{v}| = 60$ км/ч.

3. Вагон освещается пятью последовательно соединенными лампами, на каждой из которых написано: 110 В, 25 Вт. Одна из ламп перегорела и ее заменили новой, на которой написано: 110 В, 40 Вт. Будет ли она гореть ярче прежней?

4. В кабине космического корабля «Восток-2» были созданы атмосферные условия, близкие к нормальным. Температура в кабине во время полета колебалась в пределах 10° С ÷ 22° С. На сколько процентов при этом изменялось давление?

5. На главной оптической оси вогнутого сферического зеркала находится отрезок AB, размеры которого и расположение указаны на рисунке 3. Найти положение изображения этого отрезка в зеркале, если фокус зеркала F.

В. Котельников,
Р. Молодожникова

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение, найти предел

$$\lim_{x \to 1} \left[\left(\frac{4}{x^2 - x^{-1}} - \frac{1 - 3x + x^2}{1 - x^3} \right)^{-1} + 3\,\frac{x^4 - 1}{x^3 - x^{-1}} \right].$$

2. Найти область определения функции

$$f(x) = \log_2 \left[-\log_{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{6}{\sqrt[4]{x}} \right) - 2 \right].$$

3. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции $f(x) = x^3 + 3x - 9$ на отрезке $[-2; 3]$; разность между первым и вторым членами прогрессии равна $f'(0)$. Найти знаменатель прогрессии.

4. Найти все корни уравнения

$$2\cos 4x + 5\cos 2x - 1 = 2\sin^2 x,$$

лежащие на отрезке $\left[-\pi; \frac{7}{6}\pi \right]$.

5. Длина меньшей стороны параллелограмма равна a, острый угол параллелограмма равен α, угол между меньшей диагональю и большей стороной равен β. Найти объем тела, полученного вращением параллелограмма вокруг его большей стороны.

Вариант 2

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x) = \left(\frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt{16x} + 12\sqrt[4]{x} + 9} + \frac{\sqrt[4]{x} - 3}{2\sqrt[4]{x} + 3} \right) \left(2 \cdot 3^{\log_{81} x} + 3 \right).$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} - \frac{3y}{x}} = 16, \\ \sqrt{x} - \sqrt{2y} = \sqrt{12} - \sqrt{8}. \end{cases}$$

3. При каком значении длины высоты прямоугольная трапеция с острым углом 45° и периметром 4 имеет наибольшую площадь?

4. Найти все корни уравнения

$$\sin x \operatorname{tg} 2x + \sqrt{3}\,(\sin x - \sqrt{3} \operatorname{tg} 2x) = 3\sqrt{3},$$

удовлетворяющие неравенству $2 + \log_{\frac{1}{2}} x < 0$.

5. Определите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду, если длина бокового ребра пирамиды равна l и боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол α.

Физика

На разных факультетах экзамен по физике проводился по-разному: на одних — письменно, на других — устно.

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы работы, мощности и энергии. Кинетическая энергия. Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике.

2. Написать уравнение первого закона термодинамики для изобарного и изотермического процессов. Как определить работу, совершенную газом при весьма малом изменении объема?

3. При электролизе раствора серной кислоты за время $t = 50$ мин выделилась $m = 3 \cdot 10^{-4}$ кг водорода. Определить количество теплоты, выделившееся при этом в электролите, если его сопротивление $R = 0{,}4$ Ом, а электрохимический эквивалент водорода $k = 10^{-8}$ кг/Кл.

4. Столб вбит в дно водоема так, что его верхняя часть возвышается над поверхностью воды на $h = 1$ м. Определить длину тени столба на дне водоема, если высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30°$, глубина водоема $H = 2$ м, а относительный показатель преломления воды $n = 4/3$.

5. Два одинаково заряженных шарика, подвешенных на тонких невесомых нитях равной длины, разошлись на некоторый угол. Определить плотность материала шариков, если при погружении их в керосин угол между

нитями не изменился? Плотность керосина $\rho_к = 800$ кг/м³, его диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2$.

Вариант 2

1. Идеальный газ. Законы Бойля—Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Уравнение состояния идеального газа.

2. Совпадает ли траектория движения заряженной частицы в электростатическом поле с силовой линией этого поля?

3. В однородном магнитном поле, индукция которого $|\vec{B}| = 0{,}1$ Тл, расположен горизонтальный проводник длиной $l = 0{,}2$ м и массой $m = 2 \cdot 10^{-4}$ кг. Линии индукции магнитного поля горизонтальны и перпендикулярны к проводнику. Какой ток должен идти через проводник, чтобы он висел в магнитном поле?

4. ЭДС батареи $\mathscr{E} = 2$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Определить силу тока, протекающего через источник, если внешняя нагрузка потребляет мощность $P = 0{,}75$ Вт?

5. Лестница, масса которой $m = 20$ кг, прислонена к гладкой вертикальной стене под углом $\alpha = 30°$. Центр тяжести лестницы находится на 1/3 ее длины от основания. Какую минимальную силу необходимо приложить к середине лестницы, чтобы оторвать ее верхний конец от стены? Нижний конец лестницы при этом не скользит.

Задачи устного экзамена

1. Два тела одинаковой массой $m = 1$ кг соединены невесомой пружиной, имеющей коэффициент упругости $k = 200$ Н/м. Тела находятся на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. К одному из тел приложена горизонтальная сила $\vec{F}$ ($|\vec{F}| = 20$ Н). Определить удлинение пружины при движении тел с постоянным одинаковым ускорением.

2. Закрытый с обоих концов цилиндр наполнен газом при температуре $t = 30°$ С. Цилиндр разделен подвижным теплонепроницаемым поршнем на две равные части длиной $l = 0{,}5$ м. На сколько градусов необходимо нагреть газ в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на $x = 0{,}2$ м?

3. В электрическом поле плоского воздушного конденсатора, пластины которого расположены горизонтально, находится во взвешенном состоянии капелька масла, несущая заряд, равный заряду электрона. Определить радиус капельки, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 5 \times 10^3$ В, расстояние между пластинами $d = 5 \cdot 10^{-4}$ м, плотность масла $\rho = 900$ кг/м³. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

4. Динамомашина питает током $n = 100$ ламп, соединенных параллельно, имеющих сопротивление $R = 1200$ Ом каждая и рассчитанных на напряжение $U = 220$ В. Сопротивление подводящих проводов $R_{пр} = 0{,}4$ Ом. Внутреннее сопротивление динамомашины $r = 0{,}8$ Ом. Найти электродвижущую силу машины и напряжение на ее зажимах.

5. Проекционный аппарат имеет объектив в виде тонкой одиночной линзы с фокусным расстоянием $F = 0{,}05$ м. Квадратный диапозитив площадью $S = 10^{-4}$ м² находится на расстоянии $d = 0{,}051$ м от линзы. Определить площадь изображения на экране.

С. Манчха.
В. Прохоренко.
В. Чудов

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$|x-10|\log_2(x-3) = 2(x-10).$$

2. Доказать, что точки $A(3;0)$, $B(0;1)$, $C(2;7)$ и $D(5;6)$ являются вершинами прямоугольника $ABCD$. Вычислить его площадь и указать все перемещения плоскости, при которых он переходит в себя.

3. Решить уравнение

$$4\cos x(2-3\sin^2 x) = -(\cos 2x + 1),$$

и найти наименьшее расстояние между его положительными корнями.

4. Расположить в порядке возрастания следующие числа:

$$1;\ 0{,}37;\ \frac{65}{63};\ \frac{61}{59};\ \operatorname{tg} 33°;\ \operatorname{tg}(-314°).$$

5. Обозначим через $S(k)$ площадь, заключенную между параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$. Найти $S(-1)$ и вычислить наименьшее значение $S(k)$.

Вариант 2

1. Найти все значения x из промежутка $[\pi;\ 2\pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$2x - 11 = \frac{2|\cos x|}{\cos x}.$$

2. Доказать, что точки $A(5;\ 0)$, $B(0;\ 2)$ и $C(2;\ 7)$ являются вершинами прямоугольного треугольника. Найти его площадь и указать все перемещения плоскости, переводящие его в треугольник с вершинами $(-5;\ 0)$, $(0;\ -2)$ и $(-2;\ -7)$.

3. Решить уравнение

$$\sin \pi x^2 - \sin \pi(x^2 + 2x) = 0,$$

и найти 7-й член возрастающей последовательности его положительных корней.

4. Расположить в порядке возрастания следующие числа:

$$0;\ \sqrt{0{,}8};\ 1{,}2;\ \frac{11}{30};\ 0{,}91846;\ \ln\frac{7}{5}.$$

5. Доказать, что кривая $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ не пересекается с прямой $y = 2x - 1$, и найти расстояние между их ближайшими точками.

В. Тонян

Московский институт стали и сплавов

В нашем журнале неоднократно рассказывалось о различных факультетах и кафедрах Московского ордена Трудового Красного Знамени института стали и сплавов (МИСиС). Здесь мы хотели бы рассказать немного о кафедре инженерной кибернетики, сравнительно недавно созданной на физико-химическом факультете.

Институт стали и сплавов — институт комплексный. Здесь изучают физику твердого тела и получение особо чистых веществ, производство стали и цветных металлов и рентгеноструктурный анализ, экономику металлургического производства и охрану окружающей среды, кристаллографию и инженерную психологию.

Назрела необходимость в подготовке специалистов, способных взглянуть на это многообразие с единых позиций — с позиций теории управления и системного анализа. Вот почему и появилась в МИСиСе кафедра инженерной кибернетики, готовящая специалистов по кибернетике металлургических процессов.

Анализ сложных технологических и производственных процессов, их моделирование и управление ими на базе широкого использования ЭВМ,— вот что мы называем инженерной кибернетикой. Комплексность задач, которые приходится решать инженерам-кибернетикам, диктует и специфику обучения. Студенты должны изучать не отдельные дисциплины, а целые комплексы взаимосвязанных дисциплин, такие как

— математический комплекс, включающий в себя математический анализ, современную алгебру, дискретную математику, функциональный анализ и топологию;

— кибернетический комплекс, содержащий теорию оптимизации и вычислительные методы, математическую экономику, моделирование металлургических процессов и производств, теорию обучения машин, распознавание образов, системный анализ, теорию автоматического управления и инженерную психологию;

— вычислительный комплекс, включающий теорию и практику программирования на цифровых и аналоговых вычислительных машинах.

На кафедре инженерной кибернетики научной работой студенты начинают заниматься уже со второго курса (а наиболее успевающие — и с первого), поэтому дипломные работы являются, как правило, законченными научно-исследовательскими или инженерными разработками, часто имеющими практическую ценность. Выполняются они обычно в тех научно-исследовательских институтах, вузах или на предприятиях, куда позднее будут распределены студенты.

Кафедра имеет и свой вычислительный центр, оборудованный современными отечественными и зарубежными вычислительными машинами.

Ниже приводятся материалы вступительных экзаменов в МИСиС.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-химический факультет)

1. Решить неравенство

$$\log^2_{0.5}x+6>5\log_{0.5}x.$$

2. В арифметической прогрессии четвертый член равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений первых трех членов прогрессии будет наименьшей?

3. Из точки (3/2; 0) к параболе $y=2x^2-6x+9$ проведена касательная, образующая острый угол с положительным направлением оси Ox. Определить площадь фигуры, заключенной между параболой, осью Oy, осью Ox и этой касательной.

4. В равнобедренную трапецию, длины оснований которой равны a и b $(a>b)$, можно вписать окружность. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной около этой трапеции окружностей.

5. При каких значениях a уравнения $\sin 2x(\sin 2x+1)=0$ и $|a+3|\sin^2 2x-\sin 2x\times\times\cos 4x-(a+4)\sin 2x=0$ равносильны?

Вариант 2

(факультет полупроводниковых материалов и приборов)

1. Решить уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=2x-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 2x}{2}$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+6)<-2.$$

3. Найти корни уравнения

$$\sqrt[10]{512}\cdot\sqrt{15x-21}-\sqrt{13}\cdot\sqrt[5]{15-6x}=0,$$

представимые несократимой дробью $\frac{a}{6}$, где a — целое число.

4. Найти кратчайшее расстояние от параболы $y=x^2-8x+16$ до прямой $y=-2x+1$.

5. В пирамиде $ABCS$ даны $|\overrightarrow{AB}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=2$, $|\overrightarrow{AS}|=4$, $(\widehat{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}})=(\widehat{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AS}})=\frac{\pi}{3}$; $(\widehat{\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AS}})=\frac{\pi}{2}$. Найти объем пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

(физико-химический факультет и факультет полупроводниковых материалов и приборов)

1. На стержень длиной $l=0{,}9$ м надета бусинка, которая может перемещаться по стержню без трения. В начальный момент бусинка находилась на середине стержня. Стержень начал двигаться поступательно в горизонтальной плоскости с ускорением $\vec{a}$ ($|\vec{a}|=0{,}6$ м/с^2) в направлении, составляющем угол $\alpha=60°$ со стержнем. Через сколько времени бусинка упадет со стержня?

2. На тележке стоит бак кубической формы, целиком заполненный водой и сверху плотно закрытый крышкой. Тележка движется с постоянным ускорением $\vec{a}$ ($|\vec{a}| = 0{,}5$ м/с^2). Определить давление на глубине $h = 0{,}4$ м в точке M, отстоящей от передней стенки на расстоянии $L = 0{,}6$ м.

3. По наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, с высоты h соскальзывает небольшое тело массой m, заряженное отрицательным зарядом $-q$. В точке пересечения вертикали, проведенной через начальное положение тела, с основанием плоскости закреплен положительный заряд $+Q$. Определить скорость, с которой тело достигнет основания плоскости. Трением пренебречь.

4. Двояковыпуклая линза формирует на экране изображение предмета. Между линзой и экраном поместили плоскопараллельную пластинку толщиной $a = 3$ см из материала с показателем преломления $n = 1{,}5$. В каком направлении и на сколько нужно сдвинуть экран, чтобы снова получить отчетливое изображение предмета?

С. Емельянов,
В. Докучаева,
Н. Квачеви

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} - \sin 2x.$$

3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}}.$$

4. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ и определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ на отрезке $[-5; -1]$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\sin^3 x - \cos 2x = \sin x.$$

2. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{0{,}3} \frac{x-1}{x+5}}.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}.$$

4. Вершины треугольника находятся в точках $A\,(2; -3; 0)$, $B\,(2; -1; 1)$ и $C\,(0; 1; 4)$. Найти величину угла φ, образованного медианой DB с основанием AC.

5. С помощью производной исследовать на монотонность функцию $y = \frac{3}{2}x - \sin^2 x$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $|\vec{v}_0| = 24$ м/с. Какой путь пройдет тело за время $t = 4$ с?

2. Шар массой $m = 1$ кг подвешен на нерастяжимой нити. Нить отклонили от вертикального положения на угол $\alpha = 60°$. Определите натяжение нити в момент, когда шар будет проходить положение равновесия.

3. За какое время маятник удалится от положения равновесия на расстояние, равное половине амплитуды, если период его колебаний $T = 3{,}0$ с?

4. В сообщающиеся сосуды налита ртуть, поверх которой в один из сосудов налита вода. Разность уровней ртути $\Delta h = 20$ мм. Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3. Найти высоту столба воды.

5. Сколько молекул водорода содержится в объеме $V = 1$ м^3 при нормальных условиях? Какова масса одной молекулы водорода? Число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

6. В вертикальном цилиндре под поршнем с поперечным сечением $S = 20$ см^2 находится столб газа высотой $h = 60$ см при температуре $t = 27°$ C. Поршень может перемещаться без трения. Масса поршня $M = 10$ кг. Цилиндр нагрели на $\Delta T = 50$ К. Определить работу A, совершенную газом. Атмосферное давление $p = 10^5$ Па.

7. Шар радиусом $r = 5$ см заряжен до потенциала $\varphi = 150$ В. Найти потенциал в точке, удаленной от поверхности шара на расстояние $l = 10$ см.

8. Квадратная рамка со стороной $l = 10$ см вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью $\omega = 300$ рад/с. Определить максимальное значение тока в рамке, если ее сопротивление $R = 10$ Ом, а индукция магнитного поля $|\vec{B}| = 0{,}02$ Тл. Ось вращения рамки перпендикулярна к линиям магнитной индукции.

9. На дне реки лежит камень. Какова истинная глубина реки H, если человеку, смотрящему перпендикулярно к ее поверхности, она кажется равной $h = 1$ м? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

10. Определить массу фотона видимого света, длина волны которого $\lambda = 0{,}6$ мкм. Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{[illegible]}$ Дж · с.

Ю. Нейман,
И. Стрижкин

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. Построить общий перпендикуляр диагонали куба и не пересекающей ее диагонали грани этого куба. Найти длину общего перпендикуляра, если ребро куба равно a.

2. Доказать тождество

$$\sin 5x \cdot \cos 3x \cdot \cos 6x = \frac{1}{4}(\sin 14x + \sin 2x + \sin 8x - \sin 4x).$$

3. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 30. Если от первого отнять 5, от второго 4, а третье оставить без изменения, то получим геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

4. Решить уравнение

$$\lg(6 \cdot 5^x + 25 \cdot 20^x) = x + \lg 25.$$

5. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

6. Исследовать функцию $y = \frac{e^x}{x}$ и построить её график.

7. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

8. Изобразите множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют соотношению $|x| + |y| = 1$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. К веревке AB в точке B привязаны груз P и шнур BCD, перекинутый через блок C (рис. 1). К другому концу шнура привязан груз D массой $m_1 = 10$ кг. Определить натяжение веревки AB и массу m_2 груза P, если углы, составленные веревкой и шнуром с вертикалью, равны $\alpha = 45°$ и $\beta = 60°$ соответственно. Трением пренебречь.

2. Конический маятник имеет длину $|OA| = l = 1$ м (рис. 2). Может ли его период равняться: 1 с; 3 с?

3. Летящая свинцовая пуля, ударившись о препятствие, расплавилась. С какой скоростью летела пуля, если 50% выделившегося при ударе количества теплоты пошло на ее нагревание? Начальная температура пули $t = 17°$C, температура плавления свинца $t_{\text{пл}} = 327°$C, удельная теплоемкость $c = 0{,}13 \times 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления $\lambda = 25 \cdot 10^3$ Дж/кг.

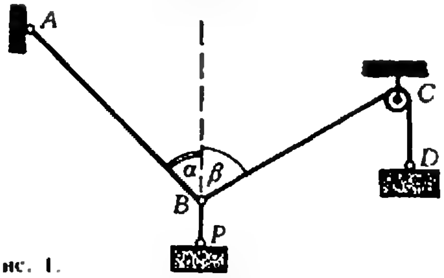


Рис. 1.

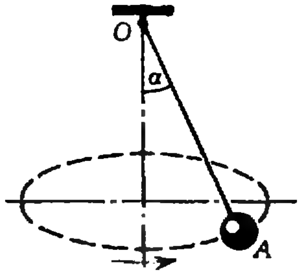


Рис. 2.

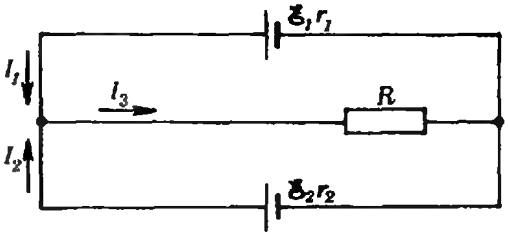


Рис. 3.

4. Определить токи I_1, I_2 и I_3 в цепи (рис. 3), если $\mathcal{E}_1 = 5$ В, $\mathcal{E}_2 = 3$ В, $r_1 = r_2 = 2$ Ом, $R = 1$ Ом.

5. Два плоских зеркала образуют двугранный угол γ. Произвольно выбранный луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной к плоскостям зеркал, отражается по очереди от обоих зеркал. Выразить угол δ между лучом, падающим на первое зеркало, и лучом, отраженным от второго, через плоский угол γ.

Ю. Мещеряков,
В. Смирнов

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Московскому ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени высшему техническому училищу им. Н. Э. Баумана (МВТУ) — старейшему техническому вузу страны — в этом году исполняется 150 лет. За это время училище стало всемирно известной школой инженерных кадров. Фактически оно превратилось в технический университет, готовящий инженеров по самым разным современным машиностроительным и приборостроительным специальностям.

В МВТУ имеется пять факультетов: автоматизации и механизации производства, конструкторско-механический, машиностроительный, приборостроения и энергомашиностроения.

Расскажем немного о факультете приборостроения, самом большом по числу студентов. Факультет сравнительно молод — ему недавно исполнилось 50 лет. За этот короткий промежуток времени ученым факультета удалось создать научную школу приборостроения, охватывающую целый ряд научных направлений. Среди них вычислительная и информационно-измерительная техника, оптические и оптико-электронные приборы, радиоэлектроника и электротехника, точная механика, гироскопические приборы, управление и техническая кибернетика, технология приборостроения.

Упомянем о некоторых завершенных научных работах.

В Советском Союзе создан крупнейший в мире зеркальный телескоп. Площадь его зеркала составляет 28 квадратных метров. Учеными факультета была решена задача, казавшаяся многим неразрешимой — разработано устройство для контроля погрешности формы зеркала с точностью до одной десятой микрона.

На ряде предприятий Москвы внедрены новые технологические процессы и станки, что позволило существенно повысить чистоту обработки деталей электронных устройств и принесло огромный экономический эффект.

В процессе обучения на факультете широко используется добрая традиция училища — сочетание глубокой теоретической подготовки с практической работой в избранной области. Студенты проходят четыре практики на предприятиях приборостроительной промышленности, выполняют три курсовых проекта и несколько курсовых работ, а также курсовую научно-исследовательскую работу.

Многие студенты участвуют в работе студенческих конструкторских бюро (их на факультете семь) и не без успеха. Так, работа «Лазерный телефон» была удостоена золотой медали ВДНХ, работа «Измеритель момента» принесла немалый экономический эффект и была удостоена бронзовой медали ВДНХ, а работа «Биоэлектростимулятор» нашла практическое использование для лечения некоторых заболеваний.

Ниже приводятся материалы вступительных экзаменов в МВТУ.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, составленной из членов данной бесконечной геометрической прогрессии с нечетными номерами, равна $\frac{64}{3}$, а сумма прогрессии, составленной из членов той же прогрессии с четными номерами, равна $\frac{32}{3}$. Найти прогрессию.

2. Одно из оснований правильной треугольной призмы принадлежит большому кругу шара радиуса R, а вершины другого основания принадлежат поверхности этого шара. Определить высоту призмы, при которой сумма длин всех ее ребер будет наибольшей.

3. Решить уравнение

$$\cos 3x-\cos 7x=\sqrt{3}\sin 2x.$$

4. Найти область определения функции

$$y=\log_2\left(2^{-x}-\frac{1}{2}\right).$$

5. Определить, при каких значениях a верно неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int_1^a\Bigl(\frac{3}{2}\sqrt{x}+1-\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<4.$$

Вариант 2

1. Все члены арифметической прогрессии — натуральные числа. Сумма ее девяти последовательных членов, начиная с первого, больше 200, но меньше 220. Найти прогрессию, если ее второй член равен 12.

2. В сферу вписана правильная треугольная призма, длины всех ребер которой равны a. Подобная ей призма нижним основанием лежит на верхнем основании данной призмы, а вершины ее верхнего основания принадлежат сфере. Найти длину ребра второй призмы.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=4x^3-9x^2-12x$$

в промежутке $[-1;\,1]$.

4. Решить уравнение

$$\log_3(5-x)+2\log_3\sqrt{3-x}=1.$$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (сделайте рисунок) $y=(x-1)^2$, $y=x+1$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два тела брошены вертикально вверх из одной точки, одно вслед за другим с интервалом $\tau=2$ с, с одинаковыми начальными скоростями $|\vec{v}_0|=50$ м/с. Через сколько времени и на какой высоте тела встретятся?

2. Небольшое тело соскальзывает без трения с вершины полусферы радиусом R. На какой высоте оно оторвется от поверхности полусферы?

3. Орудие, масса ствола которого $M=450$ кг, стреляет в горизонтальном направлении. Масса снаряда $m=5$ кг и начальная скорость его $|\vec{v}_0|=450$ м/с. При выстреле ствол откатывается на $s=45$ см. Определить среднее значение силы торможения, развивающейся в противооткатном устройстве орудия.

4. В баллоне объемом $V=10$ л содержится водород при температуре $t=20°$ С под давлением $p=10^7$ Па. Какое количество водорода было выпущено из баллона, если при полном сгорании оставшегося образовалось $m=50$ г воды?

5. На какой глубине пузырек воздуха имеет диаметр, втрое меньший, чем у поверхности воды, если барометрическое давление на уровне воды равно $p_0=10^5$ Па? Температура воды считается неизменной на любой глубине. Плотность воды $\rho=10^3$ кг/м^3.

6. Измерительный прибор с внутренним сопротивлением $R=75$ Ом имеет шкалу на $n=150$ делений. Цена деления $U_0=10$ мВ. Как этим прибором измерить: а) токи до $I=1{,}5$ А; б) напряжение до $U=750$ В?

7. Прямолинейный проводник массой $m=3$ кг, по которому протекает ток $I=5$ А, поднимается вертикально вверх в однородном магнитном поле с индукцией $|\vec{B}|=3$ Тл, двигаясь под углом $\alpha=30°$ к магнитным линиям. Через $t=2$ с после начала движения он приобретает скорость $|\vec{v}|=10$ м/с. Определить длину проводника.

8. При падении на плоскую границу двух сред с абсолютными показателями преломления n_1 и n_2 луч света частично отражается, частично преломляется. При каком угле падения α отраженный луч перпендикулярен к преломленному лучу?

9. У призмы с преломляющим углом $\varphi = 30°$ одна грань посеребрена. Луч, падающий на другую грань под углом $\alpha = 45°$, после преломления и отражения от посеребренной грани вернулся назад по прежнему направлению. Чему равен показатель преломления материала призмы?

10. При бомбардировке изотопа азота с атомной массой 14 протонами образуются ядра кислорода с атомной массой 15. Полученные ядра кислорода обладают позитронной активностью. В какие ядра превращаются ядра кислорода? Записать реакцию.

Л. Паршев,
Г. Тимошков

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. академика И. М. Губкина

В этом году Московский ордена Трудового Красного Знамени институт нефтехимической и газовой промышленности (МИНХиГП) отмечает свое 50-летие. Подготовка будущих специалистов для нефтяной, газовой, нефтехимической и других отраслей народного хозяйства осуществляется как на общеобразовательных, так и на специальных кафедрах. Расскажем немного о кафедре физики, которая за несколько последних лет превратилась в одну из ведущих кафедр института.

На кафедре физики МИНХиГП ведется большая научно-исследовательская работа и прикладного, и фундаментального характера. Основное научное направление — теоретическое и экспериментальное изучение фазовых переходов. Для проведения серьезных экспериментальных исследований на кафедре имеется необходимое оборудование, например, уникальный лазерный спектрометр оптического смещения или прецизионное калориметрическое оборудование. Это позволяет измерять кинетические и термодинамические характеристики газов и жидкостей с большой точностью.

К научной работе активно привлекаются студенты. Так, в рамках студенческого научного общества функционирует Клуб физиков. На его заседаниях обсуждаются актуальные проблемы физики. Ежегодно в институте проводится студенческая олимпиада по физике. Команда МИНХиГП успешно выступает на городских физических олимпиадах.

Студенты, интересующиеся физикой, выполняют свои курсовые работы на кафедре физики, а в этом году на кафедре были защищены и первые дипломные проекты.

Для учащихся 8—10 классов при институте работает вечерняя физико-математическая школа. Ежегодно для школьников проводятся олимпиады по физике, в в помощь абитуриентам читаются обзорные лекции по различным разделам физики.

Ниже приводятся материалы вступительных экзаменов в МИНХиГП.

Математика

Письменный экзамен

1. При каком значении a площадь, ограниченная кривой $y = a^2x^2 + ax + 1$ и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, будет наименьшей?

2. При каком значении параметра a значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + a$ в точке $x = 2$ и в точках экстремума, взятые в некотором порядке, образуют геометрическую прогрессию?

3. Три пункта A, B и C расположены в вершинах равностороннего треугольника со сторонами 168 км. Из пункта A в пункт B выезжает машина со скоростью 60 км/час, из пункта B в пункт C одновременно выезжает машина со скоростью 30 км/час. Через сколько времени после выезда расстояние между этими машинами будет наименьшим?

4. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника равна l. При каких величинах острых углов треугольника его гипотенуза будет наименьшей?

5. При каких значениях параметра p вершина параболы $y = x^2 + 2px + 13$ лежит на расстоянии 5 от начала координат?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Однородная прямая призма, площадь основания которой $S = 1$ м² и высота $h = 0{,}4$ м, плавает на поверхности воды так, что в воде находится половина ее объема. Найти наименьшую работу, необходимую для полного погружения призмы в воду.

2. Идеальный газ находится при температуре $t_1 = 27°$ С. Найти температуру t_2 этого газа, если в результате расширения, происходящего по закону $pV^{3/2} = \text{const}$, объем газа увеличился в 4 раза.

3. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 1000$ В, попадает в пространство, в котором созданы скрещенные однородные электрическое и магнитные поля $(\vec{E} \perp \vec{B})$. Напряженность электрического поля $|\vec{E}| = 1{,}9 \cdot 10^7$ В/м, индукция магнитного поля $|\vec{B}| = 1$ Тл. Скорость электрона перпендикулярна к направлениям полей и при движении в этих полях не меняется ни по величине, ни по направлению. Определить удельный заряд электрона e/m.

4. Неоновая лампа включена в сеть переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц и действующим напряжением $U = 127$ В. Продолжительность вспышки лампы составляет $\tau = 1/200$ с. Напряжения зажигания и гашения лампы одинаковы. Найти эти напряжения.

5. В микроскоп резко видна верхняя грань плоскопараллельной пластины толщиной $H = 3$ см. Чтобы получить резкое изображение нижней грани, тубус микроскопа опустили на $h = 2$ см. Определить показатель преломления пластины.

А. Кулькин, В. Нагаев,
Б. Писаревский

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Доказать, что числа $\frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_{12} 2}$ образуют арифметическую прогрессию.

2. Найти все значения α, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$ и удовлетворяющие уравнению

$$\int\limits_{\pi/2}^{\alpha} \sin x\, dx = \sin 2\alpha.$$

3. Две стороны треугольника равны 6 см и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти длину третьей стороны треугольника.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20, \\ x^2+y^2=136. \end{cases}$$

5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота $\sqrt{2}$. Найти расстояние между боковым ребром SA и диагональю основания BD.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Найти множество положительных значений a, удовлетворяющих уравнению

$$\int\limits_0^a (3x^2+4x-5)\, dx = a^3-2.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_2 x}-0{,}5=\log_2\sqrt{x}.$$

3. Боковые стороны равнобедренной трапеции при их продолжении пересекаются под прямым углом. Определить стороны трапеции, если ее площадь 12 см^2, а длина высоты 2 см.

4. Решить уравнение

$$\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}.$$

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислить величину угла между прямыми BC_1 и BK, где K — середина ребра AA_1.

Физика

Задачи устного экзамена

(физический факультет)

1. Тело массой $m_1=3{,}0$ кг скользит по горизонтальной плоскости под действием груза массой $m_2=1{,}0$ кг, прикрепленного к концу шнура. Шнур привязан к телу массой m_1 и перекинут через неподвижный блок. Определить ускорение системы и силу натяжения шнура. Трением пренебречь.

2. В лодке массой $m_1=240$ кг стоит человек массой $m_2=60$ кг. Лодка плывет со скоростью $\vec{v}_1$ ($|\vec{v}_1|=2$ м/с). Человек прыгает с лодки в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{v}$ ($|\vec{v}|=4$ м/с) относительно лодки. Найти скорость движения лодки после прыжка человека вперед по движению лодки.

3. При какой посадочной скорости самолеты могут приземляться на посадочной полосе аэродрома длиной $l=800$ м при торможении с ускорением $\vec{a}$ ($|\vec{a}|=5{,}0$ м/с^2)?

4. При нагревании некоторой массы газа на $\Delta T=1$ К при постоянном давлении объем этой массы газа увеличился на $n=1/350$ часть первоначального объема. Найти начальную температуру газа.

5. Баллон емкостью $V=20$ л содержит углекислый газ массой $m=500$ г под давлением $p=1{,}3$ МПа. Определить температуру газа.

6. В сосуд, содержащий $m_1=2{,}35$ кг воды при $t_1=20°$ С, опускают кусок олова, нагретого до $t_2=230°$ С. Температура воды в сосуде повысилась на $\Delta t=15°$. Вычислить массу олова m_2. Испарением воды пренебречь. Удельные теплоемкости воды и олова равны $c_1=4{,}19\cdot 10^3$ Дж/(кг · К) и $c_2=2{,}5\cdot 10^2$ Дж/(кг · К) соответственно.

7. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1=10^{-6}$ Кл и $q_2=-10^{-6}$ Кл равно $r=10$ см. Определить силу, действующую на точечный заряд $q=10^{-7}$ Кл, удаленный на $r_1=6$ см от первого и на $r_2=8$ см от второго зарядов ($\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м).

8. Гальванический элемент дает на внешнее сопротивление $R_1=4$ Ом ток $I_1=0{,}2$ А. Если же внешнее сопротивление равно $R_2=7$ Ом, то элемент дает ток $I_2=0{,}14$ А. Какой ток он даст, если его замкнуть накоротко?

9. Какое увеличение дает проекционный фонарь, если его объектив с фокусным расстоянием $F=18$ см расположен на расстоянии $f=6{,}0$ м от экрана?

10. Солнечные лучи падают на поверхность воды при угловой высоте Солнца над горизонтом $\alpha=30°$. Как пойдут эти лучи в воде после преломления? Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

М. Петрова.
В. Редкозубов

Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. В этом номере мы рассказываем о книгах, вышедших во втором квартале 1980 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Маркушевич А. И. *Комплексные числа и конформные отображения*. Издание 3-е. Объем 3 л., тираж 50 000 экз., цена 10 к.

В основу книжки положена лекция, читанная автором для школьников 9—10 классов. Она знакомит читателей с комплексными числами и простейшими функциями от них (включая функцию Н. Е. Жуковского с применением к построению профиля крыла самолета). Изложению придана геометрическая форма: комплексные числа рассматриваются как направленные отрезки. Чтобы привести читателя к такому пониманию комплексных чисел, автор начинает с геометрического истолкования действительных чисел и действий над ними.

2. Воробьев Н. Н. *Признаки делимости*. (Популярные лекции по математике.) Издание 3-е. Объем 4 л., тираж 200 000 экз., цена 20 к.

В брошюре популярно излагаются некоторые вопросы теории чисел и связанные с ними вопросы теории отношений и теории алгоритмов.

Признаки делимости описываются систематически и с общей точки зрения.

3. Шилов Г. Е. *Простая гамма (устройство музыкальной шкалы)*. (Популярные лекции по математике.) Издание 2-е. Объем 2 л., тираж 100 000 экз., цена 10 к.

Основой музыки является музыкальный звук, или тон, представляющий собой колебание определенной частоты.

Ухо человека способно воспринимать лишь весьма ограниченное число тонов.

Вопросу о том, какие именно тоны должна содержать музыкальная шкала, посвящена данная брошюра, возникшая на основе лекции автора, прочитанной для школьников.

4. Бекишев Г. А., Кратко М. И. *Элементарное введение в геометрическое программирование*. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 35 к.

В книге элементарно излагаются общие методы отыскания экстремальных значений функций нескольких переменных. Изложение основано на классическом неравенстве между средним арифметическим и средним геометрическим и некоторых обобщениях этого неравенства.

Физика

Издательство «Наука»

1. Сибрук В. *Роберт Вуд — современный чародей физической лаборатории*. Перевод с английского. Издание 4-е. Объем 16 л., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 10 к.

Роберта Вуда по праву считают одним из самых дерзких и оригинальных экспериментаторов. Его выдающиеся экспериментальные исследования оставили глубокий след в оптике, молекулярной физике, астрофизике и других разделах науки.

Вуд был не только крупным ученым, но и интереснейшим человеком. Рассказ о научной работе Вуда искусно переплетается в книге с рассказом о его интересной, полной приключений жизни. Здесь и разгадка тайны пурпурного золота царя Тутанхамона, и раскрытие преступлений, и разоблачение «изобретателей» *N*—лучей и «лучей смерти», и интересные путешествия Вуда и другие не менее интересные вещи.

2. Самсонов В. А. *Очерки о механике: некоторые задачи, явления и парадоксы*. Объем 3 л., тираж 40 000 экз., цена 10 к.

Брошюра содержит три очерка, в каждом из которых обсуждается некоторый круг вопросов механики. В живой и увлекательной беседе о знакомых каждому явлениях автор подводит читателя к математической задаче, описывающей эти явления. Затем, в процессе истолкования решения задачи, вскрываются новые, иногда парадоксальные, стороны обсуждаемых явлений.

3. Воронцов-Вельяминов Б. А. *Очерки о Вселенной*. Издание 8-е, переработанное. Объем 38 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 60 к.

В книге в живой и занимательной форме рассказывается о многих важных вопросах астрономической науки, привлекающих в настоящее время наибольшее внимание астрономов. Учитывая разнообразный круг рассматриваемых в книге проблем, ее можно считать популярной астрономической энциклопедией. Восьмое издание переработано и дополнено с учетом последних достижений астрономии. Издание выпускается с большим количеством иллюстраций, в том числе и цветных. Книга удостоена первой премии общества «Знание».

4. Климишин И. А. *Астрономия наших дней*. Издание 2-е, переработанное. Объем 29 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 30 к.

Книга охватывает очень широкий круг вопросов, изучаемых современной астрономией. В ней изложены основные представления, понятия и законы, на которых базируются наблюдательная и теоретическая астрономия, астрофизика, радиоастрономия. Описываются практически все известные небесные объекты — Солнце, Луна, планеты, строение и эволюция звезд и галактик. Много внимания уделено недавно открытым объектам — пульсарам, черным дырам, квазарам, галактикам Сейферта, взаимодействующим галактикам и другим небесным телам. Книга дает достаточно полное представление об успехах современной астрономии.

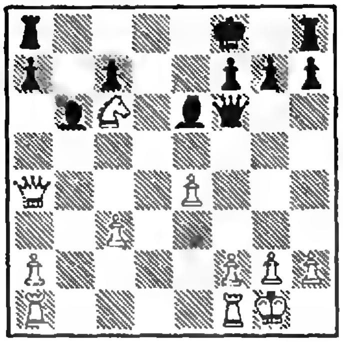
А. Егоров,
М. Смолянский

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Ход конем

Конь — самая необычная и удивительная шахматная фигура, и не случайно выражение «ход конем» давно стало крылатым. «Презренный шут шахматной доски» — так называл коня известный изобретатель математических и шахматных головоломок Г. Дьюдени А славившийся своим остроумием гроссмейстер С. Тартаковер как-то заметил, что «вся шахматная партия — это один замаскированный ход конем».

На наших шахматных страничках мы нередко будем встречаться с различными задачами и комбинациями на шахматной доске, главный участник которых — конь. Одна из самых старинных шахматных комбинаций носит название «спертый мат». Заключительный аккорд в такой комбинации всегда принадлежит коню. Интересный пример на спертый мат представляет собой одна из задач Блаты (см. «Квант», 1980, № 5). Приведем теперь эпизод из партии П. Морфи.

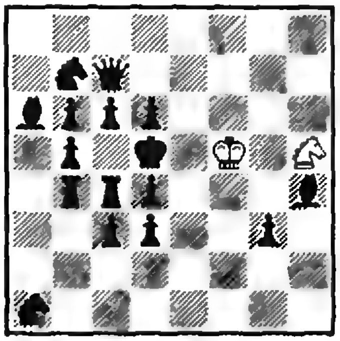


Морфи — Брэйн

Все готово к проведению комбинации, осталось отвлечь ферзя от поля e7.

1. e5! Фg5 2. h4! Фg4 3. Фa3+ Kpg8 4. Ke7+ Kpf8 5. Kg6+ Kpg8 6. Фf8+! Л:f8 7. Ke7×. Мат объявляет конь, а все поля отступления для неприятельского короля заняты собственными фигурами и пешками.

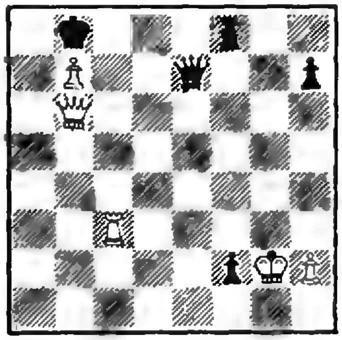
Один белый конь может справиться со всей армией неприятельских фигур.



О. Блаты, 1922. Мат в 12 ходов.

1. Kf4+Kpc5 2. Ke6+ Kpd5 3. K:c7+Kpc5 4. K:a6+Kpd5 5. Kc7+Kpc5 6. Ke6+Kpd5 7. Kf4+Kpc5 8. Kpe4 d5+ 9. Kpe5 Cf6+ 10. Kpe6 Kd8+ 11. Kpd7 и 12. K:d3×.

Следующие два примера (первый из области дебюта, второй — эндшпиля) относятся к другой теме. В них конь появляется на доске в результате неожиданного превращения пешки, после чего партия сразу заканчивается.

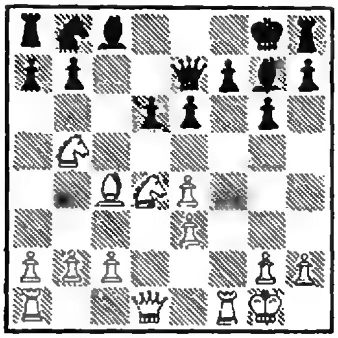


Белые выигрывают.

1. Лc8+! Л:c8 2. Фa7+! Kp:a7 3. bcK+!! и после **4. K:e7** белые остаются с лишним конем и легко выигрывают.

В дебюте, который называется «контргамбитом Альбина», после ходов **1. d4 d5 2. c4 e5 3. de d4 4. e3 Cb4+ 5. Cd2 de! 6. C:b4 ef+ 7. Kpe2** решает **7... fgK+!! 8. Л:g1** (8 Kpe1 Фh4+ и т. д.) **Cg4+** с выигрышем ферзя.

В предыдущих примерах дело решало появление на доске коня, а теперь, наоборот, комбинация, в которой кони эффектно приносят себя в жертву.



Злотник — Гик.

В этой партии, игранной двенадцать лет назад в Дубне, черные весьма оптимистически расценивали свои шансы, полагая, что перевод слона на e5 и короля на g7 сделает их позицию неприступной. Однако последовали два удара коней, сразу решившие исход поединка.

1. K:d6! Ф:d6 2. K:e6! Ф:e6 (после 2...Ф:d1 3. Лa:d1 у черных нет защиты от многочисленных угроз). **3. Фd8+ Cf8 4. Л:f7! Kp:f7 5. Ф:c8 Ф:c4 6. Ф:c4+ Kpg7 7. Фd4+. Черные сдались.**

В сегодняшней «Шахматной страничке» мы умышленно не приводим позиций для самостоятельного решения. Дело в том, что в этом номере журнала мы начинаем наш шахматный конкурс, в котором вы сможете проявить все свое умение играть в шахматы и решать шахматные задачи и головоломки. Итак, приглашаем вас принять участие в шахматном конкурсе «Кванта»!

Олимпийские кольца

Очевидно, решив задачу 3, мы тем самым решим и обе предыдущие задачи.

Сначала покажем, что сцепить n колец так, чтобы каждое было сцеплено ровно с k другими, можно только при условии, что произведение $n \cdot k$ четно. Действительно, представим каждое кольцо как вершину правильного n-угольника и соединим отрезками те вершины многоугольника, которым соответствуют сцепленные кольца. Теперь посчитаем количество таких отрезков. Из каждой вершины их выходит k штук, а вершин n; перемножив эти два числа, получаем $n \cdot k$ — удвоенное количество отрезков, поскольку каждый отрезок при этом мы посчитали дважды. Но количество отрезков — целое число, поэтому число $n \cdot k$ должно делиться на 2.

Теперь покажем, что если $n \cdot k$ четно, то нужное сцепление произвести можно. Пусть сначала число k четно, $k=2p$, где p — целое число. Соединив каждую вершину с p ближайшими соседями слева и с p ближайшими соседями справа, получим точное указание, какие кольца с какими нужно сцепить. Если же k — нечетное число, то оно представляется в виде $k=2p+1$; при этом n обязано быть четным. В этом случае вновь соединяем каждую вершину с p ближайшими соседями слева и с p ближайшими соседями справа, а также с диаметрально противоположной вершиной (такая есть, так как n — четное число).

Поупражняйся и проверь себя

1. а) $\dfrac{q^2-2}{4}$ при $q \in\,]1;\ 2]$; $\dfrac{(q-1)^2}{2}$ при $q \in\,]2;\ 3[$; $\dfrac{q^2-3}{3}$ при $q \in\,]3;\ +\infty[$.

Указание. Так как $\varphi_q'(x) = \dfrac{1-q^2}{x^2(x-2)^2} \times \left(x-\dfrac{2q}{1+q}\right)\left(x-\dfrac{2q}{1-q}\right)$ и $x_1 = \dfrac{2q}{1+q} < 3$, поведение функции φ_q на отрезке $[3;\ 4]$ определяется положением точки $x_2 = \dfrac{2q}{1-q}$. Именно: если $x_2 \leqslant 3$, то $\varphi_q'(x) < 0$ при $x \in\,]3;\ 4]$, то есть $\max\limits_{[3,\ 4]} \varphi_q(x) = \varphi_q(3) = \dfrac{q^2-3}{3}$; если $3 < x_2 < 4$, то φ_q возрастает на $[3;\ x_2[$ и убывает на $]x_2;\ 4]$; поэтому $\max\limits_{[3,\ 4]} \varphi_q(x) = \varphi_q(x_2) = \dfrac{(q-1)^2}{2}$; если же $x_2 \geqslant 4$, то φ_q возрастает на отрезке $[3;\ 4]$, а это значит, что $\max\limits_{[3,\ 4]} \varphi_q(x) = \varphi_q(4) = \dfrac{q^2-2}{4}$.

б) $\dfrac{1}{5q^2-16q+16}$ при $q \in\,]-\infty;\ 1[$; $\dfrac{1}{5q^2}$ при $q \in [1;\ +\infty[$.

2. а) $-2+\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}}$. Указание. Параболы пересекаются при $x_0 = \dfrac{a}{2}$. Тангенсы углов наклона α_1 и α_2 касательных к параболам в этой точке равны $\operatorname{tg}\alpha_1 = y_1'(x_0) = 2x_0+3 = a+3$ и $\operatorname{tg}\alpha_2 = y_2'(x_0) = 2x_0+1 = a+1$. Так как $a > -1$, $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < \dfrac{\pi}{2}$. Величина угла φ между касательными равна $\alpha_1-\alpha_2$. Поэтому $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2) = \dfrac{2}{(a+2)^2} = \sqrt{3}$

б) $-6+2\sqrt{7}$.

3. а) $x=1$ при $a \in\,]0;\ 2]$; $x_1=1$, $x_2 = \log_2\log_2\dfrac{a^2}{4}$ при $a \in\,]2;\ +\infty[$.

Указание. Пусть $2^x=u$. Вычисляя интеграл, получим уравнение $u^2-2u\cdot\log_2 a + 4\log_2\left(\dfrac{a}{2}\right) = 0$. Корни этого уравнения $u_1=2$ и $u_2=2(\log_2 a-2)$. Осталось решить уравнения $2^x=2$ и $2^x=2(\log_2 a-2)$.

б) $x_{1,2}=(2-a)^{\pm\sqrt{a}}$ при $a \in\,]-\infty;\ 0[$; $x=1$ при $a=0$; $x_{1,2}=(2-a)^{\pm\sqrt{5a}}$ при $a \in\,]0;\ 1[\ \cup\ ]1;\ 2[$.

4. а) $-\dfrac{1}{a}\sqrt{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}}$ при $a \in [-1;\ 0[$.

Указание. Разложив на множители $x^2-4ax+3a^2$ и x^3-a^3, приведите функцию, стоящую под знаком предела, к виду $\dfrac{3(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(x-3a)}{2x(x^2+ax+a^2)}$. При $a=0$ предел не существует. При $a\neq 0$, $|a|<1$ получим $L(a) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}}{a^2}}$, откуда $a<0$.

б) $\log_{2a} a(1-a)$ при $a \in \left]0;\ \dfrac{1}{2}\right[\ \cup\ \left]\dfrac{1}{2};\ 1\right[$.

5. а) 11 при $a=2$.

б) 17/4 при $a=-\dfrac{3}{4}$.

6. а) 6. Указание. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ — векторы, идущие из некоторой вершины октаэдра в соседние вершины, а $\vec{R}$ — вектор, идущий в противоположную ей вершину. Рассмотрите $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{R})^2 = \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{d}^2+\vec{R}^2+2S$ и воспользуйтесь тем, что $\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=\vec{d}^2=1$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=2\vec{R}$ и $\vec{R}^2=2$.

б) 18.

7. а) $1^\circ.\ \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ • $2^\circ.\ \dfrac{a}{2\sqrt{14}}$. Указание к 1°.

Пусть (MN) — общий перпендикуляр к прямым (рис. 1) (AC) и (PQ), $|\overrightarrow{MN}|$ — искомое расстояние. Ясно, что $\overrightarrow{CM}=\alpha\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{NP}=\beta\overrightarrow{QP}$, где α и β — некоторые пока неизвестные числа. Так как $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CP}-\alpha\overrightarrow{CA}-\beta\overrightarrow{QP}$. Умножая скалярно обе части этого равенства на $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{CA}$, получим $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{QP}-\alpha(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{QP})-\beta|\overrightarrow{QP}|^2=0$ и $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}-\alpha|\overrightarrow{CA}|^2-\beta(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{QP})=0$. Мы получили систему линейных уравнений относи-

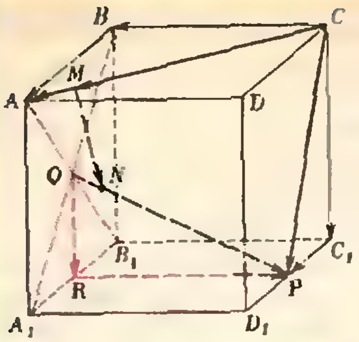


Рис. 1

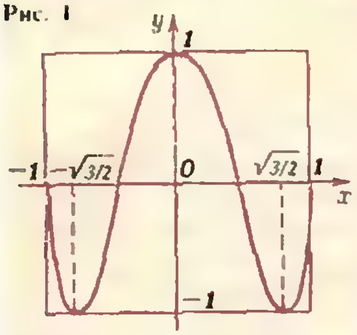


Рис. 2.

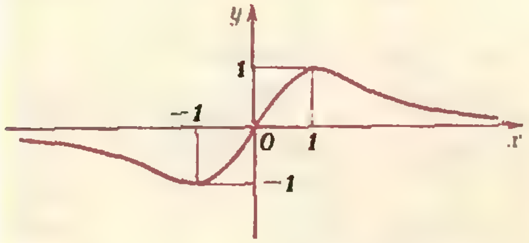


Рис. 3.

тельно α и β. Вычисляя коэффициенты этой системы и затем решая ее, получим $\alpha=\frac{3}{4}$, $\beta=1$. Для нахождения $|\overrightarrow{MN}|$ удобно воспользоваться соотношением $|\overrightarrow{MN}|^2=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CP}=|\overrightarrow{CP}|^2-\alpha(\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA})-\beta(\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{QP})$.

б) $\sqrt{2a^2(1\pm\cos\alpha)-h^2}$.

8. а) $p=-2$, $q=2$. Указание. Сначала докажите, что для существования предела необходимо и достаточно условие $p=-q$.
б) $p=-2$, $q=3$.

9. а) См. рис. 2. Указание. Докажите сначала, что $\cos(3\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}(1-4x^2)$, после чего исследуйте полученную функцию с помощью производной.
б) См. рис. 3.

10. а) $x\in]-1;1[$ при $a\in]-\infty;-2[$; $x\in[-1;x_1]$ при $a\in[-2;2]$; $x\in[x_2;x_1]$ при $a\in]2;\sqrt{5}[$; $x=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ при $a=\sqrt{5}$; нет решений при $a>\sqrt{5}$, где $x_{1,2}=\frac{-2a\pm\sqrt{5-a^2}}{5}$. Указание. Кривая $y=\sqrt{1-x^2}$ является полуокружностью радиуса 1 с центром в начале координат. Уравнение $y=2x+a$ задает прямую с угловым коэффициентом 2. Ясно, что решениями данного неравенства будут те точки отрезка $[-1;1]$, для которых ординаты точек прямой не больше ординат точек полуокружности.
б) $x\in[x_2;|a|]$ при $|a|\in[2;+\infty[$; $x\in[x_2;x_1]$ при $|a|\in\left]\frac{4}{\sqrt{5}};2\right[$; нет решений при $|a|\in\left[0;\frac{4}{\sqrt{5}}\right[$, где $x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{5a^2-16}}{5}$.

11. а) Указание. Исследуйте функцию $y=6x-x^2-4\ln x$ на монотонность при $x\in]0;4]$.
б) решается аналогично с а).

12. а) $x=(-1)^n\arcsin(1-\sqrt{2+2k})+\pi n$, где $k\in\{-1,0,1\}$, $n\in\mathbf{Z}$.
б) $x_1=\frac{\pi}{13}n$, $x_2=\frac{\pi}{8}m$, где $m\neq4p$ и $m,n,p\in\mathbf{Z}$.

13. а) $C_1(5;10)$, $C_2(3;0)$. Указание. Поскольку $\overrightarrow{AB}=(5;6)$, $\overrightarrow{BC}=(x-4;y-5)$ и $y=5(x-3)$, имеем $\overrightarrow{BC}=(x-4;5(x-4))$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}})=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{BC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})^2}.$$

Осталось решить уравнение $S_{ABC}=\frac{19}{2}$.

б) $y=3x+4$ и $y=11x+4$. Указание. Уравнение параболы, проходящей через заданные точки, имеет вид $y=-2x^2+7x+4$. Уравнение искомой прямой $y=kx+4$. Найдите теперь точки пересечения прямой и параболы и запишите требуемую площадь в виде интеграла.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Математика

Вариант 1

1. Если x и y — длины сторон поля, то $x=\frac{k}{bc^2}-b$, $y=\frac{k}{b^2c}$. **2.** $a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

3. $\{(2;10),(10;2)\}$. **5.** В точках $\left(\sqrt{\frac{c}{a}};\ b\sqrt{\frac{c}{a}}+2c\right)$ или $\left(-\sqrt{\frac{c}{a}};\ 2c-b\sqrt{\frac{c}{a}}\right)$ при $ac>0$; в точке $(0;0)$ при $c=0$; при $ac<0$ решений нет.

Вариант 2

1. 15 км. **2.** Указание. Пусть точки H и G — середины сторон BC и AC соответственно. Выразите векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{BG}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ и рассмотрите $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BG}$. **3.** $\{5, \sqrt[3]{5}\}$. **4.** $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. **5.** $(0;2)$.

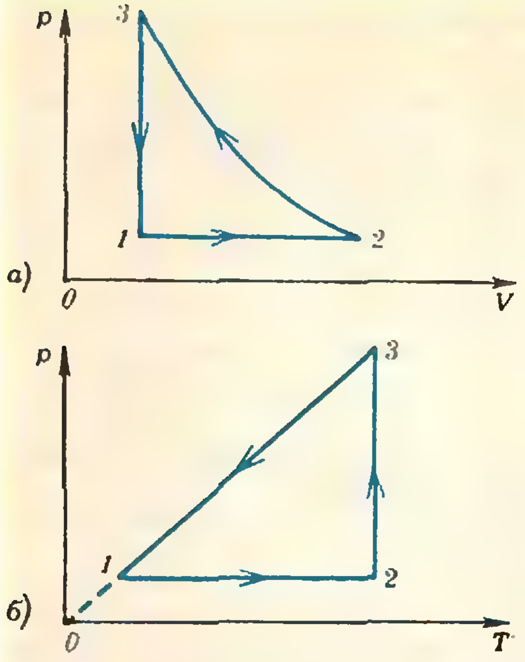


Рис. 4.

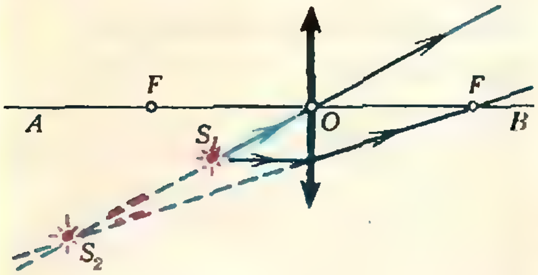


Рис. 5.

Физика

1. $|\vec{v}_0| = s\sqrt{\frac{g}{2H}} \approx 10$ м/с; $|\vec{v}_к| = \sqrt{|\vec{v}_0|^2+2gH} \approx 14$ м/с.

2. $|\vec{F}| = 3mg \approx 30$ Н.

3. $h = \frac{|\vec{v}_0|^2}{4g} = 61{,}25$ м.

4. $N = N_A \frac{p_0V_0(T_2-T_1)}{RT_1T_2}$,

где N_A — число Авогадро, R — универсальная газовая постоянная.

5. См. рис. 4.

6. $C_2 = C_1 \frac{U_1-U}{U-U_2} = 10$ мкФ.

7. $t_3 = t_1+t_2 = 4500$ с; $t_4 = \frac{t_1t_2}{t_1+t_2} = 1000$ с.

8. $R = \frac{1}{|\vec{B}|}\sqrt{\frac{2mU}{e}} \approx 9\cdot10^{-2}$ м;

$T = \frac{2\pi m}{|\vec{B}|e} \approx 3\cdot10^{-8}$ с.

9. См. рис. 5.

10. $F = \frac{f}{\Gamma+1} = 0{,}08$ м.

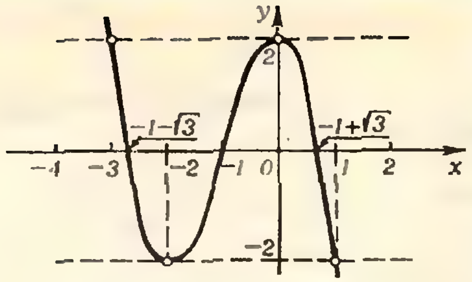


Рис. 6.

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

2. $\left\{3+\frac{2}{5}\sqrt{5}\right\}$. 3. $\max\limits_{[-3;1]} y = 2$, $\min\limits_{[-3;1]} y = -2$; график см. на рисунке 6. 4. $]-1;\ +\infty[$. **Решение.** Область определения неравенства задается условиями $\frac{x+1}{x+2} > 0$, $\frac{x+1}{x+2} \neq 1$, $x+3>0$, $x+3 \neq 1$. Решением этой системы служит объединение $]-3;\ 2[\ \cup\ ]-1;\ +\infty[$. Пусть $x>-1$; тогда $x+3>1$, $x+2>x+1>0$, поэтому $\log_4(x+3)>0$, $\log_4\frac{x+1}{x+2}<0$. Значит, исходное неравенство справедливо при любых $x>-1$. Если $-3<x<-2$, то $0<x+3<1$, $-1<x+2<0$, $-2<x+1<-1$ и $\log_4(x+3)<0$, $\log_4\frac{x+1}{x+2}>0$.

5. $]0;\ 2[\ \cup\ ]2;\ \frac{8}{3}[$. **Решение.** Прямая проходит через точку $M(1;\ 2)$ и пересекает график функции $y=\frac{a}{x}$ в двух точках, сумма ординат y_1+y_2 которых равна a. Уравнение этой прямой: $y = k(x-1)+2$, поэтому $\frac{y-2}{k}+1 = \frac{a}{y}$ $(k\neq0)$, откуда $y^2-(2-k)y-ak=0$ и $y_1+y_2=2-k=a$, что дает $k=2-a$ $(a\neq2)$. Уравнение $\frac{a}{x}=k(x-1)+2$ должно иметь два корня, поэтому дискриминант $D=(2-k)^2+4ak>0$, то есть $8a-3a^2>0$. Значит, $a\in\ ]0;\ \frac{8}{3}[$, $a\neq2$.

Вариант 2

1. $y_{\max}=\frac{1}{3}$ при $x=3$; $y_{\min}=-\frac{1}{3}$ при $x=-3$. График см. на рисунке 7.

2. $\left\{\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi\right\}$. 3. $\left]-\frac{4}{3};\ -\frac{17}{22}\right[$.

4. 1) $\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha-1}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-9\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

Решение. Согласно рисунку 8 $\widehat{AMC}=\alpha$, $\widehat{SAB}=\varphi$. Тогда $\vec{AS}\cdot\vec{AB}=|\vec{AS}|\cdot|\vec{AB}|\cdot\cos\varphi=2\cos^2\varphi$. Из ΔAMO $\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{AB}|=|\vec{AM}|\sin\frac{\alpha}{2}$.

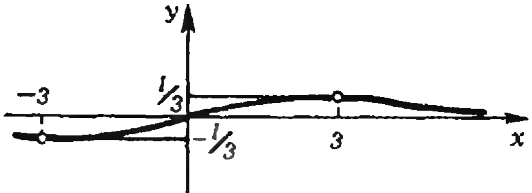


Рис. 7.

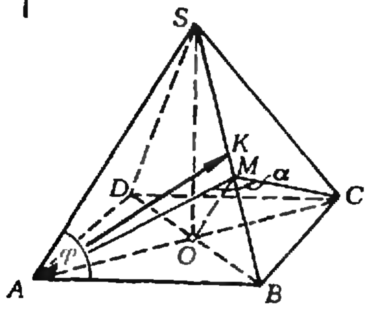


Рис. 8.

С другой стороны, из $\triangle AMB$ $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{AB}|\sin\varphi$. Значит, $\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha/2}$ и $\cos^2\varphi=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-1}$, то есть $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{2\cos\alpha}{\cos\alpha-1}$.

Поскольку $\overrightarrow{AK}=\dfrac{\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}}{2}$, $\overrightarrow{AK}^2=\dfrac{\overrightarrow{AS}^2+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}}{4}=\dfrac{9\cos\alpha-1}{4(\cos\alpha-1)}$, откуда $|\overrightarrow{AK}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-9\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

5. Если прямая $y=kx+b$ касается двух парабол $y=-x^2+4x+1$ и $y=3x^2+4x+\dfrac{7}{3}$, то каждое из двух уравнений относительно неизвестного x:

$$-x^2+4x+1=kx+b$$

и

$$3x^2+4x+\frac{7}{3}=kx+b$$

должно иметь единственный корень, то есть

$$D_1=(k-4)^2+4(1-b)=0,$$

$$D_2=(k-4)^2-12\left(\frac{7}{3}-b\right)=0,$$

откуда $k_1=2$, $b_1=2$; $k_2=6$, $b_2=2$. Имеем две прямые $y=2x+2$ и $y=6x+2$. Легко показать, что пары $(k;\ b)$, где $k\in\{3,\ 4,\ 5\}$ и $b=2$, и только эти пары, являются решениями системы неравенств $D_1<0$, $D_2<0$.

Физика

Вариант 1

2. $n=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{g}{R}}\approx 0{,}45$ об/с.

3. $I(t)=\dfrac{S|\overrightarrow{B_0}|m(t^2-n)}{R(n+t^2)^2}$;

$I_{\max}=\dfrac{S|\overrightarrow{B_0}|m}{8Rn}\approx 4{,}2$ А. Указание. Для нахождения максимального значения тока надо функцию $I=I(t)$ исследовать на экстремум.

4. $m_{O_2}=\dfrac{p_{O_2}V\mu_{O_2}}{RT}\approx 0{,}295$ кг; $m_{N_2}\approx 0{,}96$ кг; $m_{Ar}\approx 0{,}017$ кг;

$N_{O_2}=N_A\dfrac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}}\approx 0{,}55\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$; $N_{N_2}\approx 2{,}1\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$; $N_{Ar}\approx 0{,}26\cdot 10^{24}$ м$^{-3}$ (здесь $R=8{,}31$ Дж/(К · моль) — универсальная газовая постоянная, $T=273$ К — температура газов, $N_A=6{,}02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро).

5. $U=\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{hc}{\lambda}-A_{\text{вых}}\right)\approx 11{,}6$ В (здесь $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света).

Вариант 2

2. $L_{\min}=(|BO|-|AO|)\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}\approx 850$ м.

Указание. Для определения минимального расстояния надо функцию $L=L(t)$ исследовать на экстремум.

3. Нет, новая лампа не будет гореть ярче прежней.

4. $\dfrac{p_2-p_1}{p_2}=1-\dfrac{T_1}{T_2}\approx 0{,}04=40\%$.

5. Изображение точки A находится на расстоянии $4F$ от зеркала, а изображение точки B — на расстоянии $5/2\,F$ от зеркала.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. 3. 2. $]0;\ 16[$. 3. $\dfrac{2}{3}$. 4. $\left\{-\dfrac{5}{6}\pi,\ -\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi\right\}$. 5. $\pi a^3\cdot\dfrac{\sin^2\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$.

Вариант 2

1. $f(x)=2\sqrt[4]{x}-3$, $f'(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{2x}$. 2. $\{(12;\ 4)\}$.

3. $2(\sqrt{2}-1)$. 4. $x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}k$ $(k=3,\ 4,\ \ldots)$.

5. $\dfrac{\pi l^2\cos\alpha}{3\cos^2\alpha+1}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

2. $Q=A+\Delta U$; $Q=A$; $\Delta A=p\Delta V$.

3. $Q=\dfrac{m^2R}{k^2l^2}=40$ Дж.

4. $l=h\operatorname{ctg}\varphi+H\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}\approx 3{,}4$ м.

5. $\rho=\rho_{ж}\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon-1}=1{,}6\cdot 10^3$ кг/м^3.

Вариант 2

2. Нет, в общем случае не совпадает.

3. $I=\dfrac{mg}{|\overrightarrow{B}|l}=0{,}98$ А.

4. Из уравнения $I^2r-I\mathcal{E}+P=0$ получаем $i_1=1{,}5$ А и $I_2=0{,}5$ А.

5. $|\overrightarrow{F}|=2/3mg\sin\alpha=65{,}3$ Н.

Задачи устного экзамена

1. $x=\dfrac{|\overrightarrow{F}|}{2k}=0{,}05$ м.

2. $\Delta T = T\frac{2x}{l-x} = 404$ К

3. $r = \sqrt[3]{\frac{3eU}{4\pi d\varrho g}} \approx 3{,}5\cdot 10^{-[illegible]}$ м.

4. $\mathscr{E} = U\left(1+\frac{n(R_{\text{пр}}+r)}{R}\right) \approx 242$ В;

$U_{\text{э}} = U\left(1+\frac{nR_{\text{пр}}}{R}\right) \approx 227{,}3$ В.

5. $S' = S\frac{F^2}{(d-F)^2} = 2{,}5$ м².

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $\left\{10, \frac{13}{4}\right\}$.

2. Указание. Легко видеть, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 20. Пусть теперь l и m — серединные перпендикуляры его сторон AB и BC, O — его центр. Прямоугольник $ABCD$ переходит в себя при перемещениях E, S_l, S_m и Z_O.

3. $x_1 = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $x_3 = \pm\left(\pi - \arccos\frac{2}{3}\right)+2\pi m$ $(k,\ l,\ m\in \mathbf{Z})$; наименьшее расстояние между его положительными корнями равно $\frac{\pi}{6}$. Указание. $\frac{\pi}{4} < \arccos\frac{2}{3} < \frac{\pi}{3}$.

4. 0,37; tg 33°; 1; 65/63; 61/59; tg (—314°). Указание.

$$\operatorname{tg}(-314^\circ) = \operatorname{tg}46^\circ = \frac{1+\operatorname{tg}1^\circ}{1-\operatorname{tg}1^\circ} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}} > \frac{1+\frac{\pi}{180}}{1-\frac{\pi}{180}} > \frac{1+\frac{1}{60}}{1-\frac{1}{60}} = \frac{61}{59}.$$

5. $S(-1) = \frac{125}{6}$, $\min S(k) = S(2) = \frac{32}{3}$.

Вариант 2

1. $\left\{\frac{9}{2}\right\}$ 2. Площадь $\triangle ABC$ равна $\frac{29}{2}$. Перемещения, переводящие $\triangle ABC$ в другой данный треугольник, — это Z_O и $Z_O\cdot S_l$ (l — ось симметрии $\triangle ABC$). 3. $x_1 = k$ $(k\in\mathbf{Z})$, $x_2 = \frac{-1\pm\sqrt{4l+3}}{2}$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$; искомый член равен $\frac{\sqrt{23}-1}{2}$. 4. 0; $\ln\frac{7}{5}$; $\frac{11}{30}$; $\sqrt{0{,}8}$; 0,9186; 1,2. Указание. $\ln\frac{7}{5} = \ln 7 - \ln 5 =$

$$=\int_5^7\frac{dx}{x} = \int_5^6\frac{dx}{x}+\int_6^7\frac{dx}{x} < \frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{11}{30}.$$

5. Наименьшее расстояние получается при $x_0=0$ и равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. $\left]0;\ \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4};\ +\infty\right[$. 2. $\frac{23}{11}$. 3. $\frac{45}{4}$.

4. $\frac{a^2-b^2}{8\sqrt{ab}}$. Указание (рис. 9). Пусть O_1 и O_2 — центры вписанной и описанной окружностей соответственно, EF — средняя линия трапеции. Найдите длины отрезков EG, GO_1, EO_1 и воспользуйтесь подобием треугольников EGO_1 и EO_1O_2.

5. $a<-7$, $a=-5$. Указание. Из первого уравнения получаем, что $\sin 2x=0$, либо $\sin 2x=-1$. Преобразуем второе уравнение. Полагая $y=\sin 2x$, получим уравнение $y\cdot(2y^2+|a+3|y-(a+5))=0$. Для корней y_1 и y_2 уравнения $2y^2+|a+3|y-(a+5)=0$ возможны три случая: а) $y_1=-1$, $y_2=0$; б) $y_1=y_2=-1$; в) $y_1=-1$, $|y_2|>1$.

Вариант 2

1. $x=\pm\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. 2. $]-\infty;\ 2-\sqrt{2}[\ \cup\ ]2+\sqrt{2};\ +\infty[$. 3. $\left\{\frac{11}{6}\right\}$. Указание. Областью определения левой части уравнения является отрезок $\left[\frac{7}{5};\ \frac{5}{2}\right]$, поэтому $\frac{7}{5}<\frac{a}{6}<\frac{5}{2}$, то есть $9<a<15$. 4. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. Указание. Проведите касательную к параболе, параллельную прямой $y=-2x+1$.

5. $V=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Указание (см. рис. 10). Пусть $(SO)\perp(ABC)$. Тогда $\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AS}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS}$. Для нахождения чисел α и β воспользуйтесь соотношениями $\overrightarrow{SO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ и $\overrightarrow{SO}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

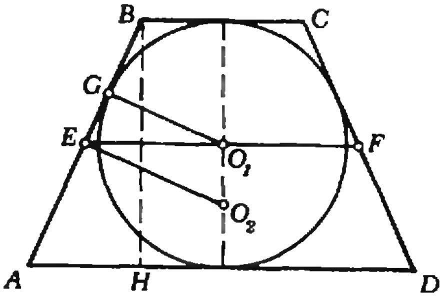


Рис. 9.

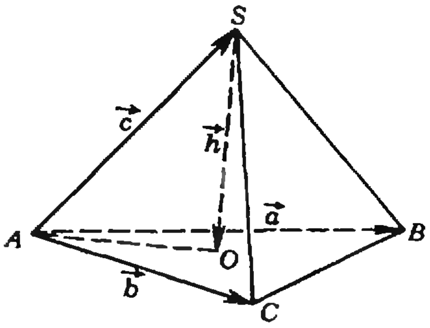


Рис. 10.

Физика

1. $t=\sqrt{\dfrac{l}{|\vec{a}|\cos\alpha}}\approx 1{,}7$ с.

2. $p_M=\rho\,(gh+|\vec{a}|L)\approx 4{,}3\cdot 10^3$ Па (здесь $\rho=10^3$ кг/м³ — плотность воды).

3. $|\vec{v}|=\sqrt{2gh}$.

4. Экран нужно отодвинуть от линзы на расстояние $l=a\,(1-1/n)=1$ см.

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Вариант 1

1. $\left\{8,\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right\}$. 2. $x=\dfrac{(-1)^{k+1}}{2}\arcsin(\sqrt{2}-1)+\dfrac{\pi}{2}k\ (k\in\mathbf{Z})$. 3. $]-\infty;\,-1[\,\cup\,[4;\,+\infty[$. 4. $(\widehat{\vec{a};\,\vec{b}})=\dfrac{\pi}{2}$, длина диагонали прямоугольника равна $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$. 5. $\min\limits_{[-5,\,-1]}y=y(-1)=-\dfrac{10}{3}$, $\max\limits_{[-5,\,-1]}y=y(-3)=-2$.

Вариант 2

1. $x_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k,\ x_2=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi l\ (k,\,l\in\mathbf{Z})$. 2. $]1;\,+\infty[$. 3. $\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$. 4. $\dfrac{\pi}{4}$. Указание. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$. 5. Функция возрастает на $\mathbf{R}$.

Физика

1. $s=|\vec{v}_0|^2/g-|\vec{v}_0|t+gt^2/2\approx 41{,}6$ м.
2. $|\vec{T}|=mg\,(3-2\cos\alpha)\approx 20$ Н.
3. $t=T/12=0{,}25$ с.
4. $h_{\text{в}}=\Delta h\rho/\rho_{\text{в}}=2{,}72\cdot 10^{-1}$ м (здесь $\rho_{\text{в}}=1$ г/см³ — плотность воды).
5. $N=N_{\text{A}}\dfrac{pV}{RT}\approx 2{,}7\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$;

$m=\mu/N_{\text{A}}\approx 3{,}3\cdot 10^{-27}$ кг (здесь $\mu=2\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса водорода).

6. $A=(pS+Mg)\,h\Delta T/T=30$ Дж.
7. $\varphi'=\varphi\dfrac{r}{r+l}=50$ В.
8. $I_{\text{м}}=|\vec{B}|l^2\omega/R=6\cdot 10^{-3}$ А.
9. $H=nh=4/3$ м $\approx 1{,}3$ м.
10. $m=\dfrac{hc}{\lambda}\approx 3{,}7\cdot 10^{-36}$ кг.

Московский архитектурный институт

Математика

1. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Указание. Проведите плоскость AD_1C_1B, опустите перпендикуляр MN на (BD_1) и докажите, что $(MN)\perp(B_1C)$ (рис. 11).
2. Воспользуйтесь формулами $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ и $\sin\alpha\times\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$.
3. 8, 10, 12; 17, 10, 3.
4. $\left\{\dfrac{\lg 3-\lg 5}{\lg 2},\ \dfrac{\lg 2-\lg 5}{\lg 2}\right\}$.

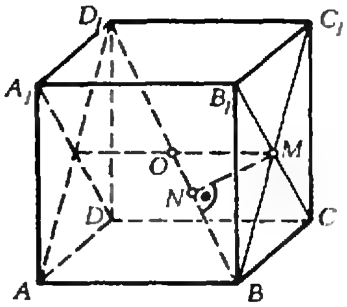


Рис. 11.

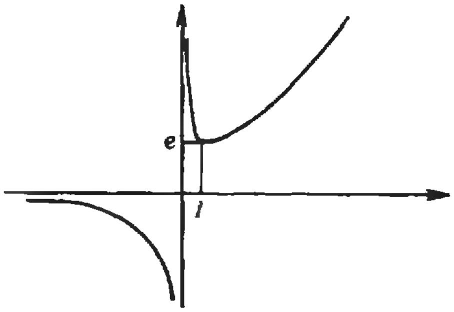


Рис. 12.

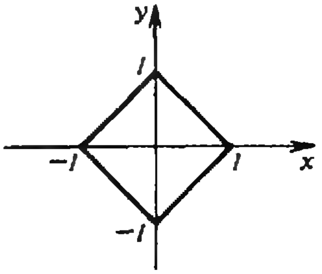


Рис. 13.

5. $\dfrac{3}{2}$. Указание. Домножьте числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\times(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})$.
6. См. рис. 12.
7. $\sqrt[3]{4V}$. Указание. Пусть a — длина стороны основания, h — высота призмы, S — полная поверхность. Тогда $h=\dfrac{4V}{a^2\sqrt{3}}$ и $S(a)=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\dfrac{4V}{a\sqrt{3}}$.
8. См. рис. 13.

Физика

1. $|\vec{T}_{AB}|=m_1g\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\approx 122$ Н;

$$m_2=m_1\left(\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos\beta\right)\approx 135\ \text{кг}.$$

2. $0<T=2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\alpha}{g}}<2$ с.
3. $|\vec{v}|=2\sqrt{c(t_{\text{пл}}-t)+\lambda}=507$ м/с.
4. $I_1=\dfrac{\mathcal{E}_1(r_2+R)-\mathcal{E}_2R}{r_2(r_1+R)+r_1R}=1{,}5$ А;

$I_2=\dfrac{\mathcal{E}_1-I_1(r_1+R)}{R}=0{,}5$ А; $I_3=I_1+I_2=2$ А.

5. $\delta=2\gamma$.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. $q = \frac{1}{2}$, $a = 16$ 2. $\frac{R}{\sqrt{13}}$ 3. $x_1 = \frac{\pi}{2}k$, $x_2 = (-1)^l\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5}l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$ 4. $]-\infty, 1[$
5. $]0, 4[$

Вариант 2

1. $d = 4$, $a = 8$ 2. $\frac{a}{4}$ 3. $\max f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$, $\min f(x) = f(1) = -17$
4. $\{2\}$ 5. $\frac{9}{2}$

Физика

1. $t_1 = \frac{|\vec{v}_0|}{g} + \frac{\tau}{2} = 6$ с, $h = \frac{|\vec{v}_0|^2}{2g} - \frac{g\tau^2}{8} = 120$ м
2. $H = 2R/3$
3. $|\vec{F}_{\text{ср}}| = \frac{m^2|\vec{v}_0|^2}{2Ms} = 12{,}5$ кН
4. $m_{\text{вып}} = \frac{pV\mu_{H_2}}{RT} - m\frac{\mu_{H_2}}{\mu_{H_2O}} \approx 0{,}076$ кг $= 76$ г
5. $h = \frac{(3^3-1)p_0}{\varrho g} = 260$ м
6. а) Параллельно прибору надо включить шунт сопротивлением $R_{\text{ш}} = R\frac{nU_0}{IR - nU_0} = 1{,}01$ Ом, б) последовательно с прибором надо включить дополнительное сопротивление $R_{\text{доп}} = R\left(\frac{U}{nU_0} - 1\right) = 37425$ Ом
7. $l = \frac{m(g + |\vec{v}|/t)}{|\vec{B}|I\sin\alpha} = 6$ м
8. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{n_2}{n_1}$
9. $n = \sin\alpha/\sin\varphi \approx 1{,}4$
10. Неизвестным элементом является изотоп азота $^{14}_{7}N + ^{1}_{1}p \rightarrow ^{15}_{8}O$, $^{15}_{8}O \rightarrow ^{0}_{1}e + ^{15}_{7}N$

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. академика И. М. Губкина

Математика

1. $\frac{3}{4}$ 2. $-\frac{4}{3}$ 3. Через 2 часа Указание Пусть в момент времени t машины находятся в точках M_1 и M_2 Тогда $|M_1M_2|^2 = |M_1B|^2 + |BM_2|^2 - |M_1B|\cdot|M_2B|$
4. $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ Указание Если α — один из острых углов треугольника, то длина гипотенузы равна $\frac{l}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$ Исследуйте затем эту функцию с помощью производной на интервале $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ 5. $\{-4, -3, 3, 4\}$

Физика

1. $A_{\min} = \varrho gSh^2/8 = 200$ Дж
2. $T_2 = T_1\sqrt{V_1/V_2} = 150$ К, $t_2 = -123°$ С
3. $\frac{e}{m} = \frac{|\vec{E}|^2}{2U|\vec{B}|^2} \approx 1{,}8\cdot10^{11}$ Кл/кг
4. $U_з = U_г = \sqrt{2}U\sin\pi\left(\frac{1}{2} - \tau\nu\right) = 127$ В
5. $n = H/h = 1{,}5$

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Математика

Вариант 1

2. $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$ 3. $2\sqrt{5}$ 4. $\{(6, 10), (10, 6)\}$ 5. 1 Указание Если O — основание высоты пирамиды и $[OH]$ — высота треугольника ASO, то $(OH)\perp(BD)$

Вариант 2

1. $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ 2. $\{2\}$ 3. Основания — 4 см и 8 см, боковые стороны — по $2\sqrt{2}$ см 4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_2 = (-1)^l\frac{\pi}{6} + \pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$ 5. $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$

Физика

1. $|\vec{a}| = g\frac{m_2}{m_1 + m_2} = 2{,}5$ м/с², $|\vec{T}| = \frac{m_1m_2g}{m_1 + m_2} = 7{,}5$ Н
2. $|\vec{v}_1'| = \frac{m_1|\vec{v}_1| - m_2|\vec{v}|}{m_1} = 1$ м/с
3. $|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{a}|l} \approx 89$ м/с
4. $T = \Delta T/n = 350$ К
5. $T = pV\mu/(mR) \approx 276$ К
6. $m_2 = m_1\frac{c_1\Delta t}{c_2(t_2 - t_1 - \Delta t)} \approx 3$ кг
7. $|\vec{F}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4}} \approx 0{,}29$ Н
8. $I = \frac{I_1I_2(R_2 - R_1)}{I_2R_2 - I_1R_1} \approx 0{,}47$ А
9. $\Gamma = f/F - 1 \approx 32$
10. $\beta = \arcsin\frac{\sin(90° - \alpha)}{n} \approx 41°$

Ростовский государственный университет (механико-математический факультет)

(см «Квант» № 6)

Математика

Вариант 1

1. $\frac{1}{3}H$ 2. $\{-\log_2 3\}$ 3. $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$

Вариант 2

1. $\frac{2}{3}\sqrt{3}R$ 2. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{15}{32}\right)$ 3. $]\log_2(5+$

$+\sqrt{33})-1;\ +\infty[$. 4. $\left\{\frac{\pi}{8}\right\}$.

Вариант 3

1. $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$. 2. $p=1,\ q=1$. 3. $]-\infty;\ -1[\,\cup\,]-\frac{1}{10};\ 0[$. 4. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_2=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi l,\ x_3=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m\ \ (k,\ l,\ m\in\mathbf{Z})$.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

(см. «Квант» № 6)

Математика

Вариант 1

1. $2\frac{2}{3}$. 2. Уравнение не имеет решений. 3. $X\in\ ]-\sqrt{5};\ -2[\,\cup\,]1;\ \sqrt{5}[$. 4. $|BD|=2\sqrt{6}$. 5. $\arccos\frac{a\sqrt{17}}{\sqrt{17a^2+2h^2}}$. 6. $X=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$.

Вариант 2

1. 12. 2. См. рисунок 14. 3. 4, 5. 4. $V=\frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}};\quad S_{\text{б}}=a^2\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$. 5. $x=\frac{\pi}{4}(1+(-1)^k)+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

Физика

1. $t=(2+\sqrt{2})\tau\approx3{,}4$ с; $h=gt^2/2\approx58$ м.
2. $\omega=\sqrt{\mu g/R}\approx0{,}7$ рад/с.
3. $Q=m|\vec{a}|^2t^2/2=2\cdot10^8$ Дж.
4. $t=\frac{m_3(r+ct_3)-\lambda m_2}{c(m_1+m_2+m_3)}\approx13{,}3°$ С.
5. $h=\frac{|\vec{v}_0|^2-4\lambda}{2g}=3\cdot10^3$ м.
6. $T=2T_0=546$ К.
7. $A=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\approx1{,}2\cdot10^{-5}$ Дж.
8. $I_0=I(R+r)/R=5{,}025$ А.
9. $U_1=U_2=U/3\approx73$ В; $U_3=2U/3\approx147$ В; наибольшая мощность выделяется в третьей лампочке.
10. $I=\frac{c\rho V(t_2-t_1)}{\eta U\tau}100\%\approx11$ А (здесь $\rho=10^3$ кг/м³ — плотность воды).

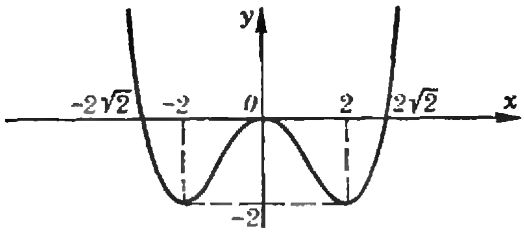


Рис. 14.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

(см. «Квант» № 6)

Математика

Вариант 1

1. n^2/m^2. 2. $x=14$. 3. $S=4-\frac{3}{2\ln2}$. 4. Точки максимума $x_{\max}=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; при этом $y_{\max}=\frac{\pi}{3}+k\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$. Точки минимума $x_{\min}=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; при этом $y_{\min}=-\frac{\pi}{3}+k\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 5. Объем пирамиды равен

$$\frac{V}{4\pi}\,\frac{\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{tg}^3\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)}.$$

Вариант 2

1. 1. 2. $\{(2;\ 4),\ (4;\ 2)\}$. 3. $x_{1,2}=2\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$. 4. $y=2$. 5. $V=\frac{1}{4}Sd\cos\frac{\alpha}{2}$.

Физика

1. $|\vec{v}_{\max}|=\frac{2s}{2s/v_{\text{ср}}-t_1-t_2}\approx58{,}3$ км/ч $\approx16{,}2$ м/с.
2. $\Delta\varphi=2\pi l\nu/v=\pi$.
3. $m=\frac{pV\mu}{RT}\approx0{,}13$ г (произведение pV определяется из рисунка к условию задачи).
4. $m=(\rho_{\text{н}1}r/100\%-\rho_{\text{н}2})\,Sh\approx1{,}6\cdot10^7$ кг.
5. $q=mgd/U\approx8{,}2\cdot10^{-16}$ Кл.
6. $I=\frac{n\mathcal{E}}{R+nr+\rho l/S}\approx0{,}09$ А; $U=IR\approx8{,}1$ В.
7. $I=\frac{mgh}{\eta Ut}\approx30$ А (здесь $\eta=0{,}9$).
8. $t=\frac{\rho d}{kj}\approx9\cdot10^4$ с ≈25 ч.
9. $L=\frac{T}{2\pi}\sqrt{\mathcal{E}^2_{\max}/I^2_{\max}-R^2}\approx0{,}01$ Гн.
10. $f=\frac{d}{Dd-1}=0{,}6$ м $=60$ см.

Заочная школа программирования

(см. «Квант» № 3)

Урок 7

7.1 Ответ: 7.

```
7.2 0—>X; ПОКА X=<6.29::
    ПЕЧАТЬ ('X=',X,' COS(X)=',
    COS(X),'SIN(X)=',SIN(X));
    X+0,1—>X ВСЕ;
```

```
7.4 ПРОЦ КАМЕНЬ T V=>H;
    V*T—(G*T!2)/2—>H;
    КНЦ;
    9.81—>G;V!2/(2*G)—>МАКС;
    Р(2*V/G, МАКС);П(0,0);
    ПОКА T=<МАКС ::Л(T,КАМЕНЬ(T));
    ПЕЧАТЬ('T=',T,' H=',КАМЕНЬ(T));
    T+0.1—>T ВСЕ;
    .КОНЕЦ;
7.5 Ответ: 'САРДЕЛЬКА'
7.6 'КАРАУЛ'—>X;X[5]+X[3:4]—>X;
```

Урок 8

```
8.1 ИМЯ          ЗНАЧЕНИЕ
    A      <•'КИНОКАДР', 'КЕДР',
           'ДРАКОН'•>
    B      <•<•'КИНОКАДР,',КЕДР',
           'ДРАКОН'•>, 14,23•>
8.2 КАК ВЫ НИ САДИТЕСЬ...
    ПРОИЗВЕДЕНИЕ НЕ МЕНЯЕТСЯ
8.3 ≠КЕНГУРУ-2
    <•РУ, КРОЛИК, ВИННИ-ПУХ•>
    КУДА УБЕЖАЛ ПЯТАЧОК?
8.4 ЗЕБРА БЕЛКА
8.5 ДЛЯ УЧ ИЗ ШКОЛА ::
    ЕСЛИ УЧ[6]=1969 ТО
    ПЕЧАТЬ (УЧ[1],' ',УЧ[2],' ',УЧ[7],
    '',УЧ[4],'/',УЧ[5],' ',УЧ[6])
    ВСЕ
    ВСЕ;
```

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 6)

1. Сf6!! Ф:h5 2. Л:g7+ Крh8 3. Л:f7 + (жернова мельницы заработали) **3...Крg8 4. Лg7+ Крh8 5. Л:b7+ Крg8 6. Лg7+ Крh8 7. Лg5+** (седьмой ряд черных достаточно разрушен, теперь белые возвращают ферзя, брать пешку а7 не имело смысла) **7...Крh7 8. Л:h5 Крg6 9. Лh3 Кр:f6 10. Л:h6+**. Черные сдались, так как у них не хватает целых трех пешек.

2.1. Фg4!! Пользуясь слабостью последней горизонтали черных (они забыли сделать «форточку»), белые хотят отвлечь их ферзя от защиты ладьи на е8 — 1...Ф:g4 2. Л:е8+ с матом. **1...Фb5** (единственное поле для отступления ферзя) **2. Фс4!!** (эффектное продолжение темы отвлечения) **2...Фd7 3. Фс7!! Фb5 4. а4!** (поспешное 4. Ф:b7? губило все старания — 4...Ф:е2!, и мат получают уже белые: 5. Л:е2 Лс1+ 6. Ке1 Л:е1+7. Л:е1 Л:е1×) **4...Ф:а4 5. Ле4! Фb5 6. Ф:b7!** (белая ладья покинула поле е2, и теперь это взятие решает). Черные сдались.

Задачи наших читателей

(См. «Квант» № 6, с. 13)

5. Поскольку p — нечетно, $p^{60}-1$ делится на 4. Согласно Малой теореме Ферма (*если p — простое число и a не делится на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p*), разность $p^{60}-1$ при $p>11$ делится на 5 и 11. По той же теореме разность $p^{20}-1$ делится на 3, откуда легко вывести, что $p^{60}-1$ делится на 9. Поэтому $p^{60}-1$ делится на $4\cdot5\cdot9\cdot11=1980$.

6. Поскольку $199879=101\cdot1979$ и числа 101 и 1979 взаимно просты, достаточно доказать, что данное выражение одновременно делится на 101 и 1979.

Делимость на 1979 вытекает из следующего представления:

$$1979^{100}-(1978^{100}-1^{100})+(1977^{100}-2^{100})-$$
$$-(1976^{100}-3^{100})+\dots-(990^{100}-989^{100})$$

(каждая разность $a^{2n}-b^{2n}$ делится на $a+b=1979$).

Для доказательства делимости на 101 заметим, что в данном выражении имеется 10 чисел

$$101^{100},\ 303^{100},\ \dots,\ 1919^{100},$$

делящихся на 101 со знаком «плюс», и 9 чисел

$$202^{100},\ 404^{100}\ \dots,\ 1818^{100}$$

— со знаком «минус», так что среди оставшихся 1960 чисел имеется по 980 чисел со знаками «плюс» и «минус». Поэтому данное выражение можно (прибавив и отняв по 980 единиц) представить в виде

$$(1^{100}-1)-(2^{100}-1)+(3^{100}-1)-\dots$$
$$\dots+(1979^{100}-1)+101\,A,$$

где каждая из разностей делится на 101 (см. Малую теорему Ферма́, упомянутую в решении задачи 5).

(см. «Квант» № 6, 3-ю с. обложки)

1. Среди медных монет (1, 2, 3 и 5 коп) двухкопеечная является единственной «четной монетой». Кроме того, нечетным количеством нечетных монет нельзя составить четную сумму, а их четным количеством — нечетную сумму. Поэтому если числа M и N имеют разные четности, в копилке должна быть наверняка хоть одна двухкопеечная монета (более того, двухкопеечных — обязательно нечетное количество). В случае же, если числа M и N имеют одинаковую четность, то двухкопеечная может как быть, так и не быть (а если двухкопеечные монеты есть, то их обязательно четное количество; заметим, что две двухкопеечные монеты могут быть заменены однокопеечной и трехкопеечной монетами без изменения количества и суммы монет).

2. Средний срок службы лампочки можно довести до двух месяцев. Для этого нужно включить свет в первый вечер и выключить в четвертый вечер и так далее. В течение двух месяцев лампочка будет гореть в среднем месяц и будет включаться и выключаться около 30 раз. Такой режим обеспечивает, очевидно, максимальный срок службы лампочки.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. На билет в кино школьник истратил не менее 30 коп; за обед он заплатил в два раза больше, то есть не менее 60 коп. Но так как обед был оплачен тремя монетами, получаем, что обед стоил ровно 60 коп., а билет в кино 30 коп. Учитывая теперь, что двадцатикопеечных монет у школьника было больше, чем пятнадцатикопеечных, находим, что у него было две монеты по 15 коп. и шесть монет по 20 коп.

2. См. рисунок 15.

Поправка. По вине типографии в диаграмму к партии Рети — Тартаковер вкралась ошибка: на поле b8 должен стоять черный конь.

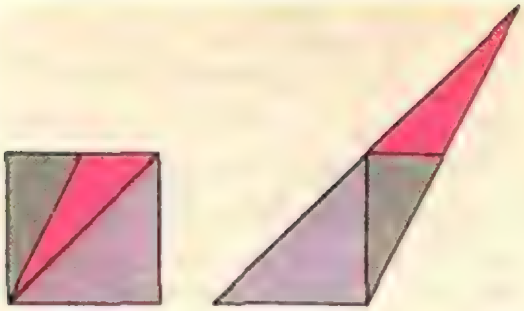


Рис. 15.

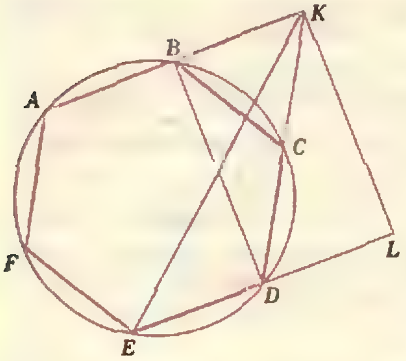


Рис. 16

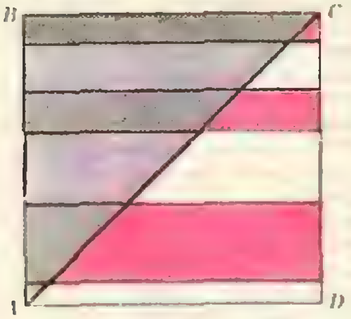


Рис. 17

3. Соединим точки B и D (рис. 16). Треугольник BDK — прямоугольный, причем $|BK| = 1$, $|DK| = 2$. По теореме Пифагора

$$|BD| = \sqrt{|DK|^2 - |BK|^2} = \sqrt{3}.$$

Треугольник ELK — тоже прямоугольный, причем $|EL| = 2|DE| = 2$, $|KL| = |BD| = \sqrt{3}$. Поэтому

$$|EK| = \sqrt{|EL|^2 + |KL|^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}.$$

4. $5329 = 73^2$.

5. Обозначим площадь квадрата через S. Тогда суммарная площадь серых и красных «полосок» (рис. 17) равна $S/2$. Но и площадь треугольника ABC равна $S/2$. Поскольку треугольник ABC составлен из серых и синих «полосок», получаем, что суммарная площадь синих «полосок» та же, что суммарная площадь красных «полосок».

Головоломка «Цветной кубик»
(см. «Квант» № 5, 2-ю с. обложки)
См. рисунки 18, 19.

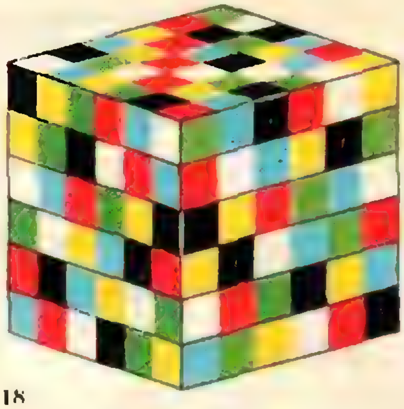


Рис. 18

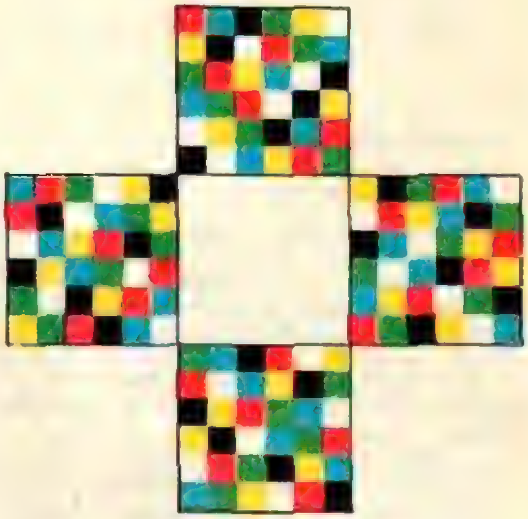


Рис. 19

Номер готовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Румянцева

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 20/V-80
Подписано в печать 2/VII-80
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,06. Т-13048
Цена 30 коп. Заказ 1187. Тираж 260 103 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Шахматный конкурс «Кванта»

В этом номере журнала открывается шахматный конкурс. Вам будут предложены различные шахматные задачи, этюды, комбинации и головоломки. Мы будем стремиться к тому, чтобы задачи и позиции конкурса служили как бы дополнением и иллюстрацией к материалам «Шахматной странички», выпускаемой в том же номере журнала.

В этом году шахматный конкурс «Кванта» будет состоять из шести туров.

Итоги конкурса будут подведены в мае 1981 года. Победители конкурса будут награждены шахматной и математической литературой с автографом чемпиона мира по шахматам Анатолия Карпова.

Читатели журнала, которые придумают свои собственные интересные задачи с шахматно-математическим сюжетом, получат дополнительные очки.

Решение конкурсных заданий следует присылать в одном экземпляре, в отдельном конверте по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, «Квант». На конверте обязательно должна быть пометка «Шахматный конкурс № 7-80».

Крайний срок отправления ответов на конкурсные задания этого номера — 31 августа 1980 г.

ГЛАВНЫЙ ГЕРОЙ —
КОНЬ

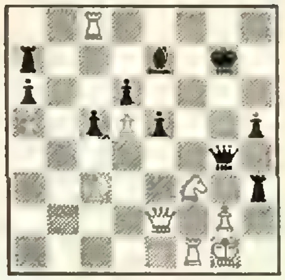
Задача 1 — позиция из партии А. Карпова, игранная им с Жолдошем в 1973 году в Венгрии. Эффектный удар, который провел здесь будущий чемпион мира, сразу решил исход поединка.

Найдите его.

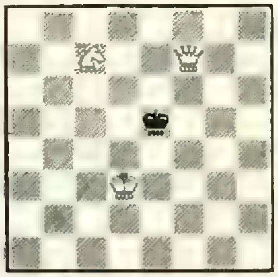
Задача 2, составленная почти сто лет назад, в 1885 году, принадлежит известному немецкому проблемисту В. Шинкману. В № 2 за 1980 год мы приводили одну любопытную головоломку Шинкмана, связанную с перестановкой фигур на доске. Данная задача представляет собой настоящее шахматное произведение, так сказать, без «фокусов».

Задача 3 В. Королькова не совсем обычная. Мат в один ход здесь могут поставить и белый, и черный конь. Задача состоит в том, чтобы выяснить, чей сейчас ход. Если белые и черные сделали поровну ходов, то мат ставят белые. Если же белые сделали на ход больше, то тогда, очевидно, их король получает мат. Вам придется произвести соответствующий расчет.

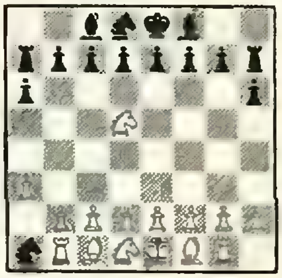
Задача о путешествии коня по всем полям шахматной доски является классической как в занимательной математике, так и в занимательных шахматах. Ей посвящена обширная литература (см., например, «Квант», 1971 г., № 9). В задаче 4, которую мы предлагаем вам решить, доска довольно необычная; прежде чем обходить ее конем, подумайте, можно ли это сделать.



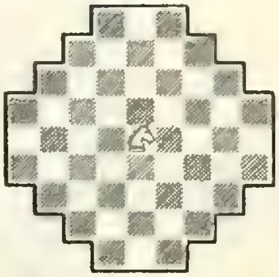
1. Белые начинают и выигрывают.



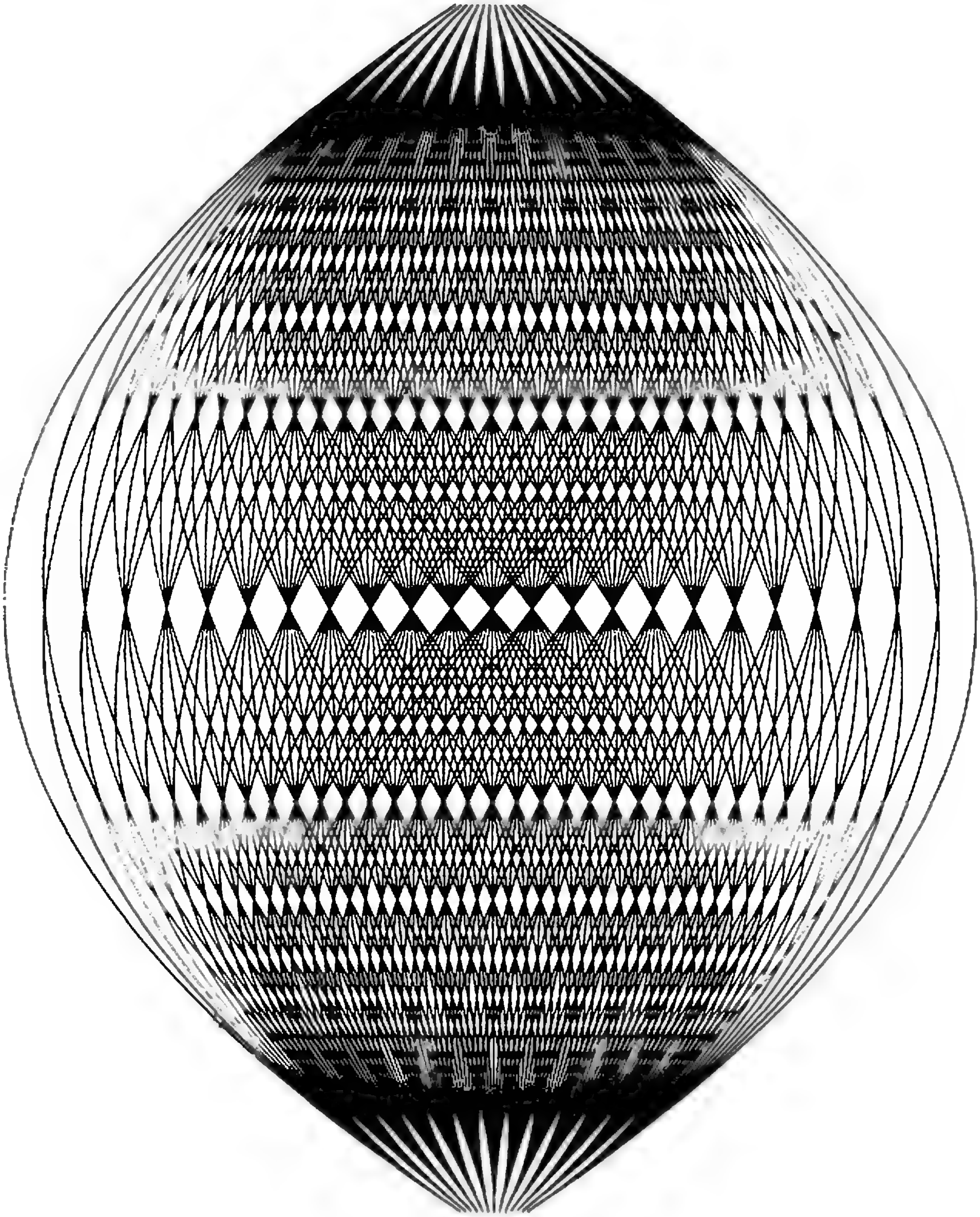
2. Мат в 3 хода.



3. Мат в 1 ход.



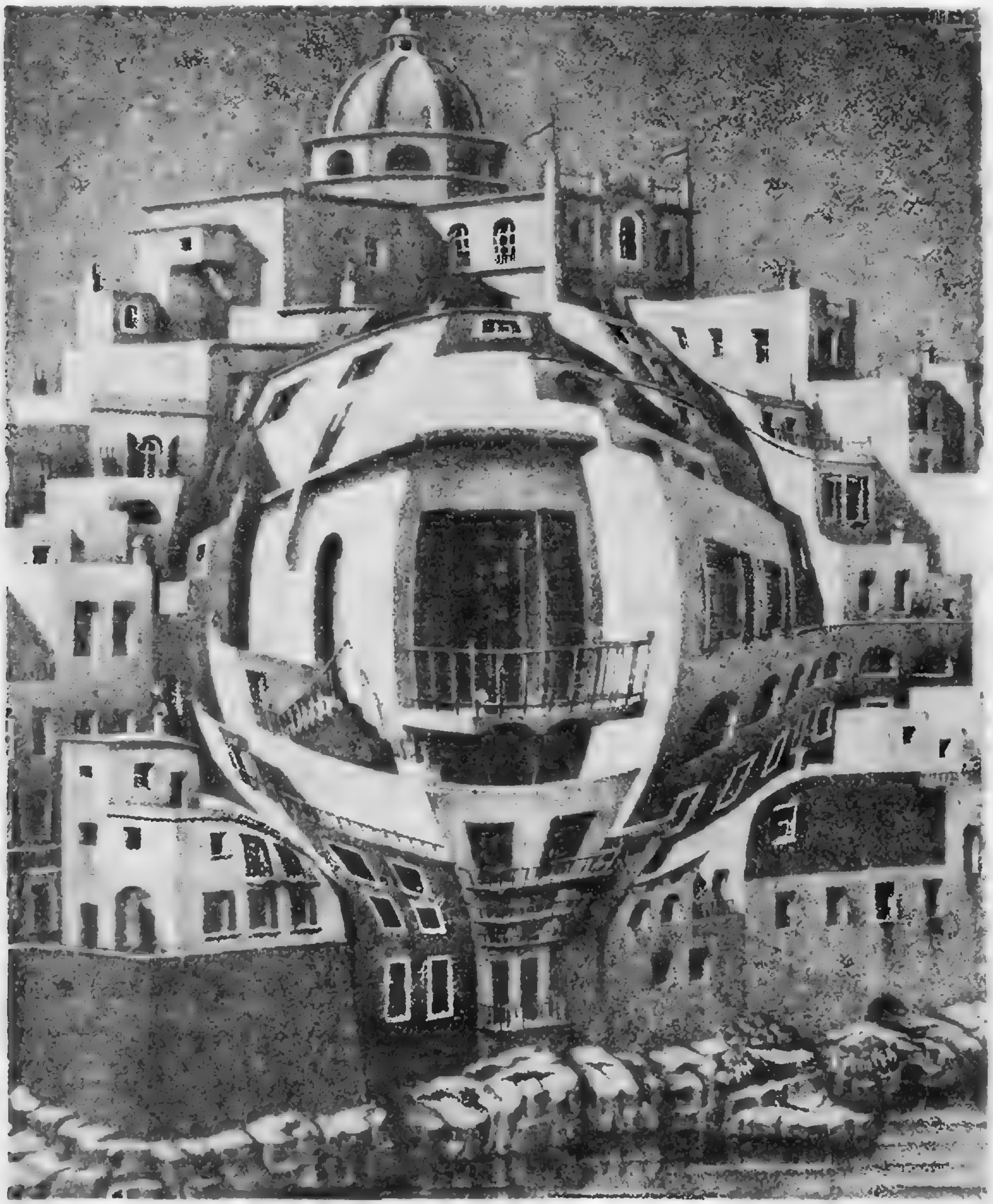
4. Может ли конь обойти все поля этой доски, посетив каждое из них по одному разу?



По поводу этого узора, нарисованного ЭВМ, см. с. 18

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Как многие произведения голландского художника Эшера, эта гравюра больше всего поражает воображение математиков и физиков. Глядя на нее, нам сразу хочется спросить — каким образом художник «увидел» сферически выпуклый кусок сказочного города? Физик, любящий оптику, наверное, предложит такой ответ — автор смотрел на свой город через стеклянную пластину, плоско параллельную по краям и утолщенную в центре (вроде линзы, но не сферической, а с переменной кривизной). Геометр, возможно, подумает, что геометрия пространства на глазах художника «сошла с ума» и из евклидовой по краям превратилась в сферическую в центре. А математик-тополог скажет, наверное, что картина была нарисована правильно на тонкой резиновой пленке, а хитрец-автор подкрался к ней сзади и стал раздувать, как мыльный пузырь. А вы как воспринимаете эту странную гравюру Эшера?



НОМЕР
8

Основан в 1970 году

КВАНТ

8
1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам главного редактора)
Н. А. Патрикеева
Н. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

На первой странице обложки изображена «невозможная решетка», основанная на знаменитом треугольнике Пенроуза («Квант» 1979 № 2 с. 8). Эскиз решетки прислал нам читатель военнослужащий Ю. Кизилов

В НОМЕРЕ:

2 *А. Сосинский.* Перемещения пространства
8 *В. Болтянский.* Оптика черных дыр
12 *Я. Смородинский, А. Урнов.* Эффект Доплера
18 *Г. Тирзиманова.* Стихотворение Лобачевского

Лаборатория «Кванта»

20 *А. Дозоров.* Физика без приборов

Математический кружок

23 *А. Вайнтроб.* Лучше — поровну

Задачник «Кванта»

26 Задачи М636—М640; Ф648—Ф652
28 Решения задач М579—М582, М584, М586—М594, М597; Ф589—Ф598
45 Письмо в редакцию
46 Спрашивайте — отвечаем

«Квант» для младших школьников

47 Задачи
48 *Д. Алексеев.* Физика в каникулы

Рецензии, библиография

51 *Е. Левитан.* Школьникам об астрономической картине мира
51 *И. Бровиков.* Задачи комбинаторики
52 *Е. Гик.* Серии — 14 лет

Информация

53 *В. Каслин, А. Стародуб.* Праздник юных физиков
57 *Е. Юносов.* Турнир юных физиков
58 *А. Криворучко, А. Фильков.* Олимпиада ОмПИ+МФТИ
60 Заочная физическая школа
61 Дополнительный прием в заочные математические школы
61 Вечерняя физическая школа
62 **Шахматная страничка**
63 **Ответы, указания, решения**
Шахматный конкурс *(3-я с. обложки)*
Смесь *(7, 11, 45)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1980

А. Сосинский

Перемещения пространства

В этой статье я хочу рассказать вам, какие бывают перемещения пространства. Сперва напомню: *перемещением* пространства называется отображение f пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками. Это значит, что для любых точек A, B

$$|AB| = |A'B'|, \qquad (1)$$

где $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.

Примеры вы, конечно, знаете — это симметрии (центральная, осевая, относительно плоскости) и параллельный перенос $\vec{a}$; легко сообразить, что перемещением будет и поворот R_l^φ вокруг прямой l на данный угол φ (рис. 1). Наша задача состоит в том, чтобы перечислить все перемещения пространства, подобно тому как это было сделано для плоскости в статье В. Болтянского «Перемещения плоскости» («Квант», 1980, № 3).

Из определения легко вывести, что *перемещение переводит прямую в прямую, плоскость в плоскость, окружность в конгрузнтную окружность, угол в конгруэнтный угол* и т. д.

Перемещения и ориентации

На плоскости ориентация задается указанием одного из двух возможных направлений вращения — «по часовой стрелке» или «против часовой стрелки». Обычно направление «против часовой стрелки» называется *положительным*, «по часовой стрелке» — *отрицательным*.

В пространстве тоже есть две ориентации: одна задается правым буравчиком (таков, например, обычный штопор), другая — левым (рис. 2).

Математики не очень любят говорить про буравчики — ориентацию пространства они предпочитают задавать указанием некомпланарной тройки векторов $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$.

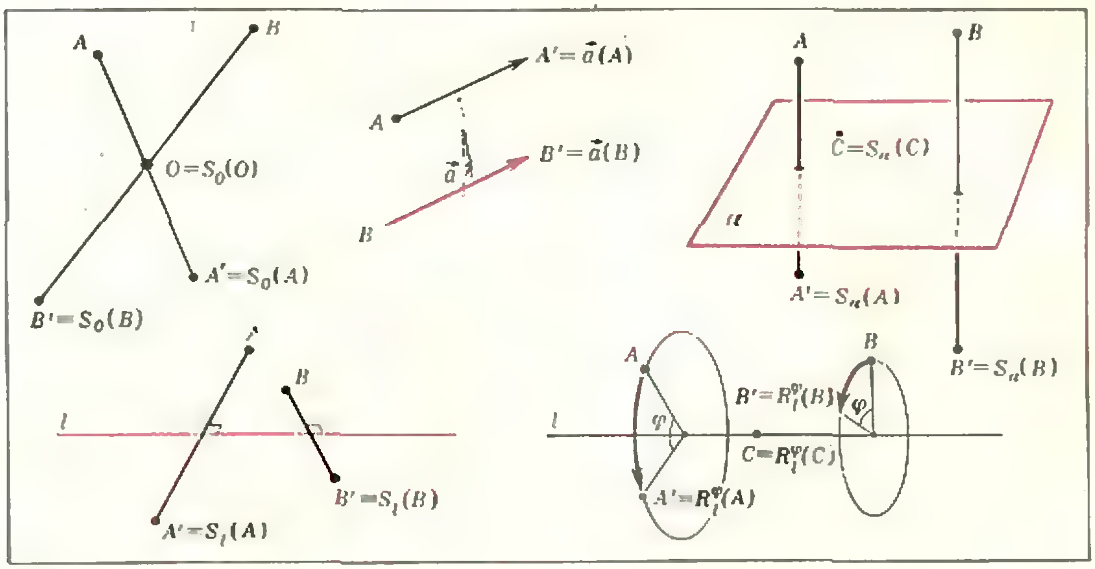


Рис. 1.

Дело в том, что все такие тройки естественно делятся на два класса — на тройки, в которых кратчайшее вращение от первого вектора ко второму для наблюдателя, находящегося на конце третьего вектора, является положительным (см. рис. 3; назовем такие тройки *положительными*), и на тройки, в которых оно является отрицательным (*отрицательные* тройки).

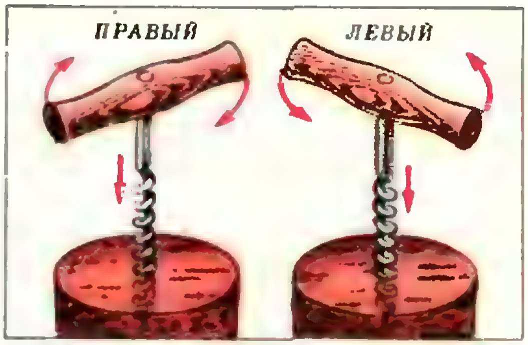


Рис. 2.

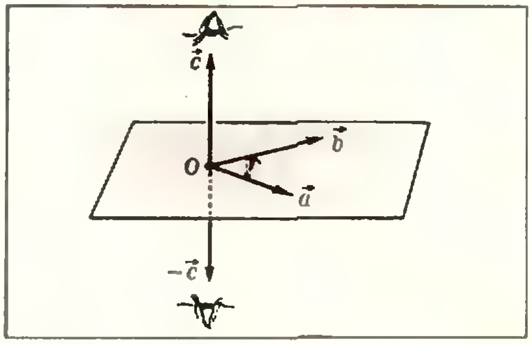


Рис. 3.

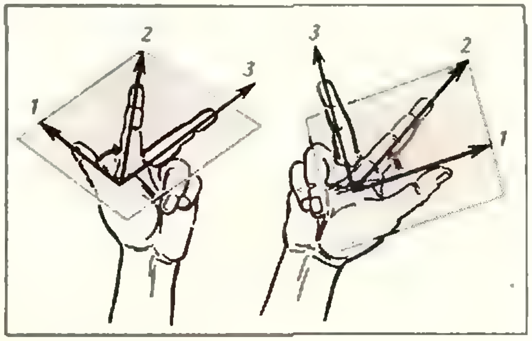


Рис. 4.

Проконтролируйте себя: видите ли вы, что

а) тройки $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ и $(\vec{c}; \vec{a}; \vec{b})$ имеют одинаковый знак?

б) тройки $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ и $(\vec{a}; \vec{c}; \vec{b})$ имеют разный знак?

в) тройки $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ и $(\vec{a}; \vec{b}; -\vec{c})$ имеют разный знак?

⁂

Физики тройкам векторов предпочитают руки: правая рука задает положительную ориентацию, левая — отрицательную (рис. 4); вспомните правило левой руки в электромагнетизме.

Итак, указание некомпланарной тройки векторов задает одну из двух возможных ориентаций пространства.

Если перемещение *f* переводит выделенную тройку векторов в тройку того же знака (можно доказать, что тогда оно сохраняет знак любой тройки!), мы будем говорить, что оно *сохраняет ориентацию*; в противном случае мы будем, естественно,

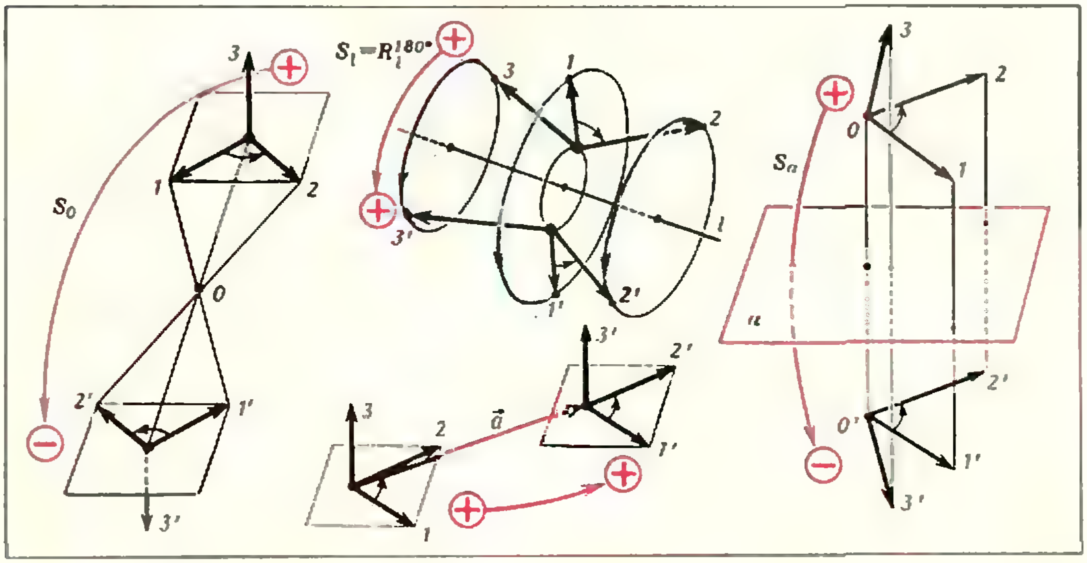


Рис. 5.

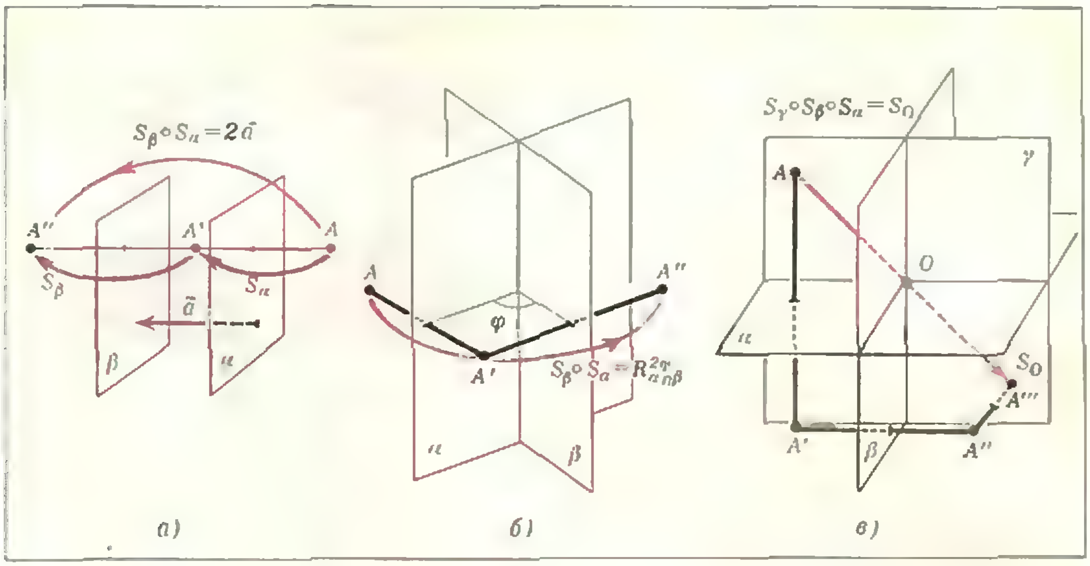


Рис. 6.

говорить, что перемещение f *меняет ориентацию.*

Например, параллельный перенос и поворот вокруг прямой (в частности, осевая симметрия) сохраняют ориентацию, а центральная симметрия и симметрия относительно плоскости меняют ее (рис. 5).

Не хочу вводить вас в заблуждение: здесь все совсем не так просто. Например, словосочетания «против часовой стрелки» и «кратчайшее вращение ... для наблюдателя, находящегося ...» (см. выше) не имеют, строго говоря, никакого математического смысла — они не могут быть определены в рамках школьной аксиоматики геометрии (и в других известных автору аксиоматиках).

На самом деле, можно строго определить одинаково и противоположно ориентированные «круги со стрелкой» или тройки векторов, но формально нельзя отдать одному из типов кругов или троек предпочтение. Далее, мы без доказательства приняли один нетривиальный факт: перемещение, сохраняющее ориентацию одной тройки, не может поменять ориентацию другой. Подробное обсуждение этих вопросов увело бы нас слишком далеко: для дальнейшего нам достаточно наглядной ясности.

Композиции перемещений

Композицией отображений f, g (в частности, перемещений) называется отображение $h = g \circ f$, получающееся, если последовательно выполнить сначала f, а затем g; это значит, что для любой точки A

$$h(A) = g(f(A)). \qquad (2)$$

Обратите внимание на порядок в записи $g \circ f$: сначала выполняется f, затем g. Запись эта вполне естественна, так как по формуле (2)

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)).$$

Легко видеть, что *композиция перемещений — перемещение* (это мгновенно получается, если дважды применить (1)). Посмотрим, какие получаются перемещения, если брать композиции известных нам перемещений. Я начну с совсем простых примеров, которые вы легко разберете, глядя на соответствующие чертежи. Но здесь мало наглядного понимания — нужно провести доказательства (впрочем, весьма простые).

1°. *Композиция двух симметрий относительно параллельных плоскостей — параллельный перенос (рис. 6 а).*

2°. *Композиция двух симметрий относительно пересекающихся плоскостей — поворот вокруг их линии пересечения (рис. 6 б).*

3°. *Композиция трех симметрий относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей — симметрия относительно их общей точки (рис. 6 в).*

4°. *Композиция симметрии относительно плоскости и переноса на перпендикулярный к ней вектор — симметрия относительно (другой) плоскости.*

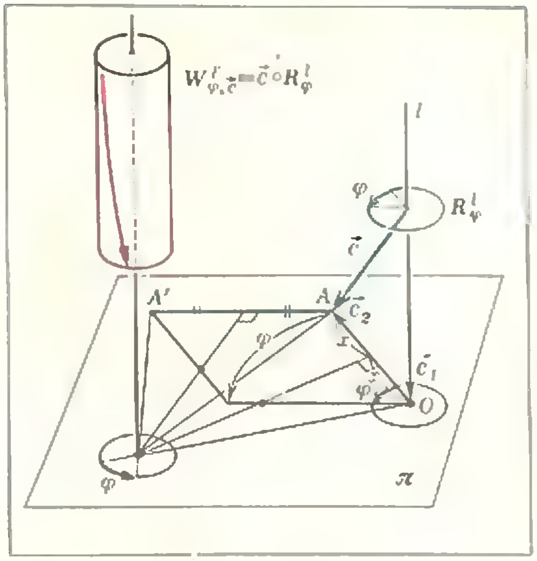


Рис. 7.

В этих примерах в результате композиции получались ранее известные нам перемещения. Но это, конечно, не всегда так — например, перемещение

$$W^{\varphi}_{l,\vec{a}}=\vec{a}\circ R^{\varphi}_{l},$$

где вектор $\vec{a}$ параллелен прямой l, нам до сих пор не встречалось; $W^{\varphi}_{l,\vec{a}}$ называется *винтовым перемещением* (с осью l, на угол φ и на вектор $\vec{a}$); оно будет играть основную роль в дальнейшем рассказе (рис. 7).

Ясно, что при $\vec{a}\parallel l$

$$\vec{a}\circ R^{\varphi}_{l}=R^{\varphi}_{l}\circ a. \qquad (3)$$

Очевидно также, что композиция винтового перемещения и переноса на вектор, параллельный оси вращения, будет снова винтовым перемещением с той же осью вращения, но с другим вектором переноса (равным сумме старого переноса и нового). А вот следующий факт совсем не очевиден:

5°. *Композиция поворота R^{φ}_{l} и произвольного переноса $\vec{c}$ является винтовым перемещением с осью $l'\parallel l$ на угол φ.*

Нам это утверждение скоро потребуется; докажем его. С этой целью разложим вектор c в сумму $\vec{c}=\vec{c}_1+\vec{c}_2$, где вектор $\vec{c}_1$ направлен вдоль оси l, а $\vec{c}_2$ перпендикулярен этой оси. Композиции параллельных переносов соответствует сумма векторов, поэтому $\vec{c}=\vec{c}_2\circ\vec{c}_1$, отсюда в силу (3)

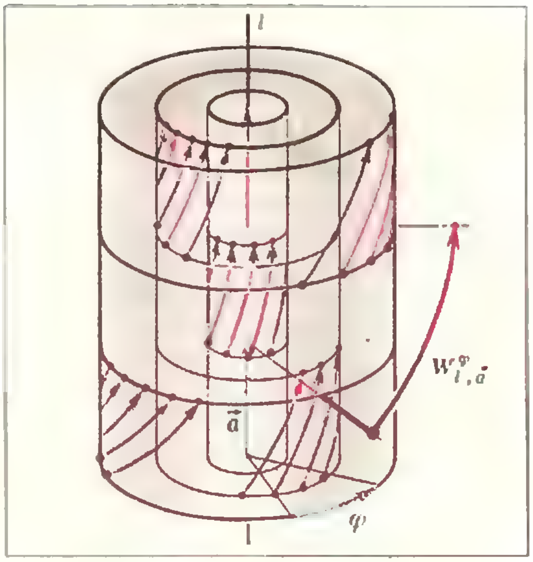


Рис. 8.

$$\vec{c}\circ R^{\varphi}_{l}=(\vec{c}_2\circ\vec{c}_1)\circ R^{\varphi}_{l}=\vec{c}_2\circ(\vec{c}_1\circ R^{\varphi}_{l})=$$
$$=\vec{c}_2\circ(R^{\varphi}_{l}\circ\vec{c}_1)=(\vec{c}_2\circ R^{\varphi}_{l})\circ\vec{c}_1. \qquad (4)$$

Займемся перемещением $\vec{c}_2\circ R^{\varphi}_{l}$, помня, что $\vec{c}_2\perp l$. Рассмотрим произвольную плоскость π, перпендикулярную оси l (рис. 8). На этой плоскости перемещение $\vec{c}_2\circ R^{\varphi}_{l}$ является композицией поворота плоскости R^{φ}_{O} (где $O=l\cap\pi$) и переноса плоскости на вектор $\vec{c}_2$ (ведь $\vec{c}_2\perp l\Rightarrow\vec{c}_2\parallel\pi$). Такая композиция будет («Квант», 1980, № 3, с. 6) поворотом на тот же угол φ вокруг нового центра O', который легко построить (см. рис. 8, где $[OA]\to[AA']$). Такая же картина наблюдается во всех плоскостях, перпендикулярных l, так что

$$\vec{c}_2\circ R^{\varphi}_{l}=R^{\varphi}_{l'},$$

где l' — прямая, проходящая через O' параллельно l. Из (4), учитывая $\vec{c}_1\parallel l$, получаем

$$\vec{c}\circ R^{\varphi}_{l}=(\vec{c}_2\circ R^{\varphi}_{l})\circ\vec{c}_1=$$
$$=R^{\varphi}_{l'}\circ\vec{c}_1=\vec{c}_1\cdot R^{\varphi}_{l'}=W^{\varphi}_{l',\vec{c}_1}.$$

Геометрически еще менее очевидно такое утверждение:

6°. *Композиция винтового перемещения $W^{\varphi}_{l,\vec{a}}$ и произвольного переноса $\vec{c}$ является винтовым перемещением с осью, параллельной прямой l, на угол φ.*

Однако этот факт можно доказать в два счета:

$$\vec{c}\circ W^{\varphi}_{l,\vec{a}}=\vec{c}\circ(\vec{a}\circ R^{\varphi}_{l})=(\vec{c}\circ\vec{a})\circ R^{\varphi}_{l}=W^{\varphi}_{l',\vec{c}+\vec{a}}$$

где последнее равенство получено из 5°, а вектор $\vec{e}$ является суммой вектора $\vec{a}$ и проекции $\vec{c}$ на прямую l.

Основные теоремы

Теорема 1. *Всякое перемещение пространства, сохраняющее ориентацию, является винтовым перемещением, параллельным переносом или поворотом вокруг прямой.*

Если перенос и поворот считать частными случаями винтовых перемещений (перенос $\vec{a}$ — это $W^0_{l,\vec{a}}$, где l — любая прямая, параллельная $\vec{a}$, а поворот R^{φ}_l — это $W^{\varphi}_{l,\vec{0}}$), теорему 1 можно сформулировать так: всякое перемещение пространства, сохраняющее ориентацию, является винтовым перемещением. Еще вариант формулировки: всякое перемещение пространства, сохраняющее ориентацию, является либо поворотом вокруг прямой, либо параллельным переносом, либо их (однократной) композицией.

Доказательство. Пусть f — данное перемещение пространства. Рассмотрим две возможности:

1) *У f есть неподвижная точка* — такая точка O, что $f(O)=O$. Возьмем любую точку $A \neq O$ и положим $f(A)=A'$, $f(A')=A''$. Здесь нам придется выделить два случая:

1а) *Точки A, A', A'' не лежат на одной прямой.* Тогда они определяют некоторую плоскость π (рис. 9). Отрезок AA' переходит в отрезок $A'A''$ — значит, его середина K переходит в середину K' отрезка $A'A''$. Прямая OK переходит в прямую OK' — значит, плоскость α, проходящая через (OK) перпендикулярно (AA'), переходит в плоскость α', проходящую через (OK') перпендикулярно $(A'A'')$. Пусть l — пересечение этих плоскостей и H — точка пересечения l и π. Прямоугольный треугольник OHK, лежащий в α, должен перейти в прямоугольный треугольник, лежащий в α' (ибо $\alpha \to \alpha'$), притом его гипотенуза OK переходит в OK'. Следовательно, имеются две возможности: $\triangle OHK$ переходит либо в $\triangle OHK'$, либо в $\triangle OH_1K'$. Но вторая возможность отпадает, так как в этом случае тройка векторов $(\vec{OK}, \vec{OA}, \vec{OH})$ меняет знак.

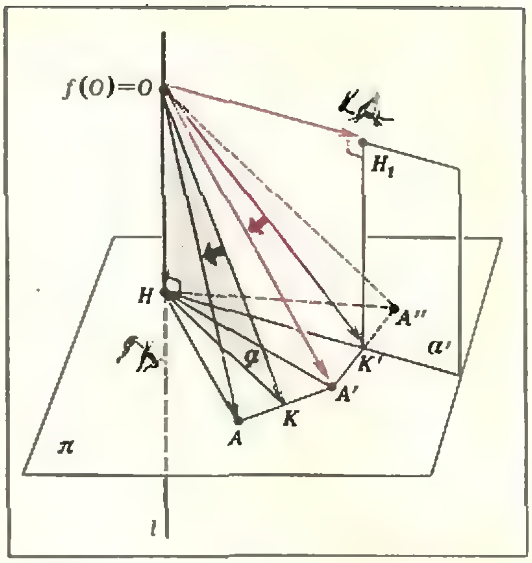


Рис. 9.

Итак, $O \to O$, $H \to H$; поэтому $\pi \to \pi$ и на плоскости π отображение f является перемещением плоскости, сохраняющим ориентацию (почему?) и оставляющим на месте точку H. Такое перемещение будет («Квант», 1980, № 3, с. 3—5) поворотом плоскости π на угол $\varphi = (\widehat{HA, HA'})$. Если π' — любая другая плоскость, перпендикулярная l, то точка $H' = \pi' \cap l$ останется на месте, π' перейдет в себя и на этой плоскости будет наблюдаться та же картина, что и на π (поясните!). Таким образом, $f = R^{\varphi}_l$. (Мы выше предполагали, что $H \neq O$; случай $H=O$ мы оставляем читателю; вывод получится тот же.)

1б) *Точки A, A', A'' лежат на одной прямой.* Так как $|OA| = |OA'| = |OA''|$, сразу ясно, что $A''=A$ и середина H отрезка AA' остается на месте. Поэтому плоскость π, проходящая через H перпендикулярно OH, остается на месте. Рассуждая теперь как в предыдущем абзаце, мы придем к выводу, что f является поворотом около (OH) или тождественным преобразованием.

(Выше мы предполагали, что $A \neq A'$; случай $A = A' = A''$ мы оставляем читателю; он без труда покажет, что тогда f — либо тождественное преобразование, либо поворот.)

2) *У f нет неподвижных точек.* Возьмем любую точку A; пусть $A'=f(A)$; положим $\vec{a}=\overrightarrow{A'A}$. Тогда точка A будет неподвижной точкой отображения $\vec{a}\circ f$ и можно сослаться на уже разобранный первый случай. Получим (для некоторой прямой l и угла φ)

$$\vec{a}\circ f=R_l^{\varphi}.$$

Применяя перемещение $(-\vec{a})$ к обеим частям этого равенства и пользуясь утверждением 5°, получим

$$(-\vec{a})\circ(\vec{a}\circ f)=(-\vec{a})\circ R_l^{\varphi},$$
$$((-\vec{a})\circ\vec{a})\circ f=f=W_{l',\vec{e}}^{\varphi}$$

для некоторых l' и $\vec{e}$ $(l'\parallel l)$. Теорема доказана.

Чтобы сформулировать аналогичную теорему о перемещениях, меняющих ориентацию, нам потребуется еще одно определение. *Скользящей симметрией* относительно плоскости π на вектор $\vec{a}$, где $\vec{a}\parallel\pi$, называется композиция $\vec{a}\circ S_\pi$ (S_π — симметрия относительно π).

Теорема 2. *Всякое перемещение f пространства, меняющее ориентацию, является либо центральной симметрией, либо симметрией относительно плоскости, либо скользящей симметрией.*

Я не буду доказывать эту теорему — ограничусь подсказкой. Есть два способа: 1) взять произвольную плоскость π, рассмотреть перемещение $S_\pi\circ f$ и применить теорему 1; 2) рассуждать в духе доказательства теоремы 1 (те же два случая, та же идея $A\to A'\to A''$).

Мы пришли к концу нашего рассказа: теперь, наконец, я могу вам сказать, какие бывают перемещения. Перемещения пространства бывают шести типов: параллельный перенос, поворот вокруг прямой, винтовое перемещение, центральная симметрия, симметрия относительно плоскости и скользящая симметрия.

Упражнения

1. Доказать, что любое перемещение пространства, сохраняющее ориентацию, является композицией двух поворотов около прямых.

2. Доказать, что любое перемещение пространства, сохраняющее ориентацию, является композицией четырех симметрий относительно плоскостей, но не является композицией никаких трех (и никаких пяти) симметрий относительно плоскостей.

3. Даны пять биссектрис пяти граней выпуклого пятигранного угла. Построить его ребра.

4. Даны: точка A, плоскость π, не содержащая A, и точка $O\in\pi$. Найти множество точек A', симметричных всевозможных прямым l, проходящим через O и лежащим в π.

5. Может ли ограниченная фигура иметь два центра симметрии?

6.* Для данного четырехгранного выпуклого угла найти вписанный четырехгранный угол (то есть четырехгранный угол, все ребра которого лежат на гранях данного) с наименьшей суммой плоских углов.

Ребусы

В этих ребусах буквами зашифрованы некоторые цифры. В каждом примере одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные (ни одно «слово» не начинается с нуля) Расшифруйте эти ребусы.

1. $$\begin{array}{r} +\,\text{коран}\\ \text{кора}\\ \text{кран}\\ \underline{\text{нора}}\\ \text{ооннии}\end{array}$$

2. $$\begin{array}{r} +\,\text{смех}\\ \underline{\text{мим}}\\ \text{eeee}\end{array}$$

3. $\sqrt[\text{н}]{\text{корень}}=\text{тсс}$

4. $\sqrt[\text{а}]{\text{двойка}}=\text{ад}$

5. $$\begin{array}{r} \times\,\text{фа}\\ \underline{\text{мн}}\\ \text{ааа}\\ \underline{\text{иии}}\\ \text{фуга}\end{array}$$

6. $$\begin{array}{r} +\,\text{маска}\\ \text{рампа}\\ -\,\underline{\text{актер}}\\ \text{театр}\end{array}$$

7. $$\begin{array}{r} +\,\text{вопрос}\\ \underline{\text{вопрос}}\\ \text{тройка}\end{array}$$

8. $(\text{от})^{\text{к}}\cdot(\text{ос})=\text{куст}$

9. $(\text{вар})^{\text{л}}=\text{сталевар}$

А. Лебедев

В. Болтянский

Оптика черных дыр

От редакции

В настоящее время проводится интенсивная работа по изучению удаленных космических объектов. Развитие современных методов астрофизических исследований дает возможность накапливать огромный экспериментальный материал, расширять область астрономических наблюдений.

Наряду с экспериментальными исследованиями ведется большая работа по созданию различных теоретических моделей, объясняющих возникновение и развитие таких, во многом еще загадочных, астрономических объектов, как сверхновые звезды, туманности, квазары, пульсары и т. д.

Особое внимание привлекают к себе черные дыры. По современным представлениям черные дыры — это огромные сгустки материи, находящейся в состоянии чудовищного сжатия. Все частицы, попадающие в некоторую окрестность черной дыры, безвозвратно затягиваются ею, «исчезают». Никакая информация не поступает к наблюдателю из окрестностей черной дыры.

В этом номере журнала мы публикуем статью члена-корреспондента АПН СССР профессора В. Г. Болтянского, в которой популярно описывается одна из возможных моделей этого явления. Предлагаемая модель была математически строго рассчитана автором; выводы, следующие из этой математической модели, во многом совпадают с известными экспериментальными данными.

Согласно общей теории относительности Эйнштейна наличие масс изменяет свойства окружающего пространства, как бы искривляет пространство. Свет, проходящий вблизи массивного тела, например Солнца, движется не по прямой, а по искривленной траектории.

Этот теоретический вывод подтвержден экспериментами.

Например, во время полного солнечного затмения можно наблюдать звезды, которые, согласно точным расчетам, в это время находятся за краем Солнца и должны быть недоступными для наблюдения с Земли. Видимыми они оказываются потому, что световые лучи, идущие от звезд, проходя вблизи Солнца, искривляются (сплошные голубые линии на рисунке 1). В результате звезды кажутся находящимися друг от друга на большем угловом расстоянии, чем в отсутствие Солнца (пунктирные линии). Искривление светового луча при его прохождении близко к поверхности Солнца составляет примерно 1,75 угловой секунды.

Если бы вся масса Солнца была локализована в очень небольшом объеме (скажем, в шаре радиусом 1 км), то при таком сильно сжатом (коллапсировавшем) «Солнце» искривление световых лучей, проходящих мимо него, было бы все более ощутимым по мере уменьшения расстояния от «Солнца» до ближайшей точки световой траектории. На ри-

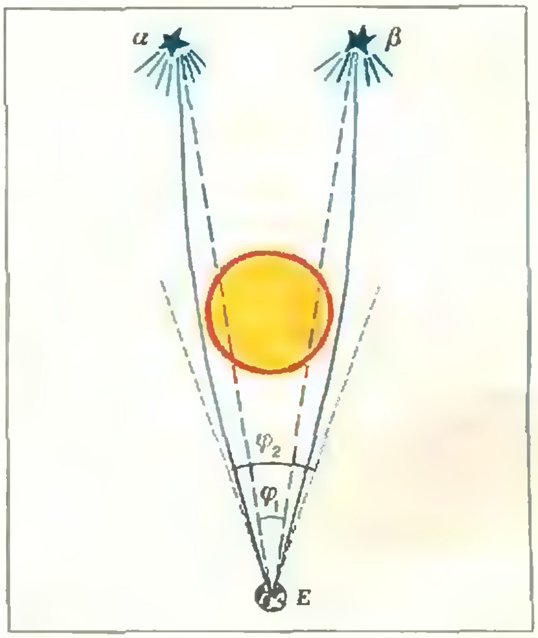


Рис. 1.

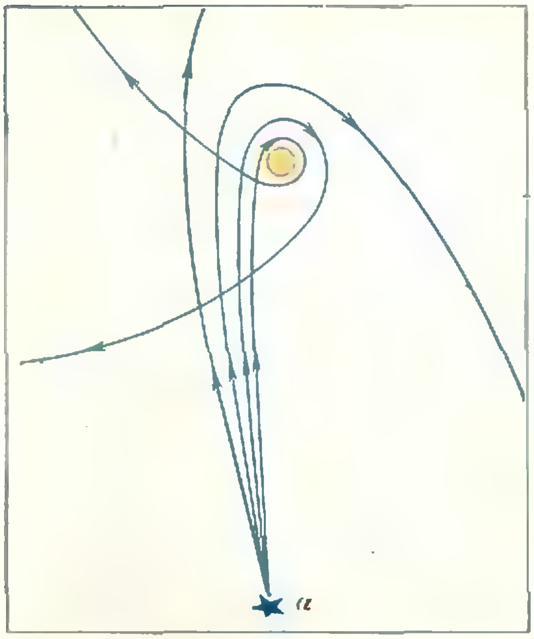


Рис. 2.

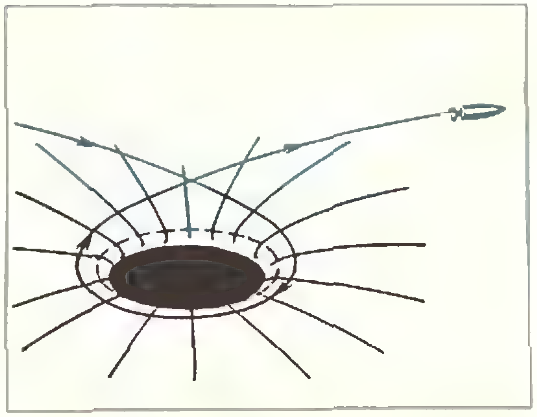


Рис. 3.

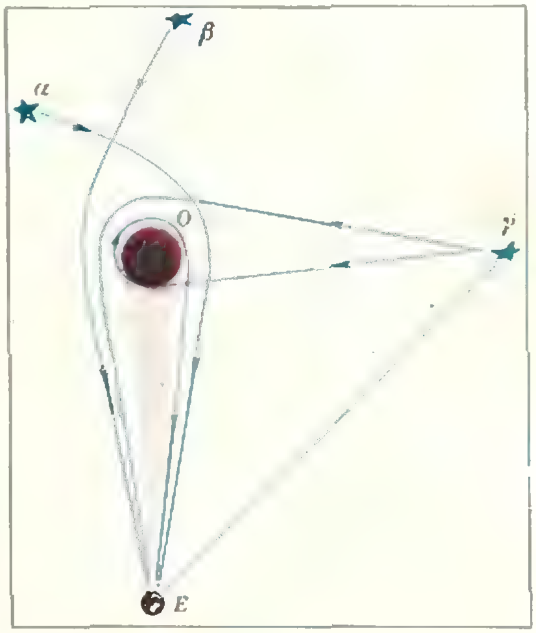


Рис. 4.

сунке 2 схематично показаны эти искривленные траектории: те из них, которые проходят наиболее близко к «Солнцу», могут даже совершить вокруг него один или несколько витков, прежде чем отправиться в дальнейший путь.

Конечно, — может сказать читатель,— все это «если бы...». Ведь на самом деле Солнце не сжато до размеров, чуть больших Московского Кремля. Однако это «если бы...» не так уж нереально. Теоретические выводы, сделанные на основе общей теории относительности, показывают, что существование сгустка материи в таком коллапсировавшем состоянии возможно. Такой сильно сжатый сгусток материи — его называют коллапсом — ведет себя весьма своеобразно: он притягивает к себе все близлежащие частицы (если они «имели легкомыслие» пролетать достаточно близко и с не очень большой скоростью), не отпуская от себя ничего, даже излучения. Все близлежащее безвозвратно «проваливается» внутрь области коллапса, которая благодаря этому получила название «черная дыра». Горизонт событий — поверхность, ограничивающая область «невозвратности»,— представляет собой сферу. Эту сферу называют сферой Шварцшильда — ее радиус был теоретически рассчитан немецким астрономом Шварцшильдом; он зависит от массы, локализованной внутри черной дыры. За горизонтом событий вблизи сферы Шварцшильда световые лучи ведут себя так, как было описано выше (рисунок 3).

Искривление световых траекторий вблизи черной дыры приводит к явлению, которое можно назвать фокусировкой света черной дырой. Рисунок 4 иллюстрирует это явление. К наблюдателю, находящемуся в точке E, приходят не только прямые лучи от звезды γ, но и те лучи, которые, проходя вблизи черной дыры O, были «повернуты» ею. Таким образом, хотя из самой черной дыры никакие сигналы не поступают, сфокусированный черной дырой свет всех звезд

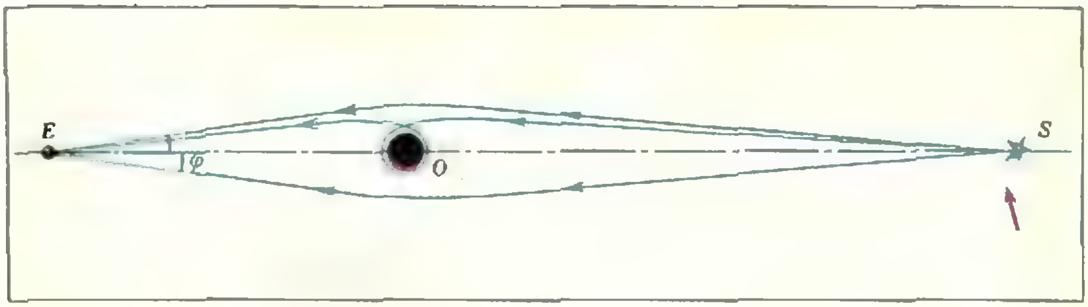


Рис. 5.

приходит к наблюдателю E как бы из окрестности черной дыры. Благодаря этому черная дыра будет восприниматься как объект чрезвычайной яркости. В центре такого объекта должно наблюдаться маленькое черное пятнышко, угловой размер которого равен $\varphi = 2\,r/d$, где r — радиус сферы Шварцшильда, а d — расстояние от наблюдателя E до черной дыры O. Разумеется, это черное пятнышко может быть зафиксировано в том случае, если разрешающая способность приборов у наблюдателя E больше φ (то есть приборы позволяют наблюдать раздельными две точки, угловое расстояние между которыми равно φ).

Не эффектом ли фокусировки объясняется кажущаяся огромная энергия гигантских квазаров, наблюдаемых астрофизиками? Не являются ли эти квазары огромными черными дырами, которые сами ничего не излучают, а светят лишь чужим светом?

Еще одно оптическое явление, связанное с черной дырой, имеет место, если черная дыра находится строго между наблюдателем E и звездой S. В этом случае в каждой плоскости, содержащей прямую ES, существует (теоретически) бесконечно много траекторий, по которым свет от звезды S приходит к наблюдателю E. Две крайние из этих траекторий — это лучи, идущие от звезды, которые лишь слегка искривляются, проходя около черной дыры O; остальные лучи на пути от S к E совершают различное количество витков вокруг черной дыры (рисунок 5).

Такая картина световых траекторий будет наблюдаться в любой плоскости, содержащей прямую ES. Поэтому наблюдатель E будет видеть звезду S в виде системы концентрических колец, наибольшее из которых имеет видимый угловой диаметр 2φ, где φ — угол, который образует с прямой ES каждый крайний луч, приходящий от звезды к наблюдателю. Если расстояние ES настолько велико, что наблюдатель не разрешает (не видит раздельными) точки, угловое расстояние между которыми равно 2φ, а лишь фиксирует яркость, то он, не подозревая о существовании черной дыры, как бы видит звезду S сквозь нее. При этом наблюдатель видит звезду гораздо более яркой, чем если бы он наблюдал ее непосредственно (в отсутствие черной дыры).

Если движущаяся звезда при своем движении пересекает прямую EO, соединяющую наблюдателя и черную дыру (на рисунке 5 красной стрелкой указано направление, по которому движется звезда), то в течение некоторого времени наблюдатель будет видеть эту звезду как сверхъяркий объект. Этот объект появится внезапно, когда звезда будет подходить к прямой EO, и через некоторое время погаснет. Может быть, именно этим объясняется редко наблюдаемое грандиозное астрономическое явление — вспышка сверхновой звезды?

* * *

Мы рассмотрели математическую модель, которая описывает сверхъяркие астрономические объекты не как необъяснимые источники сверхвысокой энергии, а как оптические явления. Как относиться к этой модели? Что это — научная фантастика или действительность?

(Окончание см. на с. 17)

Задачи наших читателей

1. Докажите, что для $0<a<b$ выполняется неравенство

$$\ln\frac{b}{a}<\frac{b^2-a^2}{2ab}.$$

В. Ясинский

2. Докажите, что если некоторый член последовательности 1, 31, 331, 3331, ... делится на 541, то он также делится и на 19.

И. Суев

3. Докажите, что если

$$x=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n-y}}}},$$

то

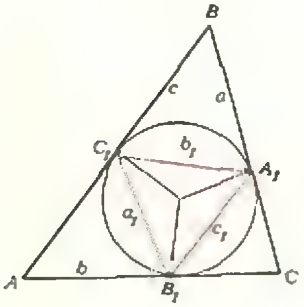
$$y=a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_{n-2}+\dots+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1-x}}}}.$$

М. Гервер

4. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC, a_1, b_1, c_1 — соответствующие длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ с вершинами в точках касания вписанной в треугольник ABC окружности (см. рисунок). Докажите, что

$$\frac{a^2}{a_1^2}+\frac{b^2}{b_1^2}+\frac{c^2}{c_1^2}>12.$$

В. Мельник



5. На основании прямого кругового конуса построен цилиндр. Докажите, что при пересечении этого цилиндра плоскостью, касающейся конуса, получается эллипс, площадь которого равна боковой поверхности конуса.

Б. Алейников

6. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании вдвое длиннее биссектрисы угла при вершине. Найдите углы этого треугольника.

С. Сефибеков

7. Докажите, что центр вписанной в треугольник ABC окружности, точка пересечения его медиан и точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника ABC с точками касания его сторон с вневписанными окружностями (*вневписанная окружность* — это окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон), находятся на одной прямой.

У. Алла

8. Докажите, что во всяком треугольнике

$$m_a^2=\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-bc\left(\sin\frac{\widehat{A}}{2}\right)^2,$$

где m_a — длина медианы, проведенной к стороне, лежащей против угла A, b и c — длины двух других сторон треугольника, $\widehat{A}$ — величина угла A.

Ф. Кадиров

9. Множество M содержит конечное число $n>2$ точек плоскости, которые не лежат на одной прямой, причем, если некоторые три точки этого множества образуют треугольник, то точка пересечения высот этого треугольника также принадлежит множеству M. Какие значения может принимать n?

Р. Ушаков

10. Функцию F, определенную на множестве всех целых чисел и принимающую неотрицательные целые значения, мы будем называть *современной*, если для любых целых m, n выполняются соотношения

$F(mn)=F(m)F(n)$,

$F(m+n)<1980[F(m)+F(n)]$

и, кроме того, $F(1980)=0$.

Найдите все современные функции.

Б. Кац

11. Найдите наибольшее число способов, которыми один треугольник можно вписать в другой (вершины вписанного треугольника находятся на различных сторонах описанного).

А. Сердюк

12. Без помощи таблиц докажите неравенства

а) $\cos 42^\circ<\frac{3}{4}$;

б) $\operatorname{tg} 70^\circ>\frac{19}{7}$.

С. Майзус

13. В выражениях вида $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ часто можно избавиться от двойного корня, воспользовавшись формулой

$$\sqrt{1\pm2\cos\alpha\sin\alpha}=|\cos\alpha\pm\sin\alpha|.$$

Например:

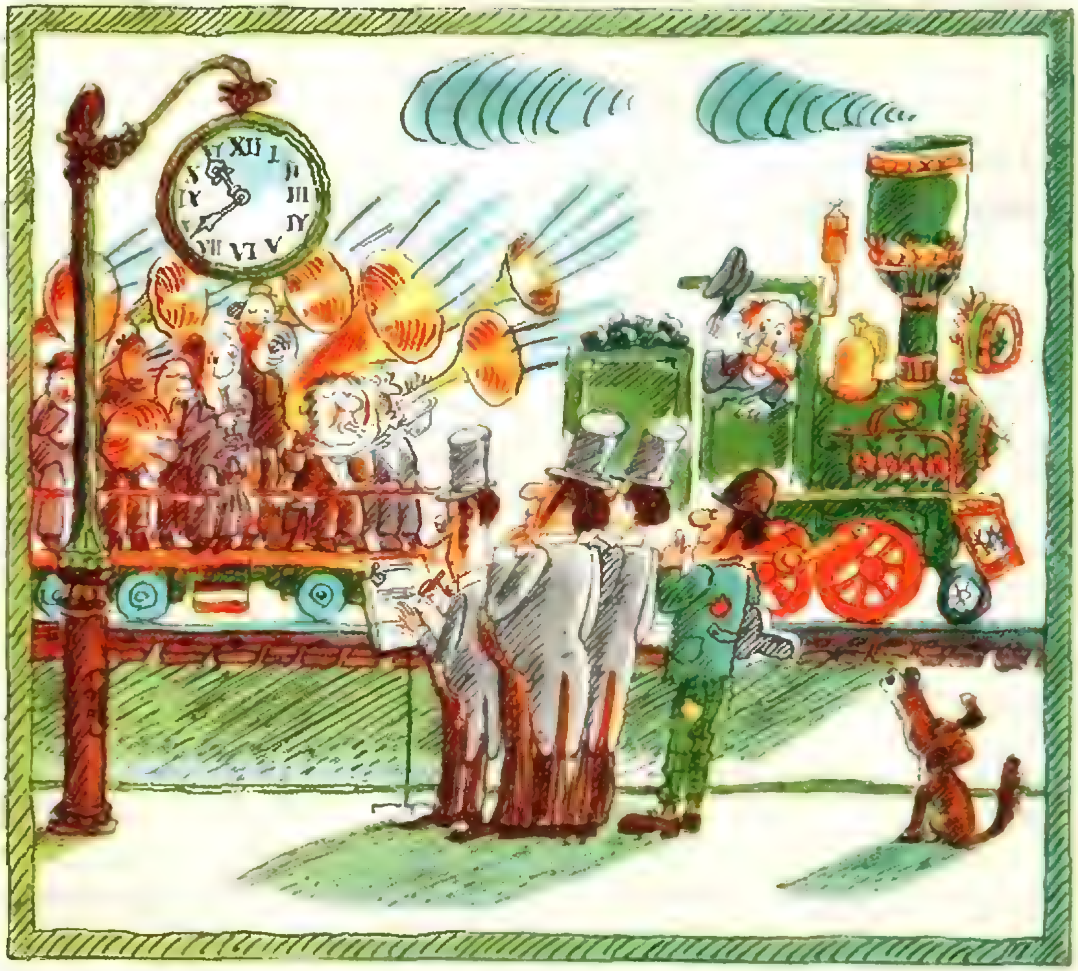
$$\sqrt{13\pm\sqrt{48}}=\sqrt{13}\sqrt{1\pm2\sqrt{\frac{12}{13}}\sqrt{\frac{1}{13}}}=\sqrt{13}\left(\sqrt{\frac{12}{13}}\pm\frac{1}{\sqrt{13}}\right)=\sqrt{12}\pm1.$$

Вот несколько примеров для самостоятельного решения:

1) $\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$;

2) $\sqrt{11\pm\sqrt{21}}$; 3) $\sqrt{9\pm4\sqrt{2}}$.

В. Ольхов



Я. Смородинский, А. Урнов

Эффект Доплера

В 1842 году в журнале Пражского научного общества появилась статья под названием «О цветном свете двойных звезд и некоторых других созвездий неба». Автор статьи, австрийский профессор математики Христиан Доплер, предложил новое и неожиданное объяснение окраски небесных объектов. Свою теорию Доплер строил на утверждении о том, что частота волновых колебаний должна зависеть от скорости движения источников относительно наблюдателя (то есть прибора, воспринимающего эти волны). Иными словами, один и тот же звук будет иметь различную высоту, а свет — различную окраску (цвет) для покоящегося и движущегося источника.

Доплер представлял себе причину окраски звезд следующим образом. Свет сам по себе белого цвета, поскольку является смесью различных цветов в равной пропорции. При движении источника цвета смещаются; например, желтый цвет по мере приближения звезды к Земле должен переходить в зеленый и далее в голубой и фиолетовый; при удалении же звезды желтый цвет переходит в оранжевый и красный. Поскольку глаз способен воспринимать только определенные цвета (от фиолетового до красного), а некоторые цветовые компоненты при смещении «выходят» за пределы чувствительности глаза, в видимом наборе цветов некоторые из них оказываются в преимуществе, что и объясняет окраску звезды.

Для Доплера, как и почти для всех естествоиспытателей прошлого века, свет был волной в некой «светоносной» среде — эфире, заполняющем все пространство и все «поры» в телах. Распространение света в эфире было подобно распространению звука в воздухе (или в другой среде), поэтому световые явления должны были иметь аналогию в явлениях звуковых*[1]. Так и эффект, предсказанный Доплером, должен был наблюдаться как для света, так и для звука.

Для проверки принципа Доплера были осуществлены довольно необычные эксперименты. В поезде, идущем с большой скоростью, находились музыканты, которые издавали звук определенного тона. На нескольких железнодорожных станциях по пути следования поезда располагались музыканты-«наблюдатели», которые могли определять высоту тона на слух. В результате этих экспериментов было обнаружено, что высота звука, воспринимаемого наблюдателем, действительно изменяется при движении источника в соответствии с предсказаниями Доплера.

Тем не менее статья Доплера «О цветном свете...» подверглась резкой критике, и, несмотря на попытки Доплера отстоять свою точку зрения, его теория была отвергнута большинством известных физиков того времени.

Объяснение Доплера цвета звезд действительно было неверным. Однако в его основе содержалась плодотворная идея об изменении цвета (длины волны) излучения при движении источника относительно наблюдателя. Такой эффект был впоследствии обнаружен и его назвали эффектом Доплера. Правильное объяснение этого эффекта было дано лишь после того, как была понята природа излучения. Во времена же Доплера никто по существу не осознал значения идеи Доплера — ни противники его теории, ни он сам. Только Больцано, математик из Праги, в своей статье, посвященной работе Доплера, писал, что эта работа дает гораздо больше, чем обещает ее заглавие, как для акустики, так и для оптики и всего учения о волнообразном движении. Не веря в вычисления Доплера, Больцано тем не менее заключил свою статью словами: «Я ожидаю с уверенностью, что со временем ею (теорией Доплера) будут пользоваться для разрешения на основании изменения цвета небесных тел вопросов, движутся ли эти последние, куда и с какой скоростью они движутся, какие расстояния отделяют их от нас и друг от друга, равно как для разрешения многих других вопросов».

Возможности использования в физике и практического применения эффекта Доплера были оценены значительно позднее, после открытия спектрального анализа. Его глубокую связь с такими фундаментальными понятиями физики, как пространство и время, установил Альберт Эйнштейн. В своей работе 1905 года, посвященной теории относительности, Эйнштейн впервые получил правильную формулу для изменения частоты света при относительном движении источника и наблюдателя.

С тех пор как проявление доплер-эффекта в оптике стали устойчиво связывать со смещением спектральных линий, было накоплено множество экспериментальных свидетельств в его пользу. Любопытно, что первые доказательства были получены при исследовании спектров звезд. В лабораторных условиях впервые это явление наблюдал русский физик А. Белопольский, поставивший довольно хитроумные опыты с вращающимися зеркалами (1900 г.). Существование так называемого поперечного доплер-эффекта (о котором речь еще впереди) удалось надежно установить только полвека спустя (1948 г.).

После открытия квантовых свойств света возникла необходимость «примирить» ставшее уже привычным явление с новыми необычными воззрениями. Эту задачу успешно решил один из создателей современной (квантовой) механики Эрвин Шредингер, показавший возможность истолкования доплер-эффекта с точки зрения световых квантов.

---

*[1] Подобие света и звука все же не полное. Звук представляет собой продольные колебания плотности — скалярной величины, а свет — поперечные колебания электрического и магнитного векторов.

*
* *

И звук, и свет — волновые явления. Волны — это колебания, распространяющиеся в пространстве с течением времени. Звуковые (акустические) волны в среде (веществе) — это распространение колебаний плотности среды. Световые оптические волны — это распространение в пространстве электромагнитных колебаний.

Для описания любого процесса движения необходимо прежде всего выбрать систему отсчета — систему координат вместе с часами, покоящимися в этой системе. Физическое содержание эффекта Доплера заключается в том, что частота колебаний зависит от системы отсчета, в которой производится наблюдение. Формулы преобразования частоты при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой, дают математическое описание этого явления. Чрезвычайно важным, однако, является то обстоятельство, что эти формулы различны для акустических и оптических волн.

Эффект Доплера для звука

Для того чтобы понять, как изменяется частота света при движении источника или наблюдателя, разберем следующую задачу. На озере плавают две лодки. С одной из них в воду опущен прибор, который может излучать звуковые колебания частоты ν_0. С другой лодки в воду опущен приемник, который может регистрировать частоту доходящего звука.

Какую частоту звука будет регистрировать приемник в следующих случаях:

1. обе лодки покоятся на воде;
2. лодка с источником покоится, лодка с приемником движется;
3. лодка с источником движется, лодка с приемником покоится?

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

1. Ответ на этот вопрос очевиден: приемник регистрирует звук частоты ν_0. Действительно, если скорость звука в воде равна c_0, то длина звуковой волны, излучаемой источником, равна $\lambda_0 = c_0/\nu_0$. Наблюдатель во второй лодке, измеряющий скорость звука и длину волны, зафиксирует именно эти величины — $c_1 = c_0$ и $\lambda_1 = \lambda_0$. Так что частота звука, регистрируемая наблюдателем, будет равна

$$\nu_1 = \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_0}{\lambda_0} = \nu_0. \qquad (1)$$

2. Пусть теперь лодка с наблюдателем начала двигаться вдоль прямой, соединяющей обе лодки. Обозначим скорость лодки с наблюдателем через $v_н$ и будем считать, что она положительна, если расстояние между лодками сокращается. Скорость звука, измеряемая наблюдателем, будет теперь равна не c_0, а

$$c_2 = c_0 + v_н = c_0\left(1 + \frac{v_н}{c_0}\right).$$

Длина волны звука в воде не зависит, конечно, от того, движется наблюдатель или нет. Поэтому $\lambda_2 = \lambda_0 = c_0/\nu_0$. С другой стороны, $\lambda_2 = c_2/\nu_2$; значит, $c_0/\nu_0 = c_2/\nu_2$, то есть

$$\nu_2 = \frac{c_2}{c_0}\nu_0 = \left(1 + \frac{v_н}{c_0}\right)\nu_0. \qquad (2)$$

Итак, если расстояние между лодками сокращается, то приемник зарегистрирует более высокую частоту, чем частота источника звука. Наоборот, если лодка с наблюдателем удаляется от лодки с источником, то частота принимаемого звука уменьшается:

$$\nu_2' = \left(1 - \frac{v_н}{c_0}\right)\nu_0. \qquad (2')$$

3. Рассмотрим случай, когда лодка с источником движется по направлению к наблюдателю со скоростью $v_и$. Скорость звука в воде по-прежнему равна c_0. Длина волны, которую будет измерять наблюдатель, теперь будет меньше, чем в том случае, когда лодки покоились. Действительно, длина волны — это рас-

стояние между двумя соседними точками, колеблющимися в фазе, например между соседними гребнями волны. За время $T=\lambda_0/c_0$, пока один гребень волны удалится от точки, в которой он был «испущен», на расстояние λ_0, источник переместится в том же направлении на расстояние $v_и\lambda_0/c_0$. Поэтому расстояние между «первым» гребнем и следующим будет равно не λ_0, а

$$\lambda_3=\lambda_0-v_и\frac{\lambda_0}{c_0}=\lambda_0\left(1-\frac{v_и}{c_0}\right).$$

Значит, частота звука, которую зарегистрирует наблюдатель, будет равна

$$\nu_3=\frac{c_0}{\lambda_3}=\frac{c_0}{\lambda_0(1-v_и/c_0)},$$

или

$$\nu_3=\frac{\nu_0}{1-v_и/c_0}. \qquad (3)$$

В том случае, когда лодка с источником удаляется от лодки с приемником, частота звука, которую будет регистрировать приемник, равна

$$\nu_3'=\frac{\nu_0}{1+v_и/c_0}. \qquad (3')$$

Мы видим, что формулы (3) отличаются от формулы (2), хотя основные закономерности сохраняются: звук повышается, когда лодки сближаются, и понижается, когда лодки расходятся.

Однако, если скорость лодки мала по сравнению со скоростью звука в воде, то мы можем воспользоваться приближенными равенствами

$$\frac{1}{1-\alpha}\approx 1+\alpha,\quad \frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha,$$

$$\text{если } \alpha\ll 1.$$

В этом случае формулы (3) приближенно совпадают с формулами (2):

$$\nu_3\approx\nu_2=\left(1\pm\frac{v_и}{c_0}\right)\nu_0.$$

Можно написать и общую формулу для случая, когда движутся обе лодки — и источник, и приемник. Такая формула получится последовательным применением двух формул, полученных выше:

$$\nu=\frac{1\pm v_н/c_0}{1\mp v_и/c_0}\nu_0,$$

или приближенно, учитывая, что $(1+\alpha)(1+\beta)\approx 1+\alpha+\beta$ при α, $\beta\ll 1$,

$$\nu\approx\left(1\pm\frac{v_н\pm v_и}{c_0}\right)\nu_0.$$

Нетрудно видеть, что $v_н\pm v_и$ есть относительная скорость источника и приемника. Знаки «+» соответствуют их движению в противоположных направлениях, знаки «—» — в одном направлении. Поэтому формулу для эффекта Доплера в приближении малых скоростей можно записать так:

$$\nu\approx\left(1+\frac{v}{c_0}\right)\nu_0,$$

где v — относительная скорость источника и приемника.

Полученную нами общую формулу можно еще раз обобщить — на тот случай, когда и среда движется. (Это обобщение означает, что в рассмотренном нами примере лодки находятся не на озере, а на реке.) В этом случае общий вид формулы не меняется, но под величинами $v_н$ и $v_и$ теперь следует понимать скорости движения наблюдателя и источника относительно реки; в соответствии с этим следует подставлять и значение v в общую формулу.

И еще одно замечание. Мы рассматривали случаи, когда источник и приемник движутся вдоль одной прямой и вдоль этой же прямой распространяется фронт звуковой волны. Если же направление распространения звука составляет угол θ с направлением относительной скорости v, то частота, регистрируемая приемником, равна

$$\nu\approx\left(1+\frac{v}{c_0}\cos\theta\right)\nu_0.$$

Изменение частоты ν_0 определяется проекцией $v\cos\theta$ относительной скорости на направление распространения звука. Если $\theta=90°$, то $\nu=\nu_0$ — так называемый поперечный эффект Доплера в обычной акустике отсутствует.

Итак, подведем итог. Частота звука, регистрируемая приемником, зависит от относительного движения источника и приемника и определяется следующими соотношениями:

1) $\nu = \nu_0$ — наблюдатель и источник покоятся относительно среды;

2) $\nu = \left(1 \pm \frac{v_{\text{н}}}{c_0}\right)\nu_0$ — наблюдатель движется, источник покоится;

3) $\nu = \frac{1}{1 \mp v_{\text{и}}/c_0}\nu_0$ — наблюдатель покоится, источник движется.

Эффект Доплера для света

В прошлом веке считали, что изменение частоты света при движении источника или наблюдателя описывается такими же формулами, как и изменение частоты звука. В то время считали, что свет распространяется в эфире — гипотетической среде, которая заполняет все пространство, но не оказывает сопротивления движению тел. Для такой среды формулы, выведенные для звука, должны оставаться неизменными, если только понимать в них под c_0 скорость распространения света в эфире. В теории относительности эфир исчез, а вместе с ним исчезло понятие абсолютного движения (движения по отношению к эфиру, как считали раньше).

Одним из главных выводов теории относительности был вывод о том, что никакое явление не может зависеть от абсолютной скорости; в формулы может входить только скорость относительная. Формулы для акустического эффекта Доплера, как мы видели, содержат такую «абсолютную» скорость — скорость звука по отношению к среде. Уже из этого следует, что эти формулы не могут быть справедливыми для света.

Действительно, в теории относительности выводится другая формула эффекта Доплера:

$$\nu = \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\nu_0.$$

В этой формуле c — скорость света в пустоте, v — относительная скорость источника и приемника, и θ — угол между скоростью v и направлением распространения света, измеренный в системе отсчета, связанной с источником излучения.

Если скорость v очень мала, так что ее квадратом можно пренебречь по сравнению с квадратом скорости света (то есть если $v^2/c^2 \ll 1$), то эта формула не отличается от формулы для изменения частоты звука. Различие в этих двух формулах проявляется только в том случае, если нельзя пренебречь величиной v^2/c^2.

Почти во все формулы теории относительности входит множитель

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (\gamma \geqslant 1).$$

Этот множитель — его называют Лоренцевым множителем — определяет изменение времени в движущейся системе отсчета, сокращение длины движущегося стержня, увеличение массы движущегося тела. Не удивительно, что этот множитель входит и в формулу Доплера. Это станет совсем естественно, если вспомнить, что энергия кванта связана с частотой соотношением $E = h\nu$, а потому в движущейся системе координат частота должна изменяться так же, как энергия.

Это объяснение, конечно, не заменяет вывода формулы Доплера, но делает ее понятнее.

Существенное различие акустической и оптической формул эффекта Доплера проявляется в том случае, когда $\cos\theta = 0$, то есть когда источник испускает волны в направлении, перпендикулярном своему движению. Для такого случая классическая (акустическая) формула предсказывает отсутствие эффекта ($\nu = \nu_0$).

Релятивистская же (оптическая) формула предсказывает наличие поперечного эффекта. Наблюдения над двойной звездой PSR 1913—16*) подтвердили существование этого эффекта.

---

*) Число, которым обозначают звезду,— это ее небесные координаты: 19 ч 13 мин — прямое восхождение, 16° — склонение. PSR — шифр по каталогу

Применение эффекта Доплера

Если спросить школьника, который изучает механику, как измерить скорость тела, то он ответит, что для этого надо измерить время, которое затрачивает тело на прохождение заданного пути. Так, во всяком случае, мы поступаем, если хотим измерить скорость поезда, смотря из окна вагона. Можно поступить и иначе — измерить путь (число километровых указателей), проходимый за заданное время. Вообще, надо «поделить путь на время».

Формула Доплера дает возможность измерить скорость совсем другим способом. Если с железнодорожной станции направить в поезд луч лазера, а в поезде везти с собой установку для измерения частоты излучения, то, сравнивая измеренную частоту с той частотой, на которую был настроен лазер на станции, можно найти скорость поезда относительно станции; точнее говоря, найти отношение скорости поезда к скорости света.

Такой способ измерения скорости отличается от стандартного, «школьного» удивительной особенностью. Нам не нужно ни масштабов длины (километровых столбов), ни масштабов времени (секундомеров).

Эффект Доплера позволил открыть один из самых поразительных законов Вселенной — закон Хаббла.

Американский астроном Хаббл обнаружил, что в спектрах далеких небесных объектов — спиральных галактик — известные спектральные линии оказались сдвинутыми относительно линий тех же элементов на Земле к красному концу спектра: длина волны излучения, испущенного на далеком объекте, оказалась больше, чем длина волны того же излучения на Земле. Это можно было объяснить, только предположив, что объекты удаляются от нас с огромной скоростью. Хаббл обнаружил, что чем дальше от нас находится галактика, тем больше в ее спектре красное смещение. Это можно записать так:

$$V = HR,$$

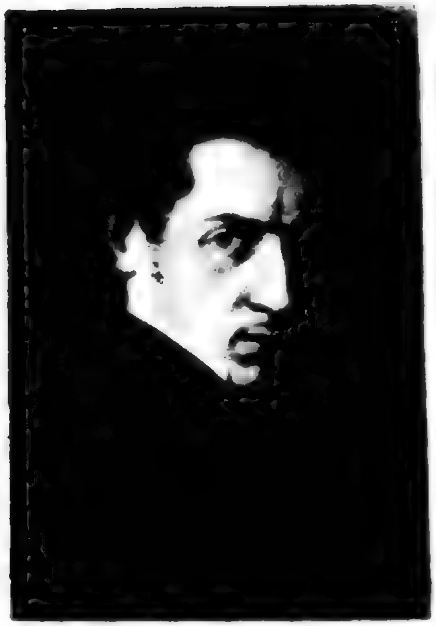
где V — скорость (лучевая) галактики, R — расстояние до галактики, величину H называют постоянной Хаббла; она равна (как это считают сейчас) примерно $\frac{20\ \text{км/с}}{10^6\ \text{свет. лет}}$. Это значит, что при увеличении расстояния до галактики на миллион световых лет скорость ее удаления от нас увеличивается на 20 км/с.

Граница нашей Галактики находится от нас на расстоянии около 2 миллионов световых лет, скопление в созвездии Девы — на расстоянии 35 млн световых лет, скопление в созвездии Гидры — 200 млн световых лет. Оценка расстояний до наиболее далеких радиогалактик и квазаров показывает, что они удалены от нас на миллиарды световых лет (это соответствует скоростям удаления от нас, близким к скорости света — около 90% от скорости света).

Оптика черных дыр

(Начало см. на с. 8)

Прежде всего подчеркнем, что сравнение эффектов, рассчитываемых в рамках этой модели, со сверхновыми и квазарами — всего лишь математическая иллюстрация, а не обоснованная или общепринятая физическая гипотеза. Хорошо известно, например, что после вспышки сверхновой на ее месте наблюдается расширяющаяся туманность, в центре которой иногда имеется пульсар — источник, излучающий строго следующие друг за другом четкие радиоимпульсы. Однако рассмотренная нами модель правдоподобна как возможный подход к объяснению астрономических явлений.



Г. Тарзиманова

Стихотворение Лобачевского

В письме, посланном из Стокгольма осенью 1890 года, Софья Ковалевская пишет: «...нельзя быть математиком, не будучи в то же время и поэтом в душе». И действительно, как показывает история науки, еще со времен пифагорейцев выдающиеся математики увлекались поэзией и даже пробовали писать.

Интерес С. Ковалевской к литературе хорошо известен. Но разве писал стихи великий русский геометр Н. И. Лобачевский?

Ссылаясь на стихотворное послание Лобачевскому, сочиненное братом его жены Н. Е. Великопольским, Л. Б. Модзалевский пишет[*]: «Из этого послания видно, что Н. И. Лобачевский в молодые годы сам занимался версификацией. Но его стихотворные опыты до нас не дошли.»

«Но может быть, их можно найти?» — подумала я, и начались длительные поиски. И вот передо мной тоненькая книжечка, 17-й номер литературного журнала «Заволжский муравей», вышедший в 1834 году. Читаю:

Разлив Волги при Казани

Царица рек в торжественном теченье
К далеким Каспия обширного водам,
Ты уклоняешься к Казани на свиданье
С ней древней матерью Татарским городам!...
Ее со всех сторон, как друга, обнимаешь,
И трепетной струей приветствуешь луга
И тихо с голубых рамен дары слагаешь
На оживленные Булака берега.

Такими задушевными строками начинается это стихотворение о нашей Волге. Смотрю на подпись: «Пр. Л...ский».

Если в этом таинственном сокращении «Л...ский» действительно скрыта фамилия великого геометра, то почему же «Пр.», а не «Н.» или «Н. И.»?

Известно, что Лобачевский подписывал свои публикации по-разному. В частности, два его сочинения: «Понижение степени в двучленном уравнении, когда показатель без единицы делится на 8» и «Об исчезновении тригонометрических строк» — выпущенные отдельными оттисками типографией Казанского университета в 1834 году, то есть как раз тогда, когда выходил семнадцатый номер «Заволжского муравья», подписаны «Пр. Лобачевский». Значит, автор стихотворения «Разлив Волги при Казани» хотел быть узнанным. Сам Николай Иванович, можно сказать, велит нам узнать зашифрованное имя «Пр. Л...ский» — профессор Лобачевский! Но почему он, ректор Казанского университета и известный математик, вдруг — именно в 1834 году — «рискнул» опубликовать свое стихотворение?

Не связано ли это с приездом Пушкина в Казань в сентябре 1833 года? Пушкина, который сказал: «Вдохновение нужно в поэзии, как в геометрии»?

---

[*] «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского» (М., АН, 1948), с. 165.

Представляется мало вероятным, чтобы во время пребывания великого поэта в Казани, где он собирал материалы о восстании Пугачева, не произошла его встреча с великим геометром. Это могло произойти в библиотеке, или в хлебосольном доме Лобачевских (вспомним: жена Н. И. Лобачевского — единоутробная сестра И. Е. Великопольского, давнишнего приятеля Пушкина), или же, наконец, на квартире профессора Фукса, где был в гостях Пушкин и бывал Лобачевский. О его участии в литературных вечерах у коллеги по университету можно прочитать в письме, отправленном из Казани 21 января 1832 года И. Е. Великопольскому; в нем сообщается: «Мы были на литературном вечере у Фуксов... Н. И. Лобачевский читал стихи сочинения М-ме Фукс и несколько раз чуть не захохотал... Баратынский все время сидел с потупленными глазами»[*1]

Таким образом, встреча двух гениев так или иначе должна была произойти в сентябре 1833 года. Откликом на приезд Пушкина явилось, по-видимому, появление в печати стихотворения Лобачевского «Разлив Волги при Казани», полный текст которого мы приводим ниже. Как хорошо звучит его заключительный аккорд:

Вот образ мирного могущества России!
Ее разлив не страшен никому.
Великодушие обуздывает силы,
Всегда, везде покорные ему.

Разлив Волги при Казани

Царица рек в торжественном теченье
К далеким Каспия обширного водам,
Ты уклоняешься к Казани на свиданье
С ней древней матерью Татарским городам!..
Ее со всех сторон, как друга, обнимаешь,
И трепетной струей приветствуешь луга
И тихо с голубых рамен дары слагаешь
На оживленные Булака берега...
Вот шумный пир!.. Но что таинственным и важным
Вещаешь ей глаголом волн твоих?
Свои ли радости, ея ли войн отважных
И славы древние напоминаешь дни?
Ах! прежде и Казань надменная гуляла
При полноводии раздольная весны
И ратью бурною широко заливала
Покорные поля окрестные страны.
Прошла ея пора: воителей потомки,
Как грязный ил изсохшия реки,
Как славного меча ничтожные обломки,
Теперь умолкшею лишь славою громки.

* * *

Так исчезает все!.. Но Ангел запустенья
Ужели некогда вспарит и над тобой?
Ужели и твоих изсякнет волн стремленье —
И Волга зарастет болотною травой?
И где суда твои крылатые скользили,
Увязнет странника усталая нога?
Куда они с собой веселье привозили —
Осиротелые умолкнут берега!..
Нет!.. бытие твое до вечности продлится
Как память ясная великих дел.
Великое в веках безсмертием хранится
И не ему ничтожество — удел.

* * *

Ты поражаешь ли поля опустошеньем?
Ты похищаешь ли надежды поселян?
Нет! на водах твоих всегда благословенье
Почиет благодарных стран,
Тобой питаемых, тобой обогащенных!
Ты и земли безвредная краса,
И светлые в струях твоих невозмущенных,
Как в чистой совести, сияют небеса.

* * *

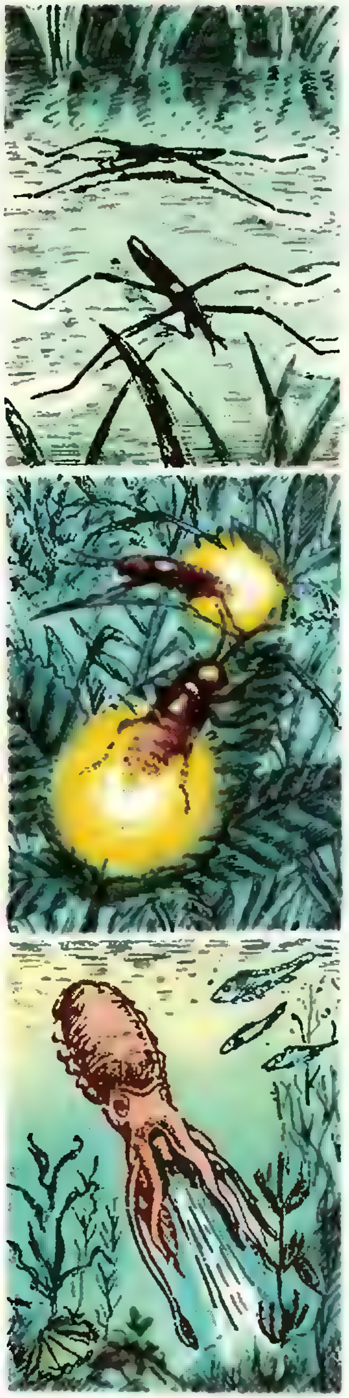
Вот образ мирного могущества России!
Ее разлив не страшен никому.
Великодушие обуздывает силы,
Всегда, везде покорные ему.
Стремится ль смелая на гордые Балканы,
Иль в Араратских гор прольется на Иран?
Ломаются одни несчастных цепи льдяны,—
И усмиряется неистовый тиран.
За то, когда в прах коварных истребится,
России не придет конец;
Могущества не скоро сокрушится
Увековеченный добротою венец.

Пр. Л...ский

[*1] И. Андроников. *Я хочу рассказать вам...* (М., «Советский писатель», 1971), с. 186.

А. Дозоров

Физика без приборов



Сейчас лето, пора веселых школьных каникул. Отложены в сторону учебники, не надо корпеть над домашними заданиями. Как хорошо прыгнуть с разбега в речку, или побродить по лесу, или просто лечь в траву и смотреть на небо, ни о чем не думая. Но посмотрите внимательно вокруг себя, и вы увидите много интересного в самых, казалось бы, привычных и примелькавшихся вещах.

Вот вы стоите у пруда или большой лесной лужи. Почти наверное по водной глади бегают туда-сюда жуки-водомеры. Не спешите, остановитесь и посмотрите, как жучок проминает под собой поверхностный слой жидкости, опираясь на него. Он, видимо, «знает» физику.

Летним вечером в густой траве или в лесу на пнях нередко можно увидеть светлячков. Эти живые фонарики вырабатывают в своем организме химические вещества, которые, окисляясь на воздухе, излучают свет. Светлячок «создал» в своем организме источник света.

Каракатица выталкивает из своего организма жидкость и движется при этом по законам реактивного движения. Тоже молодец.

И в неживой природе есть много любопытного. Предлагаем вам несколько опытов, которые вы сможете провести самостоятельно или со своими товарищами. Не расстраивайтесь, если не сумеете их все объяснить. Наступит новый учебный год, и многое увиденное летом найдет свое объяснение.

Итак, за дело.

1. Согласитесь, не многие из жителей средней полосы, где летом не так уж жарко, видели мираж. Если у вас есть желание его увидеть, наберитесь терпения и сделайте следующее. Сначала подберите подходящую ровную стенку, обращенную днем к Солнцу. Дождитесь безветренной солнечной погоды. Встаньте с товарищем на противоположных концах стенки, рядом с ней. Смотрите внимательно вдоль нее, и вы вдруг увидите... отражение вашего товарища.

Предупреждаем еще раз, что опыт требует большого терпения. Всякий хороший эксперимент, как правило, получается не сразу.

2. Если вы будете регулярно посматривать на Луну, однажды обязательно увидите вокруг нее одно, а если повезет, то и два радужных кольца.

Они видны особенно четко, когда между Луной и глазом находится легкое полупрозрачное облако. Лунный свет рассеивается на случайно расположенных неоднородностях облака и дает дифракционную картину в форме радужных окружностей.

Если вам не терпится увидеть радужные линии, а Луны на небе по каким-то причинам нет, дифракционную картину можно создать искусственно. Для этого потребуются кусочки засвеченной фотопленки и обыкновенная иголка.

Проведите острием иголки по фотоэмульсии — вы получите так называемую дифракционную щель. Поднесите щель близко к глазу и посмотрите через нее на какой-нибудь яркий источник света (например, на Солнце или лампу). Вы увидите яркую радужную полоску. Вращайте фотопленку — разноцветная полоска тоже будет поворачиваться, всякий раз оставаясь перпендикулярной к щели. Теперь процарапайте на эмульсии небольшой кружок — дифракционная картина примет вид радужных колец. Прочертите другой набор линий и посмотрите, что получится.

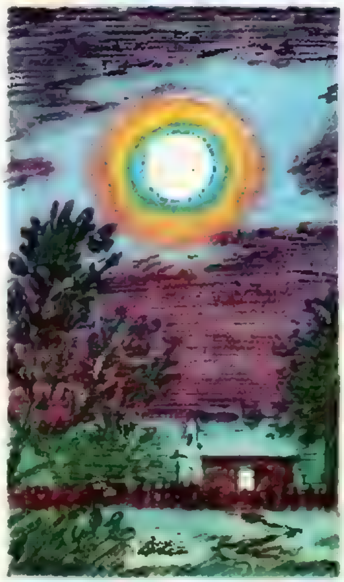
3. Радугу можно наблюдать и с помощью водяной капли. Посадите каплю на палочку или травинку. Встаньте спиной к Солнцу и осторожно поднимайте каплю. Когда лучи Солнца образуют с направлением глаз — капля угол около 42°, прозрачная капля вдруг вспыхнет чрезвычайно чистым по тону цветом. Каким? Любым! Если каплю осторожно перемещать по дуге окружности, можно увидеть все цвета радуги.

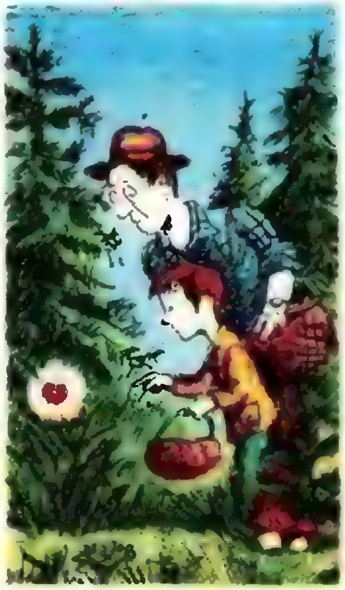
Однажды, собирая в лесу грибы, я был свидетелем забавной сцены. Мой сын внимательно рассматривал капельки росы на траве и на хвойных иглах. Со стороны его действия казались несколько странными: мальчик медленно приседал, устремив взгляд в казалось бы пустое пространство. В это время на полянку вышел еще один грибник, вполне солидный мужчина. Он долго с недоумением наблюдал за медленными и скованными движениями моего сына, в конце концов не выдержал и обратился к нему за разъяснениями. Теперь я с удовольствием смотрел на них обоих, застывших у елки в неуклюжих позах.

4. Оказывается, из капельки воды вы можете сделать маленький микроскоп. Для этого нужно взять плотную бумагу, проколоть в ней толстой иголкой дырочку и на нее аккуратно посадить каплю воды. Микроскоп готов.

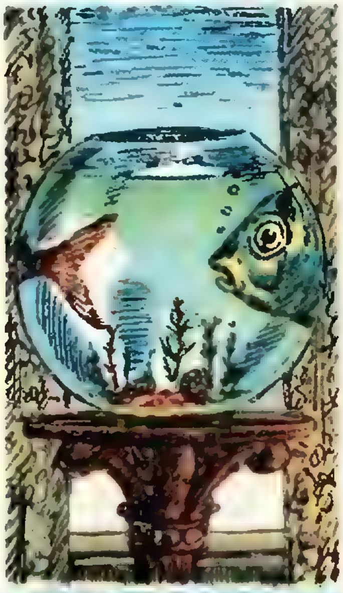
Поднесите капельку как можно ближе к газетному тексту. Вы увидите сильно увеличенную букву. Чем меньше капелька, тем больше увеличение. Теперь, после такой «настройки прибора», можно рассматривать любые мелкие предметы.

Кстати заметим, что в первом микроскопе, изобретенном Левенгуком, все было сделано именно так, только капелька была стеклянная.





ого экспериментальных установ
технической физики выпуск
ихся в области теоретичес
ядерных, теплофизич
ческих и электромаг
и физических ус
материалов,
новок.
маются по
ы — с 2 по 22 июля (в три
ения объявляются не по
у в МИФИ
в днев



5. Мы только что говорили о маленьких капельках. Возможно, у вас дома есть огромная капля — сферический аквариум. В этом случае можно увидеть совершенно необычные явления.

Во-первых, кажущиеся размеры рыбок сильно зависят от их положения в аквариуме. Как и почему?

Во-вторых, сферический аквариум переворачивает изображение удаленных предметов. Понаблюдайте через аквариум за улицей. Обратите внимание, куда перемещается изображение автомобиля, если сам автомобиль движется, например, слева направо.

В-третьих, когда рыбки подплывают к боковым, по отношению к нашему взгляду, стенкам аквариума, у них вдруг пропадают головы, видны лишь одни хвостики. А потом и вся рыбка может исчезнуть из поля зрения. Куда же она прячется? Зная закон полного внутреннего отражения света, вы без труда разберетесь в этом явлении, а приложив некоторые усилия, быть может, рассчитаете и зону аквариума, в которой прячутся ваши любимые подопечные.

В-четвертых, посмотрите вечером на уличные фонари, один раз через аквариум, а второй — непосредственно через окно. Меняется ли при этом яркость фонаря?

6. В художественной литературе можно встретить описания наблюдений так называемого зеленого луча во время захода Солнца. Как правило, это бывает на море, при очень чистом воздухе. Солнце садится за четкий горизонт, и в какой-то момент появляется изумрудный луч. Причиной тому — дисперсия света, то есть разложение белого света на составные части (цвета радуги) при прохождении светом толстого слоя неоднородной по плотности атмосферы Земли. В принципе, должны были бы наблюдаться все цвета, но на фоне еще достаточно яркого желтоватого Солнца наш глаз обращает основное внимание на зеленый цвет.

Вы можете попытаться в течение лета увидеть это редкое явление. Если рядом с вашим домом нет моря, подберите себе свой собственный четкий горизонт. Им может оказаться, например, четкая граница крыши соседнего дома или склона ближайшего холма.

Если в течение лета Солнце так и не покажется вам в неестественном для себя цвете, не отчаивайтесь. Во-первых, потому что опыт можно продолжать круглый год. Во-вторых, потому что зеленое Солнце вы, в принципе, можете увидеть и зимой.

Посмотрите через замерзшее стекло на садящееся (или восходящее) Солнце. Если вы найдете подходящее место на оконном стекле, кристаллики льда сделают свое дело. Они разложат белый свет на все цвета радуги, и вы сможете увидеть Солнце разных цветов.

Л. Вайнтроб

Лучше — поровну

В различных задачах анализа и прикладной математики возникают вопросы такого типа:

Пусть даны два числа v и p: $0<v<p$. Рассматриваются всевозможные (конечные) наборы чисел $x_1, x_2, \dots, x_k$ такие, что $0<x_i\leqslant v$ для любого $i=1, 2, \dots, k$ и сумма $\sum_{i=1}^{k} x_i$ всех чисел набора больше p.

Для каждого такого набора существует такое число D, что 1) сумма S некоторых чисел набора (может быть, в частности, всех) отличается от p на D: $|S-p|=D$ и 2) любая другая сумма некоторых чисел набора отличается от p больше, чем на D.

Для какого набора это число D («погрешность приближения») будет наибольшим?

Как мы увидим, искомым будет набор из одинаковых чисел: «лучше — поровну».

Здесь мы рассмотрим несколько конкретных задач (в том числе — трудную задачу М583 из Задачника «Кванта») указанного типа.

1. *Рассматриваются наборы камней, масса каждого из которых не больше 2 кг, а общая масса набора — больше 10 кг. Из такого набора выбирается несколько камней, суммарная масса которых отличается от 10 кг на наименьшее возможное для данного набора число D. Какое наибольшее значение может принимать число D для всевозможных наборов камней?*

(Эта задача предлагалась на Московской городской математической олимпиаде в 1979 году.)

Понятно, что число D для любого такого набора камней не превосходит 2 кг, так как масса любого камня не больше 2 кг. Кроме того, очевидно, что D не может быть равным 2 кг. Поэкспериментировав с наборами, все камни в которых одинаковы, замечаем, что наибольшее D получается в том случае, когда камни все же достаточно тяжелы, а до 10 кг недостает ровно полкамня. Четыре камня отличаются от 10 кг больше, чем на 2 кг, а для пяти камней из уравнения $5x=10-x/2$ находим $x=20/11$, то есть $D=10/11$.

Докажем теперь, что для любого набора D не превышает $10/11$, то есть покажем, что из произвольного набора камней можно выбрать несколько, суммарная масса которых отличается от 10 кг не больше, чем на $10/11$.

Будем отбирать камни по очереди: сначала возьмем самый тяжелый, затем самый тяжелый из оставшихся, и так до тех пор, пока масса выбранных камней не превзойдет 10 кг. Если среди выбранных есть камень, весящий меньше $20/11$ кг, то либо их общая масса меньше $(10+10/11)$ кг, либо на предыдущем шаге (перед тем, как был взят последний камень) мы имели набор с массой, большей $(10-10/11)$ кг $(=10+10/11-20/11)$, но меньше или равной 10 кг.

Итак, наибольшее значение D равно $10/11$, причем это значение достигается на наборе из одинаковых камней.

Упражнение 1. Покажите, что и в общем случае наибольшее значение D достигается на наборе из одинаковых камней, причем это значение равно $p/(1-2\cdot[1/2-p/v])$ ($[x]$ — это целая часть числа x).

2. Решим теперь задачу М583 из Задачника «Кванта». Она отличается от задачи 1 одним дополнительным ограничением, значительно усложняющим решение: *известно, что общая масса набора — 50 кг.*

Мы уже знаем, что D не превосходит $10/11$. Однако в данном случае эта оценка не является точной, так как число 50 не делится нацело на 20/11 (если бы суммарная масса набора равнялась не 50, а, скажем, 100 кг, то ответ остался бы прежним)

Рассматривая всевозможные разбиения 50 кг на камни с равными массами, убеждаемся в том, что наибольшее значение D для таких наборов равно $D_0=20/27$ кг. (Оно достигается на наборе из 27 камней массы 50/27.) Наша цель — доказать, что D_0 — это и есть искомое наибольшее значение D. Для этого достаточно показать, что произвольный набор можно заменить набором из камней одинаковой массы, не уменьшив при этом D (ведь D для наборов одинаковых камней не превосходит D_0).

Рассмотрим произвольный набор. Выберем из него те камни, суммарная масса которых отличается от 10 кг на наименьшее возможное число (то есть на D). Разобьем камни с массой, большей $2D_0$, на две группы. К первой группе отнесем те из них, которые входят в число выбранных (пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — их массы). Ко второй группе отнесем камни с массами $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (большими $2D_0$), не входящие в число выбранных. Для краткости мы будем иногда писать «камень a_i» (соответственно b_j), имея в виду «камень, масса которого равна a_i» (соответственно b_j). Пусть A — это сумма масс камней a_i (иногда A будет обозначать множество, состоящее из камней $a_1, a_2, \ldots, a_m$; определяемые далее суммы масс B и C тоже могут быть использованы для обозначения соответствующих множеств), B — сумма масс камней b_j, а C — сумма масс оставшихся камней (то есть тех, масса которых не превосходит $2D_0$).

Покажем теперь, что существует набор, для которого $a_1=a_2=\ldots=a_m=b_1=\ldots=b_n$, $C=0$, а значение D не меньше, чем у исходного. Это и будет означать, что $D\leqslant D_0$, так как для наборов, состоящих из одинаковых камней, D не превосходит D_0 При этом возможны два случая:

I *Суммарная масса выбранных камней равна $10-D$.*

Для построения нужного набора нам придется доказать несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Все камни, входящие в C, принадлежат к числу выбранных* (то есть $10-D=A+C$).

Действительно, если хотя бы один из камней, входящих в C, не выбран, то, добавив его к выбранным, мы получим несколько камней, масса которых отличается от 10 кг не более чем на $2D_0-D<D$. А это противоречит выбору рассматриваемого набора.

Лемма 2. *$a_i\geqslant b_j$ при любых i и j $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$.*

Действительно, если бы для каких-то i и j выполнялось неравенство $a_i<b_j$, то, добавив к выбранным камням камень b_j и выбросив оттуда камень a_i, мы получили бы набор, суммарная масса которого лучше приближается к 10, чем для выбранного (так как из неравенств $b_j\leqslant 2$, $a_i>2D_0$, $4D_0\geqslant 2$ следует, что $b_j-a_i<2D_0$), что противоречит оптимальности выбранного набора.

Лемма 3. *$b_j>C+2D_0$ при любом j $(1\leqslant j\leqslant n)$.*

Удалим из выбранного набора все камни, входящие в C, и добавим туда камень b_j. Если $A+b_j\leqslant 10-D$, то, добавляя по одному камни из C, мы в какой-то момент получим набор, масса которого больше $10-D$ (так как $A+b_j+C>A+C=10-D$), но меньше $10+D$ (так как каждый раз добавляется камень с массой, не превосходящей $2D_0<2D$). Значит, $A+b_j>10-D$, а потому (в силу минимальности D) $A+b_j>10+D=A+C+2D>A+C+2D_0$, откуда $b_j>C+2D_0$.

Из леммы 2 следует, что и $a_i>C+2D_0$ при всех i.

Лемма 4. *Если сумма масс k камней из A и l камней из B меньше $10+D$, то $k+l\leqslant m$.*

Если эта сумма меньше $10+D$, то она в силу минимальности D меньше или равна $10-D$. Пусть $k+l>m$. Заменяя по очереди камни b_j в этой сумме не входящими в нее камнями a_i, мы в конце концов положим последний из камней a_i и доведем таким образом сумму до величины $A+b_j+\ldots>A+C+2D_0>10+D_0$ (см. леммы 1 и 3). Поскольку каждый раз мы добавляли камень с массой не больше чем $2D_0$ $(a_i - b_j < 2D_0)$, в какой-то момент эта сумма будет находиться строго между $10-D$ и $10+D$. Противоречие.

Докажем, наконец, что можно построить набор, состоящий из камней одинаковой массы, не уменьшив D.

Заменим каждый из камней a_i $(i=1, \ldots, m)$ камнем с массой $a=A/m$, каждый из камней b_j $(j=1, \ldots, n)$ — камнем с массой $b=B/n$, а камни из C оставим без изменения. Покажем, что для такого набора число D не уменьшилось.

Допустим, что D уменьшилось. Тогда при некоторых k, l и $C'<C$ сумма $ka+lb+C'$ лежит строго между $10-D$ и $10+D$. Возьмем k самых легких камней из A. Сумма их масс не превосходит ka (почему?). Аналогично сумма масс l самых легких камней из B не превосходит lb. Но $ka+lb<10+D$, поэтому $k+l\leqslant m$ (см. лемму 4). В таком случае $10-D=A+C=ma+C\geqslant ka+la+{}$ ${}+C'\geqslant ka+lb+C'>10-D$. Противоречие.

Если $a>b$, то b не может входить ни в одну сумму, дающую $10-D$ (заменив b на a, получим противоречие). Поэтому мы можем чуть-чуть (придайте точный смысл этим словам!) уменьшить все камни массы a, чуть-чуть увеличив при этом камни массы b, так чтобы C осталось неизменным. В результате этого у нас получится набор, имеющий большее значение D, чем исходный. Проделав так несколько раз, мы получим набор, у которого $a=b$.

Если в этом наборе $C>0$, увеличим a (число камней с массой a равно $m+n$) на ε, где $\varepsilon<C/(m+n)$; при этом C уменьшится на $(m+n)\varepsilon$. Но тогда D увеличится на $n\cdot\varepsilon$, что и требуется. После нескольких шагов мы получим набор, у которого $a=b$ и $C=0$.

Случай I разобран полностью.

II. *Суммарная масса выбранных камней равна $10+D$.*

Этот случай можно рассматривать примерно так же. Но проще заметить, что если выбранные камни дают наилучшее приближение (для данного набора) к 10 с избытком, то остальные камни набора дают наилучшее приближение с недостатком к $50-10$ (то есть к 40 кг в нашей задаче). Так как D_0 по-прежнему не меньше $2/4$ кг (это единственное дополнительное условие, которое было использовано при рассмотрении случая I), все доказанные утверждения останутся в силе после замены 10 на 40.

Итак, задача решена. Наибольшее возможное значение D оказалось равным $D_0=20/27$ кг.

Заметим, что наши рассуждения позволяют решить следующую общую задачу: *найти максимум наименьших отклонений от p по всевозможным наборам камней с массой, не превосходящей v, и суммарной массой P.* Мы доказали, что если существует набор, для которого $D>v/4$, то максимальное значение D надо искать среди наборов одинаковых камней.

Упражнения

2. Докажите, что при $v=2$ кг, $p=10$ кг, $P>24$ кг существует набор, для которого $D>v/4$.

3. Доведите до конца решение задачи в общем случае.

Вот еще одна задача на эту тему: *имеется несколько ящиков, масса каждого из которых не больше 1 т, а их общая масса равна 10 т; на каком наименьшем количестве трехтонок наверняка можно увезти эти ящики?*

Решить эту задачу (и ее обобщение) вам помогут следующие упражнения (первые два из них напоминают уже рассмотренные задачи):

4. Пусть единственным ограничением на суммарную массу ящиков является условие $P>3$ т. Какой наибольший груз Γ можно наверняка увезти на одной трехтонке?

5. Каким будет ответ в предыдущей задаче, если известно, что $P=10$ т?

6. Пусть теперь масса каждого ящика не превосходит v, суммарная масса равна P и в нашем распоряжении есть машина грузоподъемностью p. Пусть Γ — масса максимального груза, который нам удастся погрузить на машину. *Докажите*, что наименьшее значение Γ достигается в случае, когда все ящики имеют одинаковую массу.

7. Каким наименьшим запасом p-тонок надо располагать, чтобы наверняка перевезти все ящики из упражнения 6?

Попытайтесь найти возможно более общие формулировки теорем, подтверждающих принцип «лучше — поровну».

Задачник Кванта

Задачи

М636—М640; Ф648—Ф652

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите «Задачник «Кванта» № 8 — 80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М636, М637» или «Ф648». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах.

Задачи этого номера предлагались на заключительном туре XIV Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

М636. Множество A состоит из целых чисел, его наименьший элемент равен 1, а наибольший элемент равен 100. Каждый элемент A, кроме 1, равен сумме двух (возможно, равных) чисел, принадлежащих A. Укажите среди всех множеств A, удовлетворяющих этим условиям, множество с минимальным числом элементов. (10)

Ю. Нестеренко

М637. Дан правильный треугольник ABC. Некоторая прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D — центр треугольника PMB, точка E — середина отрезка AP. Определите углы треугольника DEC. (9)

А. Купцов

М638. Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги окрашены в красный цвет, остальные в синий, причем так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером 2×3 содержит в точности две красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник из 99 клеток размером 9×11? (8)

Н. Карташов

М639. В тетраэдре $ABCD$ $(AC)\perp(BC)$ и $(AD)\perp(BD)$. Докажите, что косинус угла между прямыми AC и BD меньше, чем $|CD|/|AB|$. (10)

Ю. Нестеренко

М640. Число $x\in[0;1]$ записано в виде бесконечной десятичной дроби. Переставив ее первые 5 цифр после запятой в произвольном порядке, получим новую бесконечную десятичную дробь, отвечающую некоторому числу x_1. Переставив в десятичной записи числа x_1 цифры со 2-й по 6-ю после запятой, получим десятичную запись числа x_2. Вообще, десятичная запись числа x_{k+1} получается перестановкой цифр в записи x_k с $(k+1)$-й по $(k+5)$-ю после запятой.

а) Докажите, что как бы ни переставлять цифры на каждом шаге, получающаяся последовательность чисел x_k всегда имеет некоторый предел. Обозначим этот предел через y.

б) Выясните, можно ли с помощью такого процесса из рационального числа x получить иррациональное число y. в) Придумайте такую дробь x, для которой описанный процесс всегда приводит к иррациональным числам y, каковы бы ни были перестановки пятерок цифр на каждом шаге. (10)

Н. Карташов

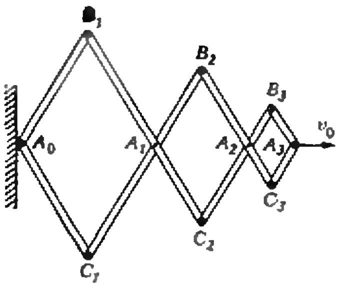


Рис. 1.

Ф648. Шарнирная конструкция состоит из трех ромбов, стороны которых относятся как 3:2:1 (рис. 1). Вершина A_3 перемещается в горизонтальном направлении со скоростью v_0. Определить скорости вершин A_1, A_2, B_1 в тот момент, когда все углы конструкции прямые. (8)

С. Кротов

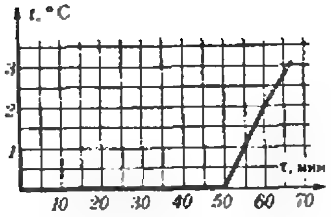


Рис. 2.

Ф649. В ведре находится смесь воды со льдом. Масса смеси 10 кг. Ведро внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившийся график зависимости t (τ) изображен на рисунке 2. Известны удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг · К) и теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг. Определите, сколько льда было в ведре, когда его внесли в комнату. Теплоемкостью ведра пренебречь. (8)

А. Буздин

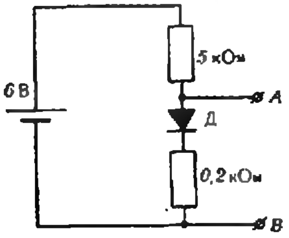


Рис. 3.

Ф650. Для получения напряжения, величина которого мало зависит от температуры, собрана схема по рисунку 3. Вольтамперные характеристики диода Д при трех различных температурах окружающей среды $t_1 = 125$°C, $t_2 = 25$°C, $t_3 = -60$°C приведены на рисунке 4. Напряжение источника $U = 6$ В при температуре 25°C и с увеличением температуры возрастает на $25 \cdot 10^{-3}$ В/град. Найти напряжение между зажимами A и B при $t = 25$°C и зависимость этого напряжения от температуры. (9)

А. Зильберман

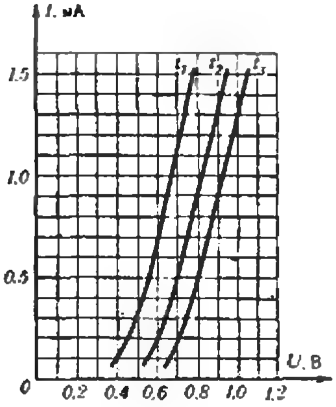


Рис. 4.

Ф651. В научно-фантастической повести описывается аварийная ситуация, в которой астронавт массы $M = 100$ кг оказался на расстоянии $l = 100$ м от корабля со стаканом замерзшей воды. Обеспечивая сублимацию (испарение) льда, астронавт возвращается на корабль. Реален ли такой способ возвращения? Оцените, за какое время астронавт возвращается на корабль. Считайте, что сублимация льда происходит при постоянной температуре $T = 272$ К. Давление насыщающих паров при этой температуре $p_н = 550$ Па. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3 \cdot 10^3$ Дж/(кмоль · К). Размеры стакана и массу льда задайте самостоятельно. (9)

А. Стасенко

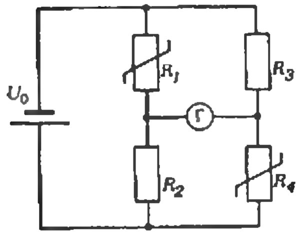


Рис. 5.

Ф652. Схема, изображенная на рисунке 5, состоит из двух одинаковых резисторов $R_2 = R_3 = R$ и двух одинаковых нелинейных резисторов R_1 и R_4, вольтамперная характеристика которых имеет вид $U = \alpha I^2$, где α — некоторый известный постоянный коэффициент. При каком напряжении источника питания U_0 сила тока через гальванометр Г равна нулю? (10)

В. Скороваров

Решения задач

М579—М582, М584, М586—М594, М597; Ф589—Ф598

М579. *Докажите, что для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[0; 1]$, выполнено неравенство*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n+1)^2 \geqslant 4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2).$$

Первое решение. Относительно x_n это неравенство — квадратичное, $P_2(x)=3x_n^2+Ax_n+B\leqslant 0$, и оно выполняется на отрезке $[0; 1]$, если $P_2(0)\leqslant 0$ и $P_2(1)\leqslant 0$. Эти два неравенства относительно x_{n-1} — тоже квадратичные, такого же вида, и выполняются на всем отрезке $[0; 1]$, если справедливы при $x_{n-1}=0$ и $x_{n-1}=1$. Рассуждая так далее, получаем, что достаточно проверить исходное неравенство для наборов $x_1, \ldots, x_n$ из 0 и 1. Если число x_i, равных единице, равно k, то получаем очевидное неравенство $(k+1)^2\geqslant 4k$ (то есть $(k-1)^2\geqslant 0$).

Второе решение. Поскольку числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[0; 1]$,

$$4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\leqslant 4(x_1+\ldots+x_n),$$

и наше неравенство снова сводится к очевидному

$$4S\leqslant (S+1)^2.$$

А. Плоткин,
С. Фомин

◆

М580. *В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если A — враг B, то B — враг A.)*

Проведем разбиение произвольным образом. Если в какой-нибудь из палат у некоторого парламентария A будет $\geqslant 2$ врагов, то число его врагов в другой палате $\leqslant 1$. Поэтому после перемещения A в другую палату суммарное число пар врагов внутри палат уменьшится. Такие перемещения продолжим до тех пор, пока требуемое условие не будет выполнено.

О. Бородин

◆

М581. а) *Существует ли трехзначное число, куб которого оканчивается на три семерки?* б) *Для любого ли набора цифр, последняя из которых — не 0, существует куб, оканчивающийся этим набором цифр?*

а) Чтобы число n^3 оканчивалось на 7, само число n должно оканчиваться на 3, так что если искомое трёхзначное число n существует, то $n=\overline{ab3}=100a+10b+3=10(10a+b)+3$. Тогда $n^3=10^3\cdot A+10^2(7a+2b+9b^2)+10(7b+2)+7$.

Число $7b+2$ оканчивается на 7 в том и только в том случае, когда $7b$ оканчивается на 5, то есть когда $b=5$. Тогда

$$n^3=10^3\cdot \dot{A}+10^2(7a+8)+77.$$

Число $7a+8$ оканчивается на 7 в том и только в том случае, когда $a=7$.

Таким образом, 753^3 оканчивается (по крайней мере) на три семерки.

б) Нет, не для любого. Если число n^3 оканчивается на 5, то и само число n оканчивается на 5. Но число $(10a+5)^3$ оканчивается на 25, если a — четное, и на 75, если a — нечетное. Поэтому ни для какого n число n^3 не оканчивается на 05, 15, 35, 45, 55, 65, 85, 95.

Кроме того, если число n^3 оканчивается четной цифрой, то n^3 делится на 2; тогда n делится на 2 и, следовательно, n^3 делится на 8. Но число n делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное тремя его последними цифрами, делится на 8. Значит, ни для какого n число n^3 не оканчивается на *четное трехзначное число, не делящееся на 8*.

А какой будет ответ в задаче б), если потребовать, чтобы последняя цифра данного набора была нечетной и отличной от 5?

М582. *В окружность с центром O вписан четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями. Докажите, что расстояние от точки O до каждой его стороны равно половине длины противоположной стороны.*

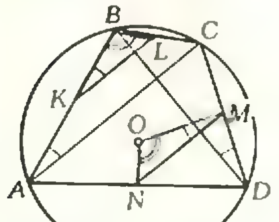


Рис. 1.

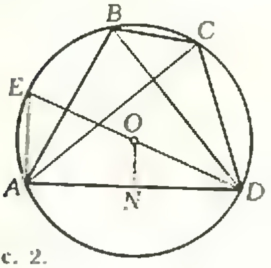


Рис. 2.

Первое решение. *Пусть K, L, M, N* — середины сторон *AB, BC, CD* и *AD* вписанного четырехугольника *ABCD* (рис. 1), $[AC] \perp [BD]$. Докажем, что $|ON| = |BL|$ и $|OM| = |BK|$.

Действительно, $|KL| = |MN|$ и $[KL] \parallel [MN]$ как средние линии в треугольниках ABC и ACD с общим основанием AC. Поэтому $\widehat{BKL} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Далее, $[OM] \perp [CD]$, и $[MN] \perp [BD]$ (поскольку $[MN] \parallel [AC]$), так что $\widehat{BDC} = \widehat{OMN}$. Значит, $\widehat{BKL} = \widehat{OMN}$. Кроме того, $\widehat{KBL} = 180° - \widehat{MDN} = \widehat{MON}$. Таким образом, треугольники BKL и MON конгруэнтны (по стороне и двум углам), откуда $|ON| = |BL|$, $|OM| = |BK|$.

Равенства $|OK| = |DM|$ и $|OL| = |DN|$ следует из конгруэнтности треугольников OKL и DMN.

Второе решение. Проведем хорду AE, перпендикулярную AD (рис. 2). Дуга AE конгруэнтна дуге BC (поскольку $\widehat{ADE} = \widehat{BAC}$), так что $|AE| = |BC|$. Так как $\widehat{EAD} = 90°$, ED — диаметр и $O \in [ED]$. Поскольку $[ON]$ — средняя линия в прямоугольном треугольнике ADE, $|ON| = \frac{|AE|}{2} = \frac{|BC|}{2}$, что и утверждалось.

И. Клумова

◆

М584. *Можно ли представить все пространство в виде объединения прямых, каждые две из которых — скрещиваются (то есть не лежат в одной плоскости)?*

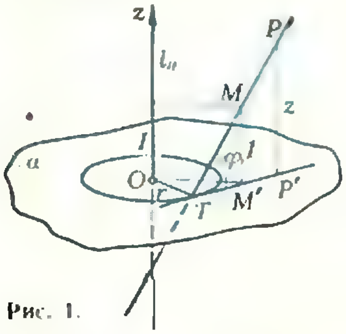


Рис. 1.

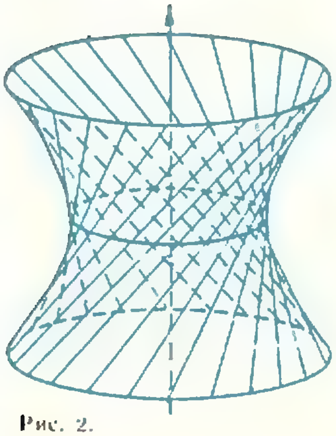


Рис. 2.

Приведем пример разбиения пространства на попарно скрещивающиеся прямые.

Пусть прямая l_0 вертикальна (ось Oz на рисунке 1). Через каждую точку T горизонтальной плоскости α (Oxy), отличную от O, проведем прямую TM, которая перпендикулярна отрезку OT и наклонена к плоскости α под углом $\operatorname{arctg} \frac{1}{|OT|}$.

Таким образом, при возрастании $r = |OT|$ от 0 до $+\infty$ прямая TM постепенно наклоняется от вертикального положения l_0 к горизонтальному. При фиксированном же r прямые TM вращаются вокруг оси l_0, образуя *однополостный гиперболоид* Γ_r (рис. 2). Для каждого $r > 0$ получается гиперболоид с «горловиной» радиуса r, все более широкий.

Прямые TM, построенные для всех точек $T \in \alpha$, отличных от O, и прямая l_0 образуют искомое разбиение. Докажем это.

Во-первых, докажем, что никакие две из проведенных прямых не параллельны. Действительно, если две прямые принадлежат разным семействам Γ_{r_1} и Γ_{r_2}, $r_1 \neq r_2$, то углы φ_1 и φ_2 их наклона к горизонтальной плоскости α различны. Если же две прямые принадлежат одному семейству Γ_r, то их проекции либо на плоскость α, либо на вертикальную плоскость будут, очевидно, не параллельны.

(Заметим, что на каждом гиперболоиде Γ_r можно выбрать одно из двух семейств прямолинейных образующих: мы можем направить вектор $\overrightarrow{TM'}$ от точки T (рис. 1) по или против часовой стрелки. Мы каждый раз направляем его одинаково.)

Во-вторых, нужно доказать, что через каждую точку пространства проходит ровно одна из прямых. Это почти очевидно «из соображений непрерывности», но для строгого доказательства лучше использовать метод координат.

Пусть $P(x;\ y;\ z)$ — точка прямой TM на рисунке 1; $P'(x;\ y)$ — ее проекция на плоскость α. Тогда $|TP'| = r|z|$, поэтому $|OP'|^2 = r^2(1 + z^2)$, то есть

$$x^2 + y^2 = r^2(1 + z^2).$$

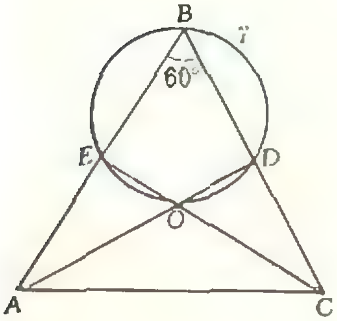
(Это уравнение гиперболоида Γ_r!) Отсюда для любой точки P $(x;\ y;\ z)$, $x^2+y^2\neq 0$, можно найти единственное $r>0$ и, проведя из точки P' касательную $P'T$ к окружности радиуса с центром O (причем ту касательную, которая соответствует выбранному нами направлению $\overrightarrow{TM'}$ — по или против часовой стрелки), получить точку T и построить прямую $\overrightarrow{TM}$, проходящую через нашу точку P.

Во всех присланных читателями решениях по существу описывался (разными способами) один и тот же пример. Это не удивительно; можно доказать, что (при соблюдении некоторых естественных условий алгебраической зависимости от параметров) существует, с точностью до линейного преобразования, единственное требуемое разбиение пространства.

Н. Васильев

◆

M586. *В треугольнике ABC, у которого $\hat{B}=60°$, провели биссектрисы AD и CE, пересекающиеся в точке O. Докажите, что $|OD|=|OE|$.*



Наше доказательство будет опираться на следующие теоремы:

1. Если в окружности две дуги имеют одинаковую меру, то длины хорд, стягивающих эти дуги, равны.

2. Биссектриса вписанного в окружность угла делит дугу, стягивающую этот угол, пополам.

3. Три биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

4. Если сумма величин двух противоположных углов четырехугольника равна 180°, то вокруг него можно описать окружность.

5. Если в треугольнике ABC величина угла B равна φ, то величина угла AOC, где O — точка пересечения биссектрис, равна $90°+\dfrac{\varphi}{2}$.

Приступим к доказательству утверждения, сформулированного в задаче M586.

По теореме 5 величина угла EOD (см. рисунок) равна 120°. Поскольку в четырехугольнике $BEOD$ сумма величин двух противоположных углов равна 180°, вокруг него по теореме 4 можно описать окружность. Согласно теореме 3 отрезок BO является биссектрисой угла B. По теореме 2 точка O делит дугу ED пополам. Используя теорему 1, заключаем, что $|OD|=|OE|$.

В. Гутенмахер

◆

M587. *Дана тройка чисел 2, $\sqrt{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Разрешается любые два из них заменить двумя такими: их суммой, деленной на $\sqrt{2}$, и их разностью, также деленной на $\sqrt{2}$. Можно ли, проделав эту процедуру несколько раз, получить тройку чисел 1, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$?*

Преобразование

$$(x;\ y)\rightarrow\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}};\ \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) \qquad (1)$$

сохраняет сумму квадратов пары чисел:

$$x^2+y^2=\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Поэтому процедура, указанная в условии, сохраняет сумму квадратов тройки чисел. Но

$$2^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=6\frac{1}{2}\neq 1+(\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2=$$
$$=6+2\sqrt{2}.$$

Поэтому перевести одну тройку в другую нельзя.

Заметим, что преобразование (1) — это поворот плоскости вокруг точки $(0;\ 0)$ на 45°.

Поэтому преобразования точек $(x;\ y;\ z)\in\mathbf{R}^3$[*] в нашей задаче — повороты на угол 45° вокруг любой из трех координатных осей и их всевозможные композиции. Ясно, что эти преобразования переводят любую сферу с центром в начале координат O в себя — на этом основано решение задачи.

---

[*] $\mathbf{R}^3$ — обозначение трехмерного пространства.

Можно доказать (попробуйте это сделать!), что *орбита* любой начальной точки $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — множество точек, которые получаются из нее действием группы всех наших преобразований, — будет *всюду плотна* на сфере радиуса $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$ с центром O, то есть содержит точки в любом сколь угодно маленьком кружочке сферы.

Более трудные задачи — описать точно орбиту какой-либо точки, скажем точки $(1;\ 0;\ 0)$ или одной из точек, данных в условии, или указать алгоритм, позволяющий по двум точкам сферы узнать, можно ли одну из них перевести в другую. Нам решение этих задач неизвестно.

Н. Васильев

◆

M588. *а) Через точку, взятую внутри произвольного тетраэдра, параллельно его ребрам проведены отрезки с концами на гранях тетраэдра. Докажите, что сумма всех шести отношений длин этих отрезков к длинам параллельных им ребер всегда равна трем.*

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для треугольника (на плоскости).

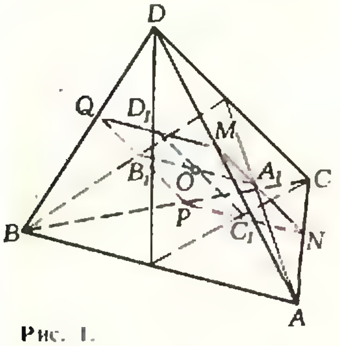


Рис. 1.

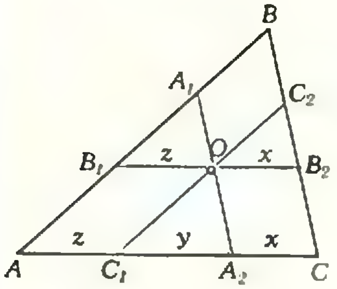


Рис. 2.

а) Проведем через точку O внутри тетраэдра $ABCD$ отрезки $|A_1B_1| \parallel |AB|$ и $|C_1D_1| \parallel |CD|$, где $A_1 \in (ACD)$, $B_1 \in (BCD)$, $C_1 \in (ABC)$, $D_1 \in (ABD)$ (рис. 1). Эти отрезки определяют плоскость, пересекающую грани ABC и ABD по прямым PN и MQ, параллельным (AB), а грани ACD и BCD по прямым MN и PQ, параллельным (CD). Значит, четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм. Имеем

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|MQ|}{|AB|} = \frac{|DM|}{|AD|},$$

$$\frac{|C_1D_1|}{|CD|} = \frac{|MN|}{|CD|} = \frac{|AM|}{|AD|}.$$

Отсюда

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} + \frac{|C_1D_1|}{|CD|} = \frac{|DM|}{|AD|} + \frac{|AM|}{|AD|} = \frac{|DM|+|AM|}{|AD|} = 1.$$

Итак, сумма отношений длин двух проведенных отрезков к длинам параллельных им скрещивающихся ребер тетраэдра равна единице. Следовательно, сумма всех шести отношений равна трем.

б) Докажем, что *если через точку, взятую внутри произвольного треугольника, параллельно его сторонам проведены отрезки с концами на сторонах треугольника, то сумма трех отношений длин этих отрезков к длинам параллельных им сторон равна двум.*

Пусть O — точка внутри $\triangle ABC$, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 — отрезки, параллельные сторонам треугольника (рис. 2). Из подобия треугольников ABC, C_1CC_2 и A_1AA_2 получаем (обозначения см. на рисунке 2)

$$\frac{|C_1C_2|}{|AB|} = \frac{|CC_1|}{|AC|} = \frac{x+y}{|AC|},$$

$$\frac{|A_1A_2|}{|BC|} = \frac{|AA_2|}{|AC|} = \frac{z+y}{|AC|}.$$

Кроме того, $\dfrac{|B_1B_2|}{|AC|} = \dfrac{x+z}{|AC|}$ (см. рис. 2). Поэтому

$$\frac{|A_1A_2|}{|BC|} + \frac{|B_1B_2|}{|AC|} + \frac{|C_1C_2|}{|AB|} =$$

$$= \frac{z+y}{|AC|} + \frac{x+z}{|AC|} + \frac{x+y}{|AC|} = \frac{2(x+y+z)}{|AC|} = 2,$$

что и требовалось доказать.

Э. Ясиновый

◆

M589. *На плоскости дан набор из n векторов, длина каждого из которых не превосходит 1. Докажите, что, заменив некоторые векторы этого набора на противоположные, можно получить такой набор*

Приведем решение задачи б). Оно основано на следующем простом утверждении:

Лемма. *Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы на плоскости, по длине не превосходящие 1, то длина суммы или разности некоторых двух из них также не превосходит 1.*

Действительно, среди шести векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$ найдутся два, величина угла между которыми не превосходит

n векторов, сумма которых имеет длину

а) не превосходящую $\sqrt{n}$;

б) не превосходящую $\sqrt{2}$.

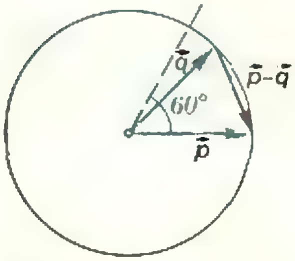


Рис. 1.

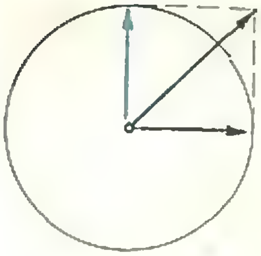


Рис. 2.

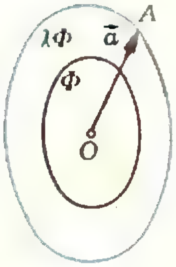


Рис. 3.

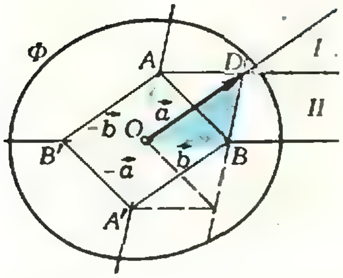


Рис. 4.

М590. *а) Найдите наименьшее значение выражения* $|\cos x| + |\cos 2x|$. *Докажите, что для любого числа x и*

60°. Но тогда, очевидно, длина разности этих двух векторов не превосходит 1 (рис. 1).

Утверждение задачи доказывается теперь так. Пусть $n>1$ и α_n — наименьшее число, обладающее таким свойством: *для любых векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ на плоскости, таких, что $|\vec{a}_1| \leqslant 1, \ldots, |\vec{a}_n| \leqslant 1$, в сумме $\vec{x} = \pm\vec{a}_1 \pm \ldots \pm \vec{a}_n$ можно так выбрать знаки, что $|\vec{x}| \leqslant \alpha_n$.* Нам надо проверить, что $\alpha_n \leqslant \sqrt{2}$. Лемма показывает, что если $n \geqslant 3$, то $\alpha_n = \alpha_{n-1}$. Поэтому $\alpha_n = \alpha_2$. Но, очевидно, $\alpha_2 = \sqrt{2}$ (рис. 2), что и завершает доказательство.

Любопытно, что доказанный результат (с несколько худшей константой) справедлив и для «неевклидового» способа измерения длин векторов, при котором роль единичного круга играет произвольная выпуклая ограниченная центрально-симметричная фигура Φ на плоскости. Этот способ очень популярен в современной математике и состоит в следующем. Чтобы измерить длину $\vec{a}$, отложим этот вектор от центра симметрии O фигуры Φ — пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ — и найдем наименьшее число $\lambda \geqslant 0$, такое, что $A \in \lambda\Phi$ ($\lambda\Phi$ — образ фигуры Φ при гомотетии с центром O и коэффициентом λ — см. рисунок 3; мы предполагаем, что Φ содержит свою границу и что точка O лежит внутри Φ). Это число λ и принимается за «обобщенную длину» $|\vec{a}|_\Phi$ вектора $\vec{a}$. Ясно, что если Φ — круг радиуса 1, то $|\vec{a}|_\Phi = |\vec{a}|$ и что $|\overrightarrow{OA}|_\Phi \leqslant 1 \Leftrightarrow A \in \Phi$. Выражаясь вольно, мы измеряем длины векторов, выбирая различные масштабы по разным направлениям. Легко убедиться в том, что введенное число $|\vec{a}|_\Phi$ обладает обычными свойствами длины; в частности, справедливо неравенство $|\vec{a}+\vec{b}|_\Phi \leqslant |\vec{a}|_\Phi + |\vec{b}|_\Phi$ (Проверьте! Здесь вам понадобится выпуклость фигуры Φ.)

Аналог доказанного выше утверждения выглядит так. *Если $|\vec{a}_1|_\Phi \leqslant 1, \ldots, |\vec{a}_n|_\Phi \leqslant 1$, то в сумме $\vec{x} = \pm\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2 \pm \ldots \pm \vec{a}_n$* можно так выбрать знаки, что $|\vec{x}|_\Phi \leqslant 2$.

Доказательство ведется по той же схеме: нового рассуждения требует лишь доказательство леммы, поскольку мы не можем теперь утверждать, что если $|\vec{a}|_\Phi, |\vec{b}|_\Phi \leqslant 1$ и $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} \leqslant 60^\circ$, то $|\vec{a}-\vec{b}|_\Phi \leqslant 1$.

Итак, пусть $|\vec{a}|_\Phi, |\vec{b}|_\Phi, |\vec{c}|_\Phi \leqslant 1$. Это означает, что точки A, B, C, такие, что $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, принадлежат Φ.

Пусть $\overrightarrow{OD} = \vec{a}+\vec{b}$. Ясно, что, рассматривая возможные положения точки C, мы можем ограничиться случаем, когда C принадлежит углу BOD. Если при этом C находится в треугольнике OBD, то $P_{-\vec{b}}(C)$ лежит в треугольнике AOB' (здесь $P_{-\vec{b}}$ — параллельный перенос на вектор $-\vec{b}$). Следовательно, $P_{-\vec{b}}(C) \in \Phi$, так что в этом случае $|\vec{c}-\vec{b}|_\Phi \leqslant 1$. Оставшуюся часть угла BOD разделим на зоны I и II, как показано на рисунке 4. Если точка C лежит в зоне I, то точка D принадлежит треугольнику ABC, лежащему в Φ, и потому $|\vec{a}+\vec{b}|_\Phi \leqslant 1$, а если C — в зоне II, то, очевидно, точка $P_{-\vec{b}}(C)$ принадлежит выпуклому четырехугольнику $OACB$, лежащему в фигуре Φ, и мы снова получаем, что $|\vec{c}-\vec{b}|_\Phi \leqslant 1$.

Вводя теперь числа $\alpha_n = \alpha_n(\Phi)$ как и выше, мы опять видим, что $\alpha_n(\Phi) = \alpha_2(\Phi)$ при $n \geqslant 2$. Но $\alpha_2(\Phi) \leqslant 2$, ибо $|\vec{a}_1+\vec{a}_2|_\Phi \leqslant |\vec{a}_1|_\Phi + |\vec{a}_2|_\Phi \leqslant 2$, и потому $\alpha_n(\Phi) \leqslant 2$, что и требовалось. Заметим еще, что *для произвольной фигуры Φ константу 2 уменьшить нельзя:* рассмотрите в качестве Φ параллелограмм $ABCD$, а в качестве $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

А. Плоткин

◆

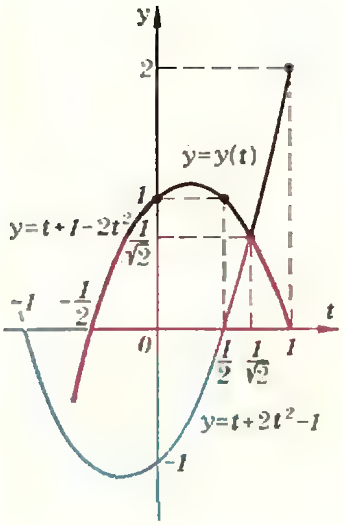
а) Положим $t = |\cos x| \in [0; 1]$ и рассмотрим функцию $y(t) = t + |2t^2 - 1|$ на отрезке $[0; 1]$.

Если $0 \leqslant t < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то *любого натурального числа n сумма*

$|\cos x| + |\cos 2x| +$
$+|\cos 4x| + \ldots + |\cos 2^n x|$

б) не меньше $\frac{n}{4}$;

в) не меньше $\frac{n}{2}$.



$$y(t) = t + (1-\sqrt{2}\,t)(1+\sqrt{2}\,t) \geq t + (1-\sqrt{2}\,t) =$$
$$= 1 - t(\sqrt{2}-1) \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{2}$$

Если же $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$, то $y(t) \geq t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, $y(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ для всех $t \in [0;\ 1]$. Но при $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (то есть $x = \frac{\pi}{4}$) $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, наименьшее значение выражения $|\cos x| + |\cos 2x|$ равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

К тому же результату можно было придти, заметив, что график функции $y(t)$ на отрезке $[0;\ 1]$ состоит из двух кусков парабол:

$$y(t) = \begin{cases} -2t^2+t+1 & \text{при } t \in \left[0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \\ 2t^2+t-1 & \text{при } t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right], \end{cases}$$

а затем аккуратно исследовав на минимум каждый из кусков (см. рисунок).

Аналогично можно доказать и более простое неравенство

$$2|\cos x| + |\cos 2x| \geq 1$$

и даже объединить его с неравенством

$$|\cos x| + |\cos 2x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

в одно:

$$a|\cos x| + |\cos 2x| \geq \min\left\{1,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right\},$$

справедливое для всех действительных чисел $a \geq 0$ и x (убедитесь в этом самостоятельно).

б) Обозначим сумму

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \ldots + |\cos 2^n x|$$

через $\sigma_n(x)$. Положим $f(x) = |\cos x| + |\cos 2x|$. По доказанному в пункте а) $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, так что

$$\sigma_n(x) \geq f(x) + f(4x) + f(16x) + \ldots + f\left(2^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]}x\right) \geq$$
$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{n}{2\sqrt{2}} > \frac{n}{4}.$$

в) Докажем вначале, что если $|\cos x| \leq \frac{1}{2}$, то $|\cos x| + |\cos 2x| \geq 1$. В самом деле, если $t = |\cos x| \leq \frac{1}{2}$, то $\cos 2x = 2t^2 - 1 \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 < 0$. Следовательно,

$$|\cos x| + |\cos 2x| = t + 1 - 2t^2 = 1 + 2t\left(\frac{1}{2} - t\right) \geq 1.$$

Приступим к задаче в). Зафиксируем x и n и назовем целое число $k \in [0;\ n]$ *«плохим»*, если $|\cos 2^k x| < \frac{1}{2}$, и *«хорошим»*, если $|\cos 2^k x| \geq \frac{1}{2}$. Из доказанного выше следует, что за каждым «плохим» числом k (кроме $k = n$) следует «хорошее» число $k+1$, причем $|\cos 2^k x| + |\cos 2^{1+k} x| \geq 1$. Занумеруем теперь все «плохие» числа в порядке возрастания: $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq n$ (r — количество «плохих» чисел). В силу сказанного выше $k_{j+1} \geq k_j + 2$ $(j = 1,\ \ldots,\ r-1)$. При этом

$$\sum_{j=1}^{r}(|\cos 2^{k_j}x|+|\cos 2^{1+k_j}x|)\geqslant r,\quad \text{если}\quad k_r<n,\quad \text{и}$$

$$|\cos 2^{n}x|+\sum_{j=1}^{r-1}(|\cos 2^{k_j}x|+|\cos 2^{1+k_j}x|)\geqslant r-1,\ \text{если}\ k_r=n.$$

Каждое из остальных (не вошедших в написанные суммы) слагаемых суммы $\sigma_n(x)$ (а их $n+1-2r$ штук при $k_r<n$ и $n-2r+2$ штук при $k_r=n$) больше или равно $\frac{1}{2}$. Таким образом, вся сумма $\sigma_n(x)$ больше или равна

$$r+\frac{1}{2}(n+1-2r)=\frac{n+1}{2}>\frac{n}{2},\ \text{если}\ k_r<n,$$

и больше или равна

$$r-1+\frac{1}{2}(n-2r+2)=\frac{n}{2},\ \text{если}\ k_r=n.$$

Следовательно, $\sigma_n(x)\geqslant\frac{n}{2}$.

Заметим, что существенно улучшить эту оценку уже нельзя: в самом деле,

$$\min_{\mathbf{R}}\sigma_n(x)\leqslant\sigma_n\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{n+1}{2}.$$

В заключение предлагаем читателю подумать над доказательством следующих неравенств:

а) $|\cos x|+|\cos 2x|+|\cos 4x|\geqslant\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{4}$;

б) $|\cos x|+|\cos 2x|+|\cos 3x|+|\cos 4x|\geqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $|\cos x|+|\cos 2x|+|\cos 3x|+\ldots+|\cos(n+1)x|\geqslant\frac{n}{4}$.

П. Гусятников

◆

М591. *Пусть p и q — натуральные числа такие, что*

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$
$$\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

Докажите, что число p делится на 1979.

Ключом к доказательству утверждения задачи является равенство $1979=1319+600$, подсказывающее следующее преобразование знакопеременной суммы:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}-$$
$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1318}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{659}\right)=$$
$$=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\ldots+\frac{1}{1319}.$$

Теперь уже нетрудно заметить, что, сложив равноотстоящие от концов слагаемые:

$$\frac{1}{660+k}+\frac{1}{1319-k}=\frac{1979}{(660+k)(1319-k)},$$

получим дроби, числители которых равны 1979 ($k=0, 1, \ldots, 329$). Сложив все эти дроби, получим число $\frac{330\cdot 1979}{660\cdot 661\cdot\ldots\cdot 1319}=$ $=\frac{1979}{2\cdot 661\cdot\ldots\cdot 1319}$.

Осталось заметить, что число 1979 является простым, а каждый сомножитель в знаменателе меньше, чем 1979.

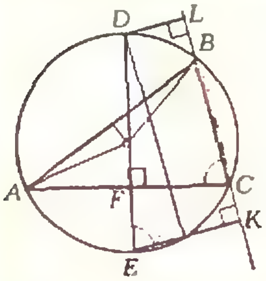
Задачу М591 можно сформулировать в более общем виде: *Пусть p и q — натуральные числа такие, что*

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k-1}.$$

Тогда, если число $6k-1$ — простое, то число p делится на $6k-1$.

А. Савин

М592. *Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне.*



Пусть $|LK|$ — проекция диаметра DE окружности, описанной около треугольника ABC ($|DE| \perp |AC|$), на прямую, содержащую сторону BC (см. рисунок). Очевидно, $\widehat{DEK} = \widehat{ACB}$ (рассмотрите четырехугольники $DEKL$ и $DFCL$). Отсюда $|LK| = |DE| \cdot \sin \widehat{DEK} = |DE| \cdot \sin \widehat{ACB} = |AB|$, что и требовалось доказать.

И. Клумова

◆

М593. *Внутри окружности Γ расположено n кругов. Докажите, что длина границы объединения этих кругов не превосходит длину окружности Γ, если*

а) $n = 2$;

б) центры всех n кругов лежат на одном диаметре окружности Γ;

в) все n кругов содержат центр окружности Γ.

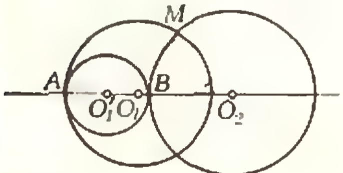


Рис. 1.

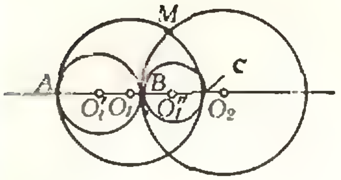


Рис. 2.

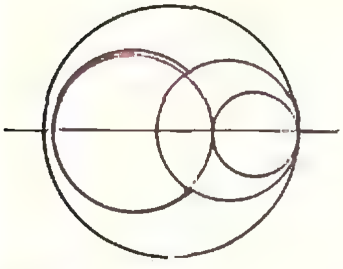


Рис. 3.

б) Пусть *центры $O_1, O_2, \ldots, O_n$ всех n кругов лежат на одном диаметре внешней окружности Γ.* Обозначим через R радиус окружности Γ, через r_i — радиус круга с центром O_i.

Если «внутренние» круги не пересекаются (касание допускается), то длина границы их объединения равна $\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i = \pi \sum_{i=1}^{n} 2r_i \leqslant 2\pi R$, что и требовалось доказать.

Для общего случая докажем следующую лемму:

Пусть окружности с центрами O_1, O_2, O_1' расположены так, как показано на рисунке 1. Тогда

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BM} > \overset{\frown}{AM}$$

(через $\overset{\frown}{AB}$ мы обозначили длину дуги AB).

Доказательство леммы. Построим вспомогательную окружность с центром O_1'' так, как показано на рисунке 2. Нетрудно доказать, что $\overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{MC} > \overset{\frown}{BC}$. Далее, $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AMC}$. Складывая эти два соотношения, получаем $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BM} > \overset{\frown}{AM}$, что и требовалось.

Применяя лемму, сразу получаем доказательство утверждения для случая двух кругов (см. рис. 3).

Пусть теперь у нас есть n кругов с центрами $O_1, O_2, \ldots, O_n$ на одном диаметре окружности Γ.

Обозначим через Γ_1 границу их объединения (в дальнейшем мы будем называть Γ_1 *контуром*). Рассмотрим последовательность контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_n$, где контур Γ_{i+1} получается из контура Γ_i заменой круга с центром O_i на круг с центром O_i' на том же диаметре окружности Γ, касающийся границы круга с центром O_i изнутри, а круга с центром O_{i+1} — извне (на рисунке 4 показано, как из исходного черного контура Γ_1 получается синий контур Γ_2; на рисунке 5 показан красный контур Γ_3, а исходные окружности отмечены черным пунктиром).

Пусть L_i — длина контура Γ_i. На основании леммы $L_i \leqslant L_{i+1}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда круг с центром O_i' совпадает с кругом с центром O_i. Последний контур Γ_n будет границей объединения уже касающихся кругов, а потому согласно замечанию, сделанному в начале решения, его длина $L_n \leqslant 2\pi R$. Следовательно, $L_1 \leqslant L_2 \leqslant \ldots \leqslant L_n \leqslant 2\pi R$, что и требовалось.

в) Перейдем теперь к случаю, когда *все круги содержат центр O внешней окружности Γ.*

Очевидно, контур можно разбить на дуги внутренних окружностей, обладающие следующим свойством: *при движении по дуге AB от A к B расстояние до центра O окружности Γ уменьшается.* Поскольку все круги содержат центр окружности Γ, любой ее радиус пересекает контур ровно один раз. Поэтому для решения задачи достаточно доказать, что $\overset{\frown}{AB} \leqslant R\alpha$, где α — радианная мера угла AOB; тогда длина контура, являющаяся суммой длин таких дуг, будет не больше $2\pi R$.

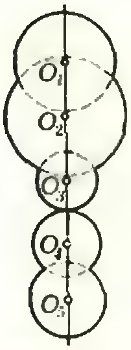


Рис. 4.

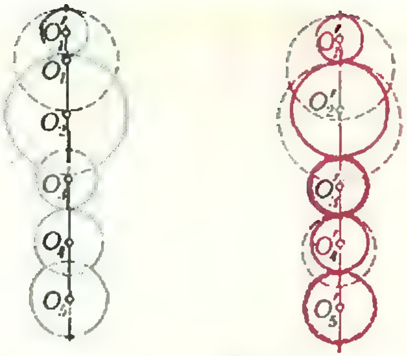


Рис. 5.

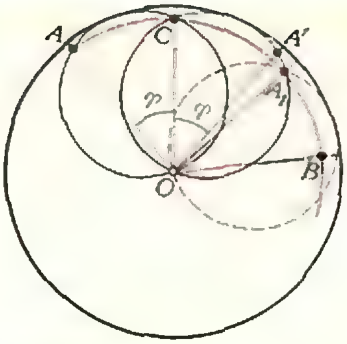


Рис. 6.

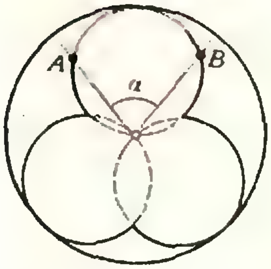


Рис. 7.

Рассмотрим сначала основной случай, когда дуга AB окружности с центром O_i не касается окружности Γ. Проведем через точки O и A окружность K радиуса $R/2$ (рис. 6); она пересекает окружность с центром O_i в точках A и C. Обозначим через l длину дуги окружности K, заключенной между точками A и C и касающейся окружности Γ. Нетрудно доказать, что $\overset{\frown}{AC}<l$. С другой стороны, $l=R\cdot\varphi$, где φ — радианная мера угла AOC; следовательно, $\overset{\frown}{AC}<R\varphi$. Таким образом, если нам удастся разбить дугу AB на более мелкие дуги, через концы которых и точку O можно провести окружность радиуса не больше чем $R/2$, то тем самым мы докажем неравенство $\overset{\frown}{AB}<R\alpha$. Опишем способ такого разбиения.

Рассмотрим окружность K', симметричную окружности K относительно прямой OC; пусть она пересекает дугу AB в точке A_1, а точка A' симметрична точке A. Вспомним, что дуга AB выбиралась так, что $|AO|>|A_1O|$; следовательно, и $|A'O|>|A_1O|$, откуда $\widehat{COA_1}>\widehat{COA'}=\varphi$. Далее, симметрично отразим окружность K' относительно прямой OA_1 и т. д. Так как при таком разбиении дуги AB мелкие дуги $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CA_1}$, ...видны из точки O под углом, не меньшим φ, через конечное число отражений точка B попадает внутрь отражаемой окружности (на рисунке 6 эта окружность изображена пунктиром).

Тогда в качестве последней окружности нужно взять окружность радиуса, меньшего чем $R/2$, проходящую через точки O, B и последнюю получившуюся точку разбиения. Нужное разбиение построено.

Осталось рассмотреть случай, когда дуга AB внутренней окружности касается окружности Γ. Наша цель — доказать неравенство $\overset{\frown}{AB}\leqslant R\alpha$. Предположим противное: пусть $\overset{\frown}{AB}>R\alpha$. Тогда найдется такое $\varepsilon>0$, что $\overset{\frown}{AB}>\varepsilon+R\alpha=\left(R+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\alpha$. Но если радиус внешней окружности немного увеличить, например на $\frac{\varepsilon}{\alpha}$, то касания с дугой AB уже не будет, и поэтому $\overset{\frown}{AB}<\left(R+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\alpha$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $\overset{\frown}{AB}\leqslant R\alpha$ и в этом случае.

Заметим, что длина границы объединения наших кругов совпадает с длиной окружности Γ лишь в том случае, когда все внутренние окружности проходят через центр O окружности Γ и касаются ее (рис. 7).

С. Казаков

◆

М594. *Найдите все действительные числа a, для которых существуют действительные неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, удовлетворяю-*

Произведем следующую операцию: умножим первое соотношение на a^2, второе на $(-2a)$ и сложим с третьим соотношением. Получим

$$\sum_{k=1}^{5}(a^2kx_k-2ak^3x_k+k^5x_k)=0$$

щие соотношениям

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k=a,\quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k=a^2,$$

$$\sum_{k=1}^{5} k^5x_k=a^3.$$

M597. Положим

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

а) Докажите существование предела

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}(x_n-\ln n).$$

б) Докажите, что для любых $n, m\in N$

$$\gamma<x_n+x_m-x_{nm}\leqslant 1.$$

в) Найдите γ с точностью до 0,1.

или

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k(a-k^2)^2=0. \qquad (1)$$

Поскольку числа $x_1, \ldots, x_5$ неотрицательны, отлично от нуля может быть не более чем одно из них; при этом коэффициент при нем должен обращаться в нуль. Если все x_k равны нулю, соотношение $\sum_{k=1}^{5} kx_k=a$ дает $a=0$. Если же одно из x_k отлично от нуля, из (1) получаем еще пять значений для a: 1, 4, 9, 16, 25. Все эти значения действительно годятся: для каждого из них соотношение $\sum_{k=1}^{5} kx_k=a$ позволяет найти соответствующее решение: (1; 0; 0; 0; 0;), (0; 2; 0; 0; 0), (0; 0; 3; 0; 0), (0; 0; 0; 0; 4; 0), (0; 0; 0; 0; 5); тривиальная проверка показывает, что эти решения удовлетворяют и остальным соотношениям.

◆

А. Савин

а) Из теоремы Вейерштрасса («Алгебра и начала анализа 9», п. 32) легко выводится лемма: *если* (α_n) *и* (β_n) — *возрастающая и убывающая последовательности,* $\alpha_n<\beta_n$ *для всех* n *и* $\lim_{n\to\infty}(\beta_n-\alpha_n)=0$, *то последовательности* (α_n) *и* (β_n) *имеют общий предел* $c=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n$ *и* $\alpha_n<c<\beta_n$ *при всех* n.

Рассмотрим для данной последовательности (x_n) две последовательности:

$$\gamma_n=x_n-\ln(n+1),$$
$$\Gamma_n=x_n-\ln n.$$

Легко видеть, что они удовлетворяют условиям леммы ($\gamma_n<\Gamma_n$; $\lim_{n\to\infty}(\Gamma_n-\gamma_n)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$; $\gamma_n-\gamma_{n-1}=\int_{n-1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+1}\right)dx>0$, поскольку $\frac{1}{n}-\frac{1}{x+1}>0$ при $x\in[n-1;\,n]$; аналогично $\Gamma_n-\Gamma_{n-1}<0$). Поэтому последовательности (γ_n) и (Γ_n) имеют общий предел $\gamma=\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\lim_{n\to\infty}\Gamma_n$ и $\gamma_n<\gamma<\Gamma_n$ при всех n.

Итак, предел $\gamma=\lim_{n\to\infty}\Gamma_n$ существует. (Впервые это было указано Л. Эйлером. Число γ называется *постоянной Эйлера.*)

б) Легко видеть, что $x_n+x_m-x_{nm}=(x_n+x_m-x_n)-(x_{2n}-x_n)-(x_{3n}-x_{2n})-\ldots-(x_{nm}-x_{n(m-1)})\leqslant x_m-n\cdot\frac{1}{2n}-n\cdot\frac{1}{3n}-\ldots-n\cdot\frac{1}{mn}=1.$

С другой стороны, $\Gamma_{nm}\leqslant\Gamma_n$, то есть

$$x_{nm}-\ln(mn)\leqslant x_n-\ln n,$$
$$x_n-x_{nm}-\ln n+\ln(mn)\geqslant 0. \qquad (*)$$

Но $\Gamma_m>\gamma$, то есть

$$x_m-\ln m>\gamma. \qquad (**)$$

Складывая неравенства (*) и (**), получаем

$$x_n-x_{nm}+x_m>\gamma,$$

что и требовалось доказать.

в) Чтобы вычислить γ с точностью до 0,1, воспользуемся результатами решения задачи.

Так как $\gamma_n<\gamma<\Gamma_n$, то, взяв $n=100$ членов последовательности, получим $0{,}57<\gamma<0{,}58$, поэтому $\gamma\approx 0{,}5$.

Приближенное значение числа γ известно: $\gamma=0{,}577\ldots$

В. Ясинский

Ф589. *В цилиндре объемом 10 л, закрытом поршнем и помещенном в термостате с температурой 40° С, находится по 0,05 моля двух веществ. Определить массу жидкости в цилиндре после изотермического сжатия, вследствие которого объем под поршнем уменьшается в 3 раза. Давление насыщенных паров первой жидкости при температуре 40° С равно 0,7 · 10⁴ Па, второй — 1,7 · 10⁴ Па. Начертить изотерму сжатия. Молярная масса первой жидкости — 1,8 · 10⁻² кг/моль, второй — 4,6 · 10⁻² кг/моль.*

Если вначале оба вещества в сосуде находятся в газообразном состоянии, то давление в сосуде равно сумме парциальных давлений газов: $p = p_1 + p_2$, где $p_1 = \nu_1 RT/V$, $p_2 = \nu_2 RT/V$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0{,}05$ моля, $V = 10$ л, $T = 313$ К). Подставив числовые данные, найдем

$$p_1 = p_2 \approx 1{,}3 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Мы видим, что p_1 больше, чем давление $p_{\text{н.}1}$ насыщенных паров первой жидкости ($p_{\text{н.}1} = 0{,}7 \cdot 10^4$ Па). Следовательно, вначале часть первого газа сконденсирована, и парциальное давление этого газа равно $p_{\text{н.}1}$. Так как $p_2 < p_{\text{н.}2} = 1{,}7 \cdot 10^4$ Па, второе вещество действительно находится в газообразном состоянии и его парциальное давление равно p_2.

Таким образом, вначале давление в сосуде равно

$$p_0 = p_{\text{н.}1} + p_2 \approx 2 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

При сжатии газов давление первого газа будет оставаться неизменным и равным $p_{\text{н.}1}$. Давление второго газа при изотермическом сжатии будет увеличиваться до тех пор, пока не станет равным $p_{\text{н.}2}$. Посмотрим, при каком объеме V' давление второго газа станет равным $p_{\text{н.}2}$:

$$p_{\text{н.}2} V' = \nu_2 RT \Rightarrow V' = \frac{\nu_2 RT}{p_{\text{н.}2}} \approx 7{,}6 \text{ л}.$$

Следовательно, давление в сосуде изотермически увеличивается при уменьшении объема до 7,6 л. Дальнейшее уменьшение объема до $V'' = 3\frac{1}{3}$ л происходит при постоянном давлении

$$p' = p_{\text{н.}1} + p_{\text{н.}2} = 2{,}4 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

График зависимости $p(V)$ приведен на рисунке.

Найдем массу жидкости в объеме V''. Числа молей первого и второго газов в объеме V'' равны, соответственно,

$$\nu_1' = \frac{p_{\text{н.}1} V''}{RT} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ моль},$$

$$\nu_2' = \frac{p_{\text{н.}2} V''}{RT} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ моль}.$$

Следовательно, в жидком состоянии находятся $\nu_1'' = \nu_1 - \nu_1' \approx 4{,}1 \cdot 10^{-2}$ молей первого вещества и $\nu_2'' = \nu_2 - \nu_2' \approx 2{,}8 \cdot 10^{-2}$ молей второго вещества.

Масса жидкости в сосуде равна $m = \nu_1'' M_1 + \nu_2'' M_2$. Подставляя числовые данные ($M_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль, $M_2 = 4{,}6 \cdot 10^{-2}$ кг/моль), получаем

$$m \approx 2{,}03 \text{ г}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф590. *При движении трамвая по горизонтальному участку пути с некоторой скоростью его двигатель потребляет ток $I_0 = 100$ А, при этом КПД двигателя равен $\eta = 0{,}9$. При движении трамвая по наклонному участку пути вниз с той же скоростью ток в двигателе равен нулю (двигатель выключен). Какой ток будет потреблять двигатель при движении трамвая по тому же участку пути вверх с той же скоростью?*

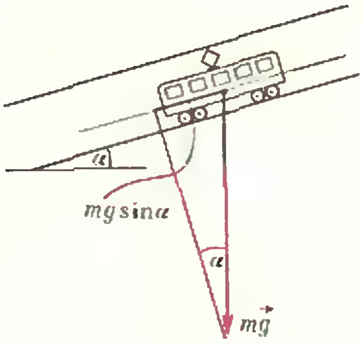
Обозначим U_0 напряжение в контактной сети. При движении трамвая по горизонтальному участку пути его двигатель потребляет от сети мощность $N = U_0 I_0$. Часть мощности, равная $I_0^2 R$, теряется в виде тепла в обмотке двигателя и подводящих проводах (R — сопротивление всей цепи); полезная мощность двигателя равна

$$N' = U_0 I_0 - I_0^2 R = \eta U_0 I_0. \qquad (*)$$

Так как трамвай движется равномерно, эта мощность теряется в виде тепла из-за наличия трения, сопротивления воздуха и т. п. Иными словами, мощность N' равна мощности сил сопротивления.

При движении вниз по уклону работу совершает сила тяжести, проекция которой на ось, параллельную дороге, равна $mg \sin\alpha$ (см. рис.). Мощность этой силы равна $mgv \sin\alpha$, где v — скорость трамвая. Так как трамвай движется равномерно, эта мощность равна мощности сил сопротивления, то есть равна N':

$$mgv \sin\alpha = N' = \eta U_0 I_0.$$



Пусть I_1 — ток, потребляемый двигателем при движении трамвая вверх по уклону с постоянной скоростью. Мощность $N_1 = U_0 I_1$, потребляемая двигателем, расходуется на нагревание обмотки двигателя и подводящих проводов ($I_1^2 R$), на преодоление сил сопротивления ($N' = \eta U_0 I_0$) и на работу против силы тяжести ($\eta U_0 I_0$), то есть

$$U_0 I_1 = I_1^2 R + 2\eta U_0 I_0.$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{U_0 \pm \sqrt{U_0^2 - 8R\eta U_0 I_0}}{2R}.$$

Подставив сюда R, найденное из (*),

$$R = \frac{U_0}{I_0}(1-\eta),$$

получим

$$I_1 = I_0 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\eta(1-\eta)}}{2(1-\eta)}.$$

Подставляя численные значения $I_0 = 100$ А и $\eta = 0{,}9$, находим

$$I_1 \approx 235 \text{ А или } I_1 \approx 765 \text{ А}.$$

Ответ зависит от конструктивных особенностей двигателя. Очевидно, двигатель делают так, чтобы он потреблял наименьший возможный ток, то есть $I_1 \approx 235$ А.

В. Скороваров

◆

Ф591. *Два цилиндра различных радиусов вращаются в противоположные стороны вокруг горизонтальных параллельных осей с угловой скоростью $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2$ рад/с. Расстояние по горизонтали между осями $L = 4$ м. В момент времени $t = 0$ на цилиндры перпендикулярно осям кладут балку так, что она находится в горизонтальном положении и одновременно касается обеих поверхностей вращения, и ее центр масс расположен точно над осью цилиндра меньшего радиуса ($r = 0{,}25$ м), как указано на рисунке 1. Рассчитать и проиллюстрировать графически зависимость горизонтального смещения балки от времени, начиная с момента $t = 0$. Коэффициент трения $\mu = 0{,}05$, ускорение свободного падения принять равным $g = 10{,}0$ м/с².*

На балку в горизонтальном направлении действуют две силы трения $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленные навстречу друг другу (рис. 2). Вначале при проскальзывании балки относительно цилиндров $F_1 = \mu N_1$ и $F_2 = \mu N_2$, где $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — силы реакции цилиндров (F_1, F_2, N_1, N_2 — модули соответствующих векторов). Обозначим x координату центра масс балки — точки c (ось X горизонтальна, начало координат находится посередине между осями цилиндров (см. рис. 2)). Так как балка не поворачивается относительно точки A,

$$mg\left(\frac{L}{2} + x\right) - N_2 L = 0,$$

откуда

$$N_2 = mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right).$$

Так как

$$N_1 + N_2 = mg,$$

$$N_1 = mg - N_2 = mg\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right).$$

Таким образом,

$$F_1 = \mu mg\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right), \quad F_2 = \mu mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right).$$

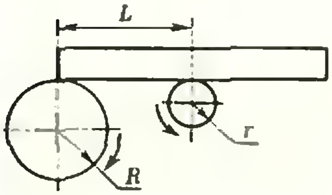


Рис. 1.

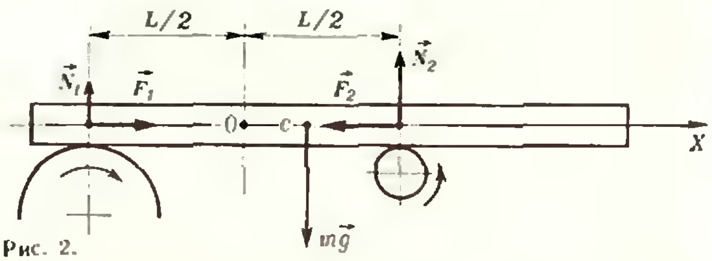


Рис. 2.

Запишем уравнение движения балки в проекциях на ось X:

$$ma = F_1 - F_2 = -\frac{2\mu mg}{L}x.$$

Из этого уравнения следует, что в начальный момент движение балки происходит по гармоническому закону

$$x(t) = \frac{L}{2}\cos 2\pi\nu t,$$

где

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\mu g}{L}}.$$

(Амплитуда колебаний балки равна первоначальной координате ее центра масс.)

Модуль скорости $\vec{u}$ балки увеличивается со временем по закону

$$u(t) = \pi\nu L\sin 2\pi\nu t$$

и в некоторый момент времени t_1 становится равным линейной скорости v правого цилиндра. Так как $v = \omega r$,

$$\omega r = \pi\nu L\sin 2\pi\nu t_1.$$

Отсюда найдем t_1:

$$t_1 = \frac{1}{2\pi\nu}\arcsin\frac{\omega r}{\pi\nu L}.$$

Так как в момент времени $t = t_1$ исчезнет проскальзывание между правым цилиндром и балкой, сила трения $\vec{F}_2$ с этого момента будет силой трения покоя.

Сила трения покоя компенсирует силы, направленные параллельно плоскости возможного скольжения. Следовательно, начиная с момента времени t_1, балка будет двигаться с постоянной скоростью $v = \omega r$. Такое движение будет продолжаться до тех пор, пока сила трения покоя не достигнет максимального возможного значения, равного силе трения скольжения. Это произойдет в момент времени t_2, когда координата центра масс балки будет равна нулю и сила трения $\vec{F}_1(t_2)$ станет равной максимальной возможной силе трения покоя $\vec{F}_2(t_2)$ между балкой и маленьким цилиндром. Время t_2 можно определить из соотношения

$$\omega r(t_2 - t_1) = x(t_1) \equiv \frac{L}{2}\cos 2\pi\nu t_1;$$

отсюда

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2\omega r}\cos 2\pi\nu t_1.$$

Начиная с момента времени t_2, проекция на ось X смещения центра масс балки изменяется во времени по закону

$$x(t) = -\frac{\omega r}{2\pi\nu}\sin(2\pi\nu(t - t_2));$$

проекция скорости балки изменяется во времени как

$$\dot{x}(t) = -\omega r\cos(2\pi\nu(t - t_2))$$

(движение с ненулевой начальной скоростью и нулевым начальным смещением).

Поскольку $r < R$, максимальная скорость балки в установившемся колебательном процессе меньше линейной скорости вращения поверхности большего цилиндра и не превышает линейной скорости вращения поверхности меньшего цилиндра ($u_{\max} = \omega r$). Поэтому, начиная с момента времени t_2, равномерное движение балки невозможно. Балка будет совершать гармонические колебания с амплитудой $A = \frac{\omega r}{2\pi\nu}$ и периодом $T = \frac{1}{\nu}$.

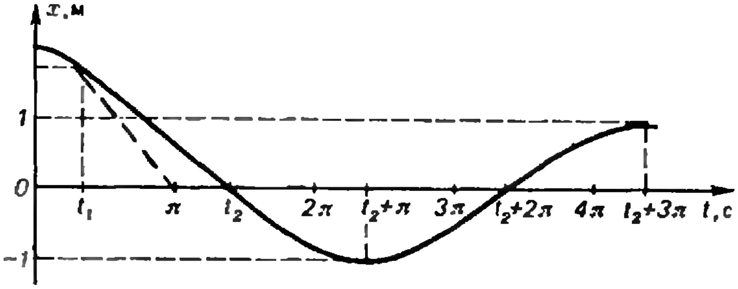


Рис. 3.

Используя числовые данные задачи, находим:

$$\nu = 0{,}08\ с^{-1},\quad t_1 = \frac{\pi}{3}\ с;\quad x(t_1) = \sqrt{3}\ м;$$

$$t_2 = \left(\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)\ с;\quad T = 4\pi\ с;\quad A = 1\ м.$$

График движения центра масс доски приведен на рисунке 3.

Д. Футорский

Ф592. *Имеются два теплоизолированных сосуда. В первом из них находится 5 л воды при температуре $t_1 = 60°C$, во втором — 1 л воды при температуре $t_2 = 20°C$. Вначале часть воды перелили из первого сосуда во второй. Затем, когда во втором сосуде установилось тепловое равновесие, из него в первый сосуд отлили столько воды, чтобы ее объемы в сосудах стали равны первоначальным. После этих операций температура воды в первом сосуде стала равной $t = 59°C$. Сколько воды переливали из первого сосуда во второй и обратно?*

◆

В результате двух переливаний масса воды в первом сосуде осталась прежней, а ее температура уменьшилась на $\Delta t_1 = 1°C$. Следовательно, энергия воды в первом сосуде уменьшилась на

$$\Delta Q = c_в m_1 \Delta t_1,$$

где $c_в$ — теплоемкость воды, m_1 — масса воды в первом сосуде.

На величину ΔQ увеличилась энергия воды во втором сосуде. Поэтому

$$\Delta Q = c_в m_2 \Delta t_2$$

(m_2 — первоначальная масса воды во втором сосуде). Следовательно,

$$c_в m_1 \Delta t_1 = c_в m_2 \Delta t_2,$$

откуда

$$\Delta t_2 = \frac{m_1}{m_2}\Delta t_1 = 5°C.$$

Температура воды во втором сосуде равна $t_2' = t_2 + \Delta t_2 = 25°C$. Такой она стала после переливания из первого сосуда во второй некоторой массы воды Δm, имеющей температуру t_1. Запишем уравнение теплового баланса:

$$c_в \Delta m (t_1 - t_2') = c_в m_2 (t_2' - t_2).$$

Отсюда находим Δm:

$$\Delta m = m_2 \frac{t_2' - t_2}{t_1 - t_2'} = \frac{1}{7}\ кг.$$

А. Зильберман

Ф593. *Обруч радиуса r скатывается с высоты H ($r \ll H$) без проскальзывания по наклонной плоскости с углом α при основании и абсолютно упруго ударяется о гладкую стенку, перпендикулярную наклонной плоскости (рис. 1). На какую высоту поднимается обруч после удара, если коэффициент трения скольжения равен μ?*

◆

Обруч скатывается с наклонной плоскости без проскальзывания. Определим скорость v его поступательного движения в момент удара о стенку. В этот момент модуль линейной скорости точек обруча также равен v, и полная кинетическая энергия обруча есть сумма энергии вращательного и поступательного движений, то есть

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2$$

(m — масса обруча). Из закона сохранения энергии, учитывая, что $r \ll H$, имеем

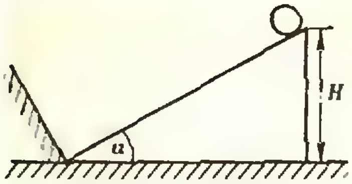


Рис. 1.

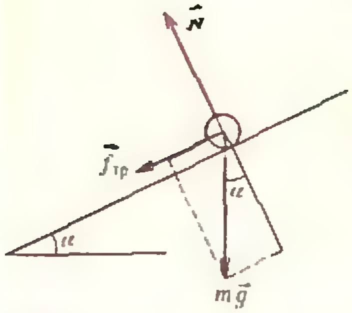


Рис. 2.

$$mgH = mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{gH}.$$

Так как удар обруча о стенку абсолютно упругий, направление поступательного движения обруча изменится на противоположное. Поскольку стенка гладкая, после удара обруч по-прежнему будет вращаться против часовой стрелки (см. рис. 1). Следовательно, после удара обруч будет скользить вверх по наклонной плоскости, вращаясь против часовой стрелки.

Когда обруч достигнет максимальной высоты подъема, направление вращения его не изменится. Действительно, время τ_1, за которое прекратится вращение обруча против часовой стрелки, согласно второму закону Ньютона определяется условием

$$f_{тр}\tau_1 = \tau_1 \mu mg \cos\alpha = mv,$$

где $f_{тр}$ — сила трения (рис. 2). Отсюда

$$\tau_1 = \frac{v}{\mu g \cos\alpha}.$$

Время τ_2, за которое обруч поднимется на максимальную высоту, при неизменном направлении вращения определяется условием

$$(mg \sin\alpha + \mu mg \cos\alpha)\,\tau_2 = mv,$$

откуда

$$\tau_2 = \frac{v}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

Таким образом, $\tau_2 < \tau_1$, и в момент максимального подъема обруч будет вращаться по-прежнему против часовой стрелки.

Движение обруча вверх по наклонной плоскости равнозамедленное. Путь, проходимый им до полной остановки, равен

$$l = v_{ср}\tau_2 = \frac{v}{2}\tau_2 = \frac{H}{2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

Максимальная высота подъема обруча после удара равна

$$h = l\sin\alpha = \frac{H\sin\alpha}{2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

М. Бородовский

◆

Ф594. *Представьте себе, что вы находитесь в жарко натопленной бане, а за окном — мороз. Куда пошли пар, если вы откроете форточку?*

Пар повалит и на улицу, и внутрь бани. Действительно, в бане содержание паров воды в воздухе можно считать насыщающим. Точка росы при высокой температуре выше чем при низкой. Если открыть форточку, теплый воздух пойдет на улицу, и пары воды, которые он вынесет за окно, на морозе сконденсируются. Наблюдатель с улицы увидит выходящие через форточку клубы пара, поднимающиеся вверх. Через форточку внутрь бани будет проникать холодный воздух. Попадающие в его струи пары воды из соседних, теплых, слоев воздуха будут конденсироваться. Этот холодный воздух тяжелее окружающих слоев горячего воздуха, и наблюдатель внутри бани увидит, что клубы пара из форточки «падают» на пол.

А. Варламов

◆

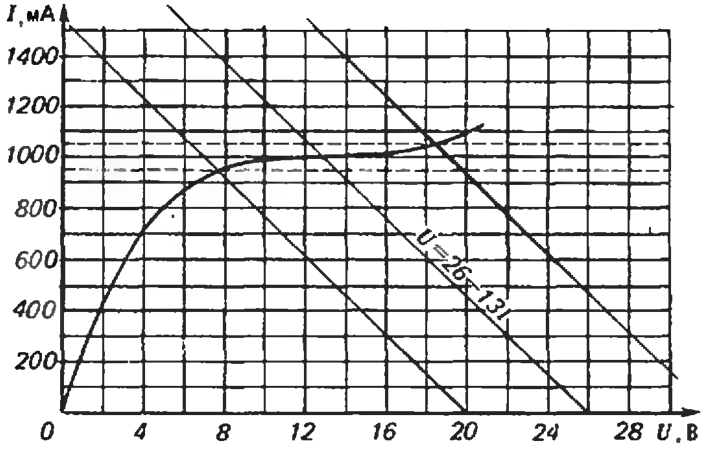
Ф595. *На рисунке изображена зависимость тока от напряжения для стабилизатора постоянного тока — барретора. Барретор подключен последовательно с нагрузочным сопротивлением R = 13 Ом к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$ = 26 В. В каких пределах может изменяться*

Так как барретор подключен к батарее последовательно с нагрузочным сопротивлением, напряжение на барреторе определяется соотношением

$$U = \mathscr{E} - IR. \qquad (*)$$

где I — ток, текущий через барретор. Соотношение (*) — уравнение прямой линии $U(I)$, которая называется нагрузочной прямой. Построим на рисунке нагрузочную прямую

ЭДС батареи, если ток нагрузки не должен изменяться более чем на 50 мА?



$U=26-13I$. Точка пересечения нагрузочной прямой с вольтамперной характеристикой барретора определяет ток, текущий по цепи: $I_0=1000$ мА. Согласно условию задачи допустимые предельные значения тока равны 950 мА и 1050 мА. Построим на графике прямые $I_1=950$ мА и $I_2=1050$ мА. Они пересекают вольтамперную характеристику барретора. Проведем через точки пересечения нагрузочные прямые. (Поскольку наклон нагрузочной прямой зависит только от сопротивления R, которое по условию задачи остается неизменным, все нагрузочные прямые параллельны.) Эти нагрузочные прямые пересекают ось U в точках $U_1=\mathscr{E}_1=20$ В и $U_2=\mathscr{E}_2=32$ В. Таким образом, при изменении ЭДС батареи в интервале от $\mathscr{E}_1=20$ В до $\mathscr{E}_2=32$ В ток в цепи будет изменяться в интервале от $I_1=950$ мА до $I_2=1050$ мА, то есть будет оставаться неизменным с точностью ±5%.

С. Козел

◆

Ф596. *Промежуток времени между двумя последовательными затмениями спутника Юпитера Ио в течение года изменяется от минимального значения, равного 42 ч 28 мин 21 с, до максимального, равного 42 ч 28 мин 51 с. Пользуясь этими данными, определить скорость света, считая, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите с радиусом 150 млн. км. Радиус орбиты Юпитера гораздо больше радиуса орбиты Земли, и скорость движения Юпитера гораздо меньше скорости движения Земли.*

Так как радиус орбиты Юпитера гораздо больше радиуса земной орбиты, и скорость Юпитера намного меньше скорости Земли, можно считать, что в течение года взаимное расположение Земли и Юпитера практически не меняется и изменения и кажущейся продолжительности периода обращения Ио связаны только с изменением направления скорости Земли. Наибольшие отклонения кажущегося периода от истинного будут наблюдаться, когда скорость Земли направлена по прямой, соединяющей Землю и Юпитер.

Мивимальный промежуток времени $t_1=42$ ч 28 мин 21 с между двумя последовательными затмениями Ио наблюдается в то время, когда Земля движется к Юпитеру, а максимальный $t_2=42$ ч 28 мин 51 с — когда Земля движется от Юпитера. В первом случае за время t, соответствующее истинному периоду обращения Ио, Земля приблизится к Юпитеру на расстояние $l=v_3t$ (v_3 — скорость Земли), и наблюдаемый период затмения Ио будет меньше истинного на время

$$t-t_1=v_3t/c,$$

где c — скорость света. Учитывая, что $t=(t_1+t_2)/2$, $t-t_1=(t_2-t_1)/2$ и $v_3=2\pi R/T$ ($R=150$ млн. км — радиус орбиты Земли, $T=365$ суток — период обращения Земли), из последнего равенства получаем

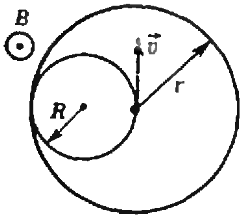
$$t_2-t_1=\frac{2\pi R}{T}(t_2+t_1)/c,$$

откуда

$$c=\frac{2\pi R}{T}\,\frac{t_2+t_1}{t_2-t_1}\approx 3{,}03\cdot 10^5\ \text{км/с}.$$

В. Белонучкин

Ф597. *Магнетрон представляет собой двухэлектродную электронную лампу с цилиндрическим анодом радиуса r, вдоль оси которого расположена тонкая проволочка — катод. При нагревании катода он испускает электроны с энергией E. Магнетрон помещают в однородное магнитное поле, параллельное его оси. При каком значении индукции магнитного поля ток в анодной цепи станет равным нулю?*



Скорость электрона, вылетающего из катода с энергией E, равна $|\vec{v}| = \sqrt{2E/m}$, где m — масса электрона. В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B} \perp \vec{v}$ электрон движется по окружности радиуса R (см. рис.). Центростремительное ускорение $|\vec{a}| = v^2/R$ электрону сообщает сила Лоренца $|\vec{F}| = e|\vec{B}||\vec{v}|$ (e — заряд электрона), то есть

$$\frac{mv^2}{R} = e|\vec{B}||\vec{v}|, \quad \text{или} \quad \frac{2E}{R} = e|\vec{B}|\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Отсюда

$$R = \frac{\sqrt{2Em}}{e|\vec{B}|}.$$

Ток в анодной цепи отсутствует, когда электроны не попадают на анод, то есть при $R < r/2$ (см. рис.), или

$$\frac{r}{2} > \frac{\sqrt{2Em}}{e|\vec{B}|}.$$

Это условие выполняется при

$$|\vec{B}| > \frac{2\sqrt{2Em}}{re}.$$

При $|\vec{B}| = 2\sqrt{2Em}/re$ ток в цепи прекращается

И. Слободецкий

◆

Ф598. *Сосуд глубины H заполнен жидкостью, плотность которой линейно меняется от ϱ_0 на поверхности до ϱ на дне сосуда. В сосуд погружают два маленьких шарика одинакового объема V, связанных тонкой невесомой нерастяжимой нитью длины l. Плотность одного шарика ϱ_1, плотность другого — ϱ_2. Через некоторое время шарики устанавливаются так, как показано на рисунке. Найти силу натяжения нити.*

Силы, действующие на каждый шарик, это сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила Архимеда $|\vec{F}| = \varrho_x gV$, где ϱ_x — плотность жидкости на глубине x, на которой находится шарик (см. рис.). Поскольку плотность меняется линейно по мере увеличения глубины сосуда, на любой глубине x плотность жидкости равна $\varrho_x = \varrho_0 + \frac{\varrho - \varrho_0}{H}x$.

Запишем условия равновесия для каждого шарика (в проекциях на ось X):

$$m_1g + T - F_1 = \varrho_1 gV + T - \left(\varrho_0 + \frac{\varrho - \varrho_0}{H}x_1\right)gV = 0,$$
$$m_2g - T - F_2 = \varrho_2 gV - T - \left(\varrho_0 + \frac{\varrho - \varrho_0}{H}x_2\right)gV = 0,$$

где x_1, x_2 — глубины погружения шариков. Решая эти уравнения совместно, находим

$$T = \frac{Vg}{2}\left(\varrho_2 - \varrho_1 - \frac{\varrho - \varrho_0}{H}\,l\right).$$

Конфигурация, указанная на рисунке, возможна при $T > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 < H$. Если представить себе, что шарики не связаны между собой, и $\varrho_0 < \varrho_1 < \varrho$ и $\varrho_0 < \varrho_2 < \varrho$, то первый шарик установится на глубине, где плотность жидкости равна плотности шарика:

$$\varrho_1 = \varrho_0 + \frac{\varrho - \varrho_0}{H}x_1;$$

аналогично будет вести себя и второй шарик:

$$\varrho_2 = \varrho_0 + \frac{\varrho - \varrho_0}{H}x_2.$$

Расстояние между шариками в этом случае будет равно

$$x_2 - x_1 = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)H}{\varrho - \varrho_0}.$$

Если длина нити l больше $x_2 - x_1$, то нить не будет натянута.

О. Овчинников

Письмо в редакцию

В «Кванте» № 10 за 1978 год было напечатано решение задачи М478. Вот ее условие:

В волейбольном турнире каждые две команды сыграли по одному матчу.

а) *Докажите, что если для любых двух команд найдется третья, которая выиграла у этих двух, то число команд не меньше семи.*

б) *Постройте пример такого турнира из семи команд.*

в) *Докажите, что если для любых трех команд найдется такая, которая выиграла у этих трех, то число команд не меньше 15.*

В решении указывалось, что если (при данном m) для любых m команд найдется команда, победившая их, то число команд не меньше $2^{m+1}-1$ (это доказывается индукцией по m), и ставился вопрос, для каких m эта оценка неулучшаема, то есть для каких m такой турнир из $2^{m+1}-1$ команд существует.

После публикации решения задачи М478 в редакцию «Кванта» пришло письмо из Венгрии от профессора Л. Цирмаша. Он сообщал, что аналогичные задачи о турнирах рассматривались венгерскими математиками Г. и Е. Секерешами еще в 1965 году. Они доказали, что *если для любых m команд найдется выигравшая у них команда, то число команд не меньше $(m+2)2^{m-1}-1$.*

Мы попросили автора задачи М478 *С. Конягина* прокомментировать этот результат. Вот что он нам ответил.

Суть рассуждений Г. и Е. Секерешей заключалась в следующем. Рассмотрим произвольную группу A из $m-1$ команд. Пусть B — множество тех команд, которые победили все команды из группы A. Если число команд в группе B не больше m, то найдется команда c, выигравшая у команд из B. Присоединяя к командам группы A команду c, мы видим, что для полученной группы из m команд не существует команды, одержавшей победу над всеми командами этой группы, что противоречит условию. Следовательно, для любой группы из $m-1$ команд число команд, выигравших у них, не меньше $m+1$. Теперь заметим, что, повторяя рассуждение, приведенное в решении задачи М478, индукцией по n можно доказать справедливость более общего утверждения:

Если для любых n команд найдется по крайней мере k команд, выигравших у этих n команд, то число команд в турнире не меньше $2^n(k+1)-1$.

Применяя последнее утверждение к $n=m-1$, $k=m+1$, мы получаем, что число команд, участвующих в турнире, не меньше $2^{m-1}(m+2)-1$.

В частности, при $m>2$ в таком турнире не может быть $2^{m+1}-1$ команд, что дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный в решении задачи М478.

В 1963 году известный венгерский математик Пауль Эрдёш доказал теорему, из которой следует, что турнир из $2^m m^2$ команд, в котором для любых m команд найдется команда, выигравшая у них, существует при $m>2$. Таким образом, для минимального числа $f(m)$ команд в таком турнире при $m>2$ справедлива оценка

$$2^{m-1}(m+2)-1<f(m)<2^m m^2.$$

Существенно улучшить ее очень трудно, но может быть, кому-либо из читателей «Кванта» удастся это сделать?

В заключение мне хотелось бы предложить читателям «Кванта» еще одну задачу:

Пусть k — натуральное число, $4k+3$ — простое число. Присвоим $4k+3$ командам номера от 1 до $4k+3$.

а) *Покажите, что существует турнир этих команд, в котором команда с номером m тогда и только тогда выиграла у команды с номером n, $m \neq n$, когда уравнение*

$$m-n=l^2-r\,(4k+3)$$

имеет решение в целых числах l и r.

б) *Докажите, что в этом турнире для любых двух команд найдется по крайней мере k команд, выигравших у этих двух.*

в) *Проверьте, что при $k=4$ в соответствующем турнире 19 команд для любых трех найдется четвертая, выигравшая у этих трех.*

Этот пример, построенный Г. и Е. Секерешами, показывает неулучшаемость их оценки при $m=3$.

Внимание, читатели!

В условии задачи **М630**, опубликованной в «Кванте» (1980, № 6, с. 19), допущена неточность. Первые два предложения должны быть таковы:

На плоскости даны окружность γ и точка K. Проведем через произвольные точки P, Q окружности γ и точку K окружность.

Срок присылки решения этой задачи продлевается до 15 сентября 1980 года.

Спрашивайте — отвечаем

«Недавно я совершенно случайно увидел колебания струны на фоне телевизионного экрана. Когда струна была расположена перпендикулярно линиям, образующим изображение экрана (то есть вертикально), участок струны, попадающий на изображение экрана, имел форму четкой синусоиды, которая двигалась сверху вниз. Дергая струну с разной силой, я получал разные «графики», и не только синусоиды, но и кривые сложной формы, скорее всего и являющиеся графиками данного колебания струны.

Прошу вас объяснить это явление.»

(из письма читателя
А. Перевезенцева)

Мы думаем, что ответ на этот вопрос будет интересен читателям «Кванта». Отвечает консультант отдела физики нашего журнала А. Володин.

Глаз человека обладает свойством «запоминать» изображение на короткое время — порядка 0,1 с. При освещении какого-либо объекта вспышкой света, длящейся меньше 0,05 с, у человека создается зрительный образ как бы в виде мгновенной фотографии объекта. Такое «фотографирование» вы могли наблюдать во время вечерней или ночной грозы. Каждая вспышка молнии запечатлевает застывшую картину местности.

При освещении звучащей, а следовательно, колеблющейся струны вспышкой света короче 0,01 с струна будет представляться изогнутой в форме синусоиды. (Освещение обычным непрерывным светом создает нечеткую, размазанную картину колеблющейся струны.) Теперь представим себе, что короткие вспышки света следуют одна за другой, повторяясь периодически через 0,02—0,1 с. В этом случае в зрительном аппарате человека получается серия «мгновенных фотографий», сливающихся одна с другой. В результате создается иллюзия непрерывного процесса. Если частота следования вспышек совпадает с частотой колебания струны или кратна ей, то струна освещается каждый раз в одном и том же положении и выглядит неподвижной синусоидой.

При небольшом отличии частот за промежуток времени между вспышками струна займет положение, близкое к первоначальному, но не совпадающее с ним. В этом случае создается впечатление медленного колебания струны.

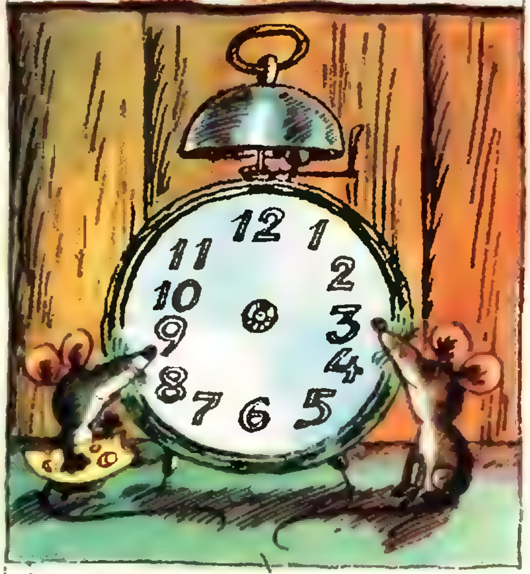
Освещение в виде серии коротких периодически повторяющихся вспышек называется стробоскопическим. Такое освещение применяется для изучения периодических процессов.

В опыте, описанном А. Перевезенцевым, источником стробоскопического освещения служил экран телевизора. Изображение на экране «рисуется» электронным лучом строка за строкой (всего 625 строк), и когда прочерчен весь экран, луч гасится, возвращается на прежнее место и начинает рисовать следующий кадр изображения. Кадры меняются каждые 0,04 с. Таким образом, экран телевизора можно считать источником стробоскопического освещения с частотой следования «вспышек» 25 Гц.

То, что при горизонтальном и вертикальном расположениях струны наблюдаемые картины различаются,— следствие неоднородности источника освещения. В самом деле, горизонтальная струна рассматривается на фоне отдельной строки. Вертикальная — на фоне всех строк. В первом случае вся струна освещается «вспышкой» длительностью $\sim 6 \cdot 10^{-4}$ с (это время яркого свечения строки). На фоне одной строки наблюдается определенная фаза колебания струны. Заметим, что картина будет четкой лишь в случае строгой параллельности строки и струны. Во втором случае участки струны освещаются последовательными вспышками-строками, и наблюдаются разные фазы колебания струны.

Свойством стробоскопического источника света обладают также киноэкран и лампы «дневного» света.

Квант для младших школьников



Задачи

1. а) Найдите трехзначное число, равное кубу суммы его цифр.

б) Найдите четырехзначное число, равное четвертой степени суммы его цифр.

в) Существует ли пятизначное число, равное пятой степени суммы его цифр?

2. Однажды я возвращался из воскресной поездки за город. В вагоне поезда было очень душно. Я вышел в тамбур, но и там было не лучше. Но вот поезд замедлил ход, и из щелей вентиляции подул свежий ветерок. Поезд остановился, ветерок затих, вновь возник во время следующего торможения, и так на всех станциях. Откуда он брался? В каком тамбуре вагона я находился — переднем или заднем? Замечу еще, что дверь из тамбура в вагон и все окна в вагоне были открыты.

3. Можно ли из двадцати монет достоинством в 5, 20 и 50 копеек составить 5 рублей?

4. За круглым столом сидят семь дипломатов. Они должны провести по одной беседе друг с другом. Два дипломата будут беседовать только в том случае, если окажутся рядом. После того как каждый из дипломатов закончит переговоры со своими соседями, дипломаты встают и занимают новые положения для продолжения бесед.

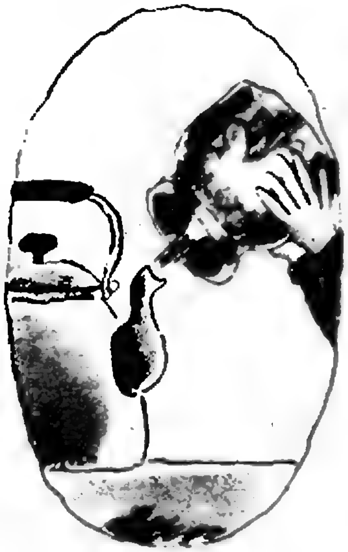
Можно ли организовать встречу дипломатов так, чтобы при каждом новом размещении за столом у каждого из них были бы новые соседи?

5. Разделите круглый циферблат часов на три части так, чтобы сумма чисел в каждой части была равна 17.

Эти задачи нам предложили *Ф. Бартенев, Г. Караев, А. Савин, Я. Темралиев, Ю. Чернышев*

Д. Алексеев

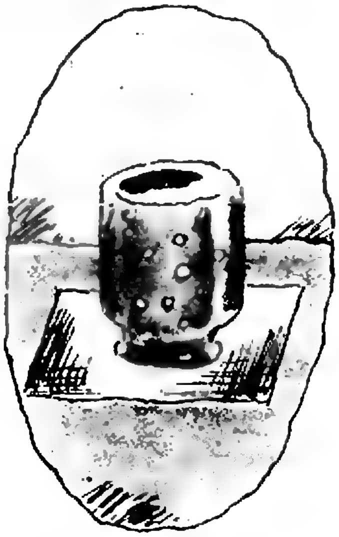
ФИЗИКА В КАНИКУЛЫ



Близятся к концу летние школьные каникулы. Безусловно, каждому из вас знакомо ощущение волнения перед началом нового учебного года: что-то ждет нас впереди?

Может быть, вы уже «устали» отдыхать и вам хочется поскорее начать заниматься? Не торопитесь открывать учебники. Понаблюдайте за вещами и явлениями, вас окружающими. Вы увидите много интересного и полезного. Наверное, не все вы сможете объяснить сейчас. Не расстраивайтесь. Постарайтесь хорошенько запомнить непонятное, чтобы затем, в новом учебном году, все выяснить.

Как возникают капельки росы?



Как вы, конечно, знаете, воздух представляет собой смесь различных газов. Прежде всего это азот и кислород. Есть в воздухе и водяные пары. Правда, их вклад невелик: плотность паров воды в сотни раз меньше плотности воздуха. Но их присутствие определяет так называемую **влажность воздуха**. Самочувствие человека, рост и развитие растений, работа многих точных приборов и тому подобное сильно зависят от влажности воздуха.

Оказывается, количество водяных паров в воздухе не может быть произвольным. Существует предельная масса воды, которую при данной температуре можно испарить внутрь 1 м^3 воздуха. При дальнейшем добавлении происходит конденсация водяных паров, образуются водяные капельки. Чем выше температура, тем больше влаги может содержаться в воздухе.

Представьте себе, что днем количество воды в воздухе достигло предельного значения. Наступила ночь. Температура воздуха понизилась, максимальная масса воды в воздухе уменьшилась. Очевидно, избыточное количество водяных паров образует водяные капельки — росу или туман.

Теперь проведите несколько самостоятельных наблюдений.

Сначала сделайте опыт, не требующий много времени.

Возьмите стеклянную банку и поднесите ее горлышко к носику кипящего чайника. Поставьте банку на стол вверх дном. Через некоторое время воздух в ней охладится, и выпадет обильная роса.

Пока воздух в банке охлаждается, посмотрите на носик кипящего чайника. Непосредственно у его края нет никакого видимого «пара». Почему? Пар, в правильном значении этого слова, увидеть вообще нельзя, потому что это прозрачная среда, как и большинство других газов. То, что обычно называют «паром», это туман. На некотором расстоянии от носика кипящего чайника его действительно можно увидеть.

Несколько более длительный опыт можно выполнить на улице. Днем поставьте банку на землю вверх дном и слегка присыпьте горлышко землей. Ночью воздух станет более холодным, на стенках банки появится роса, в чем вы можете убедиться рано утром.

«Кубарь» и «Ио-ио»

Очень интересные опыты можно провести с вращающимися телами.

Из древних времен пришли к нам игрушечные водяные и ветряные мельницы. Много столетий не стареет и волчок.

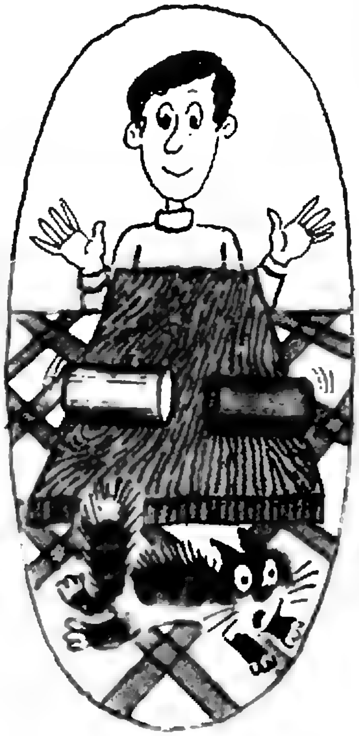
На старинных картинах можно увидеть мальчика с кнутом и волчком, имеющим форму свеклы. Кнутик несколько раз обогнут вокруг волчка. Очевидно, таким образом волчок закручивался.

Впрочем, волчок можно запустить и обычным способом, то есть рукой, а потом кнутиком подхлестывать волчок так, чтобы его вращение длилось как можно дольше. Говорят, в нашей стране эту игру кое-где можно встретить и сейчас. И называют ее «Кубарь».

Родиной игры «Ио-ио» обычно считают Древний Китай. Попробуйте сделать ее.

Возьмите металлическую катушку, например из детского конструктора. Диаметр должен быть около 5 см, диаметр оси — около 0,5 см, длина оси — 1—2 см. К оси крепко привяжите прочную нить длиной с вашу ногу.

Игра состоит в следующем. Намотайте нить на ось, возьмите конец нити в руку и отпустите катушку. Когда нить полностью размотается, слегка дерните ее — катушка снова начнет вращаться. Задача состоит в том, чтобы все время поддерживать вращение катушки. Научившись этому, вы



сами догадаетесь, какие трюки можно проделывать с этой игрушкой.

Вращающаяся цепочка

Неожиданный эффект при вращении вам поможет увидеть обыкновенная цепочка.

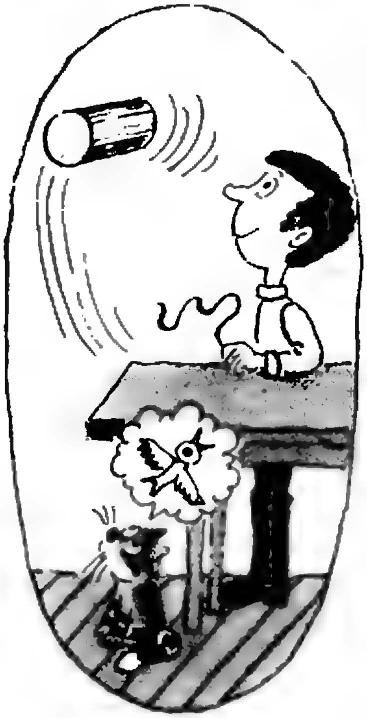
Возьмите цепочку длиной около 20 см. Аккуратно соедините ее крайние звенья. К одному из звеньев привяжите нить длиной 30 см. Другой конец нити возьмите в руку.

Совершая рукой кругообразные движения малого радиуса в горизонтальной плоскости, заставьте цепочку крутиться. Через некоторое время она поднимется, расправится и примет форму окружности, лежащей в горизонтальной плоскости. Неожиданный результат, не правда ли?

Кто быстрее?

Положите на стол не очень гладкую доску и один ее конец немного поднимите. Положите на доску рядом два внешне одинаковых цилиндра, но один сплошной, а другой полый. Как вы думаете, какой из них быстрее скатится с доски? Теперь отпустите цилиндры и проверьте себя.

Поменяйте цилиндры, возьмите сплошные большой и маленький, большой сплошной и маленький полый, цилиндры из разных материалов и так далее.



Почему поднимается вращающийся цилиндр?

Из плотной бумаги сделайте цилиндр диаметром около 4 см и длиной 10 см. Обмотайте его несколько раз капроновой лентой, положите на край стола и дерните за свободный конец ленты. Лента останется у вас в руках, а цилиндр, вращаясь, полетит вперед по направлению рывка. Что с ним будет дальше?

Возможны два варианта: цилиндр либо взовьется вверх, либо полетит под стол. Проверьте, как конечный результат зависит от положения свободного конца ленты во время рывка (свободный конец может быть выше или ниже оси цилиндра).

Заметим, что этот опыт демонстрирует возникновение так называемой подъемной силы, необходимой для воздухоплавания.

Школьникам об астрономической картине мира

За годы школьной жизни учащиеся изучают много различных учебных предметов, каждый из которых вооружает их основами той или иной науки. Но, кроме того, все они решают общую и очень важную задачу: формируют научное мировоззрение. Его составной частью является научный атеизм, представляющий собой целостную, последовательную систему диалектико-материалистических представлений. В основе мировоззрения и атеизма лежит естественная картина мира, складывающаяся из совокупности философски обобщенных данных физики, астрономии, химии и других естественных наук.

Недавно (в конце 1979 года) издательство «Просвещение» выпустило книгу «Атеизм и научная картина мира». Ее автор — известный популяризатор астрономической науки В. Н. Комаров — поставил перед собой задачу доказать ложность различных религиозных представлений. Это доказательство не формулируется одной фразой, оно не заключено в одном логическом выводе или каком-нибудь факте (как это обычно бывает в точных науках). В нем, как в фокусе, собраны вся сумма наших знаний, вся совокупность научных данных об окружающем мире, весь опыт развития естествознания и преобразования окружающего мира, все достижения передовой человеческой мысли, вся практическая деятельность человечества.

Не стремясь «объять необъятное», автор книги обращает внимание читателя лишь на наиболее важные в мировоззренческом отношении факты из разных областей науки о Вселенной. Например, философское положение о том, что процесс познания — это диалектический процесс движения к абсолютной истине через промежуточные относительные истины, наглядно иллюстрируется сменой астрономических картин мира. От наивных древних картин мира к геоцентрической системе Аристотеля — Птолемея, от геоцентризма к гелиоцентризму (великая коперниканская революция) и, наконец, от него к современной картине нестационарной, расширяющейся и даже «взрывающейся» Вселенной — таков процесс познания Вселенной.

Астрономия доказала, что Вселенная развивается, изменяется во времени. Значит, прошлое Вселенной не тождественно настоящему, а настоящее — будущему. Однако человек сумел проникнуть в тайны прошлых эпох и стоит на пути научного предвидения будущего. Главный «ключ» к познанию прошлого космических объектов, как справедливо подчеркивает автор рецензируемой книги, прежде всего в изучении их современных состояний. В. Н. Комаров сравнивает работу ученых, занимающихся проблемой происхождения и развития космических объектов, с работой детективов, восстанавливающих картину происшествия по неизбежным (иногда едва заметным) следам, оставленным на месте происшествия.

В последнее время у астрономов появился могущественный «союзник» — «ископаемое» (реликтовое) излучение, впервые обнаруженное около пятнадцати лет тому назад. Это излучение несет непосредственную информацию об эпохе, которую отделяло от начала расширения Метагалактики «всего лишь» несколько сотен тысяч лет. И это не предел. Если будут обнаружены реликтовые нейтрино, мы приблизимся к началу расширения почти вплотную Оказывается всего лишь (теперь уже без кавычек) 0,3 секунды отделяют момент рождения пока еще неуловимых реликтовых нейтрино от начала расширения, то есть от эпохи, отстоящей от нынешнего дня на 18—20 миллиардов лет.

Хотелось бы отметить еще одну особенность книги В. Н. Комарова — она приобщает читателя к «неизбежности странного мира», в котором явления становятся все менее и менее наглядными. Некоторые астрофизические и космологические явления практически невозможно себе представить, но их можно понять, дать им физическое истолкование, найти соответствующий математический аппарат. Известно, например, что мы живем в искривленном, неевклидовом пространстве. Правда, искривленность пространства ощутимо проявляется только в космических масштабах, в мире гигантских космических масс материи.

Пространство Вселенной не имеет границ, но оно может быть конечным или бесконечным. Каким именно, зависит от кривизны пространства, а кривизна определяется средней плотностью материи во Вселенной. Как считают ученые, если средняя плотность меньше некоторого конкретного значения, пространство незамкнуто и бесконечно, если же больше — пространство замкнуто и конечно. Выяснить, какая из этих двух возможностей реализуется, очень сложно. Совокупность имеющихся данных как будто бы свидетельствует о том, что мы живем в бесконечной незамкнутой Вселенной. Однако, даже если это будет доказано, успокаиваться не следует — пространство Вселенной, конечное и замкнутое в одной системе отсчета, может оказаться бесконечным и незамкнутым в другой.

Е. Левитан

Задачи комбинаторики

В начале нашего столетия замечательный математик-методист С. И. Шохор-Троцкий разработал так называемый «метод целесообразных задач».

Изложение новой темы он предлагал начинать с целесообразно подобранной задачи. Обсуждая ее решение, разбирая родственные задачи, он подводил учащихся к самостоятельному выводу нужного правила, формулы, теоремы.

К сожалению, этот метод почти не применяется в современном обучении. Поэтому интересно появление небольшого методического пособия А. Я. Халамайзера «Комбинаторика и бином Ньютона» (М., «Просвещение», 1980), изложенного «методом целесообразных задач». Эта книжечка начинается с задачи о перестановке волейболистов на площадке.

Тренер волейбольной команды решил изменить расположение игроков.

— Следующую встречу будем начинать по-другому,— объявил он после очередного проигрыша.— Ты, Сергей, встанешь на подачу. Володя — на четвертый номер, в нападение, а ты, Николай...

— А если опять проиграем?— спросил капитан.

— Тогда опять переставлю,— хладнокровно ответил тренер.— Пока не перепробуем всех возможных расположений...

Как же подсчитать, сколькими способами можно расставить 6 волейболистов на 6 возможных мест?

Комбинаторные задачи часто возникают в самых различных областях человеческой деятельности. Понимание этих задач, умение разобраться в них необходимы физикам и биологам, экономистам и инженерам, лингвистам и спортивным судьям.

Книжка содержит сведения о таких понятиях комбинаторики как перестановки, размещения, сочетания, сочетания и перестановки с повторениями.

Содержание этих понятий раскрывается посредством разбора занимательных задач, таких, например, как следующие:

Точка в азбуке Морзе означает букву Е, тире — букву Т. Другие буквы и знаки передаются двумя, тремя..., а некоторые даже шестью различными сигналами — точками или тире. А сколькими сигналами можно передать любой из сотни символов (букв, цифр, знаков)?

В азбуке Брайля (для слепых) каждый символ — буква или цифра — обозначается шесть точками: на некоторых из них имеются выпуклости. Ощупывая пальцами эти знаки, слепые могут «читать» текст. Сколько различных символов может быть в азбуке Брайля?

В книжке нет традиционных теорем с доказательствами, формул с выводами. Разбирая практическую задачу, автор делает обобщения, пользуется аналогиями, а читатель самостоятельно приходит к нужному заключению.

Книжка сочетает в себе наличие важных математических сведений и доступность изложения. Ее легко сможет читать каждый любознательный старшеклассник. Учитель найдет в ней интересный материал для факультативных и кружковых занятий. Стиль изложения следует признать весьма удачным для пособий по математике.

Остается лишь пожалеть о малом объеме книжечки и выразить надежду, что «Просвещение» продолжит выпуск подобной литературы, столь необходимой и учащимся, и учителям.

И. Брииков

Серии — 14 лет

Интересные книги по математике не всегда легко приобрести. В то же время существует специальная серия брошюр «Математика, кибернетика», на которую можно подписаться по почте сразу на год вперед и, значит, в дальнейшем об их покупке не беспокоиться. Эту серию выпускает издательство «Знание» с 1967 года.

Авторами брошюр являются крупнейшие советские и зарубежные ученые, видные специалисты в своей области и зачастую талантливые популяризаторы.

Тематика серии весьма разнообразна. Большое внимание уделено биографиям знаменитых математиков настоящего и прошлого. Вот некоторые имена, которым посвящены уже вышедшие брошюры: замечательный американский математик Г. Вейль, математический гений Индии Рамануджан, классик математики француз Даламбер, знаменитые русские ученые А. Ляпунов, П. Чебышев, В. Стеклов.

Некоторые брошюры затрагивают вопросы развития математики и ее истории, рассказывают о процессе математического творчества, о математическом образовании и занятиях наукой, о преподавании математики в средней и высшей школах. В 1973 году была издана брошюра, полезная школьникам — Н. Розов, Е. Глаголева, Ж. Раббот *«Заочная математическая школа при МГУ»*.

Ряд работ связан с прикладными вопросами математики. Чтобы в этом убедиться, достаточно прочесть их названия: «Математика в биологии», «Кибернетика и медицинская диагностика», «Кибернетика и психиатрия», «Теория вероятностей в естествознании», «Экономика и математика», «Математика и искусство», «Математика и эпидемиология».

Разумеется, много брошюр посвящено самой математике, причем затрагиваются, как правило, наиболее актуальные проблемы и достижения науки. Так, уже в самой первой брошюре, вышедшей в январе 1967 года, рассказывалось о Всемирном математическом конгрессе математиков, состоявшемся осенью 1966 года в Москве.

Разумеется, в одной небольшой заметке невозможно остановиться на всех брошюрах серии — ведь их число уже давно перевалило за полторы сотни. Желающим подробнее ознакомиться с серией можно посоветовать брошюру № 10 за 1979 год — А. Я. Маргулис *«Серия «Математика, кибернетика» за 12 лет»*.

Большинство брошюр серии «Математика, кибернетика» написаны увлекательно, живым языком, лучшим книжкам присуждены премии на всесоюзных конкурсах научно-популярной литературы. Нет сомнений, что многие из брошюр, как уже вышедших, так и издаваемых в будущем, будут прочитаны вами с большим интересом и пользой. На наш взгляд, серия книг «Математика, кибернетика» заслуживает того, чтобы один раз рискнуть и подписаться на нее.

Е. Гик

С 24 по 28 марта 1980 года в Физическом институте Академии наук СССР проходил Праздник юных физиков. Помещая рассказ об этом празднике, редакция надеется, что подобные праздники будут организованы в различных районах нашей страны.

Высокий научный уровень Московского Праздника юных физиков был обеспечен активным участием ученых ФИАНа. Хотелось бы, чтобы ученые других институтов, и прежде всего комсомольцы, приняли активное участие в организации подобных праздников.

В. Каслин, А. Стародуб

Праздник юных физиков

> *Законы физики! О как они важны.*
> *На сложность их бессмысленно*
> *сердиться...*
> Из приветствия команды
> школы № 2

Участники научных семинаров, работа которых проходила в колонном зале Физического института им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР (ФИАН) во время весенних школьных каникул, с интересом рассматривали, казалось бы, странные картинки, развешанные по стенам и колоннам зала. Героем всех картинок был симпатичный львенок по имени Пюф. Мужественно выходил он из невероятных ситуаций, в которых оказывался, нарушая те или иные законы физики. Помогали ему чудесная изобретательность, находчивость, самообладание и, конечно же, чувство юмора.

В течение пяти дней, с 24 по 28 марта, в гости к неунывающему Пюфу приходили ребята из пяти московских школ (№№ 2, 18, 57, 91, 179) и из школы № 82 подмосковного поселка Черноголовка — участники Праздника юных физиков, посвященного 110-й годовщине со дня рождения В. И. Ленина. Первые буквы названия этого праздника и дали имя забавному львенку.

Идея проведения Праздника юных физиков родилась в ФИАНе давно. В ее основе лежала многолетняя работа, проводимая сотрудниками института в подшефной школе № 2, а также первые опыты работы учащихся школы № 179 в Оптической лаборатории института. Цель праздника — приобщить школьников к научной деятельности, помочь им выбрать будущую профессию. В организации и проведении Праздника, помимо ФИАНа, приняли участие Всесоюзное общество «Знание» и Комиссия Академии наук СССР по работе с молодежью.

Праздник начался в понедельник, 24 марта, встречей с ведущими учеными ФИАНа.

История этого старейшего в нашей стране научно-исследовательского института, неразрывно связанная с историей становления русской, а потом и советской, школы физики, живо предстала перед ребятами во время выступления заместителя директора института доктора физико-математических наук А. В. Виноградова.

Одним из самых интересных для ребят событий первого дня Праздника было выступление лауреата Ленинской и Нобелевской премий академика А. М. Прохорова. О многих научных направлениях, в том числе проблемах связи и информации, говорил Александр Михайлович. Но центральным в его выступлении был особенно важный сегодня разговор о проблеме научной смены, о различных путях молодых людей в науку. Ребята буквально засыпали Александра Михайловича потоком вопросов о его личном пути в науку, о его точке зрения на проблему подготовки физика-теоретика и физика-экспериментатора.

Многообразие направлений исследований, выполняемых в ФИАНе, открылось ребятам из выступлений сотрудников института. Лауреат Ленинской премии профессор О. Н. Крохин рассказал об использовании лазеров в медицине, о задачах инженерной технологии в связи с необходимостью широкого внедрения лазерной хирургии. О работе теоретического отдела института, о решаемых в нем проблемах теоретической физики рассказал ребятам доктор физико-математических наук И. М. Дремин.

Как в домашних условиях изготовить световод? Можно ли с помощью единой теории слабых электромагнитных взаимодействий получать электрическую энергию? Каковы преимущества лазерной хирургии? Какие мощности лазеров достигнуты сегодня? Эти и другие разнообразные и порою неожиданные вопросы задали ученым ребята.

Ученые ввели ребят в круг решаемых сегодня важных для нашей страны проблем физики, указали тот рубеж, где кончается известное сегодня и начинается то, что должно стать известным завтра. Из первых рук ребята получили ясное представление о том, что научные удачи — это всего лишь преходящий момент в трудной, временами тяжелой, мучительной, непрерывной цепи поисков физической истины.

Первый день Праздника завершился экскурсией по лабораториям ФИАНа. В некоторых из них ребятам предстояло поработать, испытать первое прикосновение к реальному физическому эксперименту.

На следующий день ребят ожидала встреча с редколлегией журнала «Квант», этого очень популярного среди ребят журнала. Во время встречи произошел весьма полезный для обеих сторон обмен мнениями о том, каким быть «Кванту». С большим интересом прослушали участники Праздника рассказ главного редактора журнала академика И. К. Кикоина о проблемах и задачах, решаемых «Квантом». Заместитель главного редактора В. А. Лешковцев обратил внимание будущих физиков на те загадки природы, которые можно неожиданно обнаружить совсем рядом, можно сказать, у себя под ногами.

О проблемах оптоэлектроники и термоядерной энергетики ребята узнали в среду от лауреата Ленинской и Государственной премий профессора Ю. М. Попова. О великой роли знакомства с трудами классиков в формировании будущего ученого рассказал ребятам академик Академии педагогических наук СССР В. А. Фабрикант.

В четверг ребят ждал устный выпуск журнала «Природа». Заместитель главного редактора журнала В. А. Гончаров представил ребятам некоторых авторов этого журнала. Встреча прошла в очень теплой и непринужденной обстановке. Перед ребятами неожиданно открылся мир других наук: географии, биологии...

Последний день Праздника юных физиков совпал с заключительным этапом Турнира юных физиков. Три лучшие команды скрестили шпаги в финальном физбое. Знание физики, остроумие, находчивость продемонстрировали финалисты, которым нужно было в жесткие временные сроки решить довольно сложные экспериментальные задачи с помощью подручных приборов и приспособлений.

Однако не только наука была постоянной спутницей ребят. Их ждали и «Огонек» с дискотекой, и концерт камерной музыки из произведений Бетховена, Моцарта, Бартока, и встреча с исполнителем самодеятельных песен физиком Сергеем Никитиным.

Трехдневная конференция, на которую было представлено 17 докладов, наглядно показала разносторонность интересов ребят, их способность и стремление к серьезной научной работе. Удачному ходу конференции во многом способствовало жюри из ведущих ученых ФИАНа, возглавляемое лауреатом Государственной премии Украины кандидатом физико-математических наук Г. А. Аскарьяном.

«Общие принципы шумоподавления в системах звукозаписи и звуковоспроизведения», «Методы измерения удельного заряда электрона», «Исследование некоторых видов разрядов в газе», «Образование кристаллов. Их выращивания. Применение», «Некоторые наблюдения за высыханием капель», «Исследование физических эффектов, возникающих в обычной ванне, заполненной водой», «Наблюдение за полетом брызг», «Моделирование взаимодействия дефектов в кристаллах», «Изучение поглощения лазерного излучения парами молекул йода», «Парадокс магнитного экрана», «Необычные эффекты и парадоксы специальной теории относительности», «Эффекты «веселой» капельки» — уже простое перечисление тем самостоятельно выполненных исследований говорит само за себя. Но о некоторых докладах хотелось бы рассказать поподробнее.

Ряд работ был посвящен физике кристаллов. Так, Я. Билялов и М. Шайхеев (шк. № 18) разработали и показали демонстрационный опыт, позволяющий с помощью пузырьковой модели понять и изучить законы поведения дефектов (дислокаций) в кристаллах. А. Демков, М. Людомирский, М. Макарчук и А. Панфилов (шк. № 179) аналогичный опыт засняли, и довольно удачно, на кинопленку и показали этот фильм своим товарищам по конференции. Свое искусство по выращиванию кристаллов с двойными, четверными и шестерными осями симметрии продемонстрировал А. Кушнеров (шк. № 2). При этом в докладе он дал обстоятельный обзор по образованию кристаллов и их применению

Группа учащихся школы № 18 поставила перед собой интересную физическую задачу — определить такую фундаментальную величину, как удельный заряд электрона (e/m). Подошли они к решению этой задачи двумя способами — методом фокусировки и методом магнетрона. Первую серию экспериментов провел В. Иванов, а вторую провели С. Медведев; А. Павлов и А. Поваляев. При этом были получены практически совпадающие результаты, близкие к реальному значению. Отрадно, что ребята весьма грамотно подошли к экспериментам, сделали анализ возможных погрешностей, увидели пути улучшения точности эксперимента.

А. Ахметов, М. Матвеев и В. Покровский (шк. № 57) провели любопытные наблюде-

Участников Праздника приветствует академик А. М. Прохоров.

Встреча с главным редактором журнала «Квант» академиком И. К. Кикоиным.

В лабораториях ФИАНа.

Кулуары.

ния над каплями раствора поваренной соли. Оказывается, при высыхании капли образуется выпуклое соляное кольцо, внутри которого ровным слоем распределены мелкие кристаллики соли. Поскольку ребятам не удалось найти в литературе объяснение этого эффекта, они высказали три гипотезы и поставили опыты, которые должны были либо подтвердить, либо опровергнуть выдвинутые гипотезы.

Некоторые доклады носили реферативный характер. В них ребята коснулись самых современных и интересных направлений физики, например — осуществление управляемого термоядерного синтеза, голография, эффекты аномально низкого трения.

Как и всякий праздник, Праздник юных физиков закончился вручением призов и подарков. Авторы докладов, признанных жюри лучшими, в награду получили оттиски работ ведущих ученых. Среди них — оттиски Нобелевских лекций академиков Н. Г. Басова и А. М. Прохорова с их автографами. Экземпляры журнала «Квант» с автографами членов редколлегии и сотрудников редакции получили А. Кушнеров, автор доклада «Образование кристаллов. Методы выращивания. Применение» и А. Ахметов, М. Матвеев и В. Покровский, авторы доклада «Некоторые наблюдения за высыханием капель раствора». (Тематика этих докладов очень близка к Лаборатории «Кванта».) Школы — участницы Праздника были награждены грамотами комитета ВЛКСМ ФИАНа и подпиской журнала «Квант» на 1981 год. Всесоюзное общество «Знание» подарило учителям — руководителям школьных команд — сборники «Наука и человечество». Специальные переходящие призы — магазин сопротивлений, с которым работал известный русский физик Н. А. Умов, и стеклянный львенок Пюф, произведение искусства фиановских стеклодувов, — были вручены командам школ № 2 и № 57, занявшим I и II места в Турнире юных физиков.

Рассказ о Празднике нам хочется закончить двумя приветствиями, присланными его участникам председателем оргкомитета Праздника юных физиков, директором ФИАНа, лауреатом Ленинской и Нобелевской премий академиком Николаем Геннадиевичем Басовым и Вице-президентом АН СССР, Председателем Комиссии АН СССР по работе с молодежью, академиком Евгением Павловичем Велиховым:

Дорогие ребята!

Пять дней вы провели в стенах старейшего в нашей стране научно-исследовательского учреждения — в Физическом институте им. П. Н. Лебедева АН СССР, ученые которого обогатили мировую науку крупнейшими открытиями. Ломоносов, Эйлер, Якоби, Вавилов, Ландсберг, Мандельштам, Папалекси, Скобельцын, Черенков — эти имена составляют гордость русской и советской физики.

За прошедшую неделю вы встретились с ведущими учеными нашего института, крупными физиками, доложили результаты своих первых исследований, среди которых было много интересных и достойных серьезного обсуждения сообщений, посетили лаборатории ФИАНа и поработали в них.

Решая научные проблемы в такой важной области знаний как физика, вы приобщаетесь к нелегкому, но увлекательному, благородному труду людей науки. Надеюсь, что этот труд пришелся вам по душе и дни, проведенные в лабораториях института, были для вас праздником.

Дорогие ребята! В этом году наша страна отмечает 110-летие со дня рождения В. И. Ленина. Будьте достойны памяти этого великого человека, великого борца, отдавшего свои знания, всю свою жизнь во имя нашего светлого будущего. Гордо несите имя советского гражданина. Будьте трудолюбивыми и настойчиво стремитесь к победам.

Дорогие друзья!

Поздравляю вас — участников Праздника юных физиков — с его успешным завершением!

Этот праздник был организован для вас в одном из старейших и ведущих институтов страны — Физическом институте им. П. Н. Лебедева. Вам, сегодняшним школьникам, выпало счастье встретиться со многими ведущими учеными-физиками, участвовать в творческих состязаниях друг с другом, в увлекательной научной работе в лабораториях Института.

Современная наука непрерывно революционизирует нашу жизнь, наука является одним из важнейших факторов, определяющих настоящее и будущее человечества. Ваш Праздник — это одно из проявлений заботы старшего поколения советских ученых о юных талантах, о подготовке достойной молодой смены. Сегодня вы сделали очень важные и успешные первые шаги в науке, но вам предстоит еще многому научиться, чтобы стать настоящими учеными, будущими строителями нового общества. Успехов в науке можно добиться лишь в результате упорного творческого труда.

Желаю вам больших успехов, смелости и высокой ответственности в научном поиске.

Велихов

Е. Юносов

Турнир юных физиков

> *Несмотря на то, что общие турниры были опаснее одиночных состязаний, они всегда пользовались большим успехом среди рыцарей.*
>
> В. Скотт. Айвенго

С 20 февраля по 28 марта в Москве проходил Турнир юных физиков. В нем участвовали старшеклассники одиннадцати московских школ — №№ 2, 7, 18, 47, 52, 57, 91, 179, 201, 444 — и школы № 82 подмосковного поселка Черноголовка.

Турнир проводился в три тура: заочный коллективный конкурс, полуфинальные физические бои и финальный физбой.

Первый тур начался 20 февраля и закончился 12 марта. Всем школам-участницам были разосланы списки из 17 задач. Решать эти задачи могли все желающие. После коллективного-обсуждения решения были переданы жюри Турнира.

Большинство задач заочного конкурса можно охарактеризовать как проблемные задачи. Вот несколько примеров:

Задача «Струйка». *Из водопроводного крана вытекает тонкая струйка. Вода полностью заполняет трубку крана радиусом около 2 мм. Внизу струйка сужается, а потом распадается на отдельные капли. Почему сужается струйка? На каком расстоянии от крана она распадается на капли?*

Интересные решения прислали Н. Квасов (шк. № 52) и В. Шмидт (шк. № 179).

Задача «Шар». *На земле толстым слоем насыпан песок. С высоты 1 м свободно падает стальной шар радиусом 5 см. На какую глубину шар погрузится в песок?*

Эта задача вызвала, пожалуй, самые большие затруднения.

Задача «Карандаш». *Остро отточенный карандаш поставили острием на стол, и он простоял так два месяца. Доказать, что карандаш воткнулся в стол.*

Что значит «остро отточенный карандаш»? Как он может стоять на поверхности стола? Что выведет его из этого положения? На эти и многие другие вопросы обстоятельно ответили Д. Гершуни (шк. № 57), К. Кондратьев и А. Чамаев (шк. № 2).

«Экспериментальная задача». *Исследовать зависимость коэффициента крутильной жесткости тонкой капроновой нити от длины и толщины нити в области длины порядка 10 см и толщин порядка 10 мм.*

Очень интересные исследования провели И. Ныркова (шк. № 2), Н. Квасов (шк. № 52), А. Кулагин и М. Новиков (шк. № 18).

Подобных задач пока нет в задачниках, и они являются проблемными даже для специалистов, но именно такие задачи каждодневно ставит перед физиками сама жизнь. Членам жюри было очень интересно посмотреть, как ребята подходили к решению задач, какое давали качественное объяснение, какую выбирали модель явления, какие делали допущения, какие и как проводили экспериментальные исследования.

Победителями в первом туре стали школы №№ 2 и 179, приславшие обоснованные решения наибольшего числа задач. Если говорить об отдельных авторских решениях, то их больше всего было у П. Калугина (шк. № 444).

Второй тур Турнира (полуфинальные физические бои) проходил 19 марта в трех группах школ одновременно. В группе *А* встречались команды школ №№ 2 и 52, в группе *В* — 18, 57 и 201 и в группе *С* — 91, 179 и 444.

Физический бой (физбой) — это коллективное состязание юных физиков в умении решать сложные задачи, убедительно излагать свои решения и полемизировать. В полуфинале физбои проводились по задачам заочного конкурса. Каждая команда состояла из десяти учащихся 8—10 классов, причем десятиклассников было не более шести.

Пожалуй, наиболее удачна схема физбоя, когда команды по очереди выступают в роли докладчика, оппонента и рецензента. Сначала представитель команды-докладчика рассказывает свое решение задачи. Затем оппонент задает докладчику вопросы и высказывает свои критические замечания. При этом, естественно, возникает полемика. Наконец, рецензент дает оценку выступлениям и докладчика, и оппонента. Как оппонент, так и рецензент могут представить свои решения, если они им кажутся более удачными. Жюри оценивает выступления команд в баллах. В полуфинале, например, была принята такая система: максимальная оценка докладчику — 10 баллов, оппоненту — 5 баллов и рецензенту — 2 балла.

Победителями полуфинальных физбоев стали команды школ №№ 2, 18 и 91. По сумме баллов в двух турах в финал Турнира вышли команды школ №№ 2, 57 и 179.

Финальный физбой проходил в рамках Праздника юных физиков в день его закрытия, 28 марта, в помещении Физического института им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР (ФИАН).

Участникам финального физбоя было предложено два типа задач. Условно назовем их «большими» и «маленькими» задачами. На решение «большой» задачи давался 1 час, а на решение «маленькой» — 10 минут. Все задачи носили исследовательский характер. Бой проводился по схеме: докладчик и два оппонента.

Вот условия задач первого типа:

Задача «Супербол». *Оценить время соударения супербола (прыгающего мячика) с полом при падении с высоты 1 м.*

Задача «Линза». *Измерить оптическую силу данной длиннофокусной линзы.*

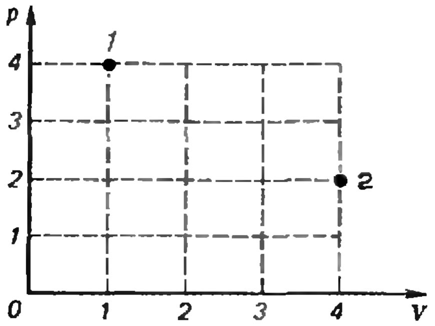
Задача «Спираль». *Изучить и объяснить поведение спирали лампы накаливания при воздействии на нее наэлектризованных тел.*

Среди задач второго типа были, например, такие:

Задача «Фольга». *Если фольгу от обертки конфеты разглаживать ногтем на твердой поверхности, двигая ногтем все время в одном направлении, то она всегда закручивается вверх, навстречу этому направлению. Почему?*

Задача «Спичка». *Как известно, на обычную спичку магнит не действует. Но если спичку зажечь и дать ей обуглиться, то сильный магнит ее притянет. Объясните это явление.*

Задача «pV-диаграмма». *Некоторое количество кислорода переводят из состояния 1 в состояние 2, как показано на рисунке (давление и объем указаны в относительных единицах). Что определенного можно сказать об изменении параметров газа?*



Все участники финала, в основном, успешно справились с предложенными задачами. Основные идеи решений были обсуждены в ходе физбоя и вызвали большой интерес не только участников, но и зрителей. Надеемся, что некоторые ребята продолжили работу над задачами и после окончания Турнира.

По окончательным итогам первое место в Турнире заняла команда школы № 2 (капитан — А. Одинцов). Ей был вручен переходящий приз Турнира — магазин сопротивлений из физической лаборатории известного русского физика Н. А. Умова с его автографом. Второе место заняла команда школы № 57 (капитан — Д. Филиппов). Она получила второй, тоже переходящий, приз — стеклянного львенка Пюфа, сделанного искусными фиановскими стеклодувами. Третье место завоевала команда школы № 179 (капитан — С. Шишков).

Заметим, что впервые Турнир юных физиков проходил в прошлом, 1979 году. Тогда это был первый опыт. Нынешний Турнир отличался более широким составом его участников и значительно лучшей организацией. Это стало возможным благодаря помощи ФИАНа, Всесоюзного общества «Знание», комиссии по работе с молодежью АН СССР, учителей физики, студентов физического факультета МГУ, студентов МФТИ и многих-многих других.

Олимпиада ОмПИ+МФТИ

В третий раз учащиеся Омска и Омской области принимали участие в олимпиаде по физике и математике, организованной совместными усилиями Московского физико-технического института (МФТИ) и Омского политехнического института (ОмПИ). Эта олимпиада родилась из общего для обоих институтов лозунга «Знакомство со студентом начинается в школе».

Соревнования школьников проходили по правилам студенческих олимпиад. Для решения предлагались тринадцать задач по математике и восемь задач по физике. Задачи нестандартные, различной степени трудности, рассчитанные на материал восьмого и девятого классов. Разумеется, решить за четыре часа все задачи невозможно, да это и не требовалось. Для победы достаточно было решить несколько задач, из них одну-две сложные. Ориентироваться в сложности помогало количество баллов, указанное для каждой задачи. Окончательный итог устанавливался с помощью специального коэффициента, учитывающего сложность задачи, законченность решения и число участников, решивших задачу. Благодаря этой системе можно было, решив до конца всего две задачи, опередить тех, кто, пытаясь объять необъятное, брался за все сразу, не все доводя до конца.

В результате первое место среди математиков заняли *Евгений Бруснецов* (шк. № 88, 10 кл.) и *Игорь Титов* (шк. № 109, 9 кл.).

Лучшими физиками оказались *Олег Держко* (шк. № 66, 10 кл.), *Михаил Маркин* (шк. № 88, 9 кл.) и *Вадим Маслов* (шк. № 11, 8 кл.).

После окончания олимпиады состоялся разбор задач, а еще позже — интересная беседа со студентами МФТИ и ОмПИ, где школьники получили ответы на многие интересующие их вопросы, познакомились с рекламными газетами «За науку» и «Политехник». Призеры олимпиады получили награды — грамоты и дипломы — и рекомендации для поступления в вуз.

Ниже приводятся предлагавшиеся на олимпиаде задачи по математике и физике.

Математика

1. Найдите пятизначное число, которое при умножении на 9 образует пятизначное число, записанное теми же цифрами, что и исходное, но в обратном порядке. (2 очка)

2. Дан треугольник ABC; l_A, l_B, l_C — длины его биссектрис, причем $l_A<1$, $l_B<1$, $l_C<1$. Докажите, что площадь треугольника ABC меньше 1. (3 очка)

3. Два парохода плывут по морю по фиксированным направлениям с постоянными скоростями. В 12 ч 00 мин расстояние между пароходами было равно 5 милям, в 12 ч

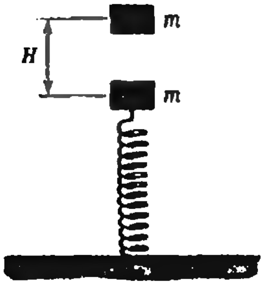


Рис. 1.

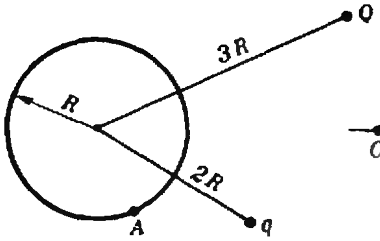


Рис. 2.

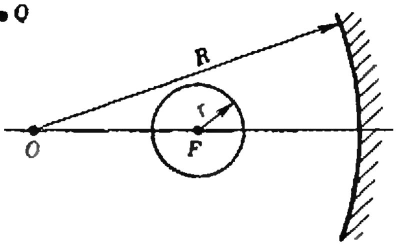


Рис. 3.

45 мин. — $2\sqrt{5}$ милям, в 13 ч 03 мин — $4\sqrt{2}$ милям. Найдите минимальное расстояние, которое было между пароходами. (5 очков)

4. На прямой даны три точки A, B, C, причем точка C лежит между точками A и B. Найдите множество точек O таких, что биссектриса угла AOB проходит через точку C. (4 очка)

5. Найдите сумму дробей вида $\frac{1}{(n+1)^{m+1}}$ для всех натуральных m и n. (5 очков)

6. Решите систему

$$\begin{cases} 2\cos\frac{10\pi}{x} + 4\cos\pi x + 1 = 0, \\ 2\cos\frac{5\pi}{x} + 2\sin\pi x - 2\cos\pi x - 1 = 0. \end{cases}$$

(4 очка)

7. Решите уравнение

$$\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y + 2\,\mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y = 3 + \sin(x+y).$$

(4 очка)

8. Докажите, что не существует натурального числа, которое после зачеркивания первой слева цифры уменьшается в 35 раз. (3 очка)

9. Можно ли семнадцатиугольник разрезать на четырнадцать треугольников? (2 очка)

10. Имеет ли уравнение $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$, где a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, действительные корни? (2 очка)

11. Известно, что для любых действительных x_1 и x_2

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет не более одного корня. (3 очка)

12. Для всех $b > a > 0$ и любого x значение многочлена $P(x) = a + b\cos x + \frac{b}{2\sqrt{2}}\cos 2x$ неотрицательно. Определите множество значений, которые может принимать дробь $\frac{b+a}{b-a}$. (4 очка)

13. Космонавты на чужой планете нашли такую надпись: %! &+ !0+ +!!! Выяснилось, что так житель планеты выполнил некоторую операцию над натуральными числами (операциями могут быть «+», «—», «×», «:», «возвести в степень», «извлечь корень»). Известно также, что на планете употребляется некоторая позиционная система записи чисел, но неизвестны основание системы счисления и порядок перечисления разрядов. Предположим, что знак операции и знак равенства являются однозначными символами. Определите, какое вычисление могло быть выполнено. (5 очков)

Физика

1. На полюсе некоторой планеты без атмосферы стартует ракета. За короткое время двигатели сообщают ракете скорость $\vec{v}$, направленную под углом 45° к горизонту. По модулю эта скорость больше первой космической, но меньше второй космической для этой планеты. В дальнейшем двигатели не работают. Возвратится ли ракета на планету? Объясните. (2 очка)

2. Тело скользит без трения вверх по уклону 1:50 с начальной скоростью 1 м/с. Найти путь, пройденный телом за 7 с. Принять $g = 10$ м/с². (4 очка)

3. На реке построили гидроэлектростанцию. Оказалось, что за 100 км выше по течению ни скорость течения, ни уровень воды не изменились. Аналогичная ситуация за 100 км ниже по течению. Откуда же взялась энергия для работы гидроэлектростанции? (1 очко)

4. На невесомой, прикрепленной к столу пружине жесткостью k лежит груз массой m (рис. 1). На него с высоты H падает такой же груз и прилипает к нему. Какова должна быть высота H, чтобы слипшиеся грузы подпрыгнули, оторвавшись от пружины? (4 очка)

5. В откачанном герметически закрытом сосуде объемом $V = 10$ дм³ находится открытая колбочка, содержащая $m = 10$ г воды. Сосуд нагревают при температуре $t = 100$°С. Сколько воды испарится? (4 очка)

6. Два одинаковых металлических шара с положительными зарядами Q_1 и Q_2 отталкиваются с силой $\vec{F}$. Изменится ли сила взаимодействия (по модулю), если у одного из шаров изменить знак заряда, не меняя величины заряда и расстояния между шарами? Объясните. (2 очка)

7. Точечные заряды q и Q расположены на расстояниях $2R$ и $3R$ от центра незаряженной металлической сферы радиусом R (рис. 2). Потенциал некоторой точки A сферы оказался равным нулю. Считая q известным, найти Q. (5 очков)

8. Постройте в вогнутом зеркале изображение окружности с центром в фокусе зеркала (рис. 3). Считать, что радиус окружности r достаточно мал по сравнению с радиусом зеркала R. (4 очка)

А. Криворучко, А. Фильков

Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до **15 сентября** по адресу: *117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет, Заочная физическая школа.* В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим домашним адресом и два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7 × 12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество . . . . *Сидоров Иван Петрович*
Класс *9-й*
Профессия родителей и занимаемая
должность . . . . *отец — инженер*
мать — врач
Подробный домашний адрес . . . . *248016, г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы . . . . *школа № 10, ул. Пушкина, д. 3а.*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 5 октября 1980 года. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Вступительное задание

Поступающие в 9 класс должны решить задачи 1—5, поступающие в 10 класс — задачи 2, 3, 5—7.

1. Тело массой m соскальзывает без начальной скорости с горки высотой H, оканчивающейся горизонтальным трамплином, высота которого $H/2$ (рис. 1). Горка может перемещаться по горизонтальной подставке, масса горки M. Трением между телом и горкой, горкой и горизонтальной подставкой пренебречь. Найти расстояние между телом и горкой в момент падения тела на горизонтальную подставку.

2. Оценить минимальную скорость катера, необходимую для того, чтобы воднолыжник, которого буксирует катер, не «провалился» в воду.

3. На конец транспортера длиной l, движущегося со скоростью $\vec{v}$, осторожно положили груз массой m (рис. 2). Коэффициент трения между грузом и транспортером равен μ. Какую работу совершит сила трения, действующая на груз, при перемещении груза от одного конца транспортера к другому?

4. Человек перемещает куб с ребром $a = 1{,}8$ м вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, прикладывая силу $\vec{F}$, перпендикулярную к грани куба (рис. 3). При этом куб движется поступательно и равномерно. На каком расстоянии от наклонной плоскости человек должен прикладывать силу, чтобы основание куба не отрывалось от наклонной плоскости? Коэффициент трения между кубом и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}2$.

5. На краю стола лежит палочка массой M, выступая за край стола на треть своей длины. На выступающем конце палочки на невесомой нерастяжимой нити подвешен маленький шарик. Шарик отводят в положение, при котором нить направлена вдоль палочки, и отпускают без толчка. При каких значениях массы m шарика палочка не будет двигать-

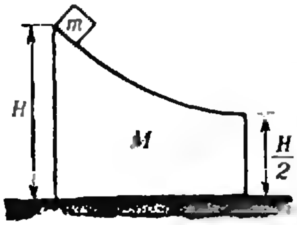


Рис. 4.

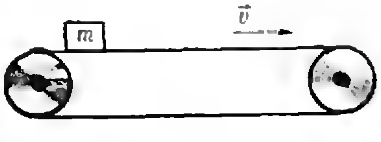


Рис. 2.

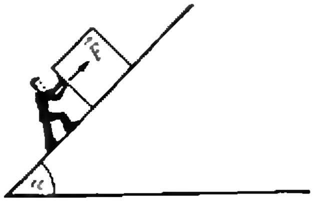


Рис. 3.

ся в процессе колебаний шарика? Коэффициент трения между палочкой и столом μ.

6. В закрытом цилиндре под поршнем находится смесь воздуха и паров воды. Поршень медленно вдвигают в цилиндр. Нарисовать график зависимости давления смеси под поршнем от объема закрытой части цилиндра. Температуру считать постоянной.

7. Заряженный шарик, подвешенный на нерастяжимой нити, движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вертикально вверх. Период обращения шарика T, масса шарика m, его заряд q, длина нити l. Найти радиус окружности, по которой движется шарик.

Дополнительный прием в заочные математические школы

Северо-Западная заочная математическая школа при Ленинградском университете им. А. А. Жданова (СЗМШ) и некоторые филиалы Всесоюзной заочной математической школы АПН СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова (ВЗМШ) объявляют дополнительный прием учащихся 8 классов на 1 курс индивидуального обучения, и прием школьных математических кружков 8 и 9 классов в группы «Коллективный ученик».

Основная цель заочных математических школ — помочь учащимся глубже изучить математику в объеме средней школы, научить их самостоятельно мыслить и преодолевать трудности в чтении книг по математике.

Учащиеся ЗМШ регулярно получают задания по математике, содержащие объяснение теоретического материала, изучение которого помогает решать предложенные задачи.

Те, кто изъявит желание заниматься в заочной математической школе, должны до 15 сентября 1980 г. направить свое заявление на имя директора этой школы. В заявлении надо указать фамилию, имя, класс, номер своей школы и свой полный почтовый адрес. В конверт вложите два листка бумаги размером 14 см×6 см с написанным вашим почтовым адресом.

Всем приславшим заявления будет выслано первое задание. Зачисление будет производиться по результатам его выполнения.

В группах «Коллективный ученик» могут заниматься несколько учеников под руководством своего преподавателя математики.

Зачисление производится до 1 октября 1980 г. на основании заявления руководителя группы с указанием класса и фамилий учащихся, заверенного печатью школы и подписью директора.

СЗМШ принимает учащихся школ Белорусской (кроме Витебской и Гомельской обл.), Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, Карельской АССР, Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областей.

ВЗМШ принимает учащихся школ Башкирской, Дагестанской, Мордовской, Удмуртской и Чувашской АССР, Красноярского края, Амурской, Вологодской, Гомельской, Джезказганской, Донецкой, Кокчетавской, Костромской, Куйбышевской, Орловской, Пензенской, Саратовской, Смоленской, Тургайской, Ульяновской, Уральской, Целиноградской, Черновицкой и Ярославской областей.

Адрес СЗМШ: 228197, Ленинград, ул. Савушкина 61, ЗМШ, прием.

Адрес ВЗМШ: 117234, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ, прием.

Вечерняя физическая школа

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8—10 классы на 1980/81 учебный год.

Основная задача ВФШ — помочь старшеклассникам глубже изучить физику в объеме школьной программы. Кроме того, учащиеся ВФШ смогут познакомиться с основными направлениями современной физики и посетить научные лаборатории физического факультета. Занятия проводятся в форме лекций и семинаров.

Зачисление в ВФШ проводится по результатам собеседования. Для участия в нем надо подать заявление и сдать две фотокарточки размером 3×4 см.

Прием заявлений будет проходить с 5 по 27 сентября в комитете ВЛКСМ физфака МГУ ежедневно (кроме воскресенья) с 16.00 до 18.00.

Адрес ВФШ: 117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет, ВФШ.
Телефон для справок: 139-26-56.

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.

Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Три миниатюры чемпионов мира

До сих пор мы приводили лишь фрагменты из партий мастеров и гроссмейстеров. Сегодня мы рассмотрим целиком три встречи чемпионов мира прежних лет.

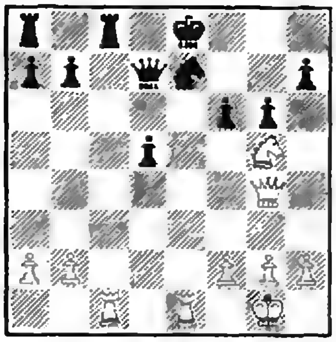
Партии, в которых игра заканчивается в районе двадцатого хода, шахматисты обычно называют «миниатюрами». Если игра была полноценной, то есть быстротечность событий связана не с грубым просмотром, а с эффектной комбинацией или неожиданным маневром, то такая миниатюра занимает достойное место в шахматном искусстве и постоянно кочует из одного издания в другое. Именно так сложилась судьба у трех следующих знаменитых миниатюр.

Начнем с маленького шедевра, созданного первым шахматным королем В. Стейницем.

Стейниц — Барделебен
(Гастингс, 1895 г.)
Итальянская партия

1. e4 e5 2. Kf3 Kc6 3. Cc4 Cc5 4. c3 Kf6 5. d4 ed 6. cd Cb4+ 7. Kc3 d5 (теория рекомендует 7...K:e4) **8. ed K:d5 9. 0—0 Ce6 10. Cg5 Ce7 11. C:d5 C:d5 12. K:d5 Ф:d5 13. C:e7 K:e7 14. Лe1 f6** (белые препятствуют рокировке черных, и их король стремится скрыться на f7) **15. Фe2 Фd7 16. Лac1 c6** (последовательнее 16...Kpf7) **17. d5! cd 18. Kd4 Kpf7 19. Ke6 Лhc8 20. Фg4 g6 21. Kg5+ Kpe8.**

Сейчас на ваших глазах развернется одна из элегантнейших комбинаций в шахматной истории.



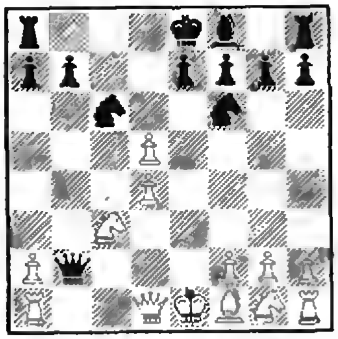
22. Л:e7+! Kpf8! Брать ладью нельзя ни ферзем из-за 23. Л:c8+, ни королем, ввиду 23. Лe1+ Kpd6 (23... ...Kpd8 24. Ke6+) 24. Фb4+ Kpc7 (24...Kpc6 25. Лc1×) 25. Ke6+ Kpb8 26. Фf4+. Однако после отступления короля позиция выглядит подозрительной для белых, все их четыре фигуры находятся под боем. Стейниц рассчитал комбинацию до конца, его ладья хозяйничает на седьмой горизонтали.

23. Лf7+! Kpg8 24. Лg7+!! Черные сдались. Ряд эффектных вариантов остался за кулисами. На 24... Kpf8 решает 25. K:h7+, а на 24... ...Kph8 — 25. Л:h7+! Kpg8 26. Лg7+! Kph8 27. Фh4+ Kp:g7 28. Фh7+ Kpf8 29. Фh8+ Kpe7 30. Фg7+ Kpe8 31. Фg8+ Kpe7 32. Фf7+ Kpd8 33. Фf8+ Фe8 34. Kf7+ Kpd7 35. Фd6×.

Следующая миниатюра принадлежит первому советскому чемпиону мира М. Ботвиннику.

Ботвинник — Шпильман
(Москва, 1935 г.)
Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. c4 d5 3. ed cd 4. d4 Kf6 5. Kc3 Kc6 6. Cg5 Фb6 7. cd Ф:b2?



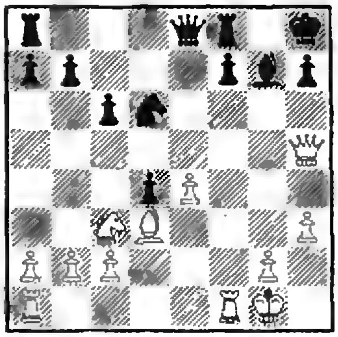
Беря «отравленную» пешку, австрийский гроссмейстер, конечно, не предполагал, что партия продлится еще всего четыре хода. Необходимо было играть 7...K:d4.

8. Лc1! Kb4 9. Ka4 Ф:a2 10. Cc4 Cg4 11. Kf3. Черные сдались. Их ферзь в ловушке, и после 11...Фa3 12. Лc3 спасти его можно только ценой фигуры. Самая короткая результативная партия, сыгранная двумя гроссмейстерами в турнире!

И, наконец, третья миниатюра создана одной из самых загадочных фигур в шахматной истории, одиннадцатым чемпионом мира Р. Фишером.

Фишер — Бенко
(Нью—Йорк, 1964 г.)
Защита Уфимцева

1. e4 g6 2. d4 Cg7 3. Kc3 d6 4. f4 Kf6 5. Kf3 0—0 6. Cd3 Cg4 (лучше, например, 6...Kc6, размен слона целиком отдает инициативу белым) **7. h3 C:f3 8. Ф:f3 Kc6 9. Ce3 e5 10. de de 11. f5 gf** (напрасное ослабление королевского фланга, надежнее было сразу 11...Kd4) **12. Ф:f5 Kd4 13. Фf2 Ke8 14. 0—0 Kd6 15. Фg3 Kph8 16. Фg4 c6 17. Фh5! Фe8?** (позволяет провести белым блестящую комбинацию, сопротивление оказывало 17...Ke6) **18. C:d4 ed.**



19. Лf6! В отличие от победителей в двух предыдущих поединках, Фишер никогда не увлекался математикой, но это не мешало ему использовать в своих партиях геометрические мотивы. В ответ на 19. e5 с угрозой мата спасало 19... f5! Теперь линия f перекрыта и действие слона по диагонали b1—h7 решает судьбу партии.

19...Kpg8 (19...C:f6 20. e5!, и мат неизбежен) **20. e5 h6 21. Ke2! Черные сдались.** (После отступления коня на b5 или c8 следует 22. Фf5! и 23. Фh7×)

Ребусы

(см. с. 7)

1. $$\begin{array}{r} +\;91768\\ 9176\\ 9768\\ \underline{8176}\\ 118888\end{array}$$

2. Два решения:

$$\begin{array}{r} +\;2637\\ \underline{696}\\ 3333\end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r} +\;4758\\ \underline{797}\\ 5555\end{array}$$

3. $\sqrt[2]{458329} = 677$.

4. $\sqrt[3]{389017} = 73$.

5. $74 \cdot 96 = 7104$.

6. Два решения:

$$\begin{array}{r} +\;25365\\ 15245\\ \underline{56981}\\ 97591\end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r} +\;25365\\ 15285\\ \underline{56941}\\ 97591\end{array}$$

7. $$\begin{array}{r} +\;431635\\ \underline{431635}\\ 863270\end{array}$$

8. Два решения: $(45)^1 \cdot 43 = 1935$ и $(13)^2 \cdot 17 = 2873$.

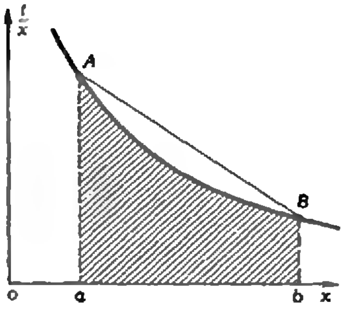
9. $(249)^3 = 15\,438\,249$.

Задачи наших читателей

(см. с. 11)

1. Поскольку функция $x \to \frac{1}{x}$ при $x > 0$ выпукла вниз, площадь трапеции $aABb$ (см. рисунок) больше площади заштрихованной трапеции, то есть

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)(b-a) > \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln \frac{b}{a}.$$



2. Общий член последовательности 1, 31, 331, ... имеет вид $a_n = \frac{10^n - 7}{3}$. Просмотрев остатки от деления чисел 10^n на 19 ($n = 1, 2, 3, \ldots, 18$; дальше остатки повторяются), легко доказать, что a_n делится на 19 тогда и только тогда, когда $n = 18m + 12$. Аналогично можно доказать, что a_n делится на 541 тогда и только тогда, когда $n = 540k + 534$.

Если a_n делится на 541, то

$$n = 540k + 534 = 18(30k + 29) + 12,$$

и значит, a_n делится на 19.

3. Из условия имеем

$$a_1 - x = \cfrac{1}{-a_2 - \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n - y}}},$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{a_1 - x} = -a_2 - \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n - y}},$$

$$\Downarrow$$

$$a_2 + \frac{1}{a_1 - x} = \cfrac{1}{-a_3 - \cfrac{1}{a_4 + \ldots + \cfrac{1}{a_n - y}}},$$

$$\Downarrow$$

$$\cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 - x}} = -a_3 - \cfrac{1}{a_4 + \ldots + \cfrac{1}{a_n - y}},$$

$$\Downarrow \quad \cdots$$

$$a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \ldots + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 - x}}}} = \frac{1}{-a_n + y},$$

откуда получаем результат.

6. Отразим $\triangle ABC$ относительно основания AC, получим ромб $ABCB_1$. Поскольку $[AB_1] \parallel [BC]$ и $|AE| = |BB_1|$, четырехугольник $ABEB_1$ — равнобедренная трапеция. Отсюда следует, что $\widehat{B_1BE} = \widehat{AEB} = \alpha$. Обозначим $\widehat{BAE}$ через β. Тогда из треугольников ABC и ABE получаем:

$$\begin{cases} 2\beta + 2\alpha + 2\beta = 180°, \\ \beta + 2\alpha + \alpha = 180°, \end{cases}$$

то есть $\alpha = 3\beta$. Подставляя это значение α в первое уравнение, находим $\beta = 18°$, $\alpha = 54°$.

Задачи наших читателей

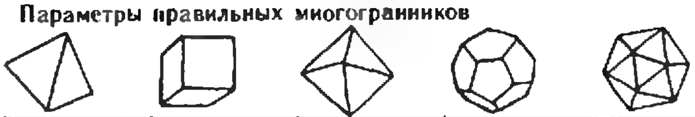
(см. «Квант» № 7, с. 9)

1. а) Одна из диагоналей четырехугольника делит другую пополам.

б) Это либо параллелограммы, либо трапеции, у которых длина большего основания составляет четверть периметра, либо дельтоиды (четырехугольники, у которых длины сторон, примыкающие к концам одной из диагоналей, попарно равны).

**Транзитивные множества
и правильные многогранники
*(см. «Квант» № 7)***

Параметры правильных многогранников



	Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
Число граней	4	6	8	12	20
Число вершин	4	8	6	20	12
Число ребер	6	12	12	30	30
Косинус угла, под которым ребро видно из центра опис. сферы	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
Косинус двугранного угла	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$
Радиус опис. сферы	$\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a\xi\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a\sqrt{\xi}\sqrt[4]{5}}{2}$
Радиус впис. сферы	$\frac{a}{2\sqrt{6}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{6}}$	$\frac{a\sqrt{\xi^5}}{2\sqrt[4]{5}}$	$\frac{a\sqrt{\xi^3}}{2\sqrt{3}}$
Площадь поверхности	$a^2\sqrt{3}$	$6a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^2\sqrt{\xi^3}}{\sqrt[4]{5}}$	$5a^2\sqrt{3}$
Объем	$\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$	a^3	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a^3\xi^4\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5a^3\sqrt{\xi^3}}{6}$

(a — длина ребра; через ξ обозначено число $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618045$)

Несколько вопросов по астрономии

(см. «Квант» № 5, с. 42)

1. В любой точке экватора продолжительность дня всегда равна продолжительности ночи.
2. Смена времен года на экваторе существует. Хотя Солнце находится над горизонтом всегда ровно 12 часов, его максимальная высота над горизонтом день ото дня изменяется.
3. На экваторе два раза в год — в дни весеннего (21 марта) и осеннего (23 сентября) равноденствий — Солнце в полдень бывает в зените. Таким образом, самые жаркие дни на экваторе приходятся на весну и на осень. В то время как в средних широтах за год происходит один цикл смены времен года, на экваторе происходят два таких цикла.
4. Нет, не промежуточная. На экваторе в день летнего солнцестояния (впрочем, как и в день зимнего солнцестояния) высота кульминации Солнца наименьшая по сравнению с другими днями в году.

Номер готовили:
А. Виленкин, А. Егоров, Н. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихакович

Номер оформили:
К. Борисов, М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
А. Пономарева

Зав. редакцией Л. Чернова

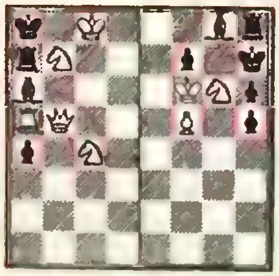
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор О. Кривенко

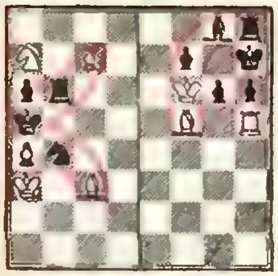
113035 Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 17.VI-80
Подписано в печать 17.VII-80.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,43
Цена 30 коп. Заказ 1400.
Тираж 260 311 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

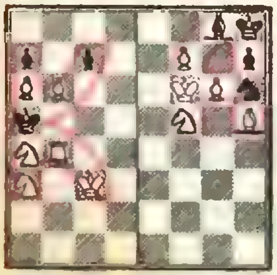
Шахматный конкурс «Кванта»



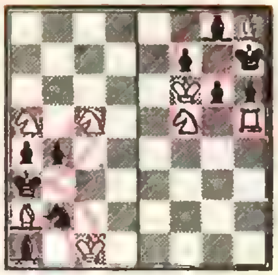
1. Мат в 1 ход.



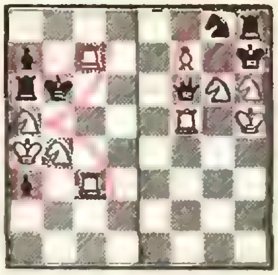
2. Мат в 2 хода.



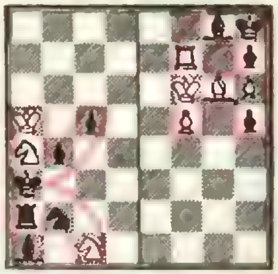
3. Мат в 3 хода.



4. Мат в 4 хода.



5. Мат в 5 ходов.



6. Мат в 6 ходов.

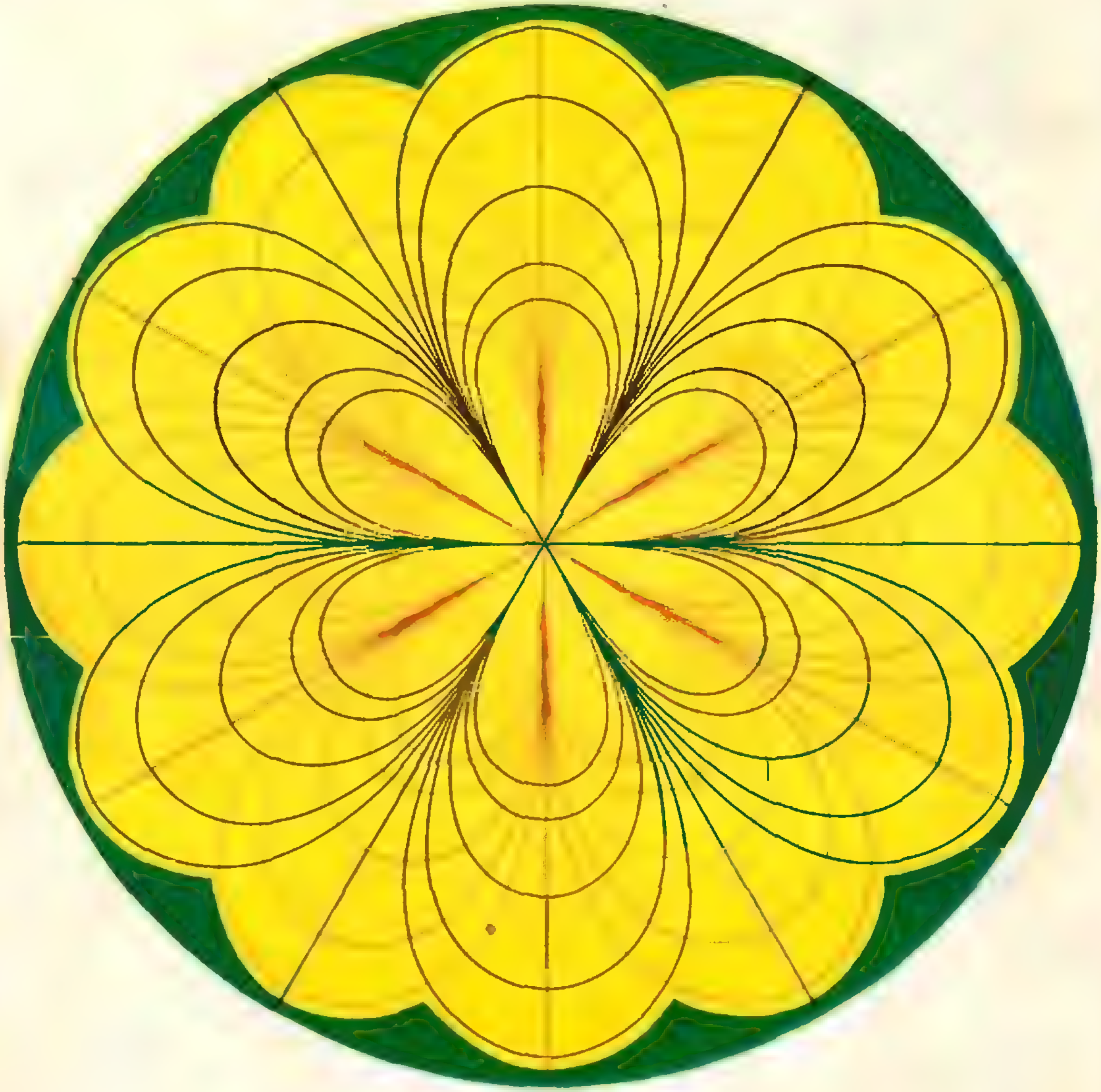
Шесть Оскаров

В этом году А. Карпов в шестой раз завоевал приз Оскара, который вручается лучшему шахматисту года по результатам опроса шахматных журналистов разных стран. Этот «юбилей» отразил в своем венке задач, посвященном чемпиону мира, международный мастер по шахматной композиции Э. Погосянц. Перед вами шесть диаграмм, на которых изображено 12 задач (все они конкурсные). Пара задач на каждой диаграмме изображает две буквы, слева — К, а справа — А (Анатолий Карпов). Во всех изобразительных задачах участвует девять фигур. Это тоже некий символ — А. Карпов стал перворазрядником в 9 лет, гроссмейстером в 19, а шестого Оскара получил за турнирные успехи 1979 года.

Обращаем ваше внимание на то, что среди этих задач имеется много так называемых «ретроградных», то есть требующих выяснения, чей в них первый ход (хотя мат всюду дают белые). Одна важная деталь, которую вам обязательно надо иметь в виду при решении задач: если последний ход черных в исходной позиции задачи невозможен (конечно, это всякий раз надо доказать), то, значит, очередь хода сейчас за ними. В такой задаче сначала ходят черные (их ход является нулевым, в решении он не засчитывается) и уже после этого белые объявляют черному королю мат в заданное число ходов.

◆

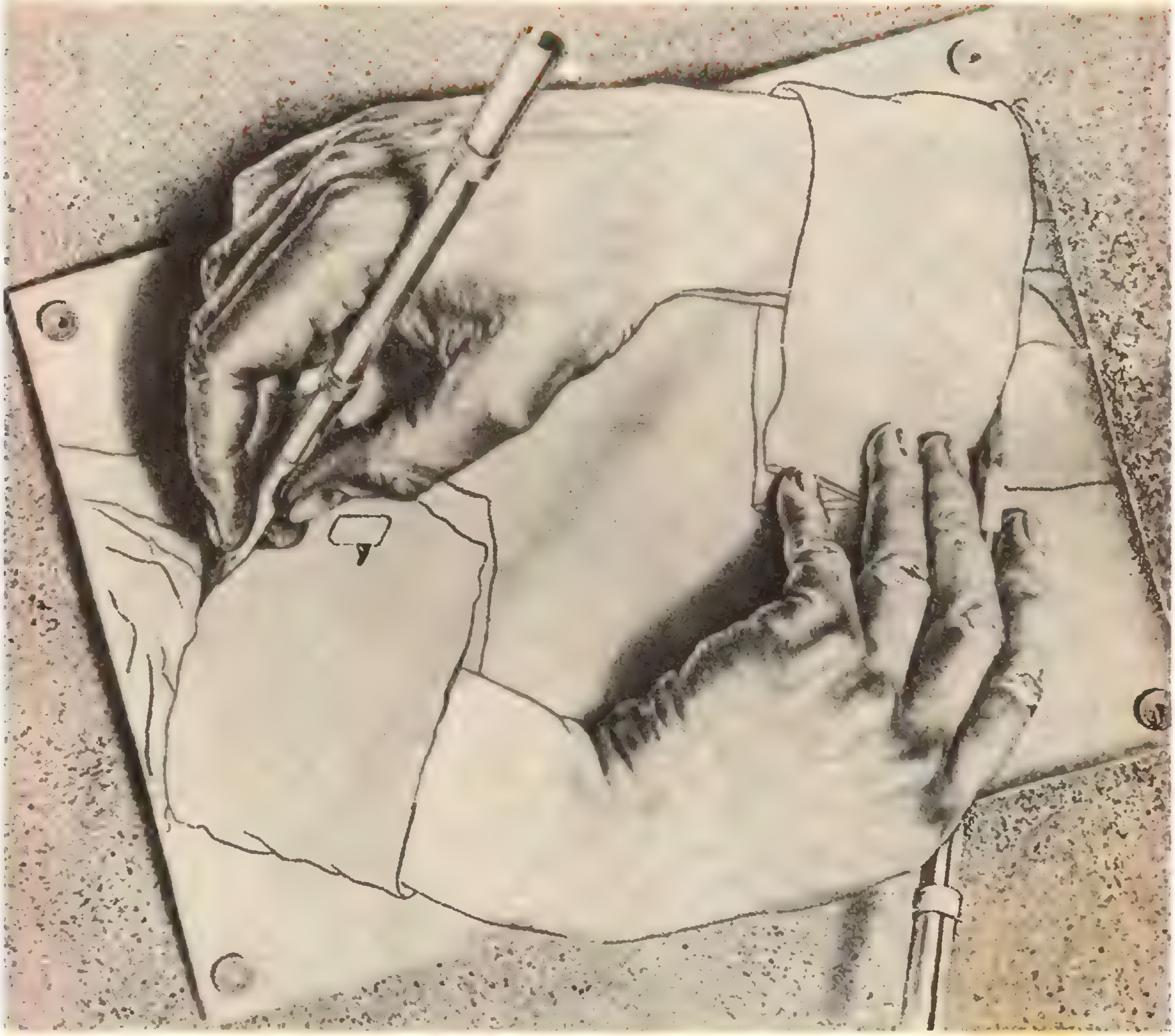
Решения этих задач следует отправлять в одном экземпляре в отдельном конверте по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант» — не позднее 30 сентября 1980 года. На конверте обязательно должна быть пометка «Шахматный конкурс, № 8-80».



На этом рисунке, эскиз которого был выполнен учащимися школы-интерната при МГУ Васильевым, Кормильченко и Романовым, изображены линии уровня двух функций. Для функции f, принимающей действительные значения на точках $(x;\ y)$ плоскости, линия уровня k — это множество $\{(x,\ y) | f(x,\ y) = k\}$. Если число $f(x;\ y)$ воспринимать как высоту над уровнем моря (плоскостью Oxy) в точке $(x,\ y)$, эти линии можно понимать как обычные географические линии уровня. Однако выписать «действительные» выражения для использованных «комплексных» функций $\arg e^{z^{-3}}$ (зеленые линии уровня) и $|e^{z^{-3}}|$ (красные) мы здесь не решились — их запись в «действительных» обозначениях столь громоздка, что только испортит впечатление от красивого геометрического узора.

Индекс 70465
Цена 30 коп.

На этом загадочном рисунке голландского художника М. Эшера левая и правая рука, помогая друг другу, выбрались из слишком тесного для них плоского мира листа бумаги на свободу, в третье измерение. Рисунок вызывает недоумение: нарушены привычные взаимоотношения между рисунком и рисующим, между плоскостью и пространством, между лéвым и правым. Он иллюстрирует, в частности, сложное физико-математическое понятие ориентации, затронутое в одной из статей этого номера (с. 2). Действительно, попробуйте серьезно ответить на наивный, на первый взгляд, вопрос — чем правая рука отличается от левой? Теперь вы, наверное, согласитесь — даже в самых простых явлениях природы часто скрывается много таинственного.



НОМЕР
9

Основан в 1970 году

Квант

9
1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

Узор,
изображенный
на первой странице обложки,
связан
с понятием эволюты,
о которой
можно прочитать
на с. 61.

В НОМЕРЕ:

4 *И. Кикоин.* Наука — дело молодых
7 *З. Усманов, И. Ходжиев.* Математика в трудах великого медика
9 *А. Варламов, А. Шапиро.* Метод виртуальных перемещений
14 *Е. Глушанков, П. Певзнер.* Переключательная игра Шеннона
22 *Е. Кузнецов, А. Рубенчик.* О волнах на море и рябн на лужах

Лаборатория «Кванта»

27 *Ф. Вафин.* Еще раз о реакции вытекающей и втекающей струй

Математический кружок

28 *Г. Гегелия.* Принцип сжимающих отображений

Задачник «Кванта»

34 Задачи М641—М645; Ф653—Ф657
36 Решения задач М596, М598, М599; Ф599—Ф603
40 Премии «Кванта»

«Квант» для младших школьников

41 Задачи
42 *И. Никольская.* «Неверно, что...» — как это понимать?

По страницам школьных учебников

47 *А. Земляков.* Проверьте себя

Практикум абитуриента

51 *Ю. Метт.* Три стандартные задачи

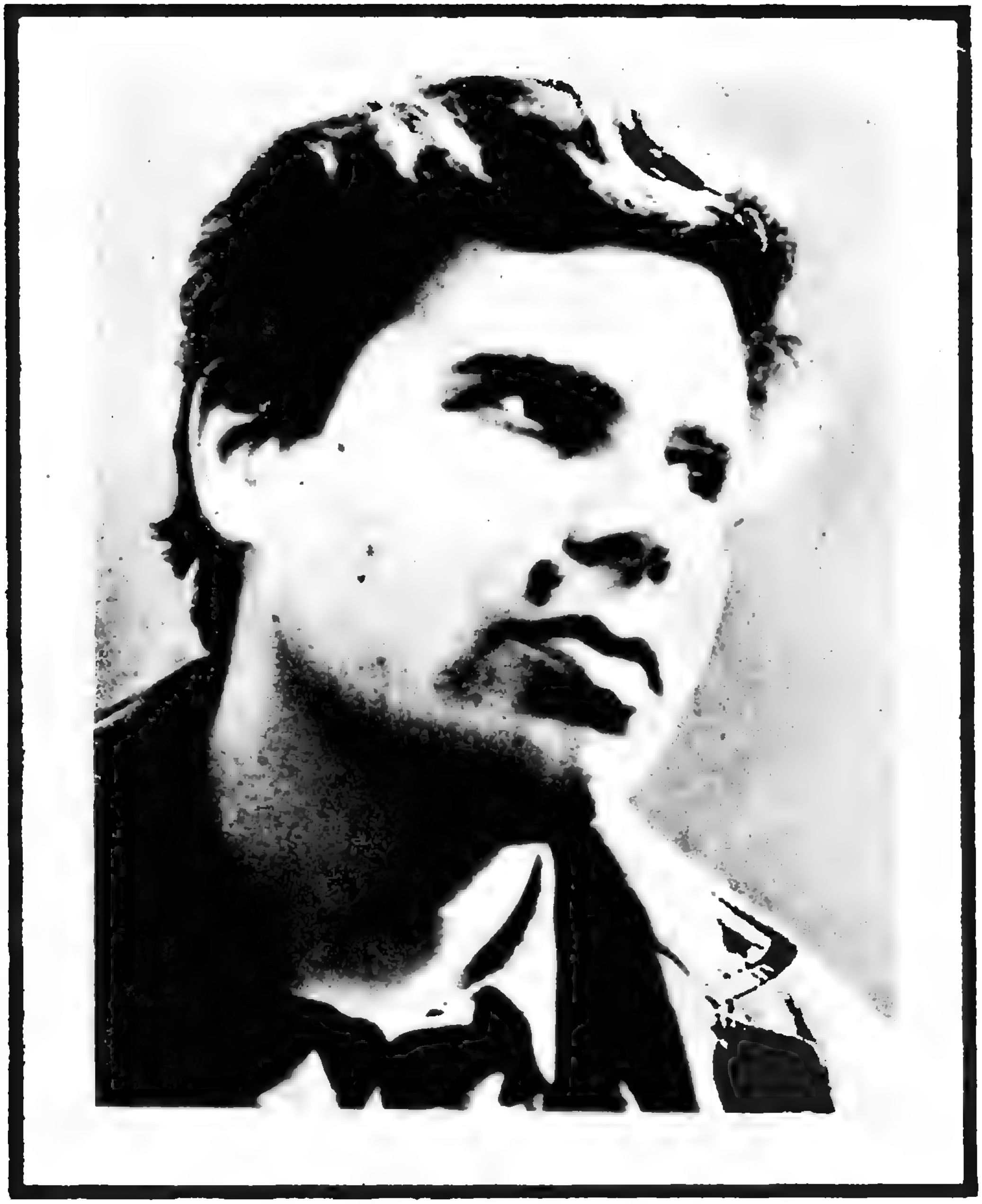
Искусство программирования

52 Заочная школа программирования. Урок 9: Циклы

Рецензии, библиография

58 *А. Егоров, М. Смолянский.* Новые книги
59 *И. Зорич.* Твой первый робот
62 **Шахматная страничка**
63 **Ответы, указания, решения**
Шахматный конкурс *(3-я с. обложки)*
Наша обложка *(57, 61)*
Смесь *(21, 33, 46, 49)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1980



Иосиф Шаевич Слободецкий

(апрель 1941 г. — июль 1980 г.)

Редакционная коллегия и коллектив редакции журнала «Квант», редакционная коллегия «Библиотечки «Квант» с глубокой скорбью сообщают о трагической гибели в автомобильной катастрофе 23 июля 1980 г. члена редакционной коллегии журнала «Квант», члена редакционной коллегии и ученого секретаря «Библиотечки «Квант», кандидата физико-математических наук Иосифа Шаевича Слободецкого.

Памяти друга

Редакционная коллегия журнала «Квант» понесла тяжелую утрату. Трагически погиб один из создателей журнала и самых активных его сотрудников кандидат физико-математических наук Иосиф Шаевич Слободецкий.

Талантливый, энергичный, необыкновенно трудоспособный человек, он полностью отдавался делу, никогда не теряя из виду главной цели — приносить пользу людям. За свою короткую, но такую яркую жизнь он успел сделать очень много.

И. Ш. Слободецкий родился 28 апреля 1941 г. в г. Киеве. После окончания средней школы он учился в Московском физико-техническом институте на факультете общей и прикладной физики, а затем работал в Институте физики высоких давлений АН СССР. Во всей его научной деятельности наряду с талантом и глубокой профессиональной эрудицией физика-теоретика проявлялся постоянный интерес к практическим приложениям теоретических исследований.

Безграничная любовь к детям и любовь к науке естественным образом привели Иосифа Шаевича к серьезной работе со школьниками. Поистине неоценим его вклад в дело привлечения к занятиям наукой новых поколений молодежи. Еще в студенческие годы И. Ш. Слободецкий был одним из инициаторов проведения физико-математических олимпиад МФТИ. В этой своей деятельности он был настоящим подвижником. Во многом благодаря его энтузиазму и блестящим организаторским способностям олимпиады МФТИ со временем выросли во Всероссийскую, а затем во Всесоюзную олимпиады школьников. Он умел убеждать людей, увлекать их своими идеями, настойчиво добиваться воплощения этих идей в конкретных делах. Центральную роль играл И. Ш. Слободецкий в создании и всей последующей работе редакции журнала «Квант». Он был бессменным руководителем раздела «Задачник «Кванта» по физике, активным организатором и принципиальным судьей всей работы отдела физики журнала. Читатели знают его также как постоянного автора журнала.

Много сил и энергии Иосиф Шаевич отдавал научно-популярной серии «Библиотечка «Квант», членом редакционной коллегии и ученым секретарем которой он был с момента создания этой серии. И. Ш. Слободецкий был научным редактором учебников по физике для средней школы и ряда научно-популярных книг, выходящих в издательствах «Наука», «Мир», «Просвещение». Много прекрасных задач по физике собрано в двух книгах, которые он недавно подготовил к печати. Активное участие И. Ш. Слободецкий принимал в работе Всесоюзного общества «Знание», где состоял членом научно-методического совета по пропаганде физико-математических знаний.

Глубокая научная интуиция, кипучая энергия и редкий дар общения, которым он обладал, вызывали глубокое уважение к нему друзей, коллег по работе. С ними он делился своими разнообразными научными и издательскими планами, проектами своих новых книг по физике. Трудно примириться с мыслью, что этим планам не суждено осуществиться.

Ушел из жизни талантливый физик, умный человек, сделавший так много доброго и полезного людям. Память о нем будут долго хранить в сердцах его друзья, все, кто сталкивался в жизни с этим прекрасным, светлым человеком.

И. Кикоин

Наука — дело молодых

Многие считают, что научные работы, открытия, формулировки законов природы — это результат работы маститых ученых, то есть людей почтенного возраста, накопивших знания и большой опыт в своей специальности. В действительности, как показывает история науки, дело обстоит не так: крупнейшие открытия делались молодыми людьми.

Хотя мне легче всего говорить о физиках, не могу не сказать о выдающейся работе Владимира Ильича Ленина «Развитие капитализма в России». Опубликована эта работа была в марте 1899 года, следовательно, написал Ленин ее в возрасте 28 лет. При подготовке этой работы он использовал, в общей сложности, около 600 книг и статей. Это — капитальный труд, в котором Ленин впервые, вопреки общепринятой тогда точке зрения, доказал, что пореформенная Россия развивалась по капиталистическому пути, в полном соответствии с учением Маркса. Работа оказала огромное влияние на революционное движение в России. Весь дальнейший ход событий блестяще подтвердил развитые в работе научные идеи ее автора. Замечу здесь же, что до этого Ленин успел написать свыше 30 произведений, в которых он разрабатывал программу и тактику партии.

Большинству людей хорошо знаком портрет Галилея — старца с большой бородой. Галилей (1564—1642) действительно жил долго, но первое свое крупное открытие в физике он сделал в 1583 году, когда ему было около 20 лет. Наблюдая за колебаниями люстры в соборе и сравнивая период колебаний с биением собственного пульса, он установил, что период колебаний люстры не зависит от амплитуды (закон изохронности маятника). Это открытие послужило основанием для создания часов. В возрасте 25 лет Галилей стал профессором. Вскоре он экспериментально установил свои знаменитые законы падения тел под действием силы тяжести.

Классическая механика, которая в течение двух с лишним веков служила основой физики, была создана Ньютоном, который родился в год смерти Галилея. Ньютон (1642—1727), так же как и Галилей, одно из крупнейших своих открытий — открытие закона всемирного тяготения — сделал в возрасте около 20 лет (по случайным обстоятельствам опубликовано оно было существенно позже).

Всем девятиклассникам известно имя знаменитого русского физика Эмилия Христиановича Ленца (1804—1865). Так называемое правило Ленца, касающееся направления индукционного электрического поля, было сформулировано им в 1833 году в работе «Об определении направления гальванических токов, возбуждаемых электродинамической индукцией». В это время Ленцу было 29 лет. В тридцатилетнем возрасте он был избран академиком.

Теоретической основой всей современной электротехники, радиотехники и оптики служат знаменитые четыре уравнения Максвелла. На этом основании Джеймса Клерка Максвелла (1831—1879) справедливо называют Ньютоном в электричестве. Свою первую работу Максвелл опубликовал, когда ему едва исполнилось 15 лет. В 25 лет он стал профессором Абердинского университета, а в 29 лет — профессором Королевского колледжа в Лондоне. Вскоре он опубликовал одну из важнейших своих работ под названием «Динамическая теория электромагнитного поля».

Дмитрий Иванович Менделеев (1834—1907), которого портретисты изображали обычно седовласым старцем с бородой, свою первую научную работу опубликовал в возрасте 21 года, еще будучи студентом Петербургского главного педагогического института. В 29 лет он был избран профессором. Свой знаменитый периодический закон, принесший ему всемирную славу, Менделеев открыл, когда ему было 35 лет.

Павел Николаевич Яблочков (1847—1894) в 1876 году, то есть в возрасте 29 лет, запатентовал дуговую лампу — первый электрический источник света — которая под названием «русского света» обошла почти все столицы мира.

Основание всей современной ядерной физики и техники было положено открытием радиоактивности, в изучении которой главную роль сыграла Мария Склодовская-Кюри (1867—1943). Тогда ей было около 30 лет. В 36 лет Мария Склодовская-Кюри получила, совместно с Пьером Кюри и Анри Беккерелем, одну из первых Нобелевских премий.

Петр Николаевич Лебедев (1866—1912) в возрасте 29 лет, занимаясь исследованиями в области кристаллооптики, показал полную аналогию между светом и электромагнитными волнами в миллиметровом диапазоне (в то время не было еще твердо установлено тождество между «искусственными» электромагнитными волнами и «натуральными» световыми волнами). Дальнейшее развитие этой работы привело его к знаменитому экспериментальному доказательству существования давления света.

Основоположник советской школы физиков Абрам Федорович Иоффе (1880—1960), столетие со дня рождения которого мы отмечаем в этом году, первоначально получил техническое образование, закончив Петербургский технологический институт в 1902 году. Заинтересовавшись физикой, он в том же году уезжает в Мюнхенский университет, в лабораторию знаменитого Рентгена, где в возрасте 25 лет с блеском защищает докторскую диссертацию. Вернувшись в Россию в 1906 году, Иоффе проводит ряд блестящих экспериментальных работ, снискавших ему всемирную известность. Так, он доказал, что катодные лучи представляют собой электрический ток и что электрический заряд меняется дискретно (последнее Иоффе сделал одновременно с Милликеном).

В 1905 году в немецком физическом журнале «Annalen der Physik» появились три статьи одного и того же автора, каждая из которых могла бы обеспечить ему бессмертие. Автором этих работ был Альберт Эйнштейн (1879—1955), которому в то время было всего лишь 26 лет. (В прошлом году весь мир отмечал 100-летие со дня его рождения.) Одна из этих работ под названием «К электродинамике движущихся тел» послужила началом революции в физике. В ней были изложены основы специальной теории относительности. Другая работа была посвящена изложению теории фотоэлектрического эффекта, за которую впоследствии Эйнштейн получил Нобелевскую премию. Третья работа называлась «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты». Она способствовала превращению молекулярной гипотезы в молекулярную теорию. Еще 10 лет спустя Эйнштейн разработал общую теорию относительности, после чего его слава утвердилась на века.

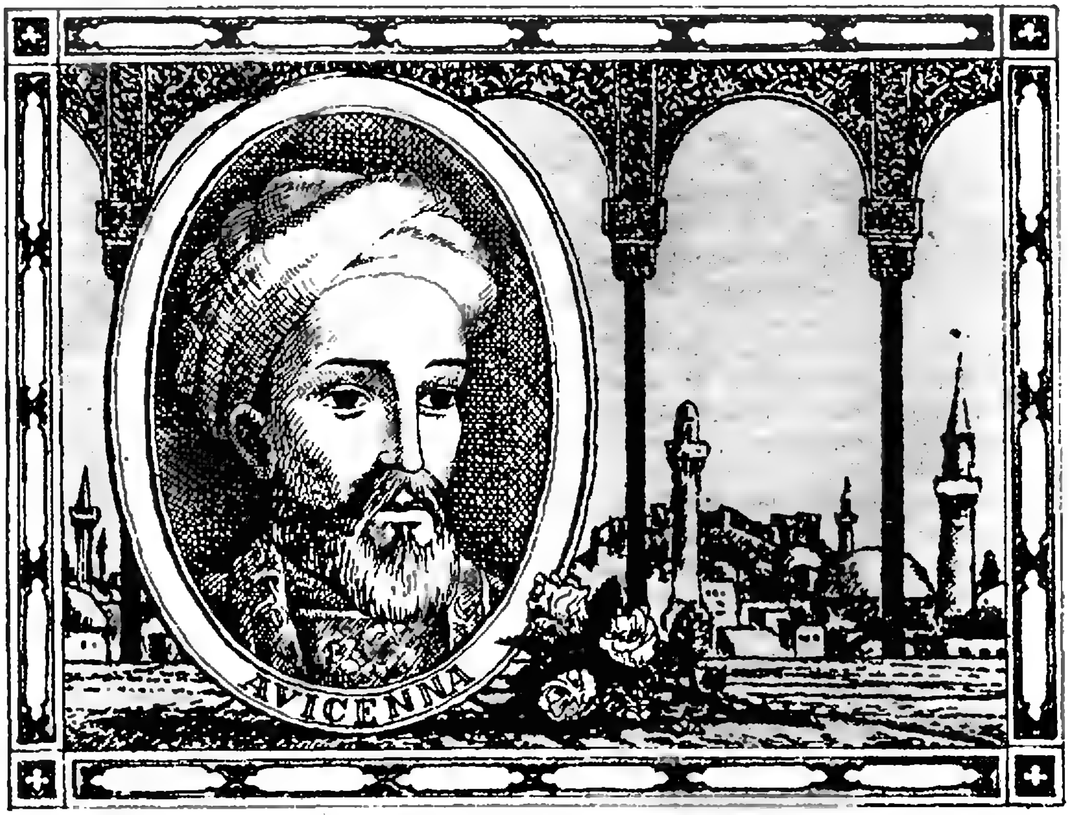
В 1913 году была совершена вторая революция в физике. Она ознаменовалась выходом в свет работы датского физика Нильса Бора (1885—1962), которая положила начало квантовой теории строения атома. Автору этой работы было всего 28 лет.

Замечательный ученый, физик и механик, Александр Александрович Фридман (1888—1925) прожил всего 36 лет. Но за свою короткую жизнь он успел сделать ряд выдающихся открытий, оказавших существенное влияние на дальнейшее развитие науки. Ему принадлежит честь доказательства (на основании общей теории относительности) расширения Вселенной, которое в дальнейшем было подтверждено экспериментом. Он создал новую область механики, называемую сейчас газодинамикой. Он же положил начало современной динамической теории метеорологии.

Ряд выдающихся физиков нашей страны, начавших свою научную деятельность после Великой Октябрьской революции, таких как Игорь Васильевич Курчатов, Лев Давидович Ландау и многие другие, приобрели мировую известность благодаря своим научным работам, проведенным в молодые годы.

Из всего сказанного ясно, что человек, решивший посвятить себя научной работе, должен начинать ее как можно раньше — еще в студенческие, а лучше даже в школьные годы. Советское государство предоставляет для этого молодежи богатейшие возможности: она может участвовать в научных кружках и научных обществах; для нее издается ряд научно-популярных журналов, таких, например, как «Квант». Но надо ясно понимать, что крупный научный результат — это плод напряженного труда и исключительной целеустремленности научного работника.

Автор этих строк, признавая большую роль молодых научных работников в развитии науки, ни в коей мере не собирается умалять роль научных работников старшего поколения, которые в свое время вошли в науку, будучи молодыми. Именно у них сосредоточены богатейший научный опыт и обширные знания, которые они передают своим ученикам — молодым научным работникам. Крупный ученый подбирает себе достойных учеников и сам учится у них. Плох тот молодой научный работник, который не может ничему научить своего учителя, не может доставить ему радость гордиться его успехами.



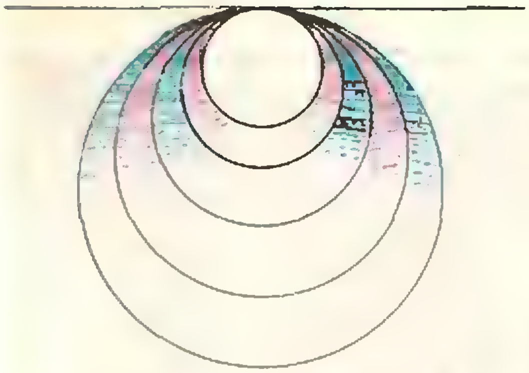
З. Усманов, Н. Ходжиев

Математика в трудах великого медика

Абу Али ибн Сина (980—1037), известный всему миру под именем Авиценна, внес фундаментальный вклад в самые различные области человеческого знания. Его обширное наследие дошло до нас не полностью, а то, что дошло, еще изучено недостаточно. Общее число дошедших до нас трудов Авиценны оценивается специалистами от 100 до 500; среди них исследования по медицине, биологии, философии, логике, языкознанию, музыке, геологии, химии, физике, астрономии, механике.

Часть наследия Ибн Сины посвящена математике. Например, в своем энциклопедическом труде «Книга исцеления» и в комментариях к «Логике» и «Алмагесту» Птолемея «он дал, — пишет его ученик и первый биограф Джузджани, — сокращенное изложение [«Начал геометрии»] Евклида, арифметики и музыки и включил дополнения в каждую книгу по математическим наукам, так как нашел, что в дополнениях имеется настоятельная необходимость. Что касается «Алмагеста», то он включил [в него] десять геометрических предложений о параллаксе и добавил в конце «Алмагеста» такие вещи по астрономии, каких [до него] не существовало. Он добавил также к Евклиду некоторые теоремы, к арифметике [ряд интересных] тонкостей, а в музыке [затронул] вопросы, о которых не ведали [его] предшественники».

В его труде «Книга знания» также есть две математические главы — они посвящены геометрии и арифметике. По замыслу Ибн Сины эти главы должны были предшествовать соответственно главам «Астрономия» и «Музыка» и предназначаться для



их лучшего понимания. К сожалению, оригинальный текст был утерян. Впоследствии его восстановил Джузджани.

Геометрическая глава содержит изложение «Начал» Евклида с подробными доказательствами, нередко не совпадающими с доказательствами Евклида. Ибн Сина приводит даже доказательство V постулата Евклида (аксиомы параллельных), основанное на предположении о существовании равноотстоящих прямых (равносильном доказываемому постулату!).

В геометрической части «Книги исцеления» Ибн Сина дополняет аксиомы и постулаты Евклида аксиомами существования точки, линии и поверхности и аксиомой возможности выбора точки на линии или на поверхности. Ибн Сина систематически применяет к геометрическим величинам арифметическую терминологию, например говорит об умножении линий, что никогда не делали древние греки; терминология Ибн Сины сыграла существенную роль в расширении понятия числа (под которыми в древности понимали только натуральные числа) до того, что мы называем положительным действительным числом.

Сохранился очень интересный трактат Ибн Сины «Об исследовании угла», где он рассматривает так называемые «роговидные углы» — углы между двумя касающимися линиями (см. рисунок) — и показывает, что эти углы не удовлетворяют так называемой аксиоме Архимеда*), и так как Ибн Сина считал, что величины обязательно должны удовлетворять этой аксиоме, он приходит к выводу, что роговидные углы не являются величинами.

Как мы видим, Ибн Сина, в основном, интересуется проблемами математики, граничащими с логикой, большим знатаком которой он был (в ряде сочинений Ибн Сина развил логическое учение Аристотеля).

Приведем еще примеры арифметических результатов Ибн Сины, содержащихся в «Книге исцеления»:

1. Если дано число, которое, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1. Если число, деленное на 9, дает в остатке 2 или 7, то квадрат этого числа, разделенный на 9, дает в остатке 4. Если число, деленное на 9, дает в остатке 4 или 5, то его квадрат, деленный на 9, дает в остатке 7. Наконец, если число, деленное на 9, дает в остатке 3, 6 или 0, то его квадрат, разделенный на 9, дает в остатке 0.

2. Если число, деленное на 9, дает в остатке 1, 4 или 7, то его куб, деленный на 9, дает в остатке 1. Если число, деленное на 9, дает в остатке 2, 5 или 8, то его куб, деленный на 9, дает в остатке 8. И если число, деленное на 9, дает в остатке 3, 6 или 0, то его куб, деленный на 9, дает в остатке 0.

3. Если последовательные нечетные числа поместить в квадратной таблице, то сумма чисел, находящихся на каждой из диагоналей, будет равна кубу (размерности) стороны; сумма чисел, заполняющих квадрат, равна квадрато-квадрату (размерности) стороны квадрата.

Например, для квадратной таблицы размером 4×4 получаем

$$1+11+21+31 = 7+13+19+25=4^3 \text{ и } 1+3+5+\ldots+29+31=4^4.$$

Математика затрагивается и в переписке Ибн Сины с его современником, великим среднеазиатским ученым Абу Райханом Беруни.

Даже такое беглое знакомство с математическим наследием Авиценны дает яркое представление о выдающемся энциклопедисте раннего средневековья.

---

*) *Если на прямой даны два отрезка A и B, то можно A повторить слагаемым столько раз, чтобы сумма была больше B.*

$$\underbrace{A+A+\ldots+A}_{n\text{ раз}}=A\cdot n>B.$$

Если перефразировать это утверждение для положительных чисел a и b, то оно сведется к существованию такого натурального числа n, что $na>b$.

Разумеется, эта аксиома (как и любая другая) имеет смысл и становится вполне понятной только тогда, когда она рассматривается в составе некоторой системы аксиом (*прим. ред.*).

А. Варламов, А. Шапиро

Метод виртуальных перемещений

(об одном следствии закона сохранения энергии)

В 1717 году Иоганн Бернулли ввел новый метод решения статических задач — метод виртуальных перемещений. Метод этот прост и изящен, он позволяет рассчитывать условия равновесия сложных механических систем, не прибегая к громоздким выкладкам; с его помощью можно решать и гидростатические задачи, и задачи электростатики. В основе его лежит вытекающее из закона сохранения энергии свойство сил реакции связей: при малом отклонении системы от положения равновесия полная работа сил реакции связей равна нулю.

В этой статье на примере конкретных задач мы постараемся показать читателю, к каким красивым результатам приводит это следствие закона сохранения энергии.

Задача 1

Электрический заряд Q равномерно распределен по тонкой абсолютно жесткой металлической сфере радиуса R. Какая сила F действует на единицу площади поверхности со стороны остального заряда?

По условию сфера предполагается совершенно жесткой, поэтому ее реальный радиус R изменяться не может. Однако представим себе, что в результате отталкивания одноименных электрических зарядов радиус сферы чуть-чуть увеличился — на бесконечно малую величину δR. Иными словами, представим себе, что каждая точка сферы совершила бесконечно малое перемещение δR в направлении, перпендикулярном поверхности. Подчеркнем, что изменение радиуса δR — чисто воображаемое; однако с помощью этого воображаемого, мысленного перемещения точек сферы нам удастся решить задачу очень просто, и при этом δR, разумеется, в ответ не войдет.

Что произойдет при увеличении радиуса сферы на δR? Заряженная сфера обладает свойством конденсатора — она сохраняет сообщенный ей заряд. Потенциал поверхности сферы связан с зарядом сферы соотношением $\varphi = Q/4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$. С другой стороны, согласно определению емкости $\varphi = Q/C$. Поэтому емкость заряженной сферы равна $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$. Энергия такого конденсатора $W = Q^2/2C = Q^2/8\pi\varepsilon_0\varepsilon R$. При увеличении радиуса сферы энергия уменьшается: $W' = Q^2/8\pi\varepsilon_0\varepsilon(R+\delta R)$.

Таким образом, энергия сферы-конденсатора в результате увеличения радиуса сферы на величину δR уменьшается на величину

$$\Delta W = W - W' = \frac{Q^2 \cdot \delta R}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R(R+\delta R)}.$$

Согласно закону сохранения энергии это изменение энергии равно суммарной работе A сил электростатического отталкивания, действующих между отдельными элементами заряженной поверхности. Если F — сила, действующая на единицу площади сферы, то $A = 4\pi R^2 F \cdot \delta R$. Следовательно,

$$4\pi R^2 F \cdot \delta R = \frac{Q^2 \cdot \delta R}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R(R+\delta R)}.$$

Учитывая, что $\delta R \ll R$, из этого равенства находим

$$F = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon R^4}.$$

* * *

Использованная в процессе решения задачи идея совершения бесконечно малого мысленного перемещения, которое называют виртуальным, и лежит в основе метода виртуальных перемещений.

Обычно условия равновесия системы в статике записывают как равенства нулю суммы всех сил и суммы моментов всех сил, приложенных к каждой точке системы. При этом существующие в системе связи (опоры, стержни, нити и т. д.) характеризуются возникающими в них силами реакции. Необходимость учета сил реакции при написании условий равновесия в случае систем, состоящих из нескольких тел, приводит к громоздким расчетам. Однако имеется возможность избежать рассмотрения этих сил вообще.

Важным свойством сил реакции является тот факт, что их полная работа при малом отклонении системы от положения равновесия равна нулю. Это свойство сил реакции связано с законом сохранения энергии: так как поддержание связей в положении равновесия не требует расхода энергии (силы реакции приложены, однако нет смещения точек системы), то в результате действия связей не возникает выигрыша или затраты работы. Таким образом, мы приходим к утверждению, что при любом возможном малом отклонении системы от равновесия полная работа сил реакции равна нулю.

Но кроме сил реакции на точки системы действуют и внешние силы. Какова же их работа при том же малом перемещении из положения равновесия? Так как система первоначально покоится, то для любого перемещения системы необходимо совершить некоторую положительную работу. В принципе эту работу могут совершать внешние силы и силы реакции связей. Но, как мы уже знаем, полная работа всех сил реакции равна нулю. Поэтому, для того чтобы система вышла из состояния равновесия, суммарная работа внешних сил при любом возможном перемещении должна быть положительной. Следовательно, условие *невозможности* движения, то есть условие равновесия, мы можем сформулировать как требование неположительности полной работы внешних сил при любом возможном виртуальном перемещении: $\Delta A \leqslant 0$.

Допустим, что при перемещениях $\overrightarrow{\Delta r}_1$, $\overrightarrow{\Delta r}_2$, ..., $\overrightarrow{\Delta r}_N$ сумма работ внешних сил оказалась равной ΔA_1 А что произойдет, если система совершит перемещения $-\overrightarrow{\Delta r}_1$, $-\overrightarrow{\Delta r}_2$, ..., $-\overrightarrow{\Delta r}_N$? Эти перемещения так же возможны, как и первые; однако работа внешних сил теперь изменит знак: $\Delta A_2 = -\Delta A_1$. (В задаче со сферой такая процедура соответствовала бы не растяжению, а сжатию сферы.) Рассуждая аналогично предыдущему случаю, мы придем к выводу, что теперь условие равновесия имеет вид $\Delta A_1 \geqslant 0$, то есть работа внешних сил должна быть неотрицательной. Единственная возможность «примирить» два этих почти противоречивых условия — потребовать точного равенства нулю полной работы внешних сил при любом возможном виртуальном перемещении системы из положения равновесия: $\Delta A = 0$.

В таком виде мы и будем использовать принцип виртуальных перемещений при дальнейшем решении задач. Его обычно формулируют следующим образом:

> для равновесия любой механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элемантарных работ действующих на систему сил при любом возможном виртуальном перемещении была равна нулю.

Значение принципа виртуальных перемещений заключается, прежде всего, в том, что для нахождения условий равновесия с помощью этого принципа нет необходимости рассматривать большое число сил реакции связей, обеспечивающих равновесие сложных систем. Нет необходимости вникать в механизм осуществления этих связей вообще. Достаточно выбрать необходимые перемещения, которые допускают наложенные связи, вычислить соответствующую им полную работу внешних сил и приравнять ее нулю.

Частным случаем принципа виртуальных перемещений является зо-

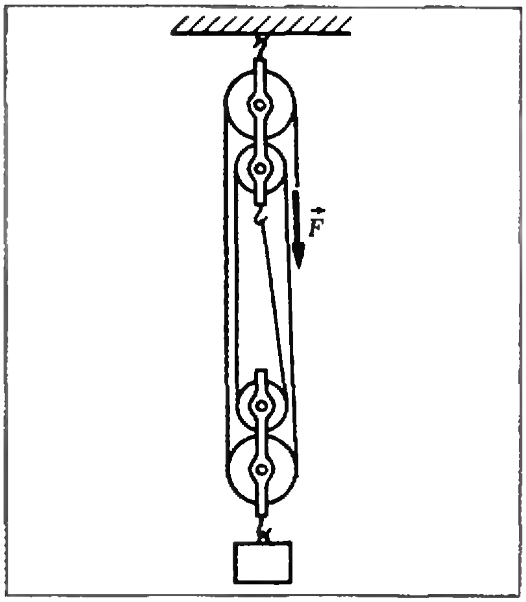


Рис. 1.

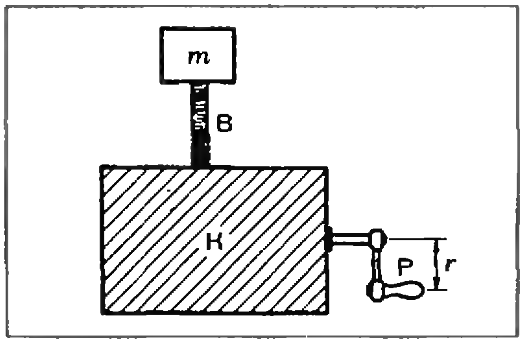


Рис. 2.

лотое правило механики: «Ни один простой механизм выигрыша в работе не дает. Во сколько раз мы выигрываем в силе, во столько раз мы проигрываем в расстоянии».

Рассмотрим некоторые примеры использования метода виртуальных перемещений при решении задач.

Задача 2

В системе, изображенной на рисунке 1, к нижнему блоку подвешен груз массы m. Какую силу F надо приложить к свободному концу нити, чтобы удерживать систему в равновесии? Размеры блоков подобраны таким образом, что все участки нити между блоками можно считать параллельными друг другу. Нить нерастяжима, блоки невесомы.

Представим себе, что точка приложения силы $\vec{F}$ перемещается вертикально вниз на расстояние δH. При этом груз m переместится вверх на расстояние $\delta h = {}^1\!/_4\delta H$ (этот результат очевиден из рисунка 1). Согласно принципу виртуальных перемещений

$$|\vec{F}|\delta H = |\overrightarrow{mg}|\delta h = \\ = (4|\vec{F}| - |\overrightarrow{mg}|)\delta h = 0.$$

Отсюда

$$|\vec{F}| = |\overrightarrow{mg}|/4.$$

(При решении этой задачи мы не выписывали условий равенства сил в положении равновесия; это демонстрирует бесспорное преимущество метода виртуальных перемещений.)

Задача 3

В коробке К (рисунок 2) заключен передающий механизм неизвестной конструкции. При повороте ручки Р вертикальный винт В плавно поднимается. При одном полном обороте (радиус оборота r) винт перемещается вверх на расстояние h. На винт кладут груз массы m. Какое усилие надо приложить к ручке, чтобы удержать систему с грузом в равновесии?

Предположим, что система находится в равновесии, когда к ручке приложена сила, равная по абсолютной величине f.

Представим себе, что ручка совершает бесконечно малый поворот на угол $\delta\varphi$. Работа силы f равна

$$\delta A_1 = f\,\frac{2\pi r}{2\pi}\,\delta\varphi = fr\cdot\delta\varphi.$$

Груз m при этом поднимается на высоту $\delta h = \frac{h}{2\pi}\cdot\delta\varphi$. Сила тяжести mg совершает работу

$$\delta A_2 = -mg\,\frac{h\cdot\delta\varphi}{2\pi}.$$

Согласно принципу виртуальных перемещений

$$\delta A_1 + \delta A_2 = fr\cdot\delta\varphi - mg\,\frac{h\cdot\delta\varphi}{2\pi} = \\ = \left(fr - mg\,\frac{h}{2\pi}\right)\delta\varphi = 0,$$

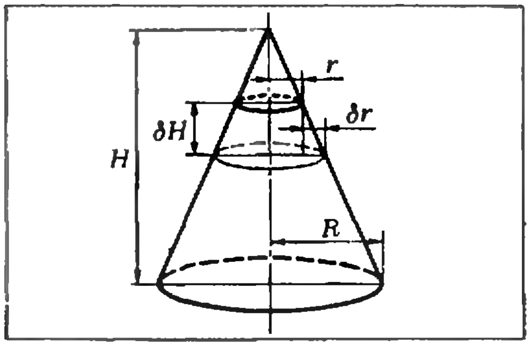


Рис. 3.

откуда находим f:

$$f=mg\frac{h}{2\pi r}.$$

(Обычными статическими методами задача в рассмотренной постановке не может быть решена вообще, так как ничего не известно о скрытом в коробке механизме передачи.)

Задача 4

Петля из гибкой тяжелой цепи массы m надета на гладкий прямой круговой конус, высота которого H, а радиус основания R (рисунок 3). Цепь покоится в горизонтальной плоскости. Найти натяжение цепи T.

Пусть радиус круга, образованного цепью, равен r. Совершим виртуальное перемещение цепи как целого вертикально вниз на расстояние δH. Уменьшение потенциальной энергии цепи при этом равно $mg\delta H$. Радиус же цепи при таком перемещении увеличился на δr. Увеличение радиуса цепи и ее смещение связаны соотношением $\delta r/\delta H=R/H$.

Работа сил натяжения T при рассматриваемом виртуальном перемещении цепи (виртуальная работа) равна

$$\delta A_1=(2\pi(r+\delta r)-2\pi r)T=2\pi\cdot\delta rT.$$

Виртуальная работа силы тяжести равна

$$\delta A_2=-mg\cdot\delta H.$$

Из условия

$$\delta A_1+\delta A_2=2\pi\cdot\delta r\cdot T-mg\cdot\delta H=0$$

находим

$$T=\frac{mg}{2\pi}\frac{\delta H}{\delta r}=\frac{mgH}{2\pi R}.$$

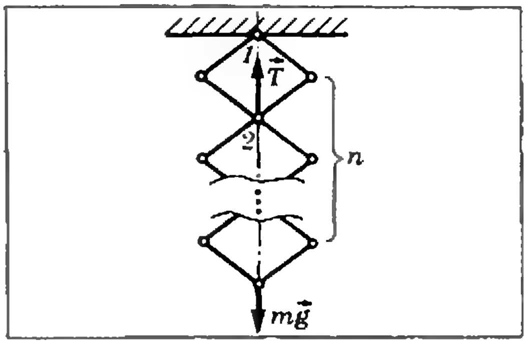


Рис. 4.

Задача 5

Имеется цепочка, содержащая n одинаковых невесомых звеньев, скрепленных шарнирно (рисунок 4). Пренебрегая трением, определить, какое натяжение должна выдерживать нить, соединяющая точки 1 и 2, если к цепочке подвешен груз массы m.

Представим себе, что груз m опустился на расстояние δh. Из соображений симметрии понятно, что при этом большая диагональ каждого из звеньев удлинилась на $\delta h/n$. Следовательно, виртуальное удлинение нити между точками 1 и 2, равное виртуальному перемещению точки 2, также равно $\delta h/n$.

Запишем условие равенства нулю виртуальной работы:

$$T\cdot\delta h/n-mg\cdot\delta h=0$$

(T — сила натяжения нити). Отсюда

$$T=nmg.$$

* * *

В рассмотренных выше примерах мы использовали метод виртуальных перемещений для решения задач механики. Однако, как мы уже говорили, поле применимости этого метода гораздо шире. Например, формула избыточного давления внутри сферического пузыря — $p=\frac{4\sigma}{r}$ — может быть легко выведе-

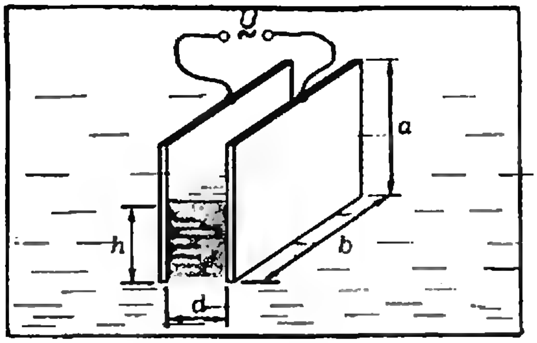


Рис. 5.

на с использованием метода виртуальных перемещений.

Пусть мыльный пузырь, радиуса r находится в равновесии. Дадим его радиусу виртуальное приращение δr. Тогда виртуальная работа сил избыточного давления равна $\delta A_1 = F_{\text{изб}} \cdot \delta r = 4\pi r^2 p_{\text{изб}} \delta r$ (сила $F_{\text{изб}}$ избыточного давления направлена по нормали к поверхности пузыря). Виртуальная работа сил поверхностного натяжения равна изменению поверхностной энергии:

$$\delta A_2 = 2\sigma \cdot 4\pi (r^2 - (r+\delta r)^2) = -16\pi\sigma r \delta r$$

(у мыльного пузыря две поверхности).

Согласно принципу виртуальных перемещений

$$\delta A_1 + \delta A_2 = 4\pi r^2 p_{\text{изб}} \delta r - 16\pi\sigma r \delta r = 0.$$

Отсюда

$$p_{\text{изб}} = \frac{4\sigma}{r}.$$

Задача 6

Воспользуемся методом виртуальных перемещений для решения задачи по электростатике.

Жидкость с диэлектрической проницаемостью ε *налита в большой сосуд. Две вертикально расположенные параллельные пластины касаются поверхности жидкости (рисунок 5). Расстояние между пластинами* d. *Пластины подключают к источнику с разностью потенциалов* U. *Какова будет высота* h *столба жидкости между пластинами после установления равновесия?*

Рассмотрим систему в положении равновесия. Пусть размер пластины $a \times b$. Совершим виртуальное изменение высоты столба жидкости на δh. Тогда работа силы тяжести $\delta A_1 = -mg \cdot \delta h/2 = -\rho g h d b \cdot \delta h/2$. (Изменением массы столба жидкости из-за «втягивания» жидкости из сосуда в пространство между пластинами мы пренебрегаем, поскольку соответствующая работа силы тяжести по поднятию этой массы на высоту δh пропорциональна $(\delta h)^2$.)

Работа сил электрического поля равна изменению энергии конденсатора, образованного пластинами, при виртуальном изменении высоты столба жидкости на δh:

$$\delta A_2 = \delta E = \delta \frac{CU^2}{2} = \frac{U^2}{2} \cdot \delta C$$

(так как $U = \text{const.}$).

Рассматривая заполненную и незаполненную части конденсатора как два параллельно соединенных конденсатора, для полной емкости получим выражение

$$C = \frac{S_1}{4\pi d} + \frac{\varepsilon S_2}{4\pi d} = \frac{(a-h)b}{4\pi d} + \frac{\varepsilon h b}{4\pi d} = \frac{ab}{4\pi d} + \frac{(\varepsilon-1)hb}{4\pi d}.$$

Следовательно,

$$\delta C = \frac{(\varepsilon-1)b \cdot \delta h}{4\pi d}.$$

Таким образом,

$$\delta A_2 = \frac{U^2(\varepsilon-1)b \cdot \delta h}{8\pi d}.$$

Принцип виртуальных перемещений дает

$$\frac{U^2(\varepsilon-1)b \cdot \delta h}{8\pi d} - \rho g h b d \frac{\delta h}{2} = 0.$$

Отсюда

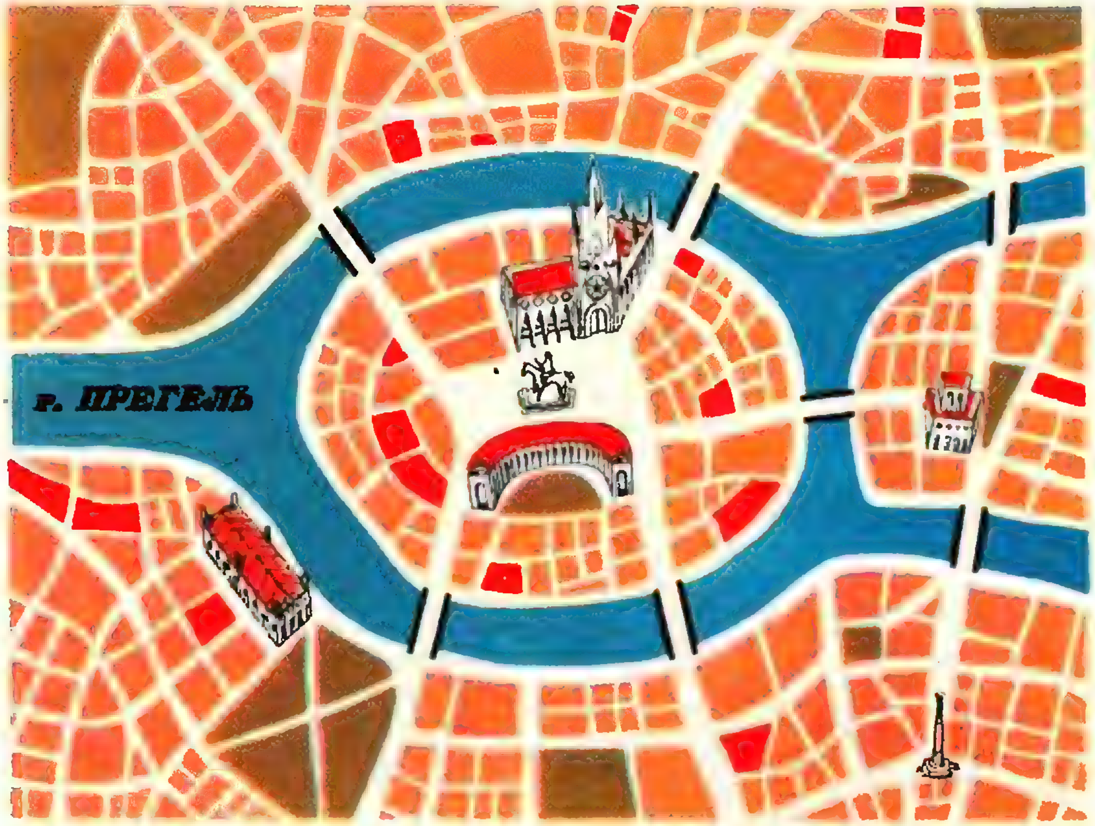
$$h = \frac{U^2(\varepsilon-1)}{4\pi\rho g d^2}.$$

*

* *

В заключение, чтобы вы могли проверить, насколько хорошо вами освоен метод виртуальных перемещений, мы предлагаем вам решить две задачи:

(Окончание см. на с. 26)



Е. Глушанков,
П. Певзнер

Переключательная игра Шеннона

Нельзя ли без полного перебора?

Стремительное развитие в XX веке производства, экономики и транспорта поставило перед математикой новые проблемы. Как управлять современным предприятием, как спланировать большой комплекс работ, как составить удобное расписание движения поездов — со всеми этими вопросами инженеры стали обращаться к математикам. Однако методы классической математики, предназначенные, в основном, для решения задач физики и механики, не могли дать ответа на такие вопросы. Это привело к появлению новых математических дисциплин — теории игр, теории графов, теории кодирования и многих других, объединяемых сейчас названием «дискретная математика».

Первая работа по дискретной математике (она принадлежит Леонарду Эйлеру), появившаяся еще в 1736 году, была посвящена известной головоломке о кенигсбергских мостах: можно ли совершить прогулку по Кенигсбергу (план города изображен на рисунке) таким образом, чтобы выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту ровно один раз? Долгое время дискретная математика занималась почти исключительно головоломками, и поэтому находилась у серьезных математиков на положении Золушки. Однако уже в XIX веке дискретные методы применялись при изучении электрических цепей и молекулярных схем в химии.

Настоящий расцвет дискретной математики наблюдается в последние два—три десятилетия. Физика, химия, программирование, экономика, генетика, социология, лингвистика, антропология — это лишь часть длинного списка наук, в которых применяются методы дискретной математики.

В последнее время всеобщее внимание привлекли некоторые классические задачи дискретной математики, которые вот уже более ста лет ждут своего решения. Все эти задачи характеризуются тем, что если дан «кандидат в ответы», то очень легко проверить, действительно ли он является ответом, но очень трудно такой ответ найти; фактически приходится перебирать по очереди все возможные варианты.

С одной такой задачей занимающиеся математикой сталкиваются едва ли не каждый день. Это задача поиска доказательства данной теоремы. В самом деле, если доказательство дано, то проверить его правильность в принципе не трудно. Нужно лишь убедиться в том, что каждый шаг сделан в соответствии с правилами логики, и промежуточные утверждения следуют из аксиом и известных теорем. Но как это доказательство найти? Неужели перебирать все возможные рассуждения, начиная с аксиом? Если бы кто-нибудь мог объяснить, как он «догадывается», решая задачи, может быть, это помогло бы математикам научить машину делать то же самое.

А вот более простой пример: *задача о разбиении*. Пусть $A = \{s_1, \ldots, s_N\}$ — конечное множество, содержащее натуральные числа. Требуется разбить множество A на два подмножества I и J ($I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = A$) так, чтобы сумма элементов из I равнялась сумме элементов из J. Как и в предыдущем примере, для данного разбиения множества A на множества I и J очень легко проверить, равны ли соответствующие суммы. Но как найти искомое разбиение? К сожалению, наука не может пока предложить ничего существенно лучшего, чем перебор всех 2^N вариантов. Но уже при $N = 100$ современной вычислительной машине понадобятся миллиарды лет для проведения такого перебора.

В настоящее время распространено мнение, что для некоторых задач (например, задачи о разбиении) ничего существенно лучшего, чем полный перебор, предложить невозможно. Именно поэтому каждый пример эффективного алгоритма в той ситуации, где раньше приходилось довольствоваться перебором, представляет большой интерес для науки, даже если сама ситуация «игрушечная». Об одном таком примере и пойдет речь в этой статье.

В начале 50-х годов выдающийся американский математик и инженер, создатель теории информации Клод Шеннон предложил схему перебора вариантов для шахматной программы. Почти все современные шахматные программы являются, по существу, различными реализациями этой схемы. Однако число вариантов, перебираемых программами, играющими по алгоритму Шеннона, оказалось столь велико, что ни памяти, ни быстродействия современных ЭВМ недостаточно для их реализации.

Шеннон пытался применить свои методы к некоторым другим играм. Он рассмотрел игру на графах, которая называется теперь *переключательной игрой Шеннона* (сокращенно — ПИШ).

В настоящее время предложено несколько подходов к программированию игр. О методе, основанном на переборе с отсечением бесперспективных (с некоторой точки зрения) вариантов, «Квант» уже писал*). Другой метод (на его основе в середине 60-х годов А. Леман предложил «идеального игрока» в ПИШ), связанный с полным отказом от перебора вариантов, опирается на некоторые новые результаты дискретной математики.

О том, как можно играть в ПИШ, не перебирая вариантов, мы и расскажем ниже.

Бридж-ит

В конце 50-х годов американец Гейл придумал игру Бридж-ит. Стандартное поле для игры Бридж-ит показано на рисунке 1. Один игрок соединяет синим карандашом синие точки, другой — красным карандашом красные. «Ходят» (то есть проводят отрезки) игроки по очереди. Выигрывает тот, кто первым построит ломаную, соединяющую две противоположные стороны своего цвета (на рисунке 2 партия закончилась победой красных).

---

*) Р. С. Гутер, М. В. Донской. *Машина играет в шахматы* («Квант», 1974 № 11).

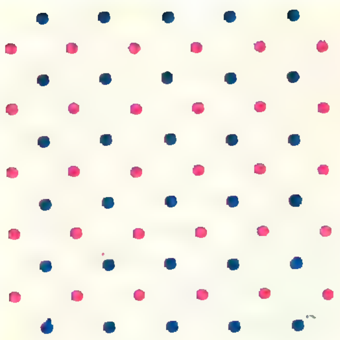


Рис. 1.

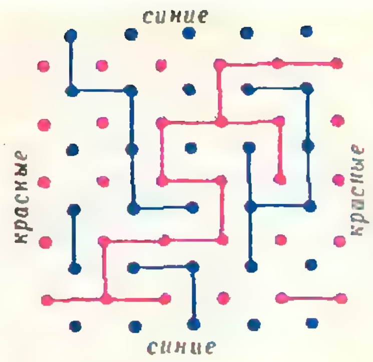


Рис. 2.

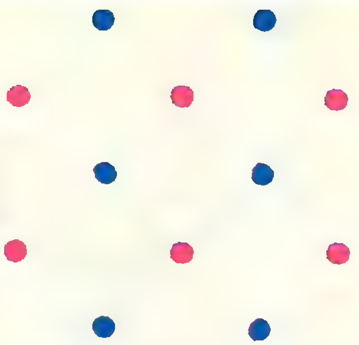


Рис. 3.

Попробуйте, поиграв в бридж-ит на маленьких полях (рис. 3), понять, у какого игрока — преимущество в этой игре, а затем попытайтесь разработать выигрышную стратегию для этого игрока.

Задача 1. Докажите, что в игре Бридж-ит «ничьих» не бывает.

Если в игре не бывает «ничьих», то один из игроков имеет выигрышную стратегию. Действительно, пусть, например, игрок A не имеет выигрышной стратегии, то есть на любой его ход у игрока B существует такой ответ, что игра не кончится победой A. Поскольку предположено, что в рассматриваемой игре нет «ничьих» партия кончится победой игрока B, то есть у B есть такая последовательность ходов, что, как бы ни играл A, все равно выиграет B. Таким образом, у игрока B существует выигрышная стратегия.

Только что приведенное рассуждение есть чистое доказательство существования: доказывается, что стратегия есть, но как ее найти — ни слова. А ведь это и есть самый интересный вопрос.

ПИШ

Чтобы описать выигрышную стратегию для игры Бридж-ит, перейдем от бридж-ит к ПИШ. Для этого изменим немного правила игры. На рисунке 4 все возможные ходы «синего» игрока отмечены синими отрезками, а «красного» игрока — красными. Мы будем называть такие рисунки «графами возможных ходов». Если вы уже поиграли в бридж-ит, то наверное поняли, что игрокам бессмысленно проводить отрезки, обозначенные на рисунке 4 пунктиром. Поэтому давайте вообще не будем их рассматривать и сделаем следующее: стянем все верхние точки в одну и то же самое сделаем с левыми, правыми и нижними точками (рис. 5). Теперь цель «синего» игрока — соединить путем из синих ребер вершины s и t, а цель «красного» — соединить красным путем вершины s' и t'.

Заметьте, что каждый красный отрезок пересекает ровно один синий. Поэтому, если «красный» игрок делает ход, то это, по существу, означает, что он делает невозможным один (и только один) ход «синего» игрока, то есть «красный» игрок своим ходом как бы вычеркивает ребро синего графа. Но вместо того чтобы вычеркивать синее ребро, можно просто закрасить его красным цветом. Теперь мы можем вообще удалить красный граф из рисунка 5 и считать, что игра проходит так:

Два игрока по очереди красят ребра графа, у которого выделены вершины s и t: один — синим цветом, другой — красным (рис. 6). Цель «синего» игрока — соединить выделенные вершины путем[*] из синих ребер, а цель «красного» игрока — помешать ему (что это значит, мы уточним позднее).

---

[*] Напомним, что *графом* называется конечное множество точек (*вершин* графа) и соединяющих их отрезков (*ребер* графа). *Путь* — это линия на графе, не проходящая ни по какому ребру более одного раза.

Это и есть *переключательная игра Шеннона ПИШ)*. Только Шеннон предложил ее в более общей постановке: во-первых, играть можно на любом графе и, во-вторых, на данном графе можно выделить любую пару вершин.

Каждый граф с двумя выделенными вершинами задает некоторый *вариант* ПИШ. Первый ход в каждом варианте может делать любой игрок — как «синий», так и «красный». Поскольку «синий» игрок соединяет вершины, его уместно назвать *Соединяющим* или *С-игроком*. А красного игрока мы назовем *Режущим* или *Р-игроком*.

Совершенно очевидно, что «ничьих» в ПИШ не бывает — С либо соединит выделенные вершины, либо нет. Поэтому один из игроков в ПИШ имеет выигрышную стратегию. Но какой? Как найти эту стратегию?

Классификация вариантов ПИШ

Заметим, что *если игрок, играющий вторым, имеет выигрышную стратегию, то он имеет ее и в том случае, когда играет первым*. Действительно, играя первым, он закрасит своим цветом любое ребро, а потом будет отвечать на ходы противника так, как он делал бы это, играя вторым. Если на каком-то шаге надо будет покрасить ребро, которое он покрасил раньше, то он покрасит произвольное ребро. Так он и будет играть, имея одно «лишнее» ребро своего цвета, которое, конечно же, не может помешать ему выиграть.

Таким образом, с точки зрения возможности выиграть для каждого варианта ПИШ возможен один и только один из следующих трех случаев:

1. соединяющий имеет выигрышную стратегию, независимо от того, играет он первым или вторым;
2. режущий имеет выигрышную стратегию, независимо от того, играет он первым или вторым;
3. выигрышную стратегию имеет игрок, делающий первый ход.

Варианты ПИШ первой группы мы назовем *С-играми*, второй —

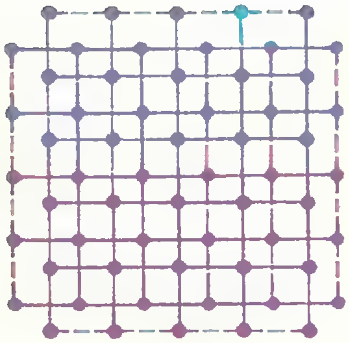


Рис. 4.

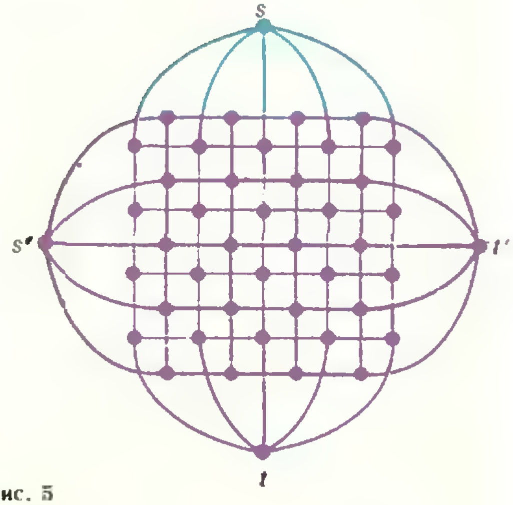


Рис. 5

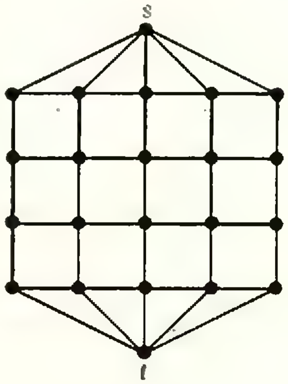
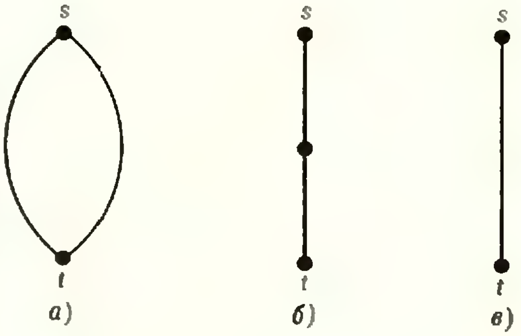


Рис. 6.



а)   б)   в)

Рис. 7.

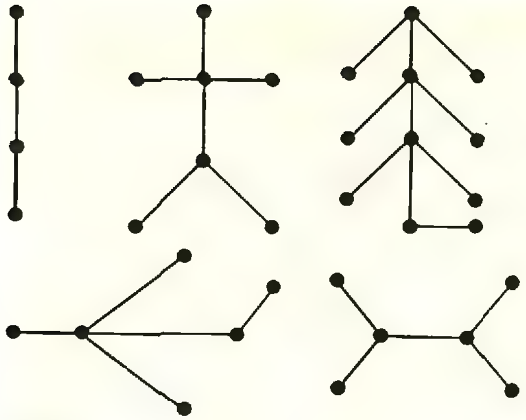


Рис. 8.

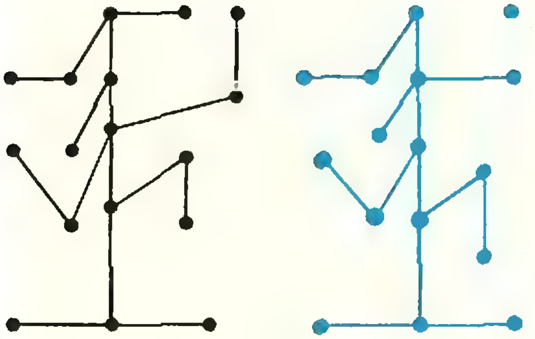


Рис. 9.

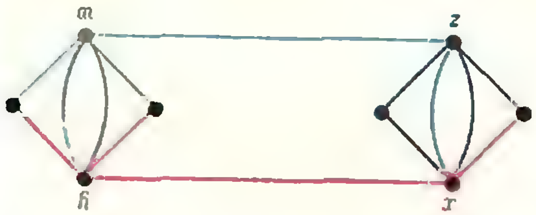


Рис. 10.

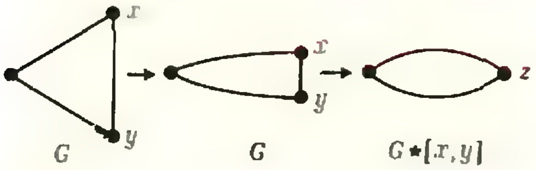


Рис. 11.

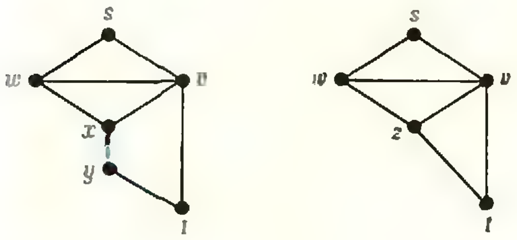


Рис. 12.

Р-играми, третьей — *Н-играми*. На рисунках 7, а)—в) изображены графы, дающие *С-игру*, *Р-игру* и *Н-игру* соответственно.

Задача 2. Докажите, что бридж-ит является *Н*-игрой.

Немного теории

Давайте на некоторое время отвлечемся от игр и дадим несколько определений из теории графов, которые понадобятся в дальнейшем*.

Граф G называется *связным*, если в нем между любыми двумя вершинами существует путь. Несвязный граф представляет собой набор нескольких связных графов, каждый из которых называется его *компонентой*. Путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают, называется *циклом*. Если в связном графе есть цикл, то при удалении любого ребра из цикла граф остается связным. Связный граф без циклов называется *деревом*. Примеры деревьев приведены на рисунке 8.

Легко видеть, что удаление любого ребра из дерева приводит к графу ровно с двумя компонентами, причем концы удаленного ребра лежат в разных компонентах (рис. 9). Ребро графа с концами x и y будем обозначать $\{x, y\}$. Ту компоненту, которая образуется при выбрасывании ребра $\{x, y\}$ из дерева A и содержит вершину x, обозначим через $A(x)$, а ту, которая содержит вершину y, — через $A(y)$.

Лемма о двух деревьях. *Пусть A и B — два дерева на одном и том же множестве вершин и $\{x, y\}$ — ребро дерева A. Тогда в дереве B существует ребро b, один конец которого лежит в $A(x)$, а другой — в $A(y)$* (рис. 10).

Новые правила игры

Чтобы научиться играть в ПИЩ, мы опять немного изменим поле и правила игры. Для этого введем понятие стягивания графа.

---

[*] Подробнее о графах рассказано, например, в книге Л. Ю. Березиной «Графы и их применение» (М., «Просвещение», 1979).

Давайте будем укорачивать ребро $[x, y]$ в графе G до тех пор, пока его концы не сольются в одну вершину z (рис. 11). Из вершины z выходят теперь все те ребра, которые раньше выходили из вершин x и y (кроме самого ребра $[x, y]$). Эта операция называется *стягиванием ребра $[x, y]$ в графе G*, а граф, получающийся в результате этой операции, называется *стягиванием графа G по ребру $[x, y]$* и обозначается $G * [x, y]$.

Понятно, что стягивание дерева по любому ребру — снова дерево.

Давайте теперь посмотрим на ПИШ как на преобразование графа.

Когда игрок P закрашивает какое-то ребро красным цветом, он, по существу, запрещает проведение синего пути через это ребро, то есть как бы удаляет ребро. Поэтому мы будем считать, что P во время своего хода не красит ребро, а удаляет его из графа. (Граф, получающийся в результате удаления ребра a из G, мы будем обозначать $G \setminus a$.)

А что делает игрок C? Закрашивая ребро синим цветом, он, по существу, стягивает это ребро (рис. 12)*).

Итак, мы играем в ПИШ следующим образом: *игрок P удаляет ребра, а игрок C стягивает; при этом C выигрывает, если на некотором шаге вершины s и t сливаются в одну, а P выигрывает, если на некотором шаге граф становится несвязным и вершины s и t оказываются в разных компонентах.*

Граф в процессе игры все время изменяется: после того, как P удалит из G ребро a, а C стянет ребро b, игра будет вестись на графе $(G \setminus a) * b$.

Теорема Лемана

Леман доказал, что *вариант ПИШ является C-игрой тогда и только тогда, когда в исходном графе имеются два дерева на одном и том же множестве вершин**), содержащие вершины s и t и не имеющие общих ребер.*

Мы докажем здесь только «половину» теоремы Лемана: если в исходном графе имеются нужные деревья, то C-игрок имеет выигрышную стратегию. (Доказательство второй «половины» мы не приводим, так как оно весьма сложно.) Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть в исходном графе G есть два дерева A и B, удовлетворяющие условию Лемана. Пусть игрок P удалил ребро $a \in A$. Тогда игрок C может стянуть некоторое ребро $b \in B$ так, что в новом графе $(G \setminus a) * b$ либо вершины s и t слились, либо вновь найдутся два дерева A^* и B^*, удовлетворяющие условию Лемана.*

Доказательство леммы. После удаления ребра $a = [x, y] \in A$ дерево A разбивается на две компоненты: $A(x)$ и $A(y)$. По лемме о двух деревьях в дереве B существует ребро b, один конец которого лежит в $A(x)$, а другой — в $A(y)$. Поскольку деревья A и B не имеют общих ребер, $a \neq b$. Именно это ребро b и должен стянуть игрок C.

Пусть в графе $(G \setminus a) * b$ вершины s и t не слились, то есть $b \neq [s, t]$. Найдем тогда деревья A^* и B^*. Дерево B^* находится совсем просто — это $B * b$. Дерево A^* получается следующим образом: рассмотрим дерево, которое образуют компоненты $A(x)$, $A(y)$ и ребро b. Стянем это дерево по ребру b — это и будет дерево A^*.

Так как дерево A^* составлено из ребер дерева A, дерево B^* — из ребер дерева B, деревья A^* и B^*, так же как A и B, не имеют общих ребер. Очевидно, деревья A^* и B^* не пересекаются по ребрам и имеют одно и то же множество вершин, причем вершины s и t ему принадлежат.

Лемма доказана.

---

*) Для удобства обозначений будем считать, что если стягивается ребро, имеющее одним концом s (или t), то вершина, которая образуется в результате этого, снова будет называться s (соответственно t).

*) Это множество вершин в общем случае не совпадает с множеством вершин исходного графа.

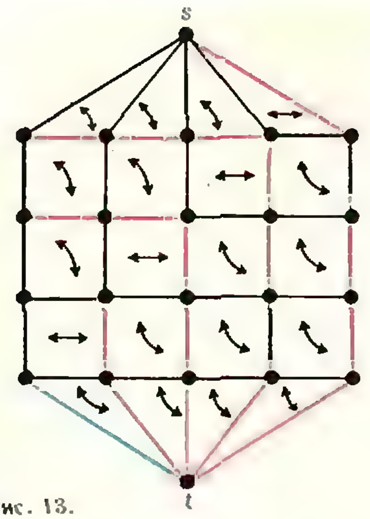


Рис. 13.

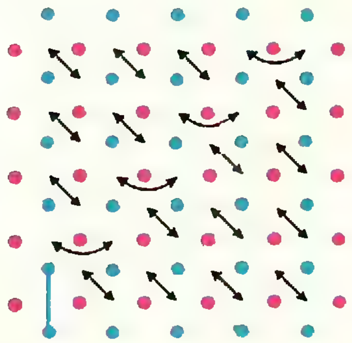


Рис. 14.

Эта лемма подсказывает стратегию для соединяющего игрока.

Цель игрока C — поддерживать в графе существование двух деревьев, удовлетворяющих условию Лемана (делая это, он обеспечивает существование двух путей между вершинами s и t, и игроку P никогда не удастся разъединить эти две вершины). И игрок C действительно может это сделать, если такие два дерева имелись в исходном графе. Если игрок P удаляет ребро a в одном из этих деревьев, то игрок C в ответ должен стянуть ребро из другого дерева, существующее по последней лемме. Если же игрок P удаляет ребро, которое не принадлежит ни одному из наших двух деревьев, то игрок C может стянуть ребро в одном из деревьев; ясно, что в новом графе по-прежнему найдутся два дерева Лемана (какие?).

После каждой пары ходов количество вершин в каждом из наших деревьев уменьшается на единицу, поэтому вершины s и t рано или поздно сольются и игрок C выиграет.

Мы научили вас играть в C-игру, используя два дерева Лемана. Но как находить эти деревья? Конечно, можно использовать полный перебор, однако это связано с огромными затратами времени даже на современных ЭВМ. Леману не удалось найти эффективного алгоритма для отыскания двух таких деревьев, поэтому некоторое время казалось, что теорема Лемана имеет лишь теоретический интерес. Только в начале 70-х годов Бруно и Вейнбергу удалось построить такой алгоритм.

На самом деле, Леман полностью решил переключательную игру Шеннона: он доказал также, что вариант ПИШ тогда и только тогда является P-игрой, когда в графе имеются два подграфа определенного вида. Если же вариант ПИШ является H-игрой, то после первого разумного хода мы получаем на новом графе вариант ПИШ, который является P-игрой или C-игрой — в зависимости от того, кто делал первый ход: P или C соответственно. Такой ход существует по определению H-игры. Найти этот ход в принципе можно перебором.

Стратегия для бридж-ит

Итак, мы рассказали, как играть в C-игры. Но ведь бридж-ит, согласно задаче 2, есть H-игра. Как же играть начинающему, чтобы выиграть?

Очевидно, что в игре бридж-ит начинающего можно считать C-игроком. Своим первым ходом он может стянуть, например, ребро, отмеченное на рисунке 13 зеленым цветом. В получающемся после этого хода графе имеются два дерева Лемана: они выделены на рисунке 13 красным и черным цветом. А затем игрок C может пользоваться описанной выше стратегией для C-игры. На рисунке 13 стрелочки расставлены таким образом, что если игрок P удаляет ребро, на которое указывает конец некоторой стрелочки, то игрок *C* в ответ должен стянуть ребро, на которое указывает другой конец этой же стрелочки (проверьте, что стрелочки расставлены в соответствии с доказанной леммой).

Задача 4. Укажите другие возможные «выигрышные» начальные ходы для игрока *C*.

Американский математик О. Гросс предложил ту же самую стратегию, что и на рисунке 13, задолго до Лемана, не сводя бридж-ит к ПИШ: По рецепту Гросса, для того чтобы выиграть, игрок *C* должен первым ходом провести отрезок, обозначенный на рисунке 14 синим цветом, а затем действовать так: если игрок *P* задевает своим ходом один конец некоторой стрелочки, то *C* ответным ходом должен задеть другой конец той же стрелочки.

А что дальше?

Научившись играть в ПИШ, Вы, возможно, уже задали себе вопрос: «А нельзя ли простые и эффективные дискретные методы, которые в случае с ПИШ привели к полному успеху, распространить на другие игры?» Попытки применить такие методы действительно были, однако они не дали результата даже для ближайшего «родственника» ПИШ — *вершинной переключательной игры Шеннона*. (Эта игра очень похожа на ПИШ, она также ведется на графе с двумя выделенными вершинами *s* и *t*, только красятся в ней не ребра, а вершины; при этом игрок *C* старается так покрасить вершины, чтобы от *s* к *t* можно было пройти путем, проходящим по вершинам своего цвета, а игрок *P* — помешать ему.) Более того, в 1976 году Ивен и Тарьян доказали, что найти выигрышную стратегию для вершинной переключательной игры Шеннона не менее просто, чем решить некоторые классические комбинаторные проблемы, для которых, как считают многие математики, вообще не существует эффективных алгоритмов решения. До окончательного решения подобных проблем еще далеко.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М581—М600 и Ф588—Ф602.

Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, успешно справились с задачами **М581, М582, М586—М590, М592**. Остальные задачи решили: *Э. Абдуллаев* (Масаллы) **91**; *А. Авербах* (Донецк) **85а), 91, 94**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **91, 99**; *М. Агиштейн* (Москва) **96, 98, 00**; *Р. Ардан* (Львов) **84**; *Л. Арушанов* (Баку) **85а), б), 96, 98**; *Г. Баламетова* (Кусары) **91**; *А. Балинский* (Львов) **84, 85а), б), 91, 94, 96—99**; *А. Барг* (Николаев) **91**; *Г. Барздинь* (Рига) **85а), б)**; *Д. Батуров* (Орел) **96**; *А. Белозеров* (Одесса) **85а), б), 91**; *А. Белокопытов* (Киев) **85а), б)**; *Ю. Белоцерковский* (Минск) **85б), 95, 99**; *А. Белюга* (Кривой Рог) **85а), б)**; *В. Бережной* (Киев) **91, 94—98, 00**; *С. Беспамятных* (Артемовский Свердловской обл.) **93—98, 00**; *А. Бишичаев* (Алма-Ата) **98**; *Н. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) **91**; *А. Боровских* (Воронеж) **98**; *А. Брагинский* (Волгодонск) **83, 85а), б), 91, 94, 95**; *Я. Брегман* (Киев) **85, 91, 94, 98—00**; *А. Бурин* (Москва) **83, 84, 85а), б), 91, 94, 95**; *Ю. Бушк* (Черемхово) **91**; *Э. Вайслеб* (Киев) **91**; *С. Василовский* (Ашхабад) **91, 95, 98—00**; *И. Владимиров* (Москва) **85, 91, 97—00**; *С. Волосивец* (Саратов) **91**; *А. Вольнов* (Киев) **91**; *М Гайсинский* (Ташкент) **85б), 91, 94**; *Д. Гешкенбейн* (Москва) **85**; *Л. Гитлин* (Витебск) **91, 94**; *Г. Гокадзе* (Кутаиси) **91**; *С. Горшков* (Москва) **98**; *Е. Горикова* (Пермь) **96**; *А. Градинер* (Баку) **91, 94**; *И. Деребас* (Магнитогорск) **98**; *Ш. Джафаров* (Кировабад) **91**; *Б. Добров* (Ангарск) **91**; *К. Дойков* (НРБ) **96—99**; *И. Драголов* (НРБ) **91, 94**; *О. Драч* (Кривой Рог) **85б)**; *Д. Дукиев* (с. Аркиван АзССР) **91**; *И. Елишевич* (Чернигов) **91**; *Т. Енчев* (НРБ) **96—99**; *А. Ермолик* (Петрозаводск) **84, 85, 91, 93—96, 98—00**; *А. Жилинский* (г. п. Крупки Минской обл.) **85, 94, 95**; *Е. Жиляев* (Москва) **85а), б)**; *А. Золотых* (Курск) **96, 98, 00**; *Ю. Иванов* (Воронеж) **99, 00**; *Ю. Ильясов* (Сиазань) **91, 00**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **85а), б), 91, 93, 94**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **91, 95, 00**; *П. Калугин* (Москва) **84**; *Р. Камалян* (Ереван) **91**; *А. Каплан* (Сумгаит) **84, 91, 93—00**; *А. Квариани* (Кутаиси) **91**; *А. Келарев* (Свердловск) **85а), б), 91, 94, 95**; *И. Колпаков* (Сочи) **97, 99, 00**; *О. Крижановский* (Харьков) **85, 97, 98**; *Е. Кузнецов* (Ижевск) **91, 98**; *С. Курчатов* (Саратов) **91, 94**; *Б. Лапидус* (Москва) **84**; *Б. Лейтес* (Москва) **84, 85а), б)**; *А. Липин* (Ленинград) **85а), 91, 96, 98, 99**; *Д. Лихачев* (Владивосток) **95**; *А. Мамедов* (с. Саатло ГССР) **91**; *Г. Маримон* (Могилев-Подольский) **91**; *А. Мегрецкий* (Ленинград) **84, 85, 91, 94, 95**; *В. Мельник* (Гайсин) **91**; *Л. Меркявичус* (Лентварис) **85а), б), 91**; *С. Мокроусов* (Ленинград) **84**; *С. Морейно* (Москва) **85а), б), 91, 95—00**; *Р. Набоков* (Саратов) **85**; *И. Нестеров* (Пскент) **85, 98**; *З. Нишниани* (Кутаиси) **91**; *С. Новаковский* (Саратов) **85, 91, 94, 96—00**; *В. Новохацкий* (Полтава) **91**; *П. Овчинников* (Вязники) **91, 00**; *М. Окроян* (Ереван) **91, 94**; *С. Осенний* (Киев) **84, 85а), б), 94**; *А. Павлычев* (Рига) **84, 91**; *Г. Перельман* (Ленинград) **85а), б), 91, 94, 96, 98—00**; *В. Пидстригач* (Львов) **84, 91, 93—96, 98—00**; *А. Поезд* (Москва)

(Продолжение см. на с. 33)

Е. Кузнецов, А. Рубенчик

О волнах на море и ряби на лужах

> *Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.*
>
> Козьма Прутков

Из всех многочисленных типов волн, изучаемых физиками, волны на воде наиболее доступны наблюдению. Понятия амплитуды, длины волны и т. п. для них наглядны, а возникающие при их распространении явления знакомы и интересны. В то же время многие закономерности их распространения такие же, как и для световых или звуковых волн, и потому, «бросая в воду камешки», можно понять многое.

Волны на воде — весьма широкий круг явлений. Это морской прибой и рябь на лужах, огромные штормовые валы и медленное поднятие воды во время приливов, корабельные волны и сокрушающие все на своем пути цунами.

Изучать волны на воде начали очень давно. Первая теория — теория приливов — восходит еще к Ньютону и является прямым приложением его теории всемирного тяготения. Далее в изучении явлений на воде были и периоды затишья, и свой «золотой век», связанный с именами Рэлея и Стокса. Но вот что удивительно — очень интересные результаты в этом классическом разделе науки были получены совсем недавно. С их помощью удалось объяснить эксперименты, проделанные еще в прошлом веке.

В этой статье мы хотели бы рассмотреть некоторые явления, возникающие на поверхности жидкости, в частности — воды. Может быть, после этого вы будете немного по-другому смотреть на круги, расходящиеся от брошенного камня.

О скорости волн

Прежде всего выясним, как меняется скорость распространения волн в зависимости от длины волны (или, как говорят физики, найдем закон дисперсии волн).

В состоянии равновесия поверхность жидкости обычно горизонтальна. Если вывести ее из этого состояния (например, бросить камень), появляется сила, стремящаяся вернуть поверхность жидкости в исходное состояние. Жидкость приходит в движение, но не останавливается на прежнем уровне, а по инерции проскакивает его. Возникающие колебания жидкости распространяются по ее поверхности — появляются волны.

Какая же сила стремится сделать поверхность жидкости плоской? Очевидно, что она складывается из силы тяжести и силы поверхностного натяжения. Но, оказывается, роль этих сил для разных волн различна. При длинных волнах преобладает сила тяжести, поэтому длинные волны называют *гравитационными*. В случае очень коротких волн доминирует сила поверхностного натяжения, и потому короткие волны называют *капиллярными*. Несколько позже мы поясним, что значит «длинные» и «очень короткие» волны. А пока рассмотрим по отдельности гравитационные и капиллярные волны и выясним, как зависит скорость распространения волны от ее длины. Воспользуемся методом размерностей.

В случае гравитационных волн их скорость может зависеть от длины волны, глубины жидкости, ее плотности и ускорения свободного падения. (На самом деле, скорость распространения волн зависит еще от плотности воздуха, притяжения Луны и многих других факторов. Но их влияние весьма мало и не существенно.) Другими словами, скорость волны v является функцией от длины волны λ, глубины жидкости H, плотности ρ и ускорения свободного падения g:

$$v=f(\lambda,\ H,\ \rho,\ g).$$

Из соображений размерностей следует, что плотность не должна входить в ответ, так как лишь она одна из всех пяти величин содержит размерность массы. Кроме того, размерности λ и H одинаковы, а размерность времени содержится только в ускорении свободного падения. Следовательно, скорость распространения волны можно записать в виде

$$v=\sqrt{gH}\,\varphi\left(\frac{\lambda}{H}\right) \qquad (1)$$

или

$$v=\sqrt{g\lambda}\,\psi\left(\frac{H}{\lambda}\right), \qquad (2)$$

поскольку λ и H равноправны и ничем не выделяются по отношению друг к другу.

Рассмотрим, например, выражение (1) и конкретизируем его в двух предельных случаях — когда длина волны мала и когда она велика по сравнению с глубиной. В первом случае говорят о коротких волнах, или о волнах на глубокой воде. Во втором — о длинных волнах, или о волнах на мелкой воде. Вот несколько примеров. Когда вы бросаете камень в реку, длина возникающих волн будет порядка размера камня, который мал по сравнению с глубиной реки. Следовательно, волны можно считать короткими. Рябь на глубоких лужах, штормовые волны — это тоже короткие волны, то есть волны на глубокой воде. С другой стороны, существуют волны, для которых и океан — мелкая вода. Например, длина приливных волн порядка размера земного шара, так что для них какие-то 11 км глубины Марианской впадины! Или другой пример — цунами, гигантские волны, возникающие при «моретрясениях».

В случае коротких волн жидкость движется лишь в поверхностном слое толщиной порядка длины волны, так что скорость волн не должна зависеть от глубины жидкости. Следовательно, $\varphi\left(\frac{\lambda}{H}\right)=\alpha\sqrt{\frac{\lambda}{H}}$ и

$$v_{\text{кор}}=\alpha\sqrt{g\lambda}. \qquad (3)$$

Точный расчет дает, что $\alpha=1/\sqrt{2\pi}$.

В противоположном случае — длинных волн — в движение вовлекается вся жидкость, вплоть до дна, поэтому скорость волн не должна зависеть от длины волны: $\psi\left(\frac{H}{\lambda}\right)=$ $=\beta\sqrt{\frac{H}{\lambda}}$ и

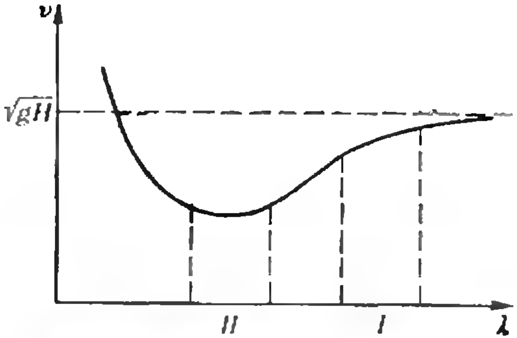


Рис. 1.

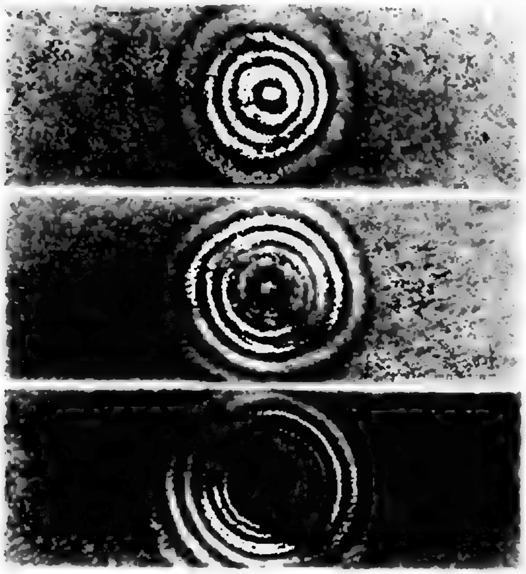


Рис. 2.

$$v_{\text{дл}} = \beta\sqrt{gH} \ . \qquad (4)$$

Согласно расчетам, $\beta = 1$.

Теперь рассмотрим капиллярные волны с очень малой длиной волны, когда жидкость возвращается к равновесию не из-за силы тяжести, а за счет силы поверхностного натяжения. Их скорость может зависеть от длины волны λ, плотности жидкости ϱ и ее коэффициента поверхностного натяжения σ. Из этих величин можно составить единственную комбинацию, имеющую размерность скорости, поэтому скорость капиллярных волн

$$v_{\text{кап}} = \gamma\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho\lambda}} \ , \qquad (5)$$

где $\gamma = \sqrt{2\pi}$.

Воспользуемся выражениями (3) — (5) и нарисуем график зависимости скорости распространения волн от длины волны во всем диапазоне длин волн (рис. 1). В области *I*, при $\lambda \sim 2\pi H$, происходит переход от коротких гравитационных волн к длинным. Область II соответствует переходу от гравитационных волн к капиллярным. В этой же области скорость принимает минимальное значение (можно показать, что

$$v_{\min} = \left(\frac{\sigma g}{\varrho}\right)^{1/4}).$$

Приведем несколько численных примеров, чтобы получить представление о характерных скоростях возбуждаемых волн:

— Длинные гравитационные волны в океане распространяются со скоростью того же порядка, что и скорость полета самолета. Для средней глубины океана $H \sim 1$ км $v_{\text{дл}} \sim$ ~ 360 км/ч, а для максимальной глубины $H \sim 10$ км $v_{\text{дл}} \sim 1000$ км/ч.

— Брошенный в воду камень возбуждает короткие гравитационные волны, их скорость $v_{\text{кор}} \sim 30$ см/с.

— Длина волны, при которой гравитационные волны переходят в капиллярные, для воды порядка 2 см, и соответствующая скорость $v_{\text{кап}} \sim 20$ см/с.

Оказывается, зная зависимость скорости от длины волны, можно объяснить довольно много интересных явлений. Так, все вы, конечно, наблюдали разбегающиеся круги. Поскольку волны на воде не могут распространяться со скоростью, меньшей $v_{\min}$, в центре расширяющейся системы кругов образуется область спокойной воды с радиусом $v_{\min}t$ (рис. 2). Разбегающиеся капиллярные волны, отличающиеся малой амплитудой, видны плохо и, кроме того, быстро затухают. Для гравитационных волн затухание меньше, поэтому живут они дольше. Каждая из них двигается со своей скоростью v_λ. Впереди распространяются более длинные волны, затем — короткие. За время t волна длиной λ уйдет на расстояние $R = v_\lambda t = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\, t$. Другими словами, на расстоянии R через время t появятся волны длиной $\lambda \sim \left(\frac{R}{t}\right)^2$. Группа американских ученых, изучающих волнение, вызывае-

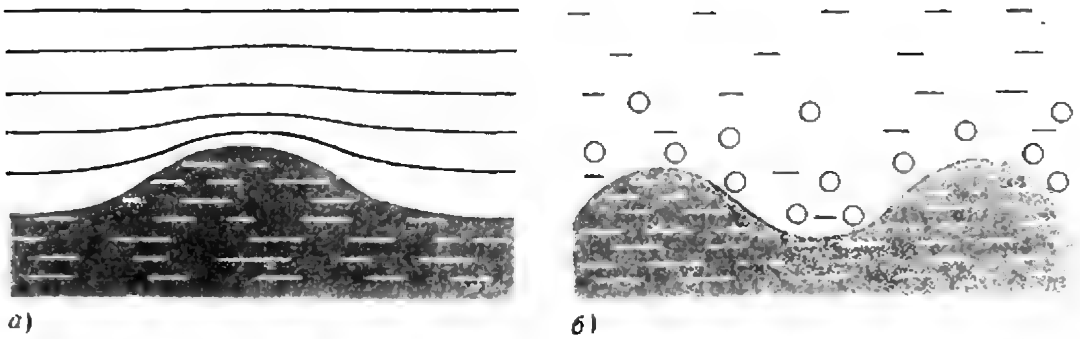


Рис. 3.

мое штормами в южной части Тихого океана, обнаружила, что таким образом можно определить расстояние до шторма, которое может составлять 2000 миль и даже более.

О возбуждении волн

Рассмотрим теперь, как возбуждаются волны на поверхности жидкости.

Первые попытки понять процесс возбуждения волн ветром были сделаны в середине прошлого века. Эту задачу решал выдающийся английский физик Томсон (лорд Кельвин) в предположении, что движение воздуха является ламинарным, как бы состоящим из отдельных струй. Над водным горбом эти струи воздуха сгущаются (рис. 3, *а*), скорость течения возрастает, а давление в этом месте, в соответствии с законом Бернулли, падает. При достаточно большой скорости ветра возникающая подъемная сила преодолевает стабилизирующее действие сил тяжести и поверхностного натяжения, и на поверхности воды возбуждаются волны. Интересно, что рассчитанная критическая скорость оказалась очень большой, в десятки раз превышающей наблюдаемую. Такое вопиющее расхождение между результатами теории и эксперимента много лет было одной из обсуждаемых проблем гидродинамики. Путем различных сложных и хитроумных усовершенствований теории удалось снизить критическую скорость в несколько раз. Однако парадокс оставался.

Объяснение его появилось только в конце пятидесятых годов нынешнего столетия. Оно основано на том, что слой воздуха, прилегающий к воде, не является ламинарным. Он состоит из множества мелких вихрей (рис. 3, *б*), или, как говорят физики, турбулизован. Вихри эти двигаются со скоростью ветра. Если скорость ветра меньше скорости волны, склон волны догоняет вихри, толкает их и, следовательно, отдает им энергию. При этом поверхность жидкости остается спокойной. Даже если возбудить волны, они быстро затухнут. Ситуация меняется, если вихри догоняют волну. Они «толкают» ее, отдают ей энергию и, следовательно, увеличивают ее амплитуду.

Такой процесс возбуждения волн не случайно называют резонансным. И действительно, это обычный резонанс. Точно с таким же резонансом вы сталкиваетесь, например, при быстром движении поезда, который трясется на стыках. Частота ν тряски определяется скоростью поезда u и длиной рельса l: $\nu = u/l$. Если частота ν совпадает с одной из собственных частот вагона, вагон сильно раскачивает. Так же обстоит дело и при возбуждении волн ветром. Здесь роль длины l принимает на себя длина волны λ, а скорость u представляет собой скорость ветра, то есть при резонансе скорость волны должна быть равна скорости ветра.

Поэтому, если скорость ветра превышает минимальную скорость волн $v_{\min}$, случайно возникающие волны малой амплитуды будут усиливаться и нарастать. Рассчетное значение $v_{\min}$ хорошо согласуется с данными наблюдений.

Если скорость ветра близка к $v_{\min}$, возбуждаются волны с длиной, близкой к $\lambda_{\min}$, что составляет несколько сантиметров. Именно такие волны возникают на лужах при легких порывах ветра. С ростом скорости ветра появляются все более быстрые волны. Из рисунка 1 видно, что при этом возбуждаются как более длинные, так и более короткие волны. Но очень короткие волны, с длиной волны порядка миллиметра и меньше, заметны плохо и быстро затухают. Поэтому мы обычно видим, что с ростом скорости ветра и возбуждаются все более и более длинные волны. Например, при скорости ветра ~ 40 км/ч, соответствующей шестибальному шторму, возбуждаются волны длиной вплоть до 60 м.

И последнее. Вы, конечно, замечали, что когда ветер слабый, волны маленькие, а во время шторма большие. Почему? Ясно, что энергия волны не может расти бесконечно. Как только амплитуда волны становится больше некоторой критической, гребень волны обрушивается. Опять-таки из соображений размерностей эта критическая амплитуда должна быть порядка длины волны. Во время шторма возбуждаются более длинные волны, и поэтому они дорастают до большой амплитуды.

Все явления, которые описаны выше, мы наблюдали много раз. Их легко моделировать. Например, эксперименты по возбуждению волн ветром можно проделать с помощью обычного вентилятора.

О разрушении сверхтекучести

В заключение нам хотелось бы заметить следующее. Интересно, что рассуждения, приведенные выше, годятся для объяснения совсем другого, достаточно далекого от волн на море явления,— разрушения сверхтекучести. Прежде всего объясним, что такое сверхтекучесть. Сверхтекучесть — это свойство жидкости протекать без трения через узкие капилляры. Оно присуще единственной жидкости — жидкому гелию при очень низких температурах, близких к абсолютному нулю ($T < 2{,}2$К).

Оказывается, в жидком гелии также существуют волны. При больших длинах волн это звуковые волны, их скорость постоянна и не зависит от длины волны. С уменьшением длины волны скорость уменьшается, и при очень малых длинах волн снова увеличивается. Таким образом, зависимость скорости волн от длины волны для гелия похожа на такую же зависимость для поверхностных волн (см. рис. 1). Самое главное, что обе эти кривые имеют минимум.

Предположим, что скорость гелия в капилляре превышает минимальную скорость волн. Очевидно, тогда будет происходить возбуждение колебаний. При этом энергия поступательного движения гелия будет передаваться этим волнам, то есть возникнет трение и сверхтекучесть разрушится. Таким образом, максимальная скорость, при которой гелий сохраняет свойство сверхтекучести, равна минимальной скорости волн.

Любопытно, что это явление было обнаружено советским физиком П. Л. Капицей в 1937—1941 годах и нашло свое объяснение в работе другого советского физика Л. Д. Ландау в 1941 году, задолго до того, как был понят механизм возбуждения волн ветром.

Метод виртуальных перемещений

(Начало см. на с. 9)

1. Два однородных стержня массы которых m_1 и m_2, опираются на гладкие вертикальные стенки и гладкую горизонтальную поверхность (рисунок 6). Найдите соотношение между углами α_1 и α_2 при равновесии системы.

2. Решите задачу 5 при условии, что масса каждого шарнира равна M.

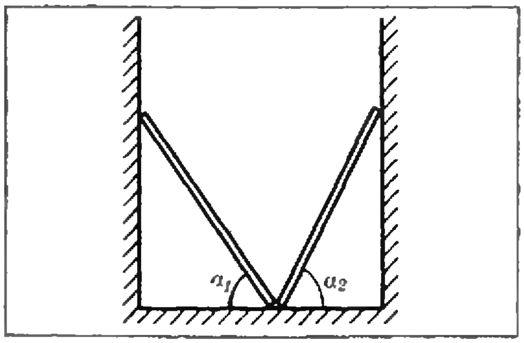


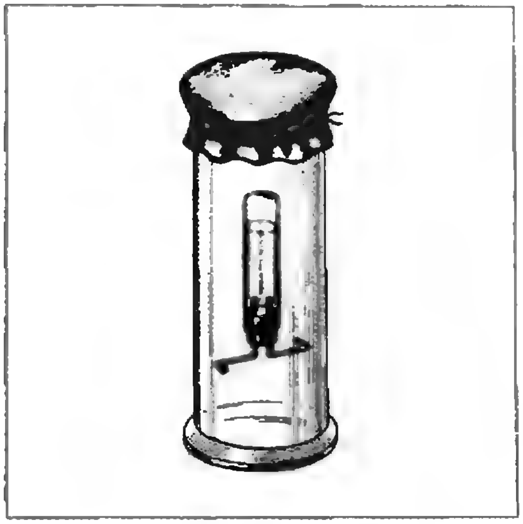
Рис. 6.

Ф. Вафин

Еще раз о реакции вытекающей и втекающей струй

В сентябре 1978 года в нашем журнале была опубликована статья В. Майера «Реакция вытекающей и втекающей струй». Редакция получила много откликов на нее. Предлагаем вашему вниманию еще одну статью на ту же тему. В ней рассказывается о том, как сделать прибор, называемый «морским жителем» или «картезианским водолазом», и как с его помощью наглядно продемонстрировать наличие реакции вытекающей струи и отсутствие реакции втекающей струи.

Возьмите стеклянную пробирку диаметром около 2 см, заполните ее водой приблизительно на 3/4 объема и закройте пробкой. В пробку вставьте две изогнутые трубочки, образующие сегнерово колесо. Трубочки можно изготовить самим, например из пустых стержней для шариковой авторучки, слегка нагревая места изгиба.



Пробирку опустите вверх дном в высокий цилиндрический сосуд (скажем, в трехлитровую банку), целиком заполненный водой (см. рисунок). Количество воды в пробирке отрегулируйте так, чтобы пробирка плавала в сосуде. Удобнее всего лишнюю воду из пробирки выливать через одну из трубочек (сама пробирка при этом расположена горизонтально). Когда отрегулируете количество воды в пробирке, отверстие сосуда затяните тонкой (но прочной) резиновой пленкой.

Теперь можно приступать непосредственно к опыту. Надавите пальцами на пленку, и вы увидите, что пробирка начнет опускаться, не вращаясь. Снимите пальцы с пленки — пробирка будет подниматься и при этом вращаться. Как это можно объяснить?

Когда пробирка плавает, ее сила тяжести уравновешена выталкивающей силой. Если надавить на пленку, гидростатическое давление в сосуде увеличится, а давление воздуха в пробирке останется прежним. Под действием разности давлений вода через изогнутые трубочки будет входить в пробирку, объем воздуха над водой в пробирке будет уменьшаться, а давление — увеличиваться. Поскольку количество воды в пробирке возрастет, увеличится ее сила тяжести, а выталкивающая сила не изменится. В результате пробирка начнет тонуть, но вращаться она не будет. Это явно свидетельствует об отсутствии реакции *втекающей* струи.

При снятии пальцев с пленки гидростатическое давление в сосуде примет свое первоначальное значение, и под действием избыточного давления воздуха в пробирке часть воды из пробирки вытечет. Став легче, пробирка начинает всплывать, вращаясь при этом под действием реакции *вытекающей* струи.

Г. Гегелия

Принцип сжимающих отображений

(Из хроники НОУ)

Настоящая статья основана на докладе, сделанном ее автором — тогда десятиклассником — на «Празднике математики» в Батуми. В ней рассказывается об одной важной теореме, которая в наше время часто применяется при решении больших систем на ЭВМ, но может быть использована и для приближенного нахождения корней «типично школьных» уравнений.

Неподвижные точки

Пусть f — отображение произвольного множества A в себя. Точка $x \in A$ называется *неподвижной точкой*[*] отображения f, если

$$f(x)=x. \qquad (1)$$

Когда $A \subset \mathbf{R}$ (то есть когда f — обычная числовая функция), найти неподвижную точку отображения f попросту означает решить уравнение (1). Обратно, если дано любое уравнение $g(x)=0$, то его решение будет неподвижной точкой отображения f, где

$$f(x)=g(x)+x. \qquad (2)$$

Рассмотрим несколько примеров.

1) Поворот плоскости на ненулевой угол около данной точки имеет единственную неподвижную точку (центр поворота).

2) Параллельный перенос плоскости на ненулевой вектор не имеет неподвижной точки.

3) Симметрия плоскости относительно прямой имеет бесконечное множество неподвижных точек (все точки этой прямой).

4) Отображение $x \to ax^2+bx+c$, где $a \neq 0$, имеет две, одну или ни одной неподвижной точки в зависимости от знака выражения

$$\Delta=(b-1)^2-4ac.$$

Задание 1. *Постройте отображение плоскости на себя, имеющее ровно n неподвижных точек* ($n \in \mathbf{N}$).

Сжимающие отображения

Как мы заметили выше, решение любого уравнения вида $g(x)=0$ простым приемом (прибавлением x к левой части уравнения) сводится к нахождению неподвижной точки некоторого отображения. Поэтому очень важно знать условие, при котором неподвижная точка существует, а также уметь находить саму неподвижную точку. Такое условие мы сейчас укажем.

Пусть дано отображение $f: A \to A$, где в множестве A определено расстояние между точками: $d(x, y)$; (например, A — подмножество прямой, плоскости или пространства). Отображение f называется *сжимающим*, если существует такое число $a<1$, что для любых точек $x, y \quad A$

$$ad(x, y) \geqslant d(f(x), f(y)). \qquad (3)$$

Иными словами, расстояние между образами точек меньше, чем расстояние между самими точками, причем оно уменьшается по крайней мере в a «раз», где $a<1$. Число a называется *коэффициентом сжатия*. Примеры:

1) Гомотетия плоскости с коэффициентом $0<k<1$ будет сжимающим отображением (с коэффициентом сжатия k).

2) Поворот плоскости не является сжимающим отображением. Следующая теорема показывает, зачем нужно понятие сжимающего отображения.

Теорема (принцип сжимающих отображений на прямой). *Вся-*

---

[*] О неподвижных точках рассказывается также в статье Б. Вертгейма («Квант», 1980, № 6).

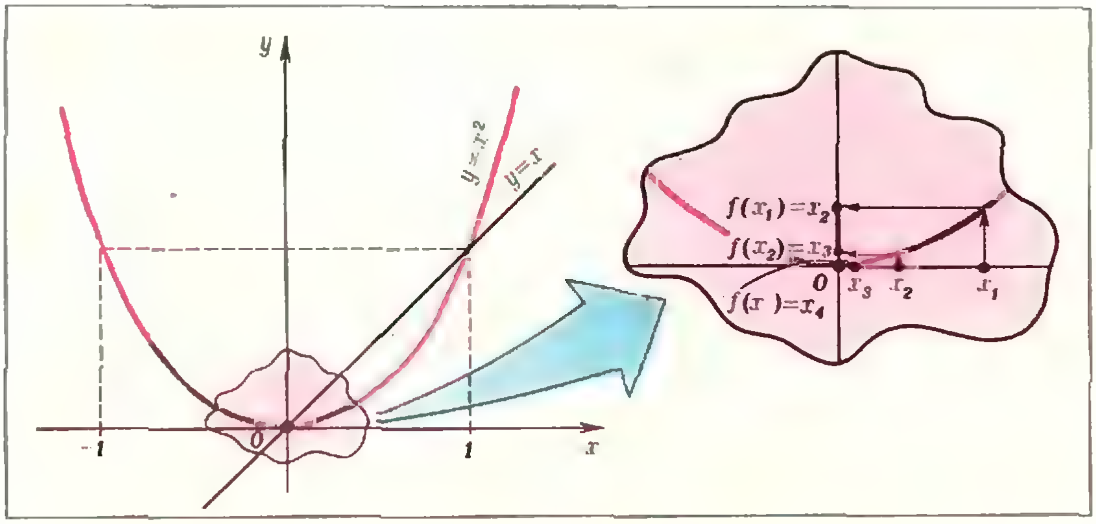


Рис. 1.

кое сжимающее отображение f: $]a;\ b[\to]a;\ b[$ интервала в себя имеет единственную неподвижную точку.

Единственность неподвижной точки очевидна: если бы их было две, то расстояние между ними должно было бы измениться (по условию (3)), в то время как оно на самом деле остается неизменным (ибо сами точки не двигаются).

Доказательство существования основано на простом, но важном *методе итераций*: берем любую точку $x_0 \in]a;\ b[$ и многократно применяем к ней f:

$$x_0,\ x_1=f(x_0),\ x_2=f(x_1),\ \ldots,\ x_n=f(x_{n-1}),\ \ldots \qquad (4)$$

тогда последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сходится к искомой неподвижной точке.

Прежде чем обосновать этот метод (то есть завершить доказательство теоремы), мы проиллюстририруем его на простейшем примере: Пусть $f{:}]-1;\ 1[\to]-1;\ 1[$ — отображение, заданное формулой $f(x)=x^2$ (рис. 1). Возьмем точку $x_0=0{,}1$. Тогда

$$x_1=(0{,}1)^2=0{,}01,$$
$$x_2=(0{,}01)^2=0{,}0001,\ \ldots$$

Очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0$. Точка 0 действительно неподвижна, ибо $0^2=0$. (Кстати, этим способом мы решили уравнение $x^2-x=0$, $x \ni]-1;\ 1[$).

Возвращаясь к доказательству теоремы, обозначим через (x_n) последовательность (4). Покажем, что эта последовательность обладает следующим свойством.

(К) *Для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_0, что для всех больших номеров $n, m>n_0$ выполняется неравенство*

$$d(x_{n,m})<\varepsilon. \qquad (5)$$

Иными словами, точки последовательности с достаточно большими номерами сколь угодно близки.

Чтобы это доказать, применим k раз неравенство (3); получим

$$d(x_k,\ x_{k+1})\leqslant\alpha^{k-1}d(x_1,\ x_2).$$

Поэтому

$$d(x_n,\ x_{n+p})\leqslant d(x_n,\ x_{n+1})+$$
$$+d(x_{n+1},\ x_{n+2})+\ldots+d(x_{n+p-1},x_{n+p})\leqslant$$
$$\leqslant(\alpha^{n-1}+\alpha^n+\ldots+\alpha^{n+p-2})d(x_1,x_n)=$$
$$=\frac{\alpha^{n-1}(1-\alpha)^p}{1-\alpha}d(x_1,\ x_n)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}d(x_1,\ x_2). \qquad (6)$$

Теперь для любого данного нам $\varepsilon>0$ мы в качестве n_0 можем взять

$$n_0=\log_\alpha\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{d(x_1,\ x_2)}.$$

Тогда для любых $n,\ m>n_0$ из неразенства (6) сразу следует нужное

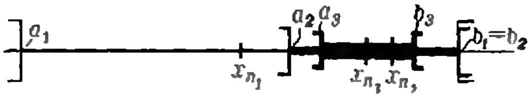


Рис. 2.

нам неравенство (5) (проверьте!). Свойство (К) доказано.

Пользуясь свойством (К), докажем теперь сходимость последовательности (x_n). Для числа $\varepsilon=1/2$, по свойству (К), найдется такой номер n_1, что при $m>n_1$ выполняется $d(x_m, x_{n_1})<1/2$, то есть $x_m \in]a_1; b_1[$, где $a_1=x_{n_1}-1/2$, $b_1=x_{n_1}+1/2$. Рассмотрим далее число $\varepsilon=1/4$ и аналогично найдем такой номер n_2, что при $m>n_2$ выполняется $x_m \in]a_2; b_2[$, где $a_2=x_{n_2}-1/2$, $b_2=x_{n_2}+1/2$. Если одна из точек a_2, b_2 не лежит в $]a_1; b_1[$, то мы ее заменим на a_1 (соответственно b_1), сохранив обозначение $]a_2; b_2[$ для построенного отрезка. И так далее (см. рис. 2).

Получим последовательность интервалов

$$]a_1;\ b_1[\ \supset\ ]a_2;\ b_2[\ \supset \ldots \supset\ ]a_n;\ b_n[\ \supset \ldots$$

длина n-го интервала не превосходит $1/2^{n-1}$, и для каждого из них существует такой номер, что все x_i с бо́льшими номерами лежат в этом интервале.

Рассмотрим последовательность (a_n) левых концов наших интервалов. Она возрастает и ограничена сверху (например, числом b_1) и, следовательно (см. «Алгебра и начала анализа 9», п. 32), имеет предел $x=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Покажем, что это же число x является пределом последовательности (x_n). Действительно,

$$d(x, x_n) \leqslant d(x, a_n)+d(a_n, x_n);$$

оба слагаемых в правой части сколь угодно малы (при достаточно больших n), стало быть $d(x, x_n)$ сколь угодно мало (при достаточно больших n), то есть $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Нам осталось только доказать, что x — неподвижная точка отображения f. Имеем

$$\begin{aligned}0 \leqslant d(x, f(x)) &\leqslant d(x, x_n) + \\ &+ d(x_n, f(x)) = d(x, x_n) + \\ &+ d(f(x_{n-1}), f(x)) \leqslant d(x, x_n) + \\ &+ \alpha d(x_{n-1}, x).\end{aligned}$$

Последние два слагаемых сколь угодно малы (при достаточно больших n), значит, $d(x, f(x))=0$, то есть $f(x)=x$, что и требовалось доказать.

Легко видеть, что теорема останется верной, если интервал $]a; b[$ мы заменим отрезком, лучом или даже всей прямой $\mathbf{R}$. Более того, она остается верной и на плоскости.

Задание 2. *Сформулируйте и докажите принцип сжимающих отображений для круга на плоскости.*

Указание. Воспользуйтесь координатами.

Если вы проделали это упражнение, вам, конечно, ясно, что наш принцип остается верным для полуплоскости или полосы и даже в пространстве — скажем, для шара. Естественно спросить: а как сформулировать этот принцип с тем, чтобы охватить как можно больше случаев? Как найти наиболее общую формулировку?

Поставив этот вопрос, мы попали в ситуацию, характерную для творческой работы математика-исследователя. И сейчас мы посмотрим

Как рассуждает математик

Математик-профессионал здесь стал бы думать примерно так:

Нам нужно найти формулировку, обобщающую доказанную выше теорему. Чтобы сделать это, посмотрим, *какие именно свойства данной ситуации на самом деле потребовались при доказательстве.*

Во-первых, мы пользовались определением сжимающего отображения (3). Значит, в множестве A должно быть определено расстояние $d(x, y)$ между точками $x, y \in A$. Конкретно, расстояние между точками x, y *на прямой* — это число

$$d(x, y)=|x-y|.$$

Но важно ли, что оно задается именно так? Наверное, нет: ведь на плоскости $d(x, y)$ определено иначе, а доказательство все же проходит. Стало быть, нужно смотреть, *какие свойства расстояния* на самом деле используются. Посмотрим.

В конце доказательства мы пользовались тем, что две точки, находящиеся на нулевом расстоянии, совпадают. Запишем это так:

$$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y. \qquad \text{(I)}$$

Далее нам было нужно (где?), чтобы

$$d(x, y) = d(y, x) \qquad \text{(II)}$$

(для любых $x, y \in A$).

Наконец, мы неоднократно (например, при доказательстве неравенства (6)) пользовались *неравенством треугольника:*

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \quad \text{(III)}$$

(для любых $x, y, z \in A$).

Теперь подумаем — какие-нибудь другие свойства расстояния нам были нужны? Просмотрим еще раз доказательство: нет, от расстояния больше ничего не требуется. Таким образом, нам нужны лишь обычные аксиомы расстояния.

Пойдем дальше. Проследим, как была доказана сходимость последовательности (4), обладающей свойством (К). Довольно хитро, с использованием специфических свойств интервалов на прямой. Понять, какие именно общие свойства здесь использованы, трудно. Остается только один выход: «убрать трудность в аксиому», то есть постулировать, что всякая последовательность, обладающая свойством (К), сходится. Ведь это сделать очень просто — *достаточно ограничиться теми множествами A, для которых из условия (К) следует сходимость!*

Подведем итог. Доказательство проходит для сжимающего отображения, если в A есть расстояние, удовлетворяющее условиям (I)—(III), причем любая последовательность точек из A, обладающая свойством (К), сходится к точке из A.

Формулировка в общем случае

Чтобы сформулировать нужную нам теорему, начнем с формальных определений. Читатель, разобравшийся в рассуждениях нашего выдуманного математика-профессионала, сразу поймет, почему эти определения именно такие.

Множество A, на котором каждой паре точек $x, y \in A$ сопоставлено число $d(x, y) \in \mathbf{R}$, называется *метрическим пространством*, если для d выполнены условия (I)—(III); при этом число $d(x, y)$ называется *расстоянием* между точками x и y.

Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ метрического пространства A называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что

$$n, m > n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Последовательность (x_n) в метрическом пространстве A называется *сходящейся*, если существует точка x, такая что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0, для которого

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Точка x в этом случае называется *пределом* последовательности x_n. Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Наконец, метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Теорема (общий принцип сжимающих отображений). *Любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство по существу не отличается от доказательства первой теоремы, только конец проще: из того, что последовательность (4) фундаментальна (то есть обладает свойством (К)), и из полноты пространства A по определению следует, что (4) сходится.

Задание 3. *Напишите доказательство подробно.*

На самом деле, принцип сжимающих отображений, который обычно связывают с именами Пикара и Банаха, сформулирован выше не в самом общем виде. Более тонкий анализ доказательства привел польского математика С. Банаха к понятию *полного нормированного линейного пространства* (или как сейчас говорят, *банахова пространства*), для которого теорема им и была доказана. Преимущество этой формулировки в том, что «точками» такого пространства могут быть *функции*, так что принцип становится применимым к решению, например, дифференциальных уравнений.

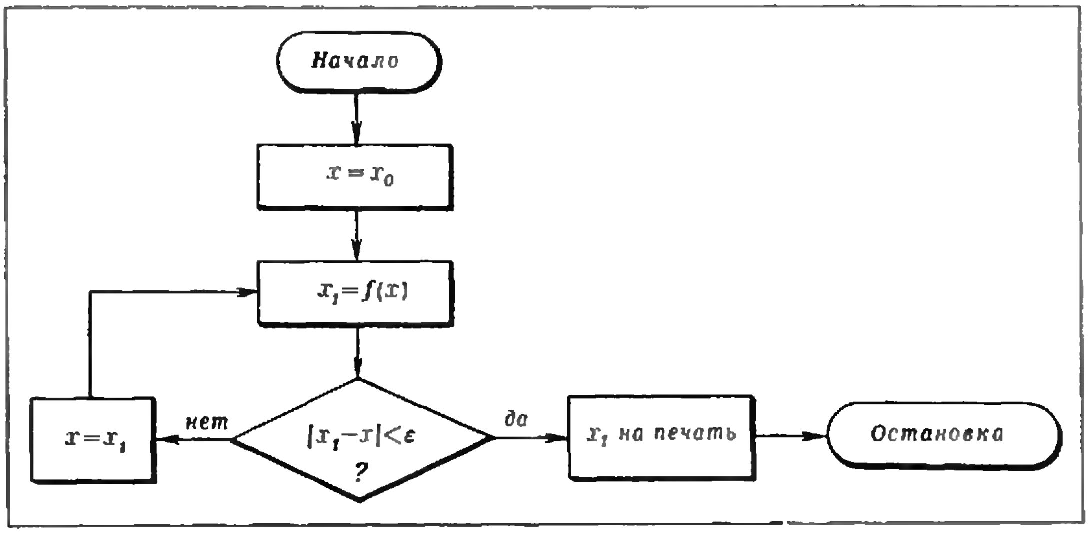


Рис. 3.

Как работает ЭВМ

Мы уже отмечали, что метод итераций дает нам способ приближенного нахождения неподвижной точки: так как последовательность x_0, $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, ... сходится к x, точку x можно получать с заданной точностью ε, выбрав номер n так, чтобы $|x_n-x|<\varepsilon$.

Это прекрасно может сделать компьютер, действующий по алгоритму, показанному на рисунке (так называемой «блок-схеме» алгоритма). Посмотрите на него внимательно и поймите, как действует этот алгоритм.

Ясно, что в условиях теоремы о сжимающих отображениях машина после конечного числа итераций выдаст на печать число x_n, удовлетворяющее условию $|x_n-x|<\varepsilon$, то есть приближенное (с заданной точностью ε) значение x. Если же эти условия не выполнены, машина может «работать вечно» (если она не сломается, так и не выдав нам ответа).

Чтобы зря не тратить дорогостоящее машинное время, целесообразно, прежде чем запустить алгоритм, проверить выполнение условий теоремы о сжимающих отображениях.

Задание 4. *Применить описанный выше алгоритм для приближенного решения уравнения*

$$g(x)=x^3+3x+x\cos^2 x-\sin(\cos x)=0.$$

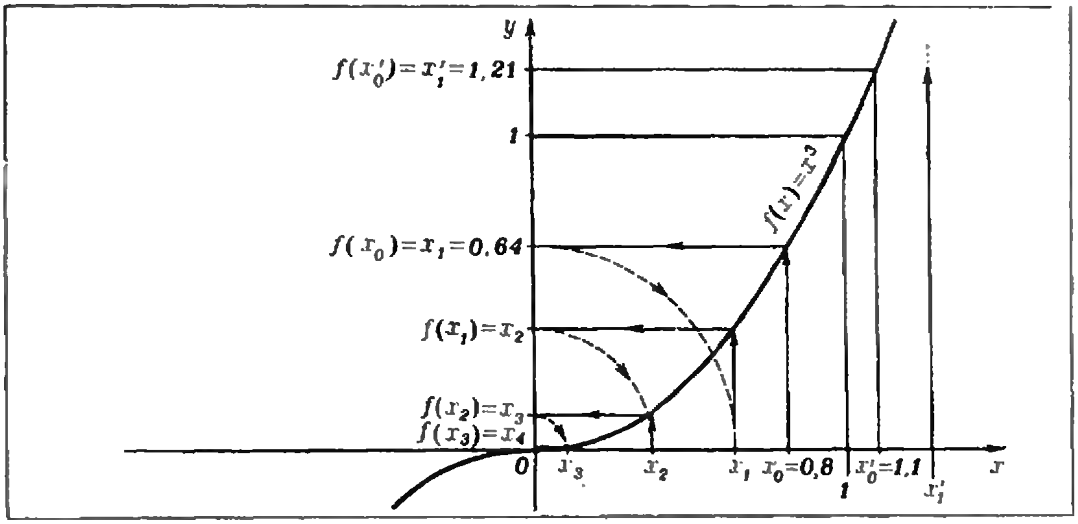


Рис. 4.

точнее, для нахождения неподвижной точки отображения f, *где* $f(x)=g(x)+x$. *Взять при этом* $\varepsilon=0{,}01$, $x_0=0$.

Задание 5. *Выяснить, что будет, если алгоритм применить к отображению* $f(x)=x^3$. *Рассмотрите случаи* $x_0=0{,}8$ и $x_0=1{,}1$, $\varepsilon=0{,}1$ (рис. 4)

Задание 6*. *Покажите, что существует отображение прямой, сближающее все точки (то есть удовлетворяющее условию* $d(x, y) > d(f(x), f(y))$*), но не обладающие неподвижной точкой.*

Задание 7 (для учащихся Заочной школы программирования). *Напишите программу на Рапире для выполнения задания 4.*

Вместо заключения — геометрия

Принцип сжимающих отображений применим не только для приближенного решения уравнений. Рассмотрим такую красивую геометрическую задачу (ср. М573):

На плоскости даны n *прямых* $l_1, l_2, \ldots, l_n (n \geqslant 2)$. *Пусть* $A_1 \in l_1$; *спроектируем перпендикулярно* A_1 *на* l_2 *в точку* A_2, A_2 *на* l_3 *в точку* $A_3, \ldots, A_n$ *на* l_1 *в точку* A_{n+1}. *Можно ли найти такую точку* $A_1 \in l_1$, *чтобы* $A_{n+1}=A_1$?

Ответ. Такая точка существует и единственна.

Решение. Неужели вы не угадали?

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см на с 21)

85а), б); *Е Поляков* (Калининград Московской обл) **91**; *В Радченко* (Киев) **84, 85а), б), 91, 94, 96, 00**; *Ю Рачинский* (Москва) **85б)**; *И Ройзман* П г т Калиновка Винницкой обл) **84, 94, 00**; *В Романюк* (с Кусниище Волынской обл) **94**; *Б Рублев* (Киев) **91, 94, 96—98, 00**; *К Рухадзе* (Москва) **91, 94, 95, 98, 00**; *Э Салимов* (Кировобад) **91**; *И Сафаров* (Ленкорань) **91**; *И Сильванович* (Ангарск) **97**; *М Слинкин* (Москва) **98, 00**; *А Смирнов* (Курган) **98**; *А Соловьев* (Ленинград) **91, 94, 96, 99, 00**; *А Спивак* (Стерлитамак) **91, 95, 96, 98—00**; *С Спичак* (Припять Киевской обл) **98**; *С Стадниченко* (Пенза) **94, 95**; *И Стойменович* (СФРЮ) **96, 98—00**; *Д Суворов* (Свердловск) **98**; *В Тарунин* (Пермь) **84, 94, 96, 98, 00**; *Л Тепер* (с Ялтушков Винницкой обл) **96, 98**; *В Титенко* (д Блужа Минской обл) **00**; *Р Угриновский* (Хмельник) **91, 94, 97—99**; *А Уливанов* (Горький) **98, 00**; *О Фонарев* (Сумгаит) **91**; *А Харитонский* (Киев) **91, 98**; *А Херольянц* (Тула) **00**; *С Хомич* (Ангарск) **00**; *С Хосид* (Алма-Ата) **91, 94**; *В Цекановский* (Донецк) **85а), 91, 94**; *А Чернышов* (Москва) **98**; *О Чечель* (Москва) **85а), б), 91, 94**; *Н Шаромет* (Москва) **84, 96, 98, 00**; *Ю Шинкарь* (Киев) **98**; *Н Широкова* (Казань) **84**; *А Шихкеримов* (Сумгаит) **91**; *С Шмелев-Агинский* (Москва) **84, 85а), б), 98, 99**; *Ф Эрдманн* (ГДР) **91**; *В Ясинский* (Могилев-Подольский) **91**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф588—Ф602**, справились с задачами **Ф588, Ф592** и **Ф598**. Остальные задачи правильно решили. *А Абрамочкин* (Киев) **89**; *А Авакянц* (Донецк) **93—97**; *В Аветисов* (Баку) **93, 96, 99**; *А Алиев* (Кировабад) **94**; *И Аполонский* (Жуковский) **94, 95, 97**; *М Арасланов* (Запорожье) **99, 02**; *А Бибаев* (Баку) **93, 96, 99**; *Р Бабаев* (Баку) **95—97, 99, 00, 02**; *О Барабаш* (Киев) **01**; *Г Басс* (Теплогорск Ворошиловградской обл) **94**; *В Белоус* (Днепропетровск) **95, 99**; *В Бережной* (Киев) **99**; *А Бессарабский* (п Запрудня Московской обл) **89, 90, 93, 95—97**; *И Бессонов* (Реутов) **89, 95—97, 00**; *А Божко* (Алма-Ата) **89, 94—96**; *А Бойко* (Киев) **94**; *И Боровиков* (Красноярск) **94, 96, 97**; *А Бочек* (Харьков) **90**; *Л Брагинский* (Киев) **94—97, 00, 01**; *С Вагнер* (Джезказган) **89, 93—96, 00, 01**; *В Васильев* (Великие Луки) **94—97, 99, 00**; *В Вачев* (Ямбол, НРБ) **99**; *Б Вейцман* (Одесса) **87, 89, 91, 94—97, 01**; *Е Войтенко* (Киев) **94, 95, 97, 00**; *А Вольнов* (Киев) **93, 94**; *В Ворона* (Славянск) **93—97, 99, 00, 02**; *Е Выродов* (Подольск) **89, 93, 95—97, 99, 01, 02**; *Р Габдуллин* (д Старо Баишево БашАССР) **99**; *Г Гаев* (Саратов) **93, 94**; *В Галинский* (Еманжелинск) **01**; *В Гладков* (Москва) **00—02**; *С Голощапов* (Запорожье) **89, 90, 93—97**; *В Горбунов* (Коммунарск) **89—91, 92—97, 99, 00, 02**; *Е Горохов* (Киев) **93—97**; *А Градинер* (Баку) **95**; *А Григоренко* (Макеевка Донецкой обл) **95—97, 00—02**; *Н Григорук* (Ровно) **96**; *Д Григорьев* (Москва) **95, 96, 99, 00, 02**; *Г Григорян* (Москва) **99**; *И Грузберг* (Пермь) **91, 93—95, 99**; *И Губин* (Ереван) **94, 95, 02**; *А Гуляев* (Москва) **95, 97**; *А Давоян* (Ленинакан) **95, 97**; *И Даниловский* (Горький) **90, 91, 93—96, 99, 00**; *Т Демьянков* (Ровно) **94, 96**; *С Джикелов* (Алма-Ата) **01**; *Т Дограшвили* (Кутаиси) **99**; *С Долгополов* (Полтава) **90**; *А Долинин* (Владимир) **94, 96**; *А Дремин* (п Черноголовка Московской обл) **93—97, 02**; *О Дрямин* (Ижевск) **95, 96**; *Ю Елисеев* (Великие Луки) **93—96, 99, 00, 02**; *И Елишевич* (Чернигов) **93—96**,

(Продолжение см на с 46)

задачник Кванта

Задачи

M641—M645; Ф653—Ф657

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 ноября 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М641, М642» или «Ф653». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте, в двух экземплярах, вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

М641. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ с центром O. Точки M и N — середины сторон CD и DE. Прямые AM и BN пересекаются в точке L. Докажите, что:

а) треугольник ABL и четырехугольник $DMLN$ имеют равные площади;

б) $\widehat{ALO}=\widehat{OLN}=60°$;

в) $\widehat{OLD}=90°$.

Э. Готман

М642. Докажите, что каждое натуральное число представляется в виде $a_0+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^na_n$, где каждое из чисел a_k равно 0, -1 или 1 и $a_k\cdot a_{k+1}=0$ для всех $0\leqslant k\leqslant n-1$, причем такое представление единственно.

Н. Жук

М643. Карточки с числами 1, 2, ..., 32 сложены в стопку по порядку. Разрешается снять сверху любое число карточек и вложить их между некоторыми из оставшихся или под ними, не меняя порядка тех и других, а в остальном произвольно.

Эта операция называется *перемешиванием*. Докажите, что за 5 перемешиваний можно

а) переложить карточки в обратном порядке;

б) разложить карточки в любом порядке;

в) докажите, что не всякий порядок карточек можно получить за 4 перемешивания.

В. Турчанинов

М644. а) Докажите, что существует выпуклый 1980-угольник со сторонами длины 1, 2, ..., 1980, все углы которого равны по величине.

б) Существует ли такой 1981-угольник?

Г. Гуревич

М645. В подвале три коридора (рисунок 1; $|OA|=|OB|=|OC|=l$), все выходы из которых закрыты. В нем находятся инспектор Варнике и преступник. Варнике замечает преступника, если расстояние между ними не превосходит r. Он знает, что максимальная скорость преступника в два раза меньше его собственной максимальной скорости. В начальный момент инспектор находится в точке O и не видит преступника. Как

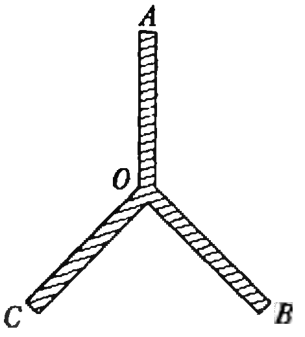


Рис. 1.

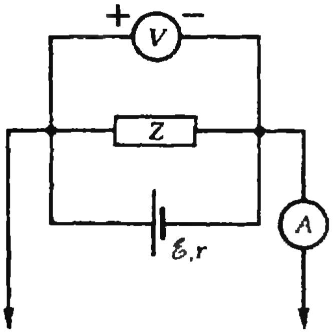


Рис. 2.

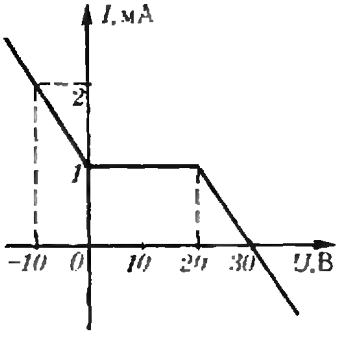


Рис. 3.

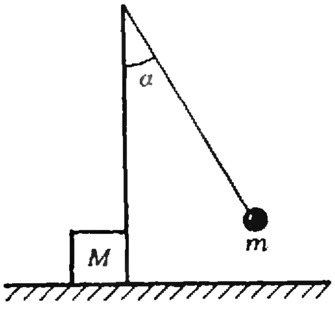


Рис. 4.

должен действовать Варнике, чтобы наверняка поймать преступника, если а) $r=l/3$, б) $r=l/4$, в)* $r>l/5$, г)* $r>l/7$. Шириной коридоров и размерами людей пренебречь. (Варнике должен придумать такой план действий, чтобы, даже если преступник о нем заранее знает, он все равно не смог ускользнуть.)

В. Дринфельд, В. Соколов

Ф653. Некоторый элемент Z, соединенный с батареей с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=10$ кОм, подключен к внешнему источнику тока так, как показано на рисунке 2. Вольтамперная характеристика такой цепи показана на рисунке 3. Постройте вольтамперную характеристику элемента Z.

В. Можаев

Ф654. Штатив массы M стоит на гладком столе. К штативу на легкой нити длины l прикреплен шарик массы m. Нить отклоняют на малый угол α и отпускают (рис. 4). Нарисовать график зависимости скорости штатива от времени. Столкновения шарика с основанием штатива абсолютно упругие.

А. Зильберман

Ф655. В настоящее время используются соленоиды со сверхпроводящей обмоткой. Такие соленоиды могут длительное время создавать магнитное поле без затраты энергии. Однако, если вследствие каких-либо причин участок обмотки соленоида утратит сверхпроводящие свойства, произойдет авария. На этом участке током будет выделяться большое количество тепла и произойдет взрыв. Придумайте простейшее приспособление, исключающее подобные аварии (не пытайтесь придумывать какие-либо схемы с реле, размыкающим цепь,— они не помогут).

Г. Мякишев

Ф656. Прямоугольный кузов самосвала заполнен песком. Высота кузова $h=1$ м, его ширина $d=3$ м, длина $l=6$ м. Какая сила действует на задний борт самосвала при равномерном движении автомобиля и при его движении с ускорением $a=3$ м/с²? Плотность песка $\rho=1{,}5\cdot10^3$ кг/м³, коэффициент трения между песчинками $\mu=0{,}6$.

И. Слободецкий

Ф657. Радиусы кривизны двух одинаковых слипшихся друг с другом мыльных пузырей равны R. После того как перегородка между пузырями лопнула, образовался один пузырь радиуса R_1. Найти атмосферное давление. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен σ.

Решения задач

М596, М598, М599; Ф599—Ф603

М596. *Дана пятиугольная призма с основаниями $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Все ребра оснований и все отрезки A_iB_j ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) окрашены либо в красный, либо в синий цвет так, что в каждом треугольнике с вершинами в вершинах призмы, стороны которого окрашены, есть две стороны разного цвета. Докажите, что все десять ребер оснований окрашены одинаково.*

Сначала докажем, что все ребра нижнего основания окрашены в один и тот же цвет. Действительно, пусть найдутся два ребра нижнего основания, окрашенных в разные цвета, тогда на нижнем основании найдутся два смежных ребра, окрашенных в разные цвета (рис. 1). Можно считать, что это ребра A_1A_2 и A_2A_3, причем первое ребро окрашено в красный цвет, а второе — в синий. Из пяти отрезков A_2B_k ($k = 1, 2, \ldots, 5$) по крайней мере три окрашены в одинаковый цвет, будем считать, что этот цвет — красный. Из трех вершин на верхнем основании, в которые ведут эти отрезки, найдутся две соседние вершины. Обозначим их через B_i и B_j. Очевидно, ребро B_iB_j должно быть синим, иначе в треугольнике $A_2B_iB_j$ все ребра были бы окрашены в красный цвет (см. рис. 1). Синим должен быть и отрезок A_1B_i, иначе все стороны треугольника $A_1A_2B_i$ были бы окрашены в красный цвет. Отрезок A_1B_j тоже должен быть синим, чтобы все стороны треугольника $A_1A_2B_j$ не были красными. Но в таком случае все стороны треугольника $A_1B_iB_j$ будут синими. Получили противоречие.

Аналогично доказывается, что и ребра верхнего основания окрашены одинаково.

Предположим теперь, что ребра нижнего основания окрашены в красный цвет, а ребра верхнего основания — в синий. Тогда из любой вершины нижнего основания выходит не более двух отрезков синего цвета (в противном случае два синих отрезка, выходящих из одной вершины нижнего основания, будут оканчиваться в соседних вершинах верхнего основания, образуя с соединяющим их отрезком «синий» треугольник — см. рис. 2). Таким образом, из отрезков A_iB_j не более чем $2 \cdot 5 = 10$ синих. Аналогичные рассуждения, проведенные с другим основанием, показывают, что красных отрезков тоже не больше десяти. Но всего отрезков A_iB_j, как не трудно посчитать, 25, а мы получили, что их не более двадцати. Противоречие. Тем самым мы и доказали, что все ребра обоих оснований призмы окрашены в один и тот же цвет.

Отметим, что утверждение задачи верно для любой призмы с нечетным числом вершин при основании и неверно для призмы с четным числом вершин при основании (приведите пример).

А. Савин

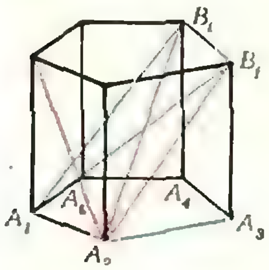


Рис. 1.

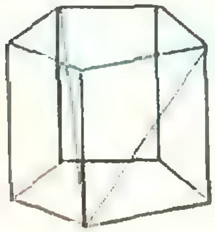


Рис. 2.

◆

М598. *Даны плоскость π, точка P на этой плоскости и точка Q вне плоскости π. Найдите все точки R в плоскости π, для которых отношение $(|PQ| + |PR|)/|QR|$ максимально.*

Обозначим через x расстояние от точки P до точки R и положим $\alpha = \widehat{QPR}$ (рис. 1). Тогда указанное в задаче отношение запишется так:

$$\frac{x + |PQ|}{\sqrt{x^2 + |PQ|^2 - 2x|PQ|\cos\alpha}}. \qquad (*)$$

Заметим, что при фиксированном x это отношение будет максимально, когда максимален $\cos\alpha$, а это произойдет в том случае, когда плоскость PQR будет перпендикулярна плоскости π (рис. 2). Следовательно, можно считать, что плоскость PQR перпендикулярна плоскости π, а $\angle QPR$ — угол между прямой PQ и плоскостью π.

Выражение (*) максимально одновременно с его квадратом $\dfrac{(x + |PQ|)^2}{x^2 + |RQ|^2 - 2x|PQ|\cos\alpha}$. Чтобы найти максимум этого выражения, продифференцируем его по x:

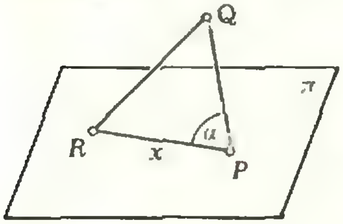


Рис. 1.

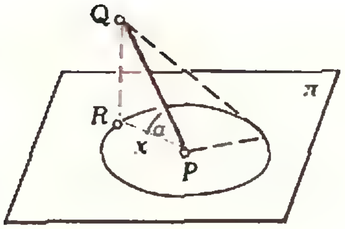


Рис. 2.

$$\left(\frac{(x+|PQ|)^2}{x^2+|PQ|^2-2x|PQ|\cos\alpha}\right)'=\frac{2(1+\cos\alpha)|PQ|(x^2-|PQ|^2)}{(x^2+|PQ|^2-2x|PQ|\cos\alpha)^2},$$

и приравняем производную к нулю; получим, что $x=|PQ|$.

Таким образом, искомая точка R лежит на проекции прямой PQ на плоскость π на расстоянии $|PQ|$ от точки P по направлению к проекции точки Q.

В случае, если отрезок $|PQ|$ перпендикулярен плоскости π, из предыдущего следует, что точкой R может быть любая точка, лежащая на окружности радиуса $|PQ|$ с центром в точке P.

А. Савин

◆

М599. а) *Сколькими нулями оканчивается число*

$$4^{5^4}+6^{5^4}?$$

б) *Укажите наибольшую степень числа 1979, на которую делится число*

$$1978^{1979^{1980}}+1980^{1979^{1978}}.$$

Вначале докажем индукцией по n следующее утверждение: *при любом натуральном $a>2$ и любом натуральном b*

$$(a+1)^{a^n}=1+k_na^{n+1}, \qquad (1)$$

где k_n — натуральное число, не делящееся на a (то есть $(a+1)^{a^n}-1$ делится на a^{n+1} и не делится на a^{n+2}), *и*

$$(b-1)^{b^n}=-1+l_nb^{n+1}, \qquad (2)$$

где l_n — натуральное число, не делящееся на b.

При $n=0$ это очевидно, а переход от n к $n+1$ осуществляется с помощью формулы Ньютона. Сделаем это для (1):

$$(a+1)^{a^{n+1}}=[(a+1)^{a^n}]^a=(1+k_na^{n+1})^a=$$
$$=1+ak_na^{n+1}+a^{2n+2}(k_n^2C_a^2+\dots)=1+k_{n+1}a^{n+2},$$

где $k_{n+1}=k_n+a^n(k_n^2C_a^2+\dots)$ не делится на a при $n>0$ по предположению индукции (случай $n=0$ разбирается отдельно; сделайте это самостоятельно).

Аналогично доказывается и соотношение (2).

Подставив теперь $a=b=1979$, получим, что $1978^{1978^{1980}}+1$ делится на 1979^{1981}, а $1980^{1979^{1978}}-1$ делится на 1979^{1979} и не делится на 1979^{1980}. Окончательно получаем, что максимальный показатель степени 1979, на которую делится число $1979^{1979^{1980}}+1980^{1979^{1978}}$, равен 1979.

Чтобы ответить на вопрос а) задачи, определим наибольшую степень пятерки, на которую делится число $4^{5^4}+6^{5^4}$. Положив $a=b=5$, получим, что $4^{5^4}+1$ делится на 5^7, а $6^{5^4}-1$ делится на 5^5 и не делится на 5^6, так что максимальная степень пятерки, на которую делится сумма $4^{5^4}+6^{5^4}$, равна 5^5. Далее легко видеть, что 4^{5^5} делится на $2^{5^4}>2^5$ и 6^{5^4} делится на $2^{5^4}>2^5$. Таким образом, число $4^{5^4}+6^{5^4}$ делится на $5^5\cdot2^5=10^5$, причем на 5^6 уже не делится. Значит, число $4^{5^4}+6^{5^4}$ оканчивается пятью нулями.

А. Вайнтроб

◆

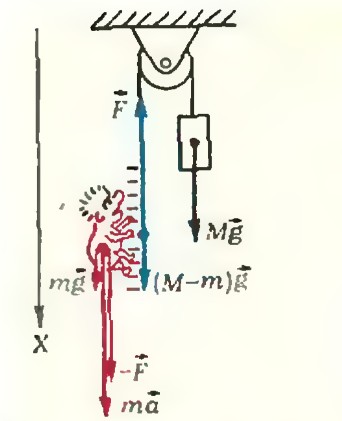
Ф599. *Через блок, укрепленный в потолке, перекинута веревка, на которой груз массы M уравновешен лестницей с человеком массы m. По какому закону должен двигаться человек относительно лестницы, чтобы реакция блока на потолок равнялась нулю? Блок невесом, веревка абсолютно гибка, нерастяжима и невесома.*

Реакция блока на потолок равна нулю, когда на блок не давит веревка, то есть когда сила натяжения веревки равна нулю. Это условие выполняется в том случае, когда груз M свободно падает, то есть движется вниз с ускорением $\vec{g}$. При этом лестница (вместе с человеком) движется вверх с ускорением $-\vec{g}$.

Поскольку сила натяжения веревки равна нулю, единственная сила, которая может сообщить лестнице ускорение, направленное вверх,— это сила $\vec{F}$, с которой на лестницу действует человек (см. рис.).

Запишем уравнения движения лестницы и человека в проекциях на ось X:

$$(M-m)g-F=-(M-m)g,$$
$$mg+F=-ma,$$



где $\vec a$ — ускорение, с которым движется человек относительно земли. Решая эти уравнения совместно, находим

$$a = \frac{2M}{m}g - g.$$

Относительно лестницы человек движется с ускорением

$$\vec{a}' = \vec a + \vec g = \frac{2M}{m}\vec g.$$

О. Овчинников

◆

Ф600. *В схеме, приведенной на рисунке 1, ключ попеременно замыкают и размыкают в те моменты, когда напряжение на первом конденсаторе равно нулю. Нарисовать график зависимости напряжения на катушке индуктивности от времени.*

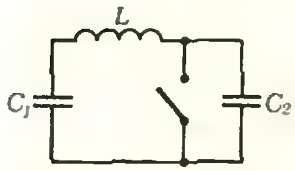


Рис. 1.

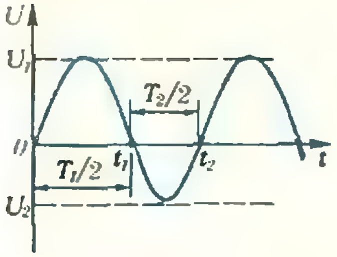


Рис. 2.

При замкнутом ключе конденсатор C_1 и катушка образуют колебательный контур; напряжение на катушке и конденсаторе меняется со временем по гармоническому закону:

$$u = U_1 \sin \omega_1 t, \qquad (*)$$

где $\omega_1 = 1/\sqrt{LC_1}$ — частота колебаний, U_1 — амплитуда. Период T_1 колебаний напряжения (и тока) в этой цепи равен $2\pi/\omega_1 = 2\pi\sqrt{LC_1}$. Следовательно, напряжение u станет равным нулю в момент времени $t_1 = T_1/2 = \pi\sqrt{LC_1}$. В этот момент ток в цепи максимален и вся энергия контура заключена в магнитном поле катушки.

При размыкании ключа последовательно с конденсатором C_1 включается конденсатор C_2 и образуется колебательный контур с индуктивностью L и емкостью $C = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$. Напряжение на катушке в такой цепи меняется по закону

$$u = U_2 \sin \omega_2 (t - t_1),$$

где $\omega_2 = 1/\sqrt{LC} = \sqrt{\dfrac{C_1+C_2}{LC_1C_2}}$. Напряжение вновь обратится в нуль через половину периода колебаний, то есть в момент времени

$$t_2 = t_1 + \frac{T_2}{2} = \pi\left(\sqrt{LC_1} + \sqrt{L\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}\right).$$

Далее ключ замкнется, напряжение на катушке вновь будет меняться по закону (*).

Найдем соотношение между U_1 и U_2. В те моменты, когда напряжение на конденсаторе максимально, ток в контуре равен нулю и вся энергия сосредоточена в электростатическом поле конденсатора. Поэтому согласно закону сохранения энергии

$$\frac{C_1U_1^2}{2} = \frac{CU_2^2}{2},$$

откуда

$$U_2 = U_1\sqrt{\frac{C_1}{C}} = U_1\sqrt{1 + \frac{C_1}{C_2}}.$$

Теперь нетрудно построить график зависимости напряжения на катушке индуктивности от времени. Он показан на рисунке 2.

И. Слободецкий

◆

Ф601. *На Луне в вертикальном цилиндре, закрытом тяжелым поршнем, находится аргон при температуре T_1.*

Процесс происходит на Луне, поэтому внешним давлением можно пренебречь.

Изменение внутренней энергии газа равно работе внешней силы, действующей на газ. Эта сила — вес поршней.

Поршень может перемещаться в цилиндре без трения. На поршень кладут осторожно второй такой же поршень. Определите температуру T_2 газа при новом равновесном положении поршня. Теплоемкость поршня и цилиндра, а также теплоотдачу, не учитывать. Газ считается идеальным.

Так что

$$\frac{3}{2}\nu R(T_1-T_2)=2mg_{\text{л}}(h_2-h_1). \qquad (1)$$

где ν — количество молей газа в сосуде, m — масса одного поршня, $g_{\text{л}}$ — ускорение свободного падения на Луне, h_1 — начальная высота поршней, h_2 — конечная высота поршней.

Запишем уравнения состояний газа:

$$p_1V_1=p_1h_1S=\nu RT_1, \qquad (2)$$

$$p_2V_2=ph_2S=\nu RT_2. \qquad (3)$$

(S — площадь поперечного сечения сосуда). Давления p_1 и p_2 равны соответственно

$$p_1=\frac{mg_{\text{л}}}{S}, \quad p=\frac{2mg_{\text{л}}}{S} \qquad (4)$$

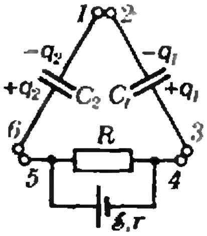
(это следует из условий равновесия поршней: $p_1S=mg_{\text{л}}$, $p_2S=2mg_{\text{л}}$).

Решая совместно уравнения (1) — (4), находим

$$T_2=1{,}4T_1.$$

◆

Ф602. *К цепи, состоящей из резистора с сопротивлением R и источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $r=R/3$, присоединяют конденсаторы с емкостями C_1 и C_2, замыкая клеммы 1—2, 3—4, 5—6 (см. рис.). После замыкания напряжение на конденсаторе C_1 оказывается равным $\mathcal{E}/2$, причем потенциал клеммы 3 выше потенциала клеммы 2. Определите, какой заряд q_0 был на конденсаторе C_2 до замыкания.*



При замыкании клемм произойдет перераспределение зарядов на пластинах конденсаторов (см. рис.). Заряд — q_0 распределится на верхних пластинах конденсаторов C_1 и C_2. По закону сохранения заряда

$$q_1+q_2=q_0.$$

Напряжение U между клеммами 4 и 5 равно IR, где $I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}$, то есть

$$U=\frac{\mathcal{E}R}{R+r}=\frac{\mathcal{E}R}{R+R/3}=\frac{3}{4}\mathcal{E}.$$

Поскольку по условию задачи потенциал клеммы 3 выше потенциала клеммы 2, напряжение между клеммами 1 и 6 равно напряжению между клеммами 2 и 5. Запишем это равенство, выразив разности потенциалов через заряды и емкости конденсаторов:

$$\frac{q_2}{C_2}=\frac{q_1}{C_1}+\frac{3}{4}\mathcal{E}=\frac{1}{2}\mathcal{E}+\frac{3}{4}\mathcal{E}=\frac{5}{4}\mathcal{E},$$

поскольку по условию задачи $\frac{q_1}{C_1}=\frac{\mathcal{E}}{2}$. Таким образом,

$$q_1=\frac{C_1\mathcal{E}}{2}, \quad q_2=\frac{5\mathcal{E}C_2}{4},$$

$$q_0=q_1+q_2=\frac{\mathcal{E}}{4}(2C_1+5C_2).$$

О. Овчинников

◆

Ф603. *Студент ездит в институт на метро по кольцевой линии. Станция, на которой он садится, и станция, на которой он выходит, находятся на противоположных концах диаметра кольца, так что студенту безразлично, в какую сторону ехать. Поэтому он садится в тот поезд, который подойдет раньше. Количество поездов, идущих по кольцу в разные стороны, одинаково. Однако студент заметил, что он чаще ездит на поезде, идущем по часовой стрелке. Как это можно объяснить?*

Обозначим t интервал времени между поездами, идущими в одну сторону. Если промежуток времени между отправлением поезда, идущего по часовой стрелке, и отправлением ближайшего (по времени) поезда, идущего против часовой стрелки, равен τ, то между отправлениями поезда, идущего против часовой стрелки, и поезда, идущего по часовой стрелке, проходит время $t-\tau$. Если $\tau<t/2$, то $t-\tau>\tau$. Вероятность того, что студент придет на станцию в интервал времени $t-\tau$, очевидно, в $(t-\tau)/\tau$ раз больше вероятности того, что он придет в интервал времени τ. Поэтому-то студент и ездит чаще на поезде, идущем по часовой стрелке.

И. Слободецкий

Премии «Кванта»

В 1979/80 учебном году редакция получила более 12 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Специальной премией, учрежденной редакционной коллегией журнала,— подпиской на «Квант» на 1981 год — награждаются школьники, решившие наибольшее число задач или приславшие наиболее оригинальные решения:

АПОЛОНСКИЙ Игорь (г. Жуковский)
БАРГ Анатолий (г. Киев)
ВАСИЛЬЕВ Владислав (г. Великие Луки)
ВАХРИН Сергей (г. Новосибирск)
ВЕЙЦМАН Борис (г. Одесса)
ГАЙСИНСКИЙ Моисей (г. Ташкент)
ГРИГОРЬЕВ Дмитрий (г. Москва)
ЕЛИШЕВИЧ Илья (г. Чернигов)
ЗЕЙФМАН Михаил (г. Вологда)
КОРОБОВ Виктор (г. Кировоград)
ЛУКЬЯНЧУК Игорь (г. Киев)
ЛЯПИН Александр (г. Гомель)
МИХАЙЛОВСКИЙ Сергей (с. Концегорье Архангельской обл.)
ПАВЛЫЧЕВ Андрей (г. Рига)
ПЕНТЕГОВ Всеволод (г. Киев)
ПЕРЕЛЬМАН Григорий (г. Ленинград)
ТИТЕНКО Владимир (д. Блужа Минской обл.)
ЦЕКАНОВСКИЙ Владислав (г. Донецк)
ШКРАДЮК Игорь (г. Ногинск)

За активную работу с учащимися и пропаганду физико-математических знаний, в результате чего многие школьники достигли значительных успехов в нашем конкурсе, подпиской на «Квант» на 1981 год награждаются школа № 145 г. Киева и школа № 11 г. Львова.

За успешное участие в XIV Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на «Квант» на 1981 год награждаются:

ВИШНЯКОВ Владимир (г. Балаково)
ДРЯСОВА Наталия (г. Ангарск)
ИВЛЕВ Вадим (г. Железногорск-Илимский)
КРАСОВ Андрей (г. Узловая)
КУВАТБЕКОВА Роза (г. Фрунзе)
РУДИК Виктория (г. Уральск)
СИНЮКОВ Юрий (ст. Селезни Тамбовской обл.)
ТАНИ Юрий (г. Славгород)
ФРЕГЕР Вячеслав (г. Вольск)
ХОДОРОВСКИЙ Вадим (п. Нововоронежский Воронежской обл.)
ЦЫГВИНЦЕВ Павел (г. Анадырь)
ШИШКЕВИЧ Ирина (г. Чарджоу)
ЯХШИМОВ Хамдам (Хорезмская обл.)

За успешное участие в V Летней школе юных программистов подпиской на «Квант» на 1981 год награждаются:

АБДРАХМАНОВА Гульзина (п. Курайли Актюбинской обл.)
БОРДЕ Сергей (г. Красноярск)
МЕЛЯКОВА Татьяна (п. Чегдомын Хабаровского кр.)
ПОГОЯСН Константин (г. Усть-Каменогорск)
УСТИНОВ Игорь (г. Верхняя Пышма)

За активное участие в Празднике юных математиков (г. Батуми) подпиской на «Квант» на 1981 год награждаются: бакинская школа № 46, батумская школа № 7, киевская школа № 208, ленинградское ПТУ № 24, московские школы №№ 18, 19, 57, 91, тбилисская школа № 96 и член оргкомитета Праздника преподаватель школы № 7 г. Батуми Жгенти М. И. За активное участие в Празднике юных физиков (г. Москва) подпиской на «Квант» на 1981 год награждаются: московские школы №№ 2, 18, 57, 91, 179, школа № 82 п. Черноголовка Московской области и комитет ВЛКСМ Физического института им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР.

Квант для младших школьников

Задачи

Вот уже 17 лет существует в Евпатории городской клуб КС² — Клуб Смекалистых и Сообразительных. Руководит этим клубом учитель школы № 8 Владимир Александрович Славиин. Члены клуба вместе решают задачи, вместе отдыхают. В этом номере мы предлагаем нашим младшим школьникам несколько задача клуба КС².

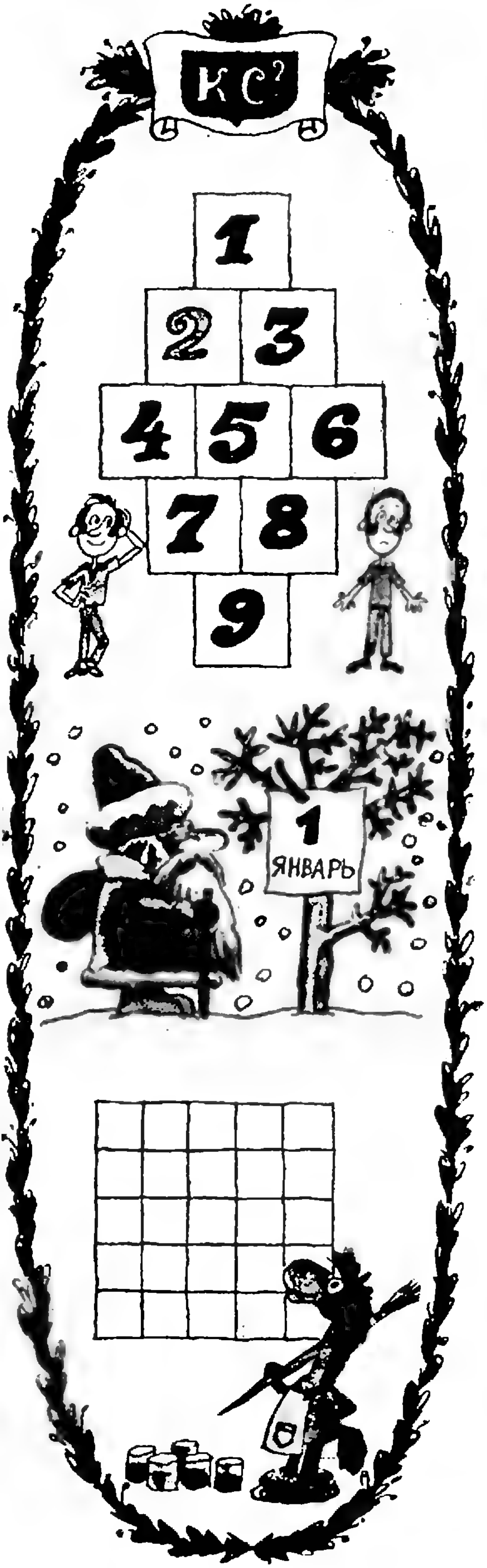
1. Заданы пять чисел: $a_1=1$, $a_2=-1$, $a_3=-1$, $a_4=1$, $a_5=-1$. Шестое число равно произведению первого на второе, седьмое — произведению второго на третье, восьмое — произведению третьего на четвертое и так далее. Какое число получится на 1980-м месте?

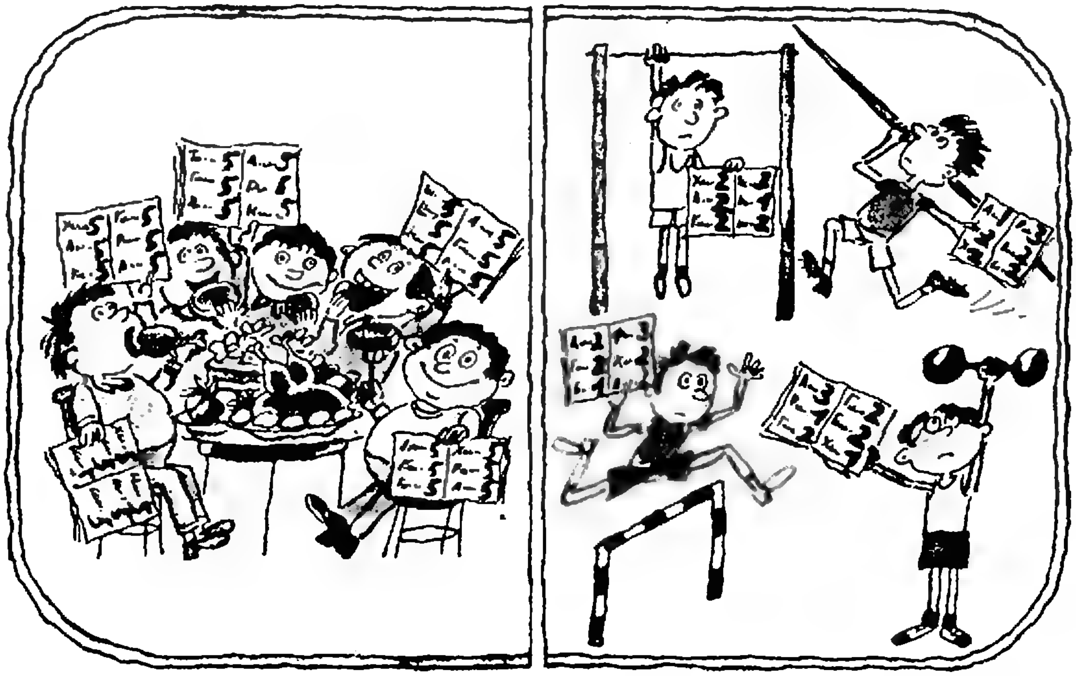
2. Из карточек, на которых написаны цифры, сложена фигура, изображенная на рисунке. Володя предложил Саше разложить карточки так, чтобы фигура осталась прежней, но каждая карточка касалась только новых соседей. Саша до сих пор решает эту задачу и никак не может ее решить. Что вы ему посоветуете?

3. Известно, что в январе — четыре понедельника и четыре пятницы. Какой день недели приходится на 1 января?

4. В стозначном числе 1234567890 1234567890123...7890 вычеркнули все цифры, стоящие на нечетных местах. В полученном пятидесятизначном числе вновь вычеркнули цифры на нечетных местах. Вычеркивание продолжалось до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была вычеркнута последней?

5. Можно ли раскрасить клетки квадратной сетки 5×5 в пять цветов так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце были клетки всех пяти цветов, а поля каждого цвета можно было бы обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом из пяти таких полей ровно один раз?





И. Никольская

«Неверно, что...» — как это понимать?

Петя твердо решил развить у себя силу воли и сказал об этом Кате.

— Начну с того,— доверительно сообщил он сестре,— что составлю план на каникулы и выполню его по всем пунктам.

Накануне каникул Петя торжественно вручил Кате листок бумаги, на котором было аккуратно написано:

> В каникулы я обязательно прочту, по крайней мере, одну толстую книгу, схожу в музей или на лекцию и, если не будет оттепели, все вечера проведу на катке.

Повесив обязательство над кроватью, Петя с первого дня каникул решительно взялся за дело: начал читать «Записки охотника» и принес из библиотеки «Три мушкетера». На другой день он сходил в Зоологический музей посмотреть мамонтенка Диму. Пять вечеров подряд Петя провел на катке, но потом стало совсем тепло (+5°!) и каток пришлось отменить. К концу каникул Петя закончил чтение «Записок охотника» и прочитал половину «Трех мушкетеров». В общем Петя был собой доволен, но Катя сумела испортить ему настроение.

— Между прочим, ты не был на катке ни вчера, ни позавчера,— ехидно заметила она.

— У меня же была уважительная причина! — возмутился Петя.

— Ну, а кроме того, ты не был на лекции,— напомнила Катя.

Сходить на лекцию Петя и в самом деле не собрался, но и тут нашел, что возразить: в Зоологическом музее он слушал экскурсовода, рассказывавшего о мамонтах.

— Но ведь ты собирался в музей или на лекцию, а не в музей и на лекцию сразу,— не унималась Катя,— и «Три мушкетера» не дочитал.

Поняв, что Катю ему не переспорить, Петя махнул рукой и пошел к приятелю Мите, очень рассудительному человеку, интересующемуся к тому же математической логикой.

Мите захотелось утешить расстроенного друга.

— Мы еще посмотрим, кто прав, ты или Катя,— сказал он.— Что значит — ты не выполнил плана? В этом надо разобраться.

И они стали разбираться.

— Сначала давай еще раз перечислим дела, которые ты наметил, — предложил Митя. — Сделаем это так: пусть D_1 — *прочитать, по крайней мере, одну толстую книгу*, D_2 — *сходить в музей*, D_3 — *сходить на лекцию*, D_4 — *все вечера провести на катке*. Теперь запишем взятое тобой обязательство кратко, обозначив условие *не будет оттепели* буквой Y: D_1 *и* (D_2 *или* D_3) *и* (*если* Y, *то* D_4).

— Катя утверждает, что ты не выполнил свое обязательство, т. е. отрицает, что ты его выполнил. Что же это значит — отрицает? В каком случае отрицание какого-либо утверждения истинно, и в каком — ложно? Начнем с простого. Допустим, ты утверждаешь, что «Чапаев» сегодня идет в нашем клубе, а Катя, как всегда, спорит, уверяя, что «Чапаев» сегодня не идет в нашем клубе. Если твое утверждение истинно, то Катино ложно, а если ты ошибаешься, то Катя права.

Отрицанием данного предложения A называют предложение, утверждающее, что *A* не верно; таким образом, если *A* истинно, его отрицание ложно; если же *A* ложно, его отрицание истинно. Отрицание предложения *A* иногда обозначают через $\urcorner A$ или $\overline{A}$ (рис. 1).

Построить для любого предложения его отрицание проще простого: достаточно поставить перед ним слова *неверно, что*. Например, отрицанием предложения *«Чапаев» сегодня идет в нашем клубе* будет предложение *Неверно, что «Чапаев» сегодня идет в нашем клубе*. А предложение *Неверно, что все отличники в нашем классе — спортсмены* — отрицание предложения *Все отличники в нашем классе — спортсмены*.

Однако это *неверно, что* делает предложение громоздким, неуклюжим. В первом случае, как мы с тобой уже видели, можно сказать проще, а именно *«Чапаев» сегодня не идет в нашем клубе*, то есть вместо *неверно, что* в начале предложения поставить *не* перед его сказуемым. А можно ли и во втором случае поступить так же?

— Почему же нет? — удивился Петя. — Пожалуйста: *Все отличники в нашем классе — не спортсмены*.

— Напоминаю, что предложение и его отрицание не могут быть ни одновременно истинными, ни одновременно ложными, — заметил Митя.

Подумав, Петя сказал:

— Да, а предложения *Все отличники в нашем классе — спортсмены* и *Все отличники в нашем классе — не спортсмены* оба ложны: Катька — отличница и фигуристка, а ты вот — отличник, а спортом не занимаешься. К сожалению, некоторые отличники в нашем классе — не спортсмены.

— Вот-вот, — обрадовался Митя, — ты как раз и сформулировал отрицание предложения *Все отличники в нашем классе — спортсмены*: *Некоторые отличники в нашем классе — не спортсмены*. Это предложение имеет тот же смысл, что и предложение *Неверно, что все отличники в нашем классе — спортсмены*. Вообще, отрицанием предложения *Все x обладают свойством P* является предложение *Некоторые x* **не** *обладают свойством P*.

Символически это записывают так:

$$\urcorner \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \urcorner P(x). \qquad (1)$$

Знак $\forall$ означает *все* (*всякий, каждый, любой*), а знак $\exists$ — *некоторый* (*существует, есть, имеется*).

Пусть, например, *x* означает *озеро*, а *P* — свойство *быть пресноводным*; тогда запись (1) будет означать «*Неверно, что все озера пресноводные* равносильно *Некоторые озера — не пресноводные*».

Интересно, что отрицание предложения, имеющего форму $\exists x P(x)$, строится аналогично:

$$\urcorner \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \urcorner P(x) \qquad (2)$$

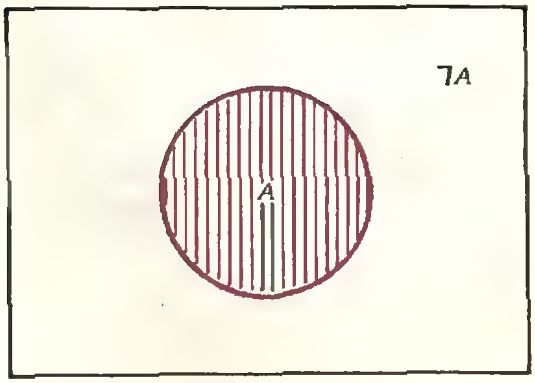


Рис. 1.

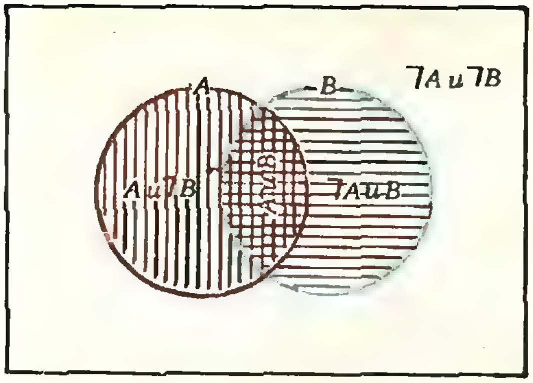


Рис. 2.

Сказать *Неверно, что существует четвероногие птицы* все равно, что сказать *Все птицы не четвероноги.* Понял? Теперь тебе легче спорить с Катей. Она скажет тебе, например: «Опять ты все конфеты съел!». А ты ей в ответ: «Существует конфета, которую я не съел». И извлечешь из коробки последнюю конфету. Она тебе: «Некоторые мальчишки — такие сластены». А ты ей гордо: «Все мальчишки — не сластены». Правда, этого ты не докажешь, даже если приведешь в пример десяток или два знакомых мальчишек, презирающих сласти.

Так обстоит дело с отрицаниями простых предложений. Если в них нет (и не подразумевается) слов *все* (*всякий, каждый, любой*) или *некоторые* (*существует, есть, имеется*), то для построения отрицания достаточно поставить *не* перед сказуемым. Если же перед подлежащим простого предложения стоит (или подразумевается) слово *все*, либо слово *некоторые*, то для того, чтобы получить его отрицание, нужно не только поставить *не* перед сказуемым, но и заменить слово *все* словом *некоторые*, а слово *некоторые* словом *все*.

А теперь давай посмотрим, как образуются отрицания сложных предложений, имеющих форму *A и B*. *A или B*. *Если A, то B*. Как, например, ты станешь отрицать, что опоздал в школу и получил двойку?

— Скажу, что не опаздывал и не получал двойки.

— Но ведь предложения *Ученик опоздал в школу и получил двойку* и *Ученик не опаздывал в школу и не получал двойки* могут оказаться одновременно ложными. Так будет, например, в том случае, если этот ученик пришел в школу вовремя, но двойку получил. Значит, ты построил свое отрицание неправильно. Отрицанием предложения, имеющего форму *A и B*, является предложение ¬*A или* ¬*B*, где *или* имеет неразделительный смысл, то есть допускает возможности: 1) *A и* ¬*B*, 2) ¬*A и B*, 3) ¬*A и* ¬*B*. Понять это тебе поможет рисунок 2. На этом рисунке круг *A* соответствует утверждению «*A* истинно», а круг *B* — утверждению «*B* истинно». Все, что осталось за пределами круга *A*, соответствует истинности ¬*A*, а все, что находится за пределами *B*, соответствует истинности ¬*B*. Отсюда ясно, что область «в клеточку» соответствует истинности *A и B*, область «в вертикальную полоску» — истинности *A и* ¬*B*, область «в горизонтальную полоску» — истинности ¬*A и B*, незаштрихованная область — истинности ¬*A и* ¬*B*. Итак, область «в клеточку» соответствует истинности *A и B*, а все остальное — истинности ¬(*A и B*). Но это «все остальное» состоит из областей истинности *A и* ¬*B*, ¬*A и B*, ¬*A и* ¬*B*.

— Теперь я понял, — сказал Петя. — Отрицая обвинение сразу в двух прегрешениях, я должен был сказать, что не совершал хотя бы

одного из них — не опоздал в школу или не получил двойки.

— Молодец! — похвалил Митя товарища. — А теперь сообрази, как построить отрицание предложения *А или В*. Как мы с тобой уже выяснили, это предложение истинно, когда *А* истинно, а *В* ложно, когда *А* ложно, а *В* истинно и когда *А* и *В* оба истинны. На рисунке 2 этому предложению соответствует вся заштрихованная область.

— Ну, это совсем легко, — сказал Петя. — Ясно, что $\neg(A \textit{ или } B)$ — это $\neg A \textit{ и } \neg B$. Значит, отрицанием предложения *Мальчик сходил в музей или на лекцию* будет предложение *Мальчик не сходил в музей и не сходил на лекцию*. Так ведь? А я в музее был. Выходит, зря Катька ко мне придиралась.

— По этому поводу, конечно, зря, — отозвался Митя. — Но давай до конца разберемся. Ты собирался, если не будет оттепели, все вечера провести на катке. Этот пункт твоего обязательства имеет форму условного предложения *Если А, то В*. Как же построить отрицание такого предложения?

— *Если не А, то не В*, — не задумываясь, ответил Петя. — Хотя нет: *Если А, то не В*. А может быть *Если не А, то В*?

— Не торопись, — остановил его Митя. — На этот вопрос трудно сразу ответить правильно. Дело в том, что условное предложение *Если А, то В* приходится иногда рассматривать и при ложном *А*. В этом случае его естественно считать истинным. Ведь если ты скажешь Кате: «Если завтра выпадет снег, то я поеду за город», а снега не будет, наверное, даже она не скажет, что ты соврал. Таким образом, условное предложение *Если А, то В* ложно только в том случае, когда *А* истинно и *В* ложно. Поэтому отрицанием этого предложения будет предложение

— *А и не В*! — перебил приятеля Петя. — Вот это неожиданность! Действительно, сразу ни за что не догадаешься. Впрочем, когда я говорю Катьке: «Если я схожу в магазин, то ты дашь мне списать задачу», она всегда возражает: «В магазин сходишь как миленький, а задачу списать не дам».

— Ну, вот, — сказал Митя, — теперь мы сможем проверить выполнил ли ты свое обязательство, и выяснить, кто прав — ты или Катя.

Символически правила взятия отрицания, до которых мы додумались, записываются так:

$$\neg(A \text{ и } B) \Leftrightarrow \neg A \text{ или } \neg B \qquad (3)$$

$$\neg(A \text{ или } B) \Leftrightarrow \neg A \text{ и } \neg B \qquad (4)$$

$$\neg(\text{если } A, \text{ то } B) \Leftrightarrow A \text{ и } \neg B. \qquad (5)$$

Вернемся к краткой записи твоего обязательства:

$$D_1 \textit{ и } (D_2 \textit{ или } D_3) \textit{ и } (\textit{если } Y, \textit{ то } D_4).$$

Катя отрицает, что ты его выполнил, то есть утверждает, что истинно предложение

$$\neg[D_1 \textit{ и } (D_2 \textit{ или } D_3) \textit{ и } (\textit{если } Y, \textit{ то } D_4)].$$

«Расшифруем» эту запись. Сначала вспомним правило (3). Применив это правило дважды, получим

$$\neg D_1 \textit{ или } \neg(D_2 \textit{ или } D_3) \textit{ или } \neg(\textit{если } Y, \textit{ то } D_4).$$

Теперь применим правила (4) и (5). Получим

$$\neg D_1 \textit{ или } (\neg D_2 \textit{ и } \neg D_3) \textit{ или } (Y \textit{ и } \neg D_4).$$

Катя права в том и только в том случае, если хотя бы одно из предложений $\neg D_1$, $\neg D_2 \textit{ и } \neg D_3$, $Y \textit{ и } \neg D_4$ истинно. Разберем каждое из этих предложений в отдельности.

$\neg D_1$ означает *Неверно, что ты прочитал по крайней мере одну толстую книгу*, то есть что ты не прочитал ни одной толстой книги. Но ты прочитал «Записки охотника»; значит, $\rceil D_1$ ложно.

$\rceil D_2$ *и* $\rceil D_3$ означает, что ты не сходил ни в музей, ни на лекцию. Но ты сходил в музей; значит, это утверждение ложно.

Y *и* $\rceil D_3$ означает, что не было оттепели, но ты не все вечера провел на катке, или, иначе, не было оттепели и были вечера, которые ты не провел на катке. Такие вечера и вправду были, но утверждение *Не было оттепели* не соответствует действительности, то есть ложно. Значит, и утверждение Y *и* $\rceil D_4$ ложно.

Вот мы с тобой и убедились, что Катя неправа. Теперь нужно и ее в этом убедить. Расскажи ей все, что ты узнал об отрицании, а чтобы усвоить это понятие и проверить себя, подумайте вместе над такими вопросами и задачами:

1. Какое из предложений $a<2$, $a\leqslant 2$ является отрицанием предложения $a>2$? Почему?

2. Является ли отрицанием предложения *Он — мой друг* предложение *Он — мой враг?* Почему?

3. Скажите по-другому:

а) *Неверно, что 551 — простое число.*

б) *Неверно, что все млекопитающие живут на суше.*

в) *Неверно, что некоторые собаки летают.*

4. Что утверждает предложение *Неверно, что* $2\cdot 2\neq 4$?

5. Что утверждает предложение *Неверно, что все простые числа нечетны?* Истинно или ложно это утверждение?

6. Сформулируйте в утвердительной форме (то есть так, чтобы в начале предложения не было *не* или *неверно, что*) отрицание предложения *Существует школа, все ученики которой не интересуются спортом.*

7. На вопрос Кости, можно ли ему пойти в кино или погулять, мама ответила отрицательно. Как должен поступить Костя, чтобы не ослушаться маму?

8. Постройте отрицание предложения *Если число 899 делится на 31, то это число делится на 13.* Установите, истинно это предложение или ложно.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 21, 33)

И. Житенев (п. Черноголовка Московской обл.) **89, 93—97, 99, 01, 02;** *В. Жордочкин* (Орск) **89, 94, 96, 99, 01, 02;** *А. Заневский* (Ленинград) **94—96, 02;** *М. Зейфман* (Вологда) **89, 90, 94—96, 99, 01;** *И. Зильберберг* (Алма-Ата) **95—97, 99—02;** *И. Иванов* (Саратов) **89, 91, 95—97, 99—02;** *В. Изергин* (Новосибирск) **93, 95—97, 99, 02;** *В. Израилит* (Днепропетровск) **95, 97, 99;** *А. Иовайта* (Каунас) **99;** *В. Кагиловский* (Харьков) **93, 01;** *С. Калмыков* (Копейск) **94;** *Д. Каплан* (Зеленоград) **99;** *А. Карасев* (Белгород) **01;** *В. Катин* (Житомир) **89;** *Э. Кафаров* (Баку) **89;** *А. Кечеджян* (Ереван) **99, 01;** *В. Киреев* (Фрунзе) **94;** *Ю. Коверник* (Запорожье) **93—97, 99;** *Е. Коган* (Днепропетровск) **89—91, 94—96, 99—02;** *В. Козловский* (Новолукомль) **89—91, 94, 95, 97, 02;** *А. Кожевников* (Днепропетровск) **93, 95;** *Т. Кожоридзе* (Телави) **89—91, 93, 95, 97;** *Г. Коломойцев* (Сумгаит) **93—96, 00, 02;** *В. Комов* (Александров) **89, 91, 93—95, 97, 99, 00, 02;** *Т. Кондрацкая* (Киев) **94—97, 02;** *С. Копкин* (Арзамас) **94—96;** *В. Коробов* (Кировоград) **90, 94, 95, 99;** *М. Костик* (Саратов) **94, 95;** *И. Костюкович* (Ленинград) **93, 95;** *К. Крапивной* (Запорожье) **94—97, 00;** *И. Красиков* (Киев) **95—97, 99, 00;** *М. Кривега* (Саратов) **94, 95;** *Р. Крис* (Киев) **94—97, 01;** *Е. Кузнецов* (Кишинев) **90, 95, 02;** *П. Кузнецов* (Киев) **91, 93—97, 00, 02;** *А. Кузьмин* (Алма-Ата) **90, 91;** *А. Кузьмин* (Киев) **99;** *С. Курчатов* (Саратов) **89, 91, 95—97, 99—02;** *Н. Кухианидзе* (Кутаиси) **99;** *Б. Лапидус* (Москва) **94, 01;** *Б. Лейтес* (Москва) **99;** *И. Леонов* (Воронеж) **93—96, 99, 01;** *И. Лукьянчук* (Киев) **95, 96;** *Е. Любовицкий* (Кострома) **94;** *А. Ляпин* (Гомель) **93, 95—97, 99, 00, 02;** *А. Мазуркевич* (Лыткарино) **89—91, 93—97, 00, 02;** *О. Мануйленко* (Киев) **99, 01;** *З. Мардарашвили* (Кутаиси) **93, 94;** *С. Махортых* (Лисичанск) **94, 96, 97;** *А. Мельник* (Житомир) **94;** *А. Микула* (Жидачов) **89, 93—97, 99, 00, 02;** *С. Милованов* (Запорожье) **99, 00;** *А. Минаев* (Саратов) **91, 93—96, 99—02;** *И. Михайлов* (Кемерово) **94, 95;** *С. Михайловский* (Виноградовский р-н Архангельской обл.) **95;** *Г. Молчанов* (Саратов) **89, 91, 95—97, 99—02;** *Ю. Морозов* (Киев) **93;** *Р. Набоков* (Москва) **94—97, 99, 00, 02;** *С. Надточий* (Москва) **89—91, 93—97, 99—02;** *А. Назаренко* (Киев) **91, 93—97, 01;** *А. Найден* (Берлин, ГДР) **99, 01;** *Н. Никонова* (Свердловск) **94;** *Д. Ноздрин* (Саратов) **00—02;** *С. Обогуев* (Ленинград) **95—97, 99—02;** *Д. Овсянников* (Ленинград) **89, 91, 93, 95—97, 00—02;** *О. Одилов* (Кулябская обл. ТаджССР) **01;**

(Окончание см. на с. 49)

А. Земляков

Проверьте себя

Открывая в новом учебном году наш раздел «По страницам школьных учебников», мы предлагаем нашим читателям, в качестве разминки перед началом учебного года, проверить свои знания за прошедший год. Для этого им следует выполнить публикуемое ниже задание: девятиклассникам — за VIII класс, десятиклассникам — за IX класс. Для каждого из 10 вопросов нужно выбрать единственный правильный ответ; на выполнение всего задания отводится 30 минут.

Это задание предлагалось на республиканских турах Всесоюзной математической олимпиады 1980 г. Не следует, однако, думать, что речь идет о решении хитрых, «олимпиадных» задач: задание состоит из простых вопросов, проверяющих знания учащихся по основным темам курса математики VIII—IX классов.

Итак, наточите карандаши, засеките время...

VIII класс

Алгебра

1. Какая из указанных формул задает параболу, изображенную на рисунке 1?

А) $y=-x^2+2$;
Б) $y=-x^2+2x$;
В) $y=-x^2-2x$;
Г) $y=-(x-1)^2$;
Д) $y=-(x-2)^2$.

2. Что представляет собой график уравнения $x^2+xy=0$?

А) Точку;
Б) Прямую;
В) Объединение двух прямых;
Г) Окружность;
Д) Пустое множество.

3. Сократите следующую дробь: $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$.

А) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$; Б) $\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}$;
В) $\frac{x^2+xy+y^2}{x-y}$; Г) $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$.
Д) $\frac{x^2+xy-y^2}{x+y}$

4. При каких значениях x верно равенство $\sqrt{x^2}=|x|$?

А) При всех x;
Б) Только при $x\geqslant 0$;
В) Только при $x\leqslant 0$;
Г) Только при $x=0$;
Д) Ни при каких x.

5. Какова область определения выражения $(a-5)^{-\frac{1}{3}}$?

А) $]-\infty;\ +\infty[$.
Б) $]-\infty;\ 5[\cup]5;\ +\infty[$;
В) $[5;\ +\infty[$;
Г) $]5;\ +\infty[$;
Д) $\varnothing$.

6. Каково множество решений неравенства $(0{,}1)^x>100$?

А) $]-\infty;\ 2[$;
Б) $]2;\ +\infty[$;
В) $]-\infty;\ -2[$;
Г) $]-2;\ +\infty[$;
Д) $\varnothing$.

Геометрия

7. Чему равно значение $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ и $0°<\alpha<180°$?

А) $\frac{1}{2}$; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
Г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; Д) Определить нельзя.

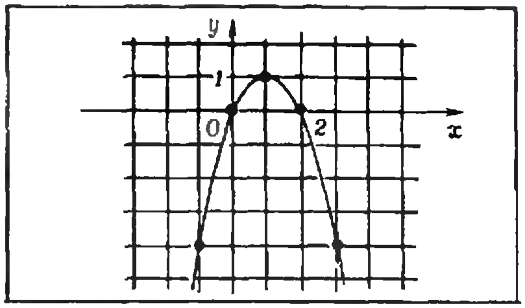


Рис. 1.

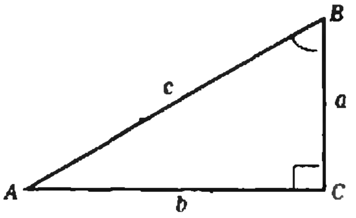


Рис. 2.

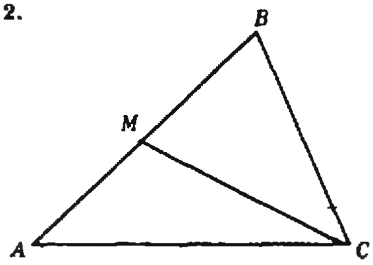


Рис. 3.

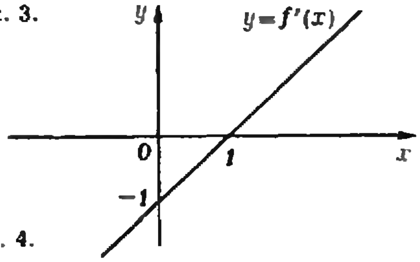


Рис. 4.

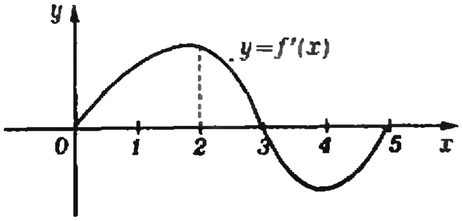


Рис. 5.

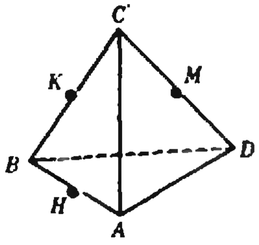


Рис. 6.

8. В прямоугольном треугольнике ABC длины сторон равны a, b и c, как показано на рисунке 2. Чему равен $\sin \widehat{B}$?

А) $\frac{a}{b}$; Б) $\frac{a}{c}$; В) $\frac{c}{a}$;
Г) $\frac{c}{b}$; Д) $\frac{b}{c}$.

9. Два угла треугольника ABC равны $\widehat{A}=20^\circ$ и $\widehat{B}=60^\circ$. Где лежит центр окружности, описанной около этого треугольника?

А) Вне треугольника;
Б) Внутри треугольника;
В) На стороне AB;
Г) На одной из двух других сторон;
Д) Определить нельзя.

10. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC (рис. 3). Какому из указанных ниже векторов равна сумма векторов $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}$?

А) $\overrightarrow{CA}$; Б) $\overrightarrow{CB}$; В) $\overrightarrow{AC}$; Г) $\overrightarrow{BC}$; Д) $\overrightarrow{AB}$.

IX класс

Алгебра и начала анализа

1. Каково множество решений неравенства $|x-2|<1$?

А) $]-\infty;\ 3[$;
Б) $]0;\ 3[$;
В) $]1;\ 3[$;
Г) $]2;\ 3[$;
Д) Нужное множество не указано.

2. Какое множество задает на координатной плоскости уравнение $x^2+xy=0$?

А) Прямую;
Б) Объединение двух прямых;
В) Точку;
Г) Окружность;
Д) Пустое множество.

3. Какая из указанных функций имеет предел 1 при $x \to 0$?

А) x; Б) $\frac{1}{x}$; В) $1+2x$; Г) $1+\frac{1}{x}$;
Д) Ни одна из этих функций не подходит.

4. Какая из указанных функций имеет производную, график которой изображен на рисунке 4?

А) $f(x)=x^2-1$; Б) $f(x)=x^2-x$;
В) $f(x)=\frac{x^2}{2}-1$; Г) $f(x)=\frac{x^2}{2}-x$;
Д) $f(x)=-\frac{x^2}{2}+x$.

5. Какая из указанных функций является производной для функции $y=\sqrt{x^2+1}$?

А) $\sqrt{2x+1}$; Б) $\sqrt{2x}$; В) $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$;
Г) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; Д) $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$.

6. Какие промежутки возрастания имеет функция f, если график ее производной выглядит так, как изображено на рисунке 5?

А) [0; 2];
Б) [0; 3];
В) [2; 4];
Г) [0; 2] и [4; 5];
Д) [0; 3] и [4; 5].

Геометрия

7. Точки *H*, *K*, *M* — середины ребер *AB*, *BC* и *CD* произвольного тетраэдра *ABCD* (рис. 6). Какие еще ребра тетраэдра, кроме указанных, пересекает плоскость (*HKM*)?

А) *AD*; Б) *BD*; В) *AC*; Г) Других ребер плоскость (*HKM*) не пересекает; Д) Определить нельзя.

8. Сколько существует плоскостей, проходящих через данную точку и параллельных двум данным параллельным между собой прямым?

А) Ни одной;
Б) Одна;
В) Две;
Г) Бесконечно много;
Д) Правильный ответ не указан.

9. Какому из указанных ниже векторов равна сумма векторов $\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CM}$, где точки *H* и *M* — середины ребер *AB* и *CD* тетраэдра *ABCD* (см. рисунок 6)?

А) $\vec{0}$; Б) $\overrightarrow{HC}$; В) $\overrightarrow{AC}$; Г) $\overrightarrow{AH}$; Д) $\overrightarrow{HA}$.

10. Скалярное произведение двух векторов равно — 2. Что можно сказать об угле между этими векторами?

А) Острый;
Б) Тупой;
В) Прямой;
Г) Определить нельзя, острый угол, тупой или прямой;
Д) Скалярное произведение не может равняться — 2.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 21, 33, 46)

С. Одинцова (Киев) **99**; *А. Орлов* (п. Черноголовка Московской обл.) **89—91, 95, 96**; *А. Осипов* (Сосновый Бор Ленинградской обл.) **89, 95**; *И. Осовяк* (с. В. Ледеркалы Тернопольской обл.) **94—97, 00—02**; *О. Панищенко* (Киев) **90, 94—97, 00—02**; *А. Пантелеев* (Ростов-на-Дону) **94**; *В. Пентегов* (Киев) **94, 96, 97—99**; *Г. Перельман* (Ленинград) **95**; *С. Пишенин* (Череповец) **90**; *А. Полисский* (Киев) **95, 96**; *Е. Поляков* (Калининград Московской обл.) **94, 96**; *А. Пономаренко* (Киев) **89, 90, 94, 97, 01**; *Е. Рибкин* (Гомель) **89**; *С. Равняго* (Золочев Львовской обл.) **94—96, 02**; *Ю. Рачинский* (Москва) **99**; *В. Рогозин* (Щелково) **95**; *Б. Рублев* (Киев) **99, 01**; *Г. Рыбкин* (Смоленск) **99, 02**; *С. Рязанцева* (Борисоглебск) **94, 95, 00, 02**; *А. Санжур* (Киев) **95, 97, 99, 01, 02**; *В. Саракули* (Ижевск) **90, 94—96**; *С. Семифонова* (с. Попелево Калужской обл.) **95—97, 01**; *Т. Сергейцев* (Челябинск) **89—91, 93—97, 99—01**; *В. Середа* (Львов) **89, 93—97, 99, 01**; *А. Сивенцев* (Свердловск) **01**; *В. Сидорин* (Реутов) **95**; *Н. Сирых* (Ярославль) **95, 97, 99, 01**; *И. Скивронский* (Андижан) **99**; *А. Скок* (Талгар) **89, 94—97, 00, 01**; *С. Скопцов* (Ангарск) **89, 90, 94, 95**; *Н. Смирнов* (Москва) **01**; *С. Смирнов* (Ташкент) **93, 95, 97, 99**; *Г. Солдак* (Минск) **89, 90, 93—97**; *Д. Сорока* (Запорожье) **90, 93—97, 99, 00, 02**; *А. Спивак* (Стерлитамак) **01**; *Д. Суворов* (Свердловск) **94, 95**; *П. Страдынь* (Рига) **94—96, 00, 01**; *А. Стрешинский* (Донецк) **89, 94, 95, 97, 99—02**; *Д. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) **95, 00, 01**; *А. Сырок* (Страшены) **99**; *А. Уливинов* (Горький) **95—97, 01**; *В. Усачев* (Ромны Сумской обл.) **01**; *В. Усов* (Томск) **89, 95, 97, 00, 01**; *Л. Уткин* (Вологда) **94—96, 01**; *В. Фарбер* (Баку) **89, 95, 96, 99, 01**; *Н. Федин* (Омск) **89, 93—97, 99—02**; *В. Федюкович* (Киев) **94—96, 99—02**; *Е. Феликсон* (Пенза) **94, 95**; *А. Фетискин* (Рязань) **94**; *А. Флерон* (Рига) **89, 95—97**; *И. Фоменко* (Днепропетровск) **90, 93—01**; *О. Фонарев* (Сумгаит) **92, 96, 99**; *Д. Харзеев* (Курск) **01**; *О. Хорошевская* (Новосибирск) **94**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **89—91, 95—97, 99, 01, 02**; *Л. Хризман* (Киев) **91, 94, 95, 97, 00, 01**; *М. Цолик* (Орск) **96**; *Ю. Цыганков* (Дрожжановский р-н ТАССР) **89, 91, 93, 95, 97, 99**; *А. Чепуров* (ст. Григорополисская Ставропольского кр.) **99, 01**; *Е. Чулкин* (с. Рябово УАССР) **90, 95, 01**; *А. Чулков* (р. п. Мученский Тамбовской обл.) **01**; *А. Чумадин* (Баку) **93, 95—97, 99, 00**; *А. Чумаков* (Куйбышев) **93, 95, 97, 00**; *В. Шаблинский* (Киев) **89—91, 94—97, 01**; *С. Шарый* (Семипалатинск) **89, 94, 95, 97**; *И. Швец* (Желтые Воды) **94—97**; *А. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) **01**; *М. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) **01**; *А. Шеринев* (Москва) **00, 01**; *В. Шик* (Сумгаит) **95, 97**; *А. Шимановский* (Гомель) **95—97**; *И. Шкридюк* (Ногинск) **90, 93—95, 97**; *С. Шляков* (Саратов) **95, 97**; *В. Юсупов* (Баку) **99**; *Л. Ящук* (Ровно) **96, 99**.

Как всегда, с сентябрьского номера нашего журнала начинается новый учебный год в «Практикуме абитуриента». В этом разделе редакция «Кванта» будет систематически публиковать материалы, адресованные, в первую очередь, тем, кто готовится к вступительным экзаменам в вузы.

Читатели найдут в статьях «Практикума абитуриента» подробное разъяснение наиболее трудных тем и отдельных теоретических вопросов школьных курсов математики и физики, анализ особенно часто встречающихся ошибок поступающих, методические рекомендации, разбор решений типичных задач из вариантов приемных экзаменов. На страницах этого раздела будут помещены также образцы вариантов письменных экзаменов и задач устных экзаменов по математике и физике, которые предлагались в 1980 году в различных вузах нашей страны.

Статьи «Практикума абитуриента» будут полезны не только тем, кто собирается поступать на математические или физические факультеты университетов и институтов, но и абитуриентам технических вузов. Сегодняшние десятиклассники, особенно те из них, кто живет в селах, рабочих поселках, вдали от научно-педагогических центров, получат возможность узнать, что представляет собой приемный экзамен, какие требования предъявляются к поступающим. Кстати, многое в материалах «Практикума абитуриента» будет доступно и девятиклассникам, так что читать этот раздел могут все старшеклассники.

Будущих абитуриентов, конечно, интересует вопрос, как лучше организовать подготовку к приемным экзаменам. Прежде всего, нужно внимательно познакомиться с «Программами вступительных экзаменов для поступающих». Там подробно перечислены основные математические и физические понятия, которыми должен владеть поступающий, теоремы и утверждения, которые надо уметь доказывать, факты, которые необходимо знать. Все эти сведения содержатся в школьных учебниках — их-то и надо в первую очередь тщательно изучить. Для успешной сдачи вступительных экзаменов никаких дополнительных — по сравнению со школьными курсами математики и физики — знаний не требуется. Однако не следует думать, что достаточно еще раз просто прочесть школьные учебники! Необходимо внимательно разобрать и глубоко усвоить теоретический материал, получить твердые и прочные навыки в решении задач. Залог успеха на экзаменах — систематическая и регулярная самостоятельная работа в течение всего оставшегося до экзаменов времени. Математику и физику нельзя выучить за один день или за одну неделю — только планомерные длительные занятия сделают экзаменационные задачи и вопросы простыми и легкими.

Несколько слов еще об одном вопросе — о репетиторах. Не секрет, что некоторые поступающие (а еще чаще — их родители) надеются с помощью репетиторов перед экзаменами быстро и без особого труда повторить необходимый теоретический материал и познакомиться с методами решения типичных задач. Это глубокое заблуждение! Никакие репетиторы не могут заменить главного — подлинного интереса к избранной специальности, внутренней потребности учиться, упорного и настойчивого труда.

Редакция журнала «Квант» надеется, что раздел «Практикум абитуриента» станет добрым советчиком поступающих в вузы. Кроме материалов, которые появятся в этом разделе в последующих номерах журнала, можно порекомендовать поступающим познакомиться и с некоторыми статьями, опубликованными в прошлые годы. Тематический список таких статей помещен в «Кванте», 1980, № 1, с. 46—47.

Ю. Метт

Три стандартные задачи

Поводом для этой статьи послужили грубые ошибки, допускаемые иногда школьниками при решении некоторых стандартных задач.

Задача 1. *Решить систему*

$$\begin{cases} x^4-1330x-23=0, \\ x^4-1319x-144=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Порой предлагается такое «решение»: вычтя из первого уравнения системы (1) второе уравнение, получим уравнение $-11x+121=0$, откуда $x=11$. Однако нетрудно заметить, что найденное значение не является решением ни одного из данных уравнений: их свободные члены на 11 не делятся. В чем же ошибка?

Дело в том, что уравнение

$$-11x+121=0, \qquad (2)$$

имеющее единственное решение $x=11$, является только следствием системы (1), оно не равносильно ей: всякое решение системы (1), действительно, является решением уравнения (2), но не наоборот. Поэтому пока можно сделать лишь вывод: если система (1) имеет решение, то оно единственно и является решением уравнения (2). Подставляя $x=11$ в систему (1) или рассуждая, как выше, делаем окончательный вывод: система (1) решений не имеет.

Задача 2. *При каких значениях параметра k сумма квадратов корней уравнения*

$$4x^2-28x+k=0 \qquad (3)$$

равна 22,5?

Обычно предлагается такое «решение»:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

Если x_1 и x_2 — корни уравнения (3), то по теореме Виета $x_1+x_2=7$ и $x_1x_2=k/4$. Тогда из (4) $k=53$.

Но это число нельзя считать ответом задачи 2, так как оно было получено в дополнительном предположении, что корни существуют, то есть, что уравнение (3) имеет решение. Однако при $k=53$ дискриминант уравнения (3) 14^2-4k отрицателен и уравнение решений не имеет. Таким образом, правильный ответ в задаче 2 — «ни при каких».

Задача 3. *В какой точке функция*

$$y=(2+\sin x)(6-\sin x) \qquad (5)$$

принимает наибольшее значение на числовой прямой?

Один школьник предложил следующее «изящное решение» этой задачи (беда только в том, что оно неверно):

Как известно, если данное положительное число надо разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим, эти слагаемые надо взять одинаковыми (задача № 501 в пособии «Алгебра и начала анализа 9»). Поскольку

$$(2+\sin x)+(6-\sin x)=8,$$

функция (5) принимает наибольшее значение на $\mathbf{R}$ при $2+\sin x=6-\sin x$, то есть при $\sin x=2$ — абсурд! Поэтому этот школьник сделал вывод, что функция (5) экстремальных значений не имеет.

Решив эту задачу обычным способом (используя производную), легко найти, что функция (5) имеет экстремальные значения в точках, для которых $\cos x=0$, именно, $y_{\min}=7$, $y_{\max}=15$.

В чем же ошибка первого рассуждения? А дело в том, что в задаче 3 речь идет не о числах, а о функциях, и нужное нам утверждение, обобщающее вышеприведенное, звучит так: *если всюду определенная функция f принимает в какой-то точке x_0 значение $\frac{c}{2}$, то функция*

$$g(x)=f(x)\cdot[c-f(x)]$$

(Окончание см. на с. 60)

Заочная школа программирования

Ровно год назад в «Кванте» были напечатаны первые уроки Заочной школы программирования, организованной редакцией нашего журнала и Вычислительным центром Сибирского отделения АН СССР. Сегодня в нашей школе занимаются свыше двух тысяч ребят разного возраста — от третьего до десятого класса — из всех республик Советского Союза и некоторых зарубежных стран. В работе Школы участвуют более 40 групп «Коллективный ученик», создано два региональных центра (в Ленинграде и Свердловске).

Летом 1980 года активисты Заочной школы были приглашены на V Летнюю школу юных программистов, проходившую в новосибирском Академгородке (о ней мы расскажем в № 12).

Сегодня начинается публикация уроков второго курса Заочной школы. Напоминаем, что решения заданий каждого урока должны быть выполнены в отдельной тетради в клеточку или на двойном листе. На обложке тетради (или на первой странице листа) необходимо указать фамилию, имя, отчество, регистрационный номер, точный почтовый домашний адрес (с указанием индекса), номер школы и класса. К работе необходимо приложить полностью подписанный (включая обратный адрес) конверт нужного размера для возвращения проверенной работы. На этот конверт надо наклеить шестикопеечную марку.

Работы, оформленные с нарушением этих правил, не проверяются и не возвращаются.

Работы надо отправлять на проверку не позднее 15 дней с момента получения журнала (дату получения журнала укажите на обложке тетради или первом листе). Отправлять работы надо только простым (незаказным) письмом или простой бандеролью. В правом нижнем углу конверта пишите слово «КВАНТ».

Школьники, проживающие в прибалтийских республиках, в Псковской, Новгородской, Ленинградской, Архангельской и Вологодской областях, в Карельской и Коми АССР, направляют свои работы по адресу: *190000, Ленинград, ул. Герцена 67, ЛИАП, кафедра вычислительной математики и АСУ, Северо-Западный филиал Заочной школы программирования.*

Школьники, проживающие в Свердловской, Пермской, Челябинской и Оренбургской областях и Башкирской АССР, пишут по адресу: *620219, Свердловск, ул. К. Либкнехта 9, Педагогический институт, кафедра вычислительной математики и программирования, Уральский филиал Заочной школы программирования.*

Жители остальной территории СССР и зарубежные читатели направляют работы по прежнему адресу: *630090, Новосибирск 90, проспект Науки 6, ВЦ СО АН СССР, отдел информатики, Заочная школа программирования.*

Учащиеся 5—9 классов, желающие присоединиться к работе школы, могут начать заниматься со второго курса. Для этого необходимо прислать заявление по форме, приведенной в «Кванте», 1979, № 9, не позднее, чем через 15 дней после получения этого журнала; прочитать уроки первого курса «Квант», 1979, №№ 9—11 и 1980, №№ 1—3); выполнить все задания первого курса, включая задачи Олимпиады по программированию («Квант», 1980, № 3); отправить решения в Заочную школу не позднее 7 ноября 1980 г. По результатам проверки этих решений новички будут зачисляться на второй курс, о чем они получат соответствующие извещения.

Из-за типографских трудностей в уроках второго курса задания для самостоятельного исполнения не будут отмечаться стрелками. Задания повышенной трудности, выполнение которых не обязательно, будут обозначаться звездочкой.

Желаем удачи!

Урок 9: Циклы

С понятием цикла читатели «Кванта» познакомились в № 1 за 1980 г., где была приведена синтаксическая диаграмма оператора цикла в Рапире.

Сегодня мы рассмотрим некоторые примеры использования циклов.

Для начала составим программу, которая с помощью процедур Шпаги

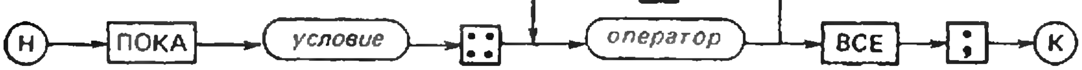


Рис. 1.

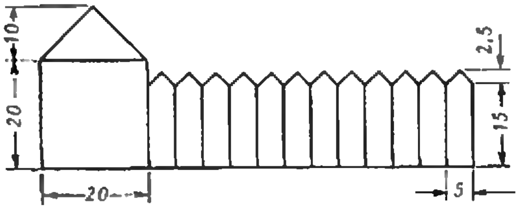


Рис. 2.

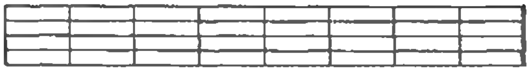


Рис. 3.

(«Квант», 1980, № 1) рисует нотную строку (рис. 1) длиною 100 мм с расстоянием между линейками в 2,5 мм. Допустим, что нижняя линейка должна быть проведена на высоте 10 мм.

До написания программы отметим следующее:

— неразумно рисовать каждую линейку отдельно: надо написать операторы рисования одной линейки, а затем несколько раз повторить их в *цикле*;

— поскольку одна линейка от другой отличается только высотою, в качестве *переменной цикла* имеет смысл выбрать координату y;

— при каждом повторении цикла его переменная изменяется на постоянную величину $\Delta y = 2{,}5$, которую называют *шагом*;

— первое выполнение повторяющихся в цикле операторов (рисование первой снизу линейки) осуществляется при $y_0 = 10$; значит, перед началом цикла нужно обеспечить, чтобы величина y получила *начальное значение* 10; присваивание начального значения переменной цикла называют ее *инициализацией*; повторяющиеся операторы цикла называются *телом цикла*;

— по определению *условия*, записываемого после слова ПОКА («Квант», 1980, № 1), цикл завершается, когда изменяемая в ходе выполнения цикла переменная y достигает своей *границы* y_k, которая вычисляется по формуле

$$y_k = y_0 + \Delta y \cdot (n - 1), \qquad (1)$$

где n — число повторений цикла. В нашем примере $y_k = 10 + 2{,}5(5 - 1) = 20$.

Программа рисования нотного стана имеет вид:

```
10-->Y;
ПОКА Y=<20::                              (2)
   П(0,Y);Л(100,Y);Y+2.5-->Y
ВСЕ
```

Несложное в нашем примере вычисление границы переменной в других задачах может оказаться более трудоемким. Во всяком случае, каждое «ручное» вычисление при составлении программы — это источник возможных ошибок. Когда число повторений заранее известно (как в нашем примере), можно избавиться от таких вычислений, использовав в программе счетчик числа повторений, который будет играть роль переменной цикла. Поэтому надо не забыть инициализировать счетчик в начале выполнения программы. Нашу программу можно тогда переписать в следующем виде:

```
1-->СЧЕТЧИК: 10-->Y;
ПОКА СЧЕТЧИК=<5::
   П(0,Y);Л(100,Y);                       (3)
   Y+2.5-->Y;
   СЧЕТЧИК+1-->СЧЕТЧИК
ВСЕ
```

Задание 9.1. *Напишите два варианта программы, рисующей домик с забором, составленным из 12 досок. Размеры (в мм) деталей изображения отмечены на рисунке 2.*

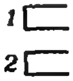
А теперь вернемся к нашей нотной строке и чуть-чуть усложним задачу: нотную строку требуется разметить тактами — вертикальными черточками поперек нотных линеек (рис. 3). На строке размещается 8 тактов. Значит, размер поля между тактовыми чертами — 100/8 = 12,5 мм. Программа записывается так:

```
1-->СЧЕТЧИК; 10-->Y;
ПОКА СЧЕТЧИК=<5::
   П(0,Y);Л(100,Y);
   Y+2.5-->Y;                             (4)
   СЧЕТЧИК+1-->СЧЕТЧИК
ВСЕ;
1-->СЧЕТЧИК; 0-->X;
```

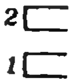
```
ПОКА СЧЕТЧИК=<8::
   П(X,10);Л(X,20);
   X+12.5—>X;
   СЧЕТЧИК+1—>СЧЕТЧИК
ВСЕ
```

В программе (4) — два цикла. Второй из них (тот, который рисует черточки тактов) начинается только после того, как полностью завершен первый (цикл, рисующий нотный стан).

Схематически циклы программы (4) можно изобразить так:



Такой же результат мы получили бы, если бы циклы 1 и 2 были включены в программу (4) в ином порядке:



Если действие одного цикла завершается раньше начала другого, такие два цикла называются *независимыми*.

Для переменных в двух независимых циклах можно использовать одинаковые имена. Это даже приводит к некоторой экономии места в памяти. Впрочем, стремиться к такой экономии не рекомендуется, так как читать программу с именами-синонимами становится труднее: встретив такое имя, приходится размышлять, какую из переменных оно обозначает. В (4) два различных счетчика названы одинаковыми именами. Использование одного имени для переменных X и Y кажется менее очевидным.

Задание 9.2. *Перепишите программу (4) так, чтобы переменные X и Y имели одно имя, например ПАРАМЕТР. Объясните, как работает такая программа.*

Для знакомства с циклами, не являющимися независимыми, рассмотрим сначала очень простую программу, рисующую «засохшую» елку с единственной сохранившейся двойной веткой (рис. 4); елка растет, например, из точки (10,0):

```
П(10,0);Л(10,30);
П(10—3,30—2);Л(10,30);          (5)
Л(10+3,30—2)
```

Конечно, в качестве параметров в процедурах ПОДВОД и ЛУЧ последней строки можно было бы подставить уже вычисленные значения 7=10—3, 28=30—2 и 13=10+3. Однако использованная в программе (5) форма записи параметров (разрешенная в Рапире) выбрана намеренно, чтобы было проще пояснить несколько следующих программ.

Действительно, от программы (5) теперь очень просто перейти к программе, рисующей на этот раз не засохшую, а «живую» елку с 9 ветвями, которые расположены на стволе на расстоянии 2,5 мм друг от друга. Достаточно сделать из операторов, рисующих ветку, тело цикла с шагом 2,5 и границей переменной СЧЕТ ВЕТОК, равной 9 (рис. 5). Для этого, очевидно, надо заменить постоянное значение 30 на переменную Y (инициализация переменной Y производится именно этим значением 30):

```
П(10,0);Л(10,30);
30—>Y;1—>СЧЕТ_ВЕТОК;
ПОКА СЧЕТ_ВЕТОК=<9::          (6)
  П(10—3,Y—2);Л(10,Y);
  Л(10+3,Y—2);
   СЧЕТ_ВЕТОК+1—>
   СЧЕТ_ВЕТОК; Y—2.5—>Y
ВСЕ
```

Теперь расширим задачу, задавшись целью нарисовать аллею из 8 елок, расположенных на расстоянии 12 мм одна от другой, пользуясь программой (6) (рис. 6):

```
10—>X;1—>СЧЕТ_ЕЛОК;
ПОКА СЧЕТ_ЕЛОК=<8::
  П(X,0);Л(X,30);30—>Y;
  1—>СЧЕТ_ВЕТОК;
  ПОКА СЧЕТ_ВЕТОК=<9::
    П(X—3,Y—2);
```

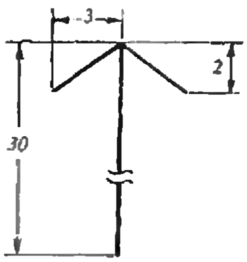


Рис. 4.

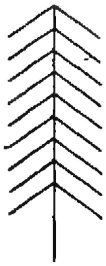


Рис. 5

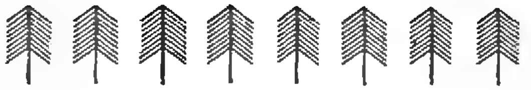
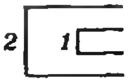


Рис. 6.

```
    Л(X ,Y);Л(X+3,Y—2);        (7)
    СЧЕТ_ВЕТОК+1—>
    СЧЕТ_ВЕТОК;Y—2.5—>Y
  ВСЕ;
     СЧЕТ  ЕЛОК+1—>
     СЧЕТ  ЕЛОК; X+12—>X
  ВСЕ
```

Цикл, рисующий елку (цикл 1), расположен внутри цикла, изображающего аллею (цикл 2). Поэтому они называются *внутренним* и *внешним* циклами; говорят также, что цикл 1 вложен в цикл 2.

При каждом повторении внешнего цикла 2 полностью выполняется внутренний цикл 1. Схема соотношения этих циклов имеет вид



Очевидно, переменные таких циклов должны быть различны и их нельзя именовать одним именем.

А теперь еще одно усложнение: из 5 аллей, рисуемых программой (7), надо создать лес (рис. 7). В этом «лесу» аллеи будут отличаться значением переменной Z, которая инициализируется нулем (ель первой аллеи «вырастала» в точке с ординатой 0). Шаг по Z равен 40. Программа, рисующая лес, имеет вид

```
0—>Z;1—>СЧЕТ_АЛЛЕЙ;
ПОКА СЧЕТ_АЛЛЕЙ=<5::
   10—>X;1—>СЧЕТ_ЕЛОК;
   ПОКА СЧЕТ_ЕЛОК=<8::
      П(X,Z);Л(X,Z+30);
      30—>Y;1—>СЧЕТ_ВЕТОК;
      ПОКА  СЧЕТ_ВЕТОК=<9::
         П(X—3,Y—2):Л,Y);
         Л(X+3,Y—2);                 (8)
         СЧЕТ_ВЕТОК+1—>
         СЧЕТ_ВЕТОК;Y—2.5—>Y
      ВСЕ;
      СЧЕТ_ЕЛОК+1—>
      СЧЕТ_ЕЛОК;X+12—>X
   ВСЕ;
   СЧЕТ_АЛЛЕЙ+1—>
   СЧЕТ_АЛЛЕЙ;Z+40—>Z
ВСЕ;
```

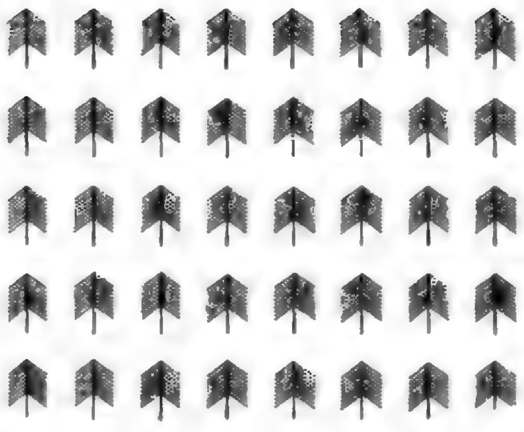
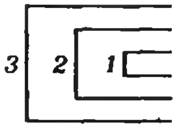


Рис. 7.

Циклы, участвующие в этой программе, схематически изображаются так:



Глубина вложенности циклов в программе (8) возросла; она равна теперь 3.

Задание 9.3. *Напишите программу, рисующую здание, показанное на рисунке 8.*

Вложенные циклы (7) и (8), бесспорно, выглядят громоздко. Однако очень простое средство — процедуры («Квант», 1980, № 2) — может сделать их компактными. Действительно, если ввести

```
ПРОЦ ВЕТКА XY;
  П(X—3,Y—2);Л(X,Y);
  Л(X+3,Y—2)
КНЦ
```

это упростит программу (6), которую, в свою очередь, можно офор-

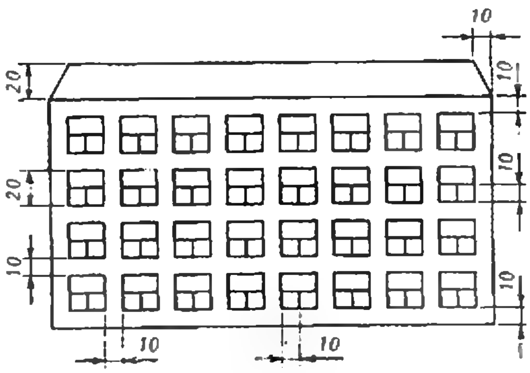


Рис. 8.

мить в виде процедуры

```
ПРОЦ ЕЛКА XZ;
  П(X,Z);Л(X,Z+30);
  Z+30—>Y; 1—>СЧЕТ_ВЕТОК;
  ПОКА СЧЕТ_ВЕТОК=<9::
     ВЕТКА(X,Y);
     СЧЕТ_ВЕТОК+1—>
     СЧЕТ_ВЕТОК;Y—2.5—>Y
   ВСЕ
КНЦ
```

В программе, рисующей аллею, упрощение, вводимое процедурой ЕЛКА, ощущается еще больше:

```
ПРОЦ АЛЛЕЯ Z;
  10—>X;1—>СЧЕТ_ЕЛОК;
  ПОКА СЧЕТ_ЕЛОК=<8::
     ЕЛКА(X,Z);
     СЧЕТ_ЕЛОК+1—>
   СЧЕТ_ЕЛОК;X+12—>X
  ВСЕ
КНЦ
```

Наконец, в этих обозначениях процедура ЛЕС (без параметров!) записывается совсем просто, «скрывая» реально существующую структуру трех вложенных циклов:

```
ПРОЦ ЛЕС;
  С—>Z;1—>СЧЕТ_АЛЛЕЙ;
  ПОКА    СЧЕТ_АЛЛЕЙ=<5::
     АЛЛЕЯ(Z):
     СЧЕТ_АЛЛЕЙ+1—>
     СЧЕТ_АЛЛЕЙ:Z+40-->Z
  ВСЕ
КНЦ
```

Программисты часто используют в своей практике такой прием «запроцедуривания».

Покажем еще два примера применения циклов, которые могут найти применение на школьных уроках математики.

Средства Шпаги позволяют начертить график заданной функции. Такая задача, в частности, предлагалась на Олимпиаде по программированию в «Кванте». Пусть, например, дана функция

$$y=f(x)=(x-1)^2+1. \qquad (9)$$

Надо построить график этой функции на отрезке $[a;\ b]=[0;\ 2]$. С этой целью отрезок $[a;\ b]$ разбивается на достаточно большое число N равных отрезков Δx : N — граница цикла, Δx — шаг цикла, определяющий точность приближенного построения графика. Для каждой

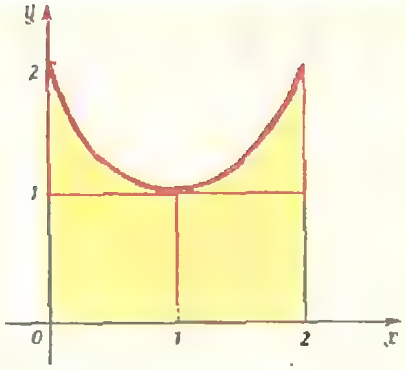


Рис. 9.

следующей точки разбиения надо вычислить значение $y(x+\Delta x)$, а затем соединить отрезком точку $(x;\ y)$ с точкой $(x+\Delta x;\ y(x+\Delta x))$.

Проверьте, что график на рисунке 9 воспроизводится программой

```
0—>X; 0.01—>ДЕЛЬТА;
П(0, 1);
ПОКА X=<2 ::
  Л(X, (X--1)!2+1);
  X+ДЕЛЬТА—>X
ВСЕ
```

(Здесь оказалось проще обойтись без счетчика, ибо число повторений заранее неизвестно, его еще надо вычислять, а граница переменной X определяется естественно.)

Задание 9.4. *Составьте программу, рисующую кривую, которая называется локоном Аньези:*

$$y=\frac{a^3}{a^2+x^3}.$$

на отрезке $[-5;\ +5]$ *при* $a=2{,}5$.

Во всех приведенных выше примерах областью применения программ была машинная графика. Такой выбор примеров был сделан исключительно из соображений наглядности. В действительности, циклы употребляются во всяких программах — для редактирования текстов, обработки графических изображений, вычислительных задач и др.

Рассмотрим в качестве примера вычислительной задачи приближенное определение площади фигуры под графиком функции на рисунке 9 (ср. задание 2г Олимпиады по программированию). Она может быть представлена суммой площадей прямоугольников, у каждого из которых

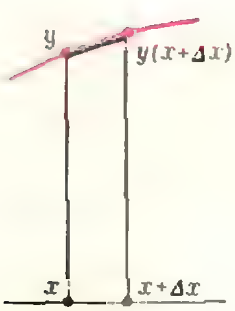


Рис. 10.

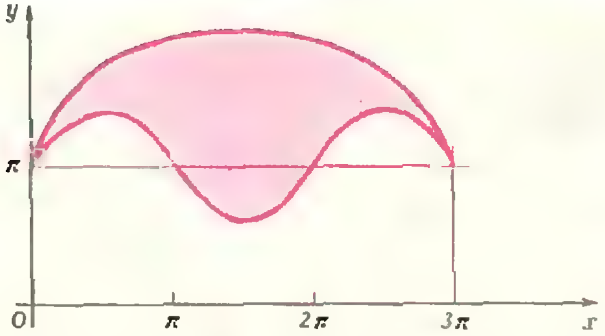


Рис. 11.

основанием является Δx, а высотами $y(a)$, $y(a+\Delta x)$, $y(a+2\Delta x)$... соответственно. Тогда закрашенная на рисунке 9 площадь приближенно вычисляется по программе

```
0-->X; 0—>ИНТЕГРАЛ:
0.01—>ДЕЛЬТА;
ПОКА X=<2 ::                    (10)
   ИНТЕГРАЛ+ДЕЛЬТА*
   ((X—1)!2+1)—>ИНТЕГРАЛ;
   X+ДЕЛЬТА—>X
ВСЕ
```

Десятиклассников не удивит, конечно, что площадь, получаемая в результате выполнения программы (10), названа ИНТЕГРАЛ. В школьном курсе математики («Алгебра и начала анализа 10», п. 101) говорится, что интеграл от неотрицательной непрерывной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции. Таким образом, программа (10) — типичный пример простейшей программы *численного интегрирования*.

Использованный в этой программе метод численного интегрирования называется *методом прямоугольников:* в теле цикла вычисляются площади элементарных прямоугольников, из которых складывается приближенное значение вычисляемой площади. Точность результата зависит от шага ДЕЛЬТА, а также от выбранного метода. Более точным, чем предыдущий, является *метод трапеций:* результирующая площадь при этом составляется из элементарных трапеций (рис. 10).

Задание 9.5. *Запрограммируйте вычисление того же интеграла, что и (10), методом трапеций.*

Подобные программы позволяют приближенно вычислять площади произвольных фигур: достаточно представить площадь сложной фигуры в виде двух (или более) фигур, для каждой из которых площадь вычисляется непосредственно определенным интегралом. Так, на рисунке 11 легко выделяются две синусоиды — полпериода «верхней» $y=3\sin\frac{x}{3}+\pi$ и полтора периода «нижней» $y=\sin x+\pi$.

***Задание 9.6.** *Составьте программу, вычисляющую площадь закрашенной на рис. 11 фигуры (не составляйте процедуру вычисления синуса, считая, что она уже существует: к ней можно обратиться простым вызовом* SIN(X)).

Ю. Первин

Наша обложка

Орнаментом принято называть фигуру причудливой формы, *группа самосовмещений* которой (см. «Квант», 1980, № 7, с. 4) содержит хотя бы одно перемещение, отличное от тождественного. И хотя «причудливость формы» не поддается точному описанию, это «определение» орнамента имеет достаточно ясный смысл. На второй странице обложки изображено несколько восточных орнаментов, группа самосовмещений которых содержит параллельный перенос (если, конечно, считать, что узор неограниченно простирается влево и вправо).

Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. В этом номере мы рассказываем о двух сериях научно-популярных книг, выходящих в издательствах «Наука» и «Педагогика».

Издательство «Наука»

Серия Библиотечка «Квант»

Эта серия начинает выходить в этом году. Она, в первую очередь, предназначена для школьников, интересующихся физикой и математикой. Во втором и третьем кварталах выйдет 7 книг из этой серии, разнообразные по своей тематике, но объединенные общей идеей — заинтересовать школьников, показать им всю красоту и привлекательность математики и физики, возбудить у них интерес к этим наукам.

Математика

1. Александров П. С. *Введение в теорию групп.* Объем 10 л., тираж 300000 экз., цена 40 к.

Эта книга, написанная одним из крупнейших советских математиков академиком П. С. Александровым, представляет собой элементарное введение в теорию групп.

Понятие группы является одним из важнейших понятий современной математики. Методы теории групп широко используются в геометрии, топологии и алгебре. Очень важные и глубокие приложения теория групп находит в квантовой механике, ядерной физике и кристаллографии.

Написанная простым и ясным языком, снабженная большим количеством геометрических иллюстраций, эта книга является одним из лучших в мировой математической литературе пособий для первоначального ознакомления с теорией групп.

2. Оре О. *Приглашение в теорию чисел.* Перевод с английского. Объем [illegible] л., тираж 300000 экз., цена 45 к.

Книга известного норвежского математика О. Оре раскрывает красоту математики на примере одного из старейших ее разделов — теории чисел. (В «Кванте», 1979, № 12 публиковался отрывок из этой книги.)

Изложение основ теории чисел в книге во многом нетрадиционно. Наряду с теорией сравнений и сведениями о системах счисления содержатся рассказы о магических квадратах и о решении арифметических ребусов. При каждом удобном случае автор указывает на возможности практического применения изложенных результатов и знакомит читателя с современным состоянием теории чисел и нерешенными задачами.

3. Мочалов Л. П. *Головоломки.* Объем 7 л., тираж 300000 экз., цена 30 к.

Книга содержит около 200 головоломок — занимательных задач, для решения которых необходимы сообразительность и смекалка. Многие из головоломок, приведенных в этой книге, впервые увидели свет на страницах нашего журнала и вызвали большую читательскую почту.

Физика

1. Бронштейн М. П. *Атомы и электроны.* Объем 10 л., тираж 300000 экз., цена 40 к.

Эта книга была написана в 1935 году известным советским физиком и популяризатором науки профессором Матвеем Петровичем Бронштейном. Впервые, небольшим тиражом, она вышла в Ленинграде и практически сразу же стала библиографической редкостью.

В книге доступно и популярно рассказывается о развитии атомистики, о том, как впервые измерили массы атомов и их размеры, какие работы и опыты привели к открытию электронов и выяснению структуры атомов.

Данное издание книги завершается кратким очерком о жизни и научной деятельности М. П. Бронштейна.

2. Асламазов Л. Г., Слободецкий И. Ш. *Задачи по физике.* Объем 10 л., тираж 300000 экз., цена 40 к.

Авторы этого сборника в течение ряда лет занимались организацией и проведением различных физических олимпиад, в том числе и Всесоюзной олимпиады по физике.

В сборнике собраны задачи, имеющие «физическую изюминку». Для их решения не требуется знаний, выходящих за пределы школьной программы, но необходимо ясное и четкое понимание основных законов физики и умение применять свои знания в конкретной ситуации. Отдельные задачи являются исследовательскими. Чтобы их решить, необходимо провести небольшие самостоятельные исследования.

Большинство задач, помещенных в сборнике, не схематичны, а касаются различных реальных явлений природы. Некоторые задачи носят оценочный характер.

Многие задачи были использованы на физических олимпиадах, часть задач была опубликована в журнале «Квант». В конце сборника даются решения всех задач.

3. *Опыты в домашней лаборатории.* Объем 10 л., тираж 300000 экз., цена 40 к.

Эта книга составлена из лучших статей, опубликованных в Лаборатории «Кванта». В них описаны сравнительно простые опыты, которые читатель может проделать самостоятельно дома, используя простейшее оборудование, зачастую изготовленное им самим.

Читатель сможет научиться выращивать кристаллы, исследовать работу маятниковых механизмов, провести опыты со светом, используя граммофонную пластинку или шарик от подшипника. Все эти опыты помогут лучше понять физические законы, привьют навыки к самостоятельному физическому исследованию.

4. Фарадей М. *История свечи.* Перевод с английского. Объем 5 л., тираж 300000 экз., цена 50 к.

Книга, которой уже более ста лет, принадлежит к числу классических произведений научно-популярной литературы.

В основе книги лежат лекции для детей, прочитанные великим английским физиком Майклом Фарадеем. В них рассказывается о различных явлениях природы, с которыми связано горение свечи: о капиллярных явлениях и тяготении, испарении жидкостей и сжижении газов, химических реакциях и электричестве и о многом другом.

Книга, без сомнения, доставит подлинное удовольствие и школьнику, и учителю, и студенту, и физику. Все они прочтут книгу с неослабевающим интересом. И не только прочтут, но и повторят занимательные опыты, которые показывал Фарадей на своих лекциях.

К лекциям Фарадея добавлено послесловие профессора Б. В. Новожилова, которое знакомит читателя с современными представлениями о горении.

Издательство «Педагогика»

Серия «Ученые — школьнику»

Физика

1. Колесников О. В., Глазков Ю. Н. *На орбите — космический корабль.* Объем 5,5 л., тираж 200000 экз., цена 30 к.

Из этой книги читатели узнают о полетах искусственных спутников, об орбитальных и межпланетных станциях, познакомятся с основными и новейшими результатами исследований в области астрофизики и космологии.

В книге рассказывается также о становлении и развитии международного сотрудничества в освоении космоса человеком.

2. Патон Б. Е., Корниенко А. Н. *Огонь сшивает металл.* Объем 5,5 л., тираж 200000 экз., цена 30 к.

В книге рассказывается об одном из самых распространенных технологических процессов — сварке — и о представителях этой «огненной» профессии. Читатели узнают об основных этапах развития сварки, о большом вкладе в эту область техники русских и советских изобретателей. Книга расширит представление школьников о применении основных законов природы в решении конкретных задач современной сварочной техники.

3. Федосеев Д. В., Дерягин Б. В. *Алмазы делают химики.* Объем 5,5 л., тираж 200000 экз., цена 30 к.

В книге рассказывается о свойствах алмаза, об истории установления его природы, связанной с именами выдающихся химиков и физиков. Читатели узнают о природных алмазах различных типов, их основных месторождениях, методах поиска и добычи.

В увлекательной форме авторы рассказывают и об истории синтеза искусственных алмазов, о методах получения поликристаллических алмазных материалов, по своим свойствам не уступающих природным алмазам.

Из книги читатели узнают об основных областях применения природных и синтетических алмазов.

А. Егоров, М. Смолянский

Твой первый робот

Ученые планируют еще в этом веке создать на околоземных орбитах первые производственно-энергетические комплексы. Совершенно очевидно, что при их строительстве и эксплуатации не обойтись без «рабочих-автоматов» — без роботов.

С легкой руки писателей-фантастов робота обычно представляют в виде механического аналога человека: с руками, ногами и головой, снабженной органами зрения и слуха и даже некоторым подобием мозга. На самом деле робот — это автономное устройство, способное по заранее заданной программе автоматически выполнять определенный набор операций и в тех или иных ситуациях принимать самостоятельные решения. Совсем не обязательно роботу передвигаться при помощи ног: нередко удобнее и практичнее колеса или гусеницы. Функции глаз и ушей могут выполнять всякого рода детекторы, датчики и рецепторы. Единственное, без чего не обойтись, это «мозг» — устройство, способное перерабатывать информацию, логически осмысливать ее и выдавать управляющие команды. Наличие такого «мозга» — отличительная особенность всякого робота.

Настоящая эра робототехники еще впереди. Однако уже сейчас можно готовить себя к грядущей деятельности, разрабатывая и конструируя первые, еще простейшие, но вполне реальные роботы. Помочь в этом деле призвана книга Д. Хейзермана «Как самому сделать робот»*).

«Настоящая книга, — пишет в предисловии Д. Хейзерман, — рассказывает о весьма необычном роботе по имени Бастер. Этот небольшой по размерам механизм был создан специально для любителей самодеятельного творчества, которые хотят приложить руки в области техники, переживающей сейчас свой младенческий период,— в робототехнике... Бастер — нечто большее, чем игрушка или управляемый по радио механизм. Он ближе к живому существу. Бастер обладает основными рефлексами, собственной «волей» и даже индивидуальностью. Он не просто копирует поведение животных, а представляет собой самостоятельное существо, которое действует и реагирует в соответствии с чувствительным управляющим устройством, чутко воспринимающим изменения его внутреннего состояния и внешней обстановки».

Бастер строится не сразу, а постепенно совершенствуясь. Сначала это работающая модель электромобили со всеми необходимыми атрибутами: корпусом, шасси, источником питания и, главное, системой управления.

---

*) Д. Хейзерман. *Как самому сделать робот.* Перевод с английского. М., «Мир», 1979

позволяющей электромобилю двигаться вперед — назад, менять скорость и совершать повороты. Первый шаг на пути превращения модели в робот — сборка схемы управления поворотом, которая автоматически поворачивает колеса на нужный угол и автоматически возвращает их в среднее положение после снятия управляющего сигнала.

Следующий шаг — введение дешифратора команд. Различные комбинации четырех входных сигналов (задаваемых положениями тумблеров на панели управления) позволяют получить 16 различных команд, например «круто влево» или «медленно назад». На этом завершается конструирование Бастера I — простейшего механизма, еще не робота, а, скорее, усовершенствованной игрушки.

Затем происходит дальнейшее совершенствование механизма. Вначале вводится селектор команд, обеспечивающий отбор среди команд, поступающих на вход дешифратора, таких, которые наилучшим образом отвечали бы сложившейся ситуации. Здесь реализуется так называемая интегративная функция, свойственная и человеческому мозгу. Одно из проявлений такой функции — установление приоритета действий. Например, высший приоритет присваивается командам блока «отъезд», который отводит робота от стен и прочих препятствий. Следующий приоритет — командам блока «голод», который обнаруживает, что аккумуляторы разрядились и их требуется подзарядить, иначе робот «умрет голодной смертью». Попав в тупик, откуда робот не может выбраться самостоятельно, или оказавшись с разряженными аккумуляторами, он подает сигнал бедствия, пока не придет помощь от оператора. Сам себе помочь он еще не может. Таков этап, который автор книги называет Бастером II.

Теперь конструктор может приступить к завершающему этапу — созданию Бастера III, который характеризуется способностью к действию слежения. Автор ограничивается двумя такими действиями: движением по полу вдоль белой линии и поиском зарядного устройства. Особенно интересен (и сложен) блок «голод», осуществляющий последнее действие. В тот момент, когда аккумуляторы разрядятся до определенного уровня, робот не ограничивается подачей звукового сигнала, а начинает активно осуществлять подзарядку. Звуковой сигнал включает «мигалку» зарядного устройства, посредством фотоэлементов робот обнаруживает его и, ведомый следящим устройством, устремляется к нему, а, достигнув, самостоятельно подключается к гнезду.

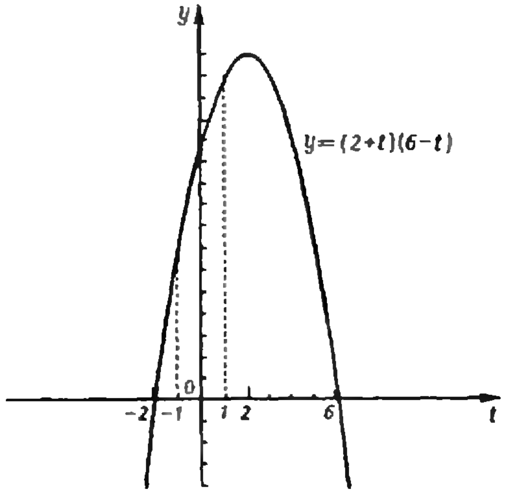
Этой цели служит сложный комплекс электронных, релейных и механических устройств и приспособлений, и главное — логических схем и блоков автоматического управления. Тот, кто справится с разработкой, монтажом и отладкой такой системы, способен будет создать множество других схем, расширив способности своего робота.

И вообще, автор постоянно нацеливает читателя на творческий подход к делу, а не на слепое копирование предлагаемых им схем и устройств. В этом — одно из ценных качеств книги.

И. Зорич

Три стандартные задачи

(Начало см. на с. 51)



принимает наибольшее значение на **R** *в точке* x_0:

$$f(x)\cdot[c-f(x)]=\frac{c^2}{4}-\left[f(x)-\frac{c}{2}\right]^2.$$

Но функция $f(x)=2+\sin x$ значение $\frac{8}{2}=4$ ни в какой точке не принимает. Поэтому решать задачу 3 при помощи этого утверждения нельзя.

Она допускает простое решение и без нахождения производной. Поскольку $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ и функция $y=(2+t)(6-t)$ на отрезке $[-1;\ 1]$ возрастает (см. рис.), функция (5) принимает наибольшее значение на **R** в тех точках, в которых $\sin x=1$, то есть при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Эволюта

Понятие эволюты было придумано Христианом Гюйгенсом (1629—1695) в период, когда он работал над теорией маятниковых часов.

Если к заданной кривой AB провести «все» касательные, а затем провести перпендикуляры к ним в точках касания — *нормали*, эти нормали «часто» будут касательными к некоторой новой кривой CD (рис. 1); кривая CD называется *огибающей* семейства нормалей или *эволютой* кривой AB.

Возникает вопрос: для какой кривой существует эволюта? Ответ дает следующее утверждение: *любая достаточно гладкая кривая**), *не содержащая прямых участков, имеет эволюту*. При этом мы считаем, что эволюта окружности (дуги окружности) вырождается в точку (центр).

Существует эффективный способ практического построения нормалей при помощи зеркальца. Пусть нужно построить нормаль к кривой в точке M. Поставим зеркало перпендикулярно бумаге так, чтобы край зеркала проходил через точку M. При этом часть кривой, отраженная в зеркале, и сама кривая в точке M будут образовывать излом. Повернув зеркало до тех пор, пока кривая и ее отражение не сольются в гладкую кривую без излома в точке M, проведем по краю зеркала прямую. Эта прямая и служит нормалью к кривой в точке M (почему?).

Таким способом нетрудно построить эволюты параболы (рис. 2) и эллипса (рис. 3).

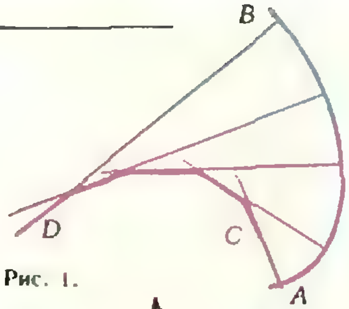


Рис. 1.

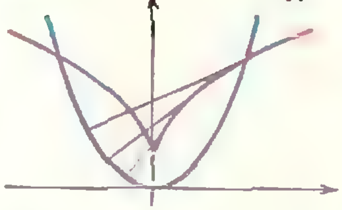


Рис. 2.

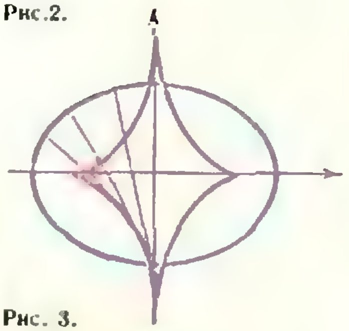


Рис. 3.

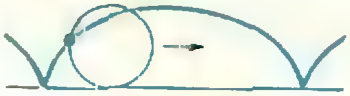


Рис. 4.

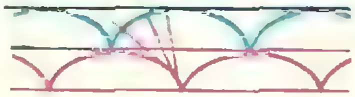


Рис. 5.

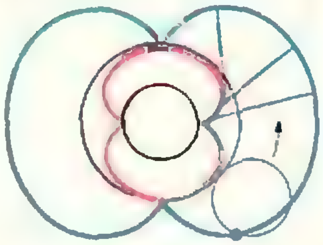


Рис. 6.

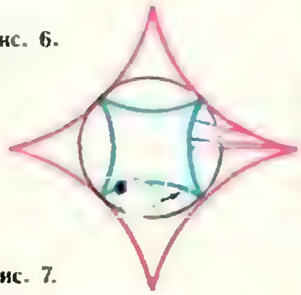


Рис. 7.

Другой интересный пример доставляет *циклоида***) — кривая, которую описывает фиксированная точка окружности катящейся без скольжения по прямой (рис. 4). Изучая свойства циклоиды, Гюйгенс доказал замечательную теорему: *эволютой циклоиды служит точно такая же циклоида, только сдвинутая* (рис. 5).

Если окружность катится не по прямой, а по (неподвижной) окружности, касаясь ее изнутри, траектория фиксированной точки подвижной окружности называется *гипоциклоидой*. Если же окружность катится, касаясь неподвижной окружности извне, получающаяся кривая называется *эпициклоидой*.

Эволютами к эпициклоидам и гипоциклоидам занимался Исаак Ньютон. Он, в частности, доказал, что *эволютой эпициклоиды (гипоциклоиды) служит эпициклоида (гипоциклоида), подобная данной с коэффициентом подобия* $\frac{q}{q+2}$ (*для гипоциклоиды* $\frac{q}{q-2}$), *с тем же центром неподвижной окружности, но повернутая на угол* π/q, *где* q — *отношение радиуса неподвижной окружности к радиусу подвижной*.

Иллюстрацией этой теоремы Ньютона служат рисунки 6 и 7, на которых синим цветом показаны исходные кривые, а красным — их эволюты.

На первой странице обложки в декоративном обличье изображены огибающие эпициклоида и гипоциклоида.

В. Вавилов

---

*) То есть, грубо говоря, кривая с плавно изменяющейся касательной.

**) Первым, кто изучил циклоиду, был, видимо, Г. Галилей. По свидетельству его учеников Вивиани и Торричелли, он же придумал название «циклоида», что значит «напоминающая круг».

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.

Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Четвертьфинальные драмы

Наша сегодняшняя страничка посвящена итогам четвертьфинальных матчей на первенство мира. Перед их началом наибольший интерес вызвал поединок в Алма-Ате между М. Талем и Л. Полугаевским. Ведущий странички был в конце матча в столице Казахстана и сразу после его окончания попросил Льва Полугаевского объяснить причины его уверенной победы со счетом 5,5:2,5. Вот что сказал гроссмейстер.

— В последнее время популярность Таля, в связи с рядом его успехов, очень возросла. Думаю, такая атмосфера сыграла для него отрицательную роль. А когда я узнал, что в его тренерской группе неожиданно появились два бакинца — Г. Каспаров, недавно ставший самым молодым гроссмейстером мира, блестящий знаток современных дебютов, и мой бывший тренер В. Багиров, то мне стало ясно, что Таль хочет сделать ставку на дебют. Это я учел при подготовке к матчу.

Слова Полугаевского удачно иллюстрирует четвертая партия матча.

М. Таль — Л. Полугаевский

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. Kf3 d6 3. d4 cd 4. K:d4 Kf6 5. Kc3 a6 6. Cg5 e6 7. f4 b5. Этот вариант детально разработан Полугаевским и носит его имя. Гроссмейстер даже написал о нем книгу под названием «Рождение варианта». Любопытно, что предисловие к ней принадлежит Михаилу Талю. **8. e5 de 9. fe Фc7 10. ef.** Во второй партии матча Таль пожертвовал слона — **10. C:b5+**, однако черные отбили атаку и одержали победу. **10...Фe5 + 11. Ce2 Ф:g5 12. Фd3 Ф:f6 13. Лf1 Фe5 14. Лd1 Лa7 15. Kf3 Фc7 16. Kg5 f5 17. Фd4 h5.**

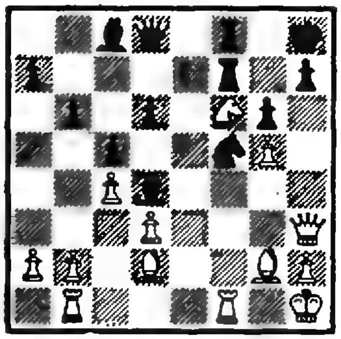
Данная позиция хорошо известна специалистам. Следующий ход, найденный Талем при домашней подготовке, мог бы ошеломить иного партнера...**18. Л:f5!?** Жертва целой ладьи!

В самолете, следующем рейсом Алма-Ата — Москва, наши места с Львом Полугаевским оказались рядом. «Хотите взглянуть на одну забавную вещь?» — спросил гроссмейстер. Мой сосед достал из портфеля потрепанную тетрадку, раскрыл ее на заложенной странице и протянул мне. На самом верху ее было начертано — 18. Л:f5, далее плотно, мелким почерком шел каскад вариантов, заканчивающихся где-то в районе 30-го хода. Анализы были внесены в тетрадь несколько лет назад... Да, действительно, экспериментировать с Полугаевским в дебюте не стоит...

Далее в партии последовало **18...ef 19. Kd5 Фd7 20. Фh4 Ce7 21. Kpf1 C:g5 22. C:h5+ Kpf8 23. Ф:g5 Л:h5 24. Ф:h5 Фf7 25. Фh8+ Фg8 26. Фh4 Kpf7 27. Фh5+g6 28. Фh4 Фg7 29. Фd8 Ce6 30. Ф:b8 Лd7 31. c4 bc.** Влияние цейтнота. Убедитесь сами, что 31...Ф:b2 приводило к решающему перевесу черных. **32. Kc3 Л:d1+ 33. K:d1 Фd4 34. Kc3 Фd3+ 35. Kpf2 Фd4+ 36. Kpf1 Фd3+. Ничья.**

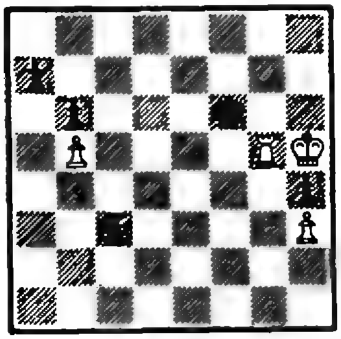
В полуфинале Л. Полугаевский встречается с В. Корчным, взявшим верх над экс-чемпионом мира Т. Петросяном со счетом 5,5:3,5.

Напряженно протекал матч между Б. Спасским и Л. Портишем. Десяти партий оказалось недостаточно — противники одержали по одной победе и восемь встреч завершили вничью. Все четыре дополнительные партии также закончились мирно. По положению предпочтение в этом случае отдавалось участнику, выигравшему больше партий черными. Счастье оказалось на стороне венгерского шахматиста. (Курьезное сообщение было опубликовано в некоторых газетах. Оно гласило, что при ничейном исходе матча победителем становится тот, кто имеет больше побед!?!) Вот позиция, в которой, как оказалось решалась судьба матча.



Спасский сыграв здесь **24. Cc3?** и после **24...Ke3 25. Фh4 C:c3 26. bc K:f1 27. Л:f1 Cf5 28. d4 Л:f6 29. gf Ф:f6 30. Ф:f6+ Л:f6** просто остался без пешки и через восемь ходов вынужден был сдаться. Вместо **24. Cc3** заслуживало внимания 24. Cd5. Положение ферзя на h3 неуютно, но на 24...Ke3 его можно пожертвовать — 25. Ф:e3!? C:e3 26. C:e3, и далее Ce3-d2-c3. Проанализируйте сами эту возможность.

Противником Л. Портиша в полуфинале стал Р. Хюбнер, обыгравший гроссмейстера А. Адорьяна с минимальным перевесом 5,5:4,5. Драматически для венгерского шахматиста сложилась предпоследняя партия матча.



После 65...Л:h3 черные выигрывали партию и сравнивали счет. Однако они сыграли **65...Лc5**, рассчитывая перейти в легко выигранный пешечный эндшпиль. На это последовал фантастический ответ **66. Kp:h4!!**, и Хюбнеру удалось чудом спасти партию, так как взятие ладьи **66...Л:g5** привело к пату!

Метод виртуальных перемещений

1. $\lg a_1 = \frac{m_1}{m_2} \lg a_2$.

2. $T = n(m + M/2)g$.

«Неверно, что...» — как это понимать?

1. $a \leqslant 2$; это предложение можно прочитать как *a не больше 2.*

2. Нет; эти предложения могут быть одновременно ложными.

3. а) *551 — не простое число.* б) *Некоторые млекопитающие не живут на суше.* в) *Все собаки не летают.*

4. $2 \cdot 2 = 4$.

5. *Существует простое четное число.* Это предложение истинно, так как простое четное число действительно существует: 2.

6. *Во всякой школе некоторые ученики интересуются спортом.*

7. Не пойти в кино и не погулять.

8. *Число 899 делится на 31 и не делится на 13.* Это предложение истинно; следовательно, предложение *Если число 899 делится на 31, то это число делится на 13* ложно.

Проверьте себя

Правильные ответы указаны в нижеследующей таблице:

Класс	Номер вопроса									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VIII	Б	В	А	А	Г	В	В	Д	А	Б
IX	В	Б	В	Г	Г	Б	А	Г	Д	Б

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 8)

1. а) Если $\overline{abc} = (a+b+c)^3$, то $5 \leqslant a+b+c \leqslant 9$, откуда $a+b+c = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Нетрудно сообразить, что $a+b+c$ не может равняться 5, 6 и 9 (кубы этих чисел оканчиваются на 5, 6 и 9 соответственно). Остается проверить случаи $a+b+c=7$ и $a+b+c=8$.

Имеем: $7^3 = 343$ — не подходит; $8^3 = 512$ — подходит. Таким образом, искомое число равно 512.

б) Если $\overline{abcd} = (a+b+c+d)^4$, то $6 \leqslant a+b+c+d \leqslant 9$, то есть $a+b+c+d = \{6, 7, 8, 9\}$.

Снова $a+b+c+d \neq 6$, поскольку 6^4 оканчивается на 6.

Убедитесь самостоятельно, что $a+b+c+d$ не может равняться 8 и 9.

При $a+b+c+d=7$ получаем $7^3 = 2401$ — искомое число.

в) Если $\overline{abcde} = (a+b+c+d+e)^5$, то $7 \leqslant a+b+c+d+e \leqslant 9$, откуда $a+b+c+d+e = \{7, 8, 9\}$. Но 7^5, 8^5 и 9^5 оканчиваются соответственно на 7, 8 и 9. Значит, пятизначного числа, равного пятой степени суммы своих цифр, нет.

2. При торможении воздух в вагоне по инерции продолжает двигаться вперед, создавая разрежение в задней части вагона и уплотнение в передней его части. Поэтому в задний тамбур через щели вентиляции стал поступать воздух снаружи, а из окон вагона он выходил наружу. Очевидно, рассказчик находился в заднем тамбуре.

3. Ответ. Нельзя.

Задача сводится к уравнению $3x + 9y = 80$ (x, y — количество монет достоинством в 20 и 50 копеек соответственно), которое не имеет решений в целых числах (80 не делится на 3).

4. Ответ. Можно.

Дипломат A должен побеседовать с шестью дипломатами B, C, D, E, F и G. При каждом новом размещении он побеседует не более, чем с двумя дипломатами. Поэтому он должен сесть за стол не менее трех раз.

На рисунке 1 приведен пример трех нужных размещений дипломатов за круглым столом.

5. Поскольку сумма всех чисел на циферблате составляет 78, ее необходимо уменьшить до 51 с помощью какой-либо «хитрости». Ясно, что «хитрость» в том, чтобы вместо чисел 10, 11 и 12 рассматривать «сумму цифр» 1+0, 1+1 и 1+2.

Теперь нетрудно отыскать приведенное на рисунке 2 (или аналогичное) решение.

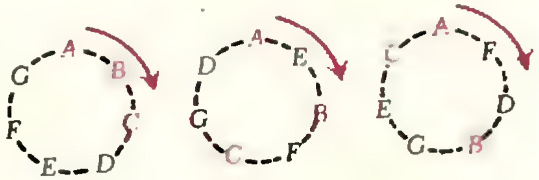


Рис. 1.

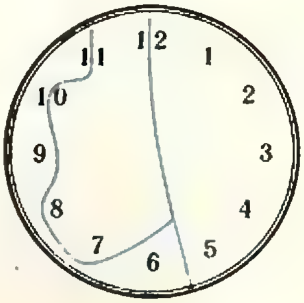


Рис. 2.

Задачи наших читателей

(см. «Квант», № 8, с. 11)

9. Ответ. $n=3,4$ или 5. Указание. Рассмотрите выпуклую оболочку множества M (наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все точки M). Докажите, что возможны следующие три случая: выпуклая оболочка M является

1) *прямоугольным треугольником;*
2) *остроугольным треугольником;*
3) *прямоугольником.*

Покажите, что в первом случае $n=3$ или $n=4$ (три вершины прямоугольного треугольника или три его вершины плюс основание высоты, опущенной на гипотенузу). Во втором случае $n=3,4$ или 5 (три вершины треугольника; три его вершины плюс ортоцентр; три его вершины, ортоцентр плюс одна из трех точек — оснований высот данного треугольника). Наконец, в третьем случае $n=4$ или $n=5$ (четыре вершины прямоугольника и, если прямоугольник является квадратом, то четыре его вершины плюс центр квадрата).

10. Существует пять современных функций: $F_0(m)\equiv 0$ и $F_2(m)$, $F_3(m)$, $F_5(m)$, $F_{11}(m)$, где $F_p(m)$ определяется формулой

$$F_p(m)=\begin{cases}0, & \text{если } m \text{ делится на } p,\\ 1, & \text{если } m \text{ не делится на } p.\end{cases}$$

Указание. Докажите, что всякая современная функция принимает лишь значения 0 и 1. В частности, она обращается в нуль хотя бы в одной из точек 2, 3, 5, 11, так как $1980=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 11$ и $F(1980)=0$. Затем докажите, что если существуют такие различные простые числа p и q, что $F_p=F_q=0$, и F — современная функция, то $F(m)=0$ при любом m.

11. 12.

Шахматный конкурс

(см. «Квант» № 7)

М

1. Удар А. Карпова **1.К:e5!!** заставил черных немедленно сдаться. Они могут на выбор взять ладью или ферзя, но в обоих случаях получают форсированный мат: 1...Ф:c8 2. Лf7+ Крh6 (2...Крg8 3.Фe4) 3.Фd2+ Сg5 4.Лf6+ Крh7 5.Ф:g5 Крh8 6.Лh6+ Лh7 7.Кf7×; 1...Ф:e2 2.Лf7+ Крh6 3.Лb8+ Крg5 4.Лg8+ Крh4 (4...Крh6 5.Лg6×) 5.Кg6+ Крg5 6.К:e7+ Крh4 7.Кf5×!; 5...Крg3 6.К:e7+ Фg4 7.Лf3+ Крh4 8.Кf5+ Ф:f5 9.Л:f5 Лg3 10.Лf4+ Лg4 11.Крh2 и 12.g3×.

2. Решает эффектный ход конем в угол доски — **1.Кa8!** и далее 1...Крd6 2.Крd4 Крc6 3.Фd5×.

3. Задание относится к жанру так называемых «ретроградных» задач. Нам необходимо выяснить, как могла получиться данная позиция из исходной расстановки фигур, то есть провести ее ретроанализ. Определим, какое число ходов, четное или нечетное, сделала каждая сторона, прежде чем возникла эта позиция. Легко убедиться, что королевская ладья, сколько бы ни ходила, с исходного поля h1 могла попасть на g1 только за нечетное число ходов, ферзевая ладья сделала нечетное число ходов, белые слоны не двигались с места, как и ферзь, который был взят конем черных. Белый король либо совсем не двигался, либо сделал четное число ходов. Из всех белых пешек ходила только одна ладейная, да и та продвинулась всего на одно поле, то есть на долю пешек приходится нечетное число ходов. Так как конь при каждом ходе меняет цвет поля, на котором он стоит, то оба белых коня вместе сделали нечетное число ходов.

Суммируя все ходы, сделанные белыми фигурами, в результате получаем четное число. Аналогичный расчет для черных фигур показывает, что ими сделано в общей сложности нечетное число ходов. Итак, белые сделали четное, а черные — нечетное число ходов. Так как партию начинают белые, то в нашей позиции ход черных, и именно они дают мат — **1...Кa1:c2×!**

4. При движении коня по доске черные и белые поля на его пути чередуются. Поэтому если конь в состоянии обойти все поля некоторой доски, посетив каждое из них по одному разу, то число ее белых и черных полей должно быть либо одинаковое, либо отличаться на 1. Однако на нашей доске 25 белых полей и 32 черных, то есть обход невозможен!

Номер готовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

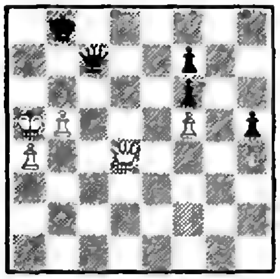
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 1/VII-80
Подписано в печать 22/VIII-80
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,97
Цена 30 коп. Заказ 1704 Т-14669
Тираж 260 550 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

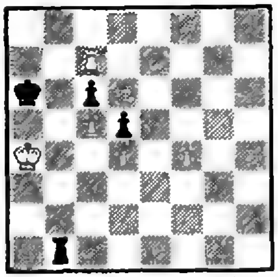
ПАТ НА ДОСКЕ

Драматический случай, происшедший в партии Хюбнер — Адорьян, подсказал нам очередную тему конкурса — пат на доске! Конечно, в практике гроссмейстеров дело редко кончается патом, но иногда, как мы видим, такие удивительные события случаются. Следующая позиция возникла 75 лет назад.



Положение белых, которыми играл великий русский шахматист М. Чигорин, совершенно выиграно. К. Шлехтер только что дал предсмертный шах 1...Фс7+, и Чигорин автоматически ответил **2.Фb6+**, собираясь перейти в пешечный эндшпиль (сравните с ходом Лс3-с5 Адорьяна!). Можно представить себе его удивление, когда он обнаружил, что король черных спокойно ушел в угол — **2...Кра8!** После 3.Ф:с7 (3. Кра6 Фс8+ 4.Кра5 Фс7 не меняет дела) черный король запатован. Ничья!

Завуалированную патовую ловушку, которая в свое время обошла всю мировую шахматную печать, подстроил М. Ботвинник в 20-й партии матч-реванша на первенство мира М. Талю (1961 год).

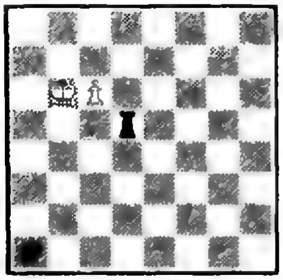


Эта позиция могла возникнуть при вторичном доигрывании партии. Положение черных выглядит безнадежным: после 1...Лd1 2.Л:с6+ Крb7 3.Лf6 Л:d4+ 4.Крb5 и 5.Лf7+ они должны сдаться. Однако Ботвинник при домашнем анализе нашел неожиданное спасение: **1...Лb4+!!** Теперь 2.Кр:b4 ведет к пату, а 2.Кра3 Л:d4 дает черным простую ничью. При доигрывании, за два хода до позиции на диаграмме, Таль обнаружил каверзную ловушку, пошел другим путем, но выигрыша у него уже не было. Партия закончилась вничью на 121 ходу. А на следующий день Ботвинник легко обыграл расстроенного чемпиона мира и вернул себе шахматную корону...

В шахматной композиции патовая идея — одна из самых популярных. В одних случаях белые спасаются, благодаря пату, в других — выигрывают, обходя тонкую патовую ловушку.

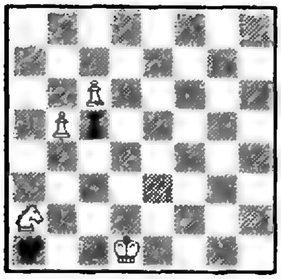
Очень часто пат возникает при превращении пешки в ферзя, однако цель достигается, если вместо ферзя на доске ставится более слабая фигура, обычно ладья (реже слон или конь). Такой прием в композиции называется «слабым превращением».

Классический этюд, всего с четырьмя фигурами, в котором идет полноценная борьба обеих сторон, представлен в конкурсном задании № 1. Во всей шахматной литературе трудно найти столь неожиданный и красивый финал при таком ограниченном материале.

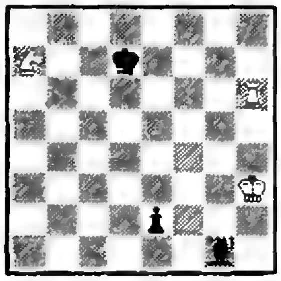


1. Ф. Сааведра, 1895 г. Белые начинают и выигрывают.

Конечно, в XX веке патовая идея Сааведры неоднократно совершенствовалась. Одну из лучших вариаций представляет собой конкурсное задание № 2.

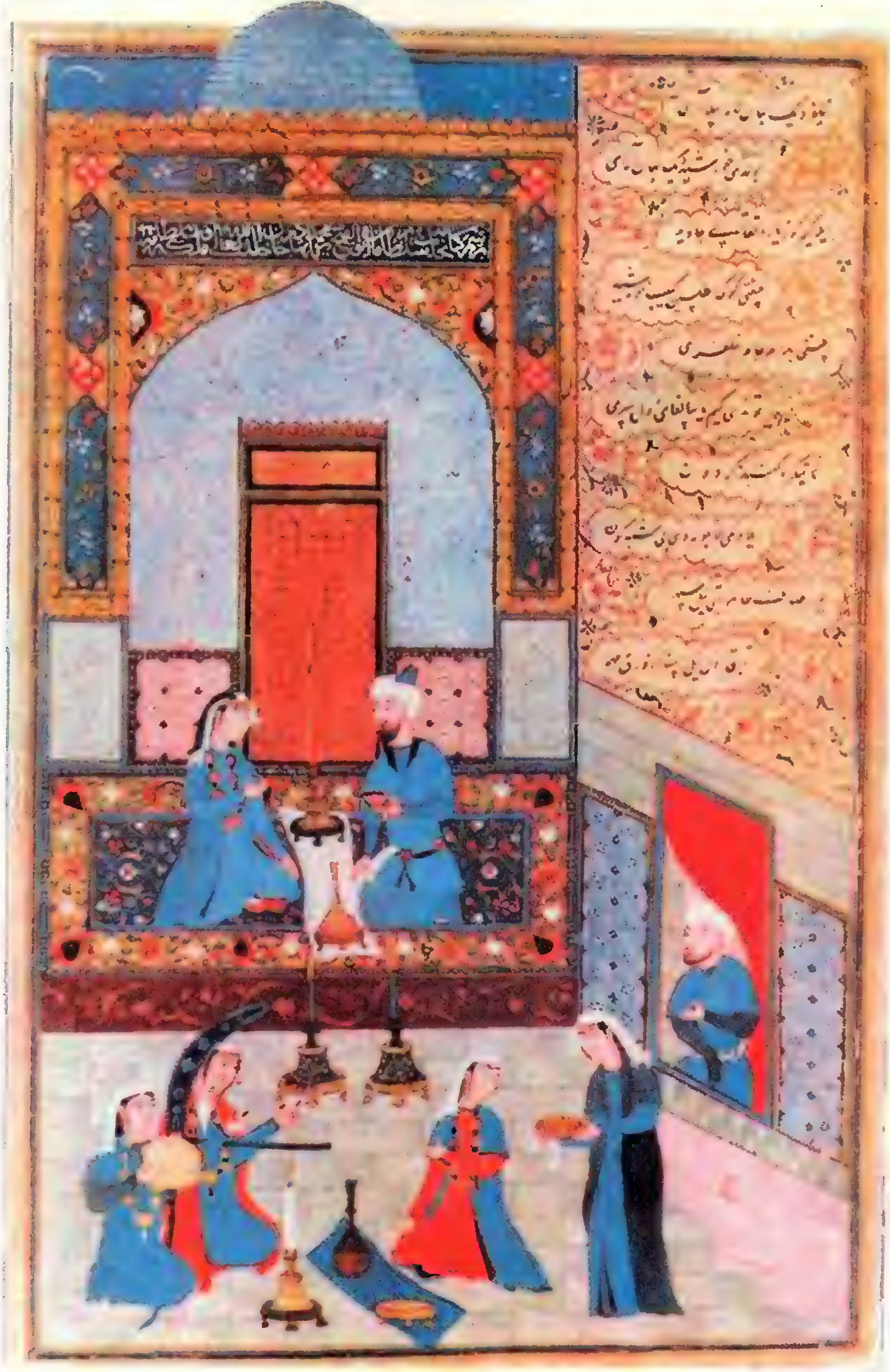


2. М. Либуркин, 1931 г. Белые начинают и выигрывают.



3. А. Троицкий, 1910 г. Белые начинают и делают ничью.

Срок присылки решений — 31 октября 1980 г.



К 1000-летию со дня рождения Авиценны (см. также с. 7,57). Бахрам в голубом дворце. *Семь планет.* Бухара, Бодлеянская библиотека.

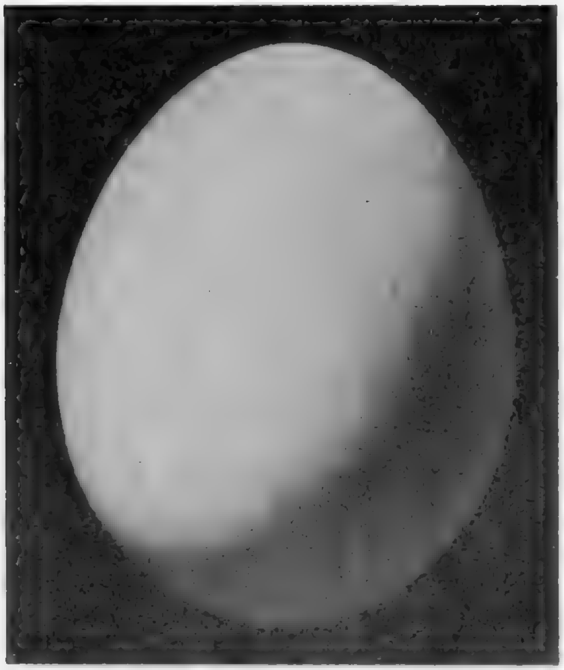
Индекс 70465
Цена 30 коп.

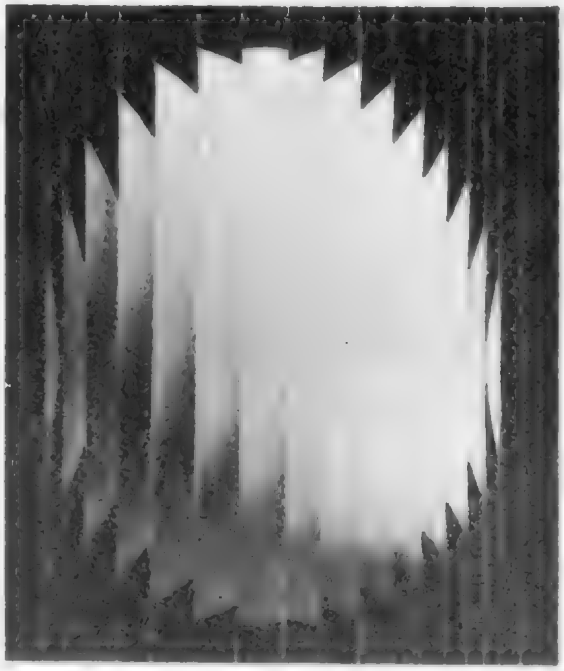
На этих фотографиях показаны яйцо и три его «модификации», полученные с помощью следующей общей конструкции. Нанесем на плоскость, на которой имеется некоторое изображение, несколько линий (прямых, окружностей и т. п.). Совокупность этих линий, разбивающих плоскость на «элементарные области», назовем «сеткой разреза».

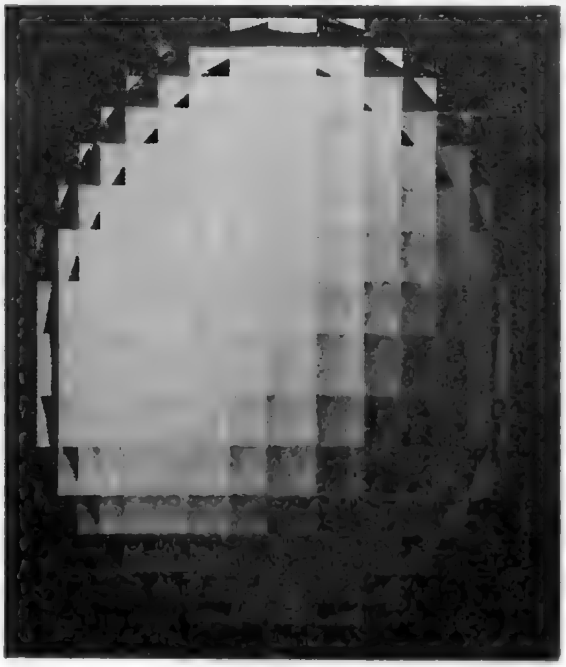
Пусть сетка разреза обладает какой-нибудь симметрией; тогда некоторые элементарные области можно переставить местами в соответствии с этой симметрией. Если же элементарная область (или несколько) сама обладает симметрией, то ее можно вдобавок «повернуть» в соответствии с ней.

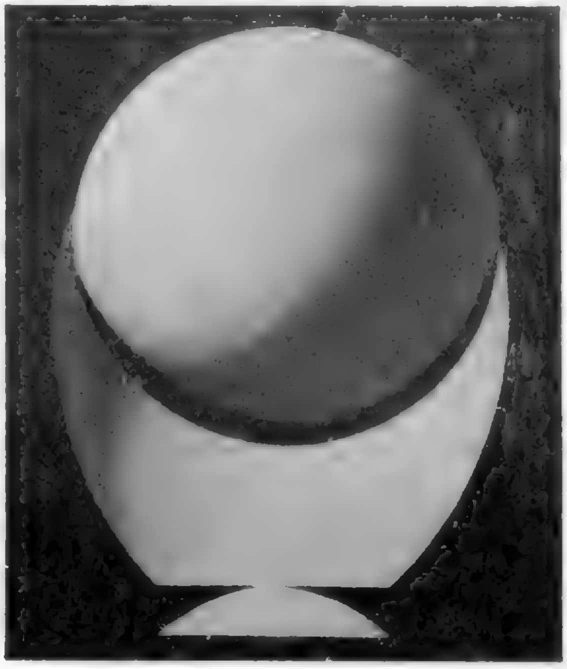
Именно таким путем были получены три «модификации» яйца на фотографиях. Проследите, как.

В. Колейчук









НОМЕР
10

Основан в 1970 году

Квант

10
1980

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 Учиться коммунизму!
4 *И. Кикоин.* Абрам Федорович Иоффе
21 *В. Иоффе.* Мой отец — о моем будущем
22 *А. Иоффе.* Электрон

Математический кружок

26 *Ю. Михеев.* Одной линейкой

Задачник «Кванта»

30 Задачи М646—М650; Ф658—Ф662
32 Решения задач М600, М601, М603; Ф604—Ф607

«Квант» для младших школьников

37 Задачи
38 *И. Юфанова.* Волшебная сказка с физическими вопросами

По страницам школьных учебников

40 *И. Габович.* Предел функции

Практикум абитуриента

43 *В. Матизен.* Найдем ошибку

Искусство программирования

47 Заочная школа программирования. Урок 10.

Рецензии, библиография

50 *Н. Розов, М. Смолянский.* Полезное начинание

Информация

52 *О. Овчинников, С. Резниченко, К. Шалимова, Г. Яковлев.* Всероссийская олимпиада школьников
56 *Б. Гейдман, Б. Давидович, А. Земляков.* XI праздник юных математиков в Батуми
60 Три доклада на Батумском празднике
63 **Шахматная страничка**
Шахматный конкурс *(3-я с. обложки)*
64 **Ответы, указания, решения**
Наша обложка *(62)*
Смесь *(51)*

На обложке воспроизведена фотография (без какой-либо ретуши) «невозможного объекта». Подумайте, что и как было сфотографировано

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1980

Учиться коммунизму!

Это произошло 2 октября 1920 года. В Москве, в здании, где сейчас находится театр имени Ленинского комсомола, проходил III съезд Российского коммунистического союза молодежи. В нем участвовали 602 делегата со всех концов России. В этот день перед ними выступил Ленин со своей знаменитой речью «Задачи союзов молодежи».

Еще не окончилась Гражданская война. Разруха и голод безраздельно господствовали на всей отвоеванной у врагов территории страны. А Ленин говорил о коммунизме, о том, как строить будущее коммунистическое общество, во имя которого были принесены суровые жертвы.

Не так уж велика по объему эта речь, и все вы ее читали. Но каждый ли из вас, наши дорогие юные читатели, пытался вдуматься в ее содержание, постичь глубину ленинских мыслей? Наверное, есть среди вас и такие, кто «проходил» эту речь, как «проходил» он мимо многих разделов обширного школьного курса. А речь эту надо изучать, причем изучать вдумчиво, неторопливо, неоднократно. Ведь в ней Ленин завещал молодежи свои самые дорогие и светлые мысли — мысли об удивительном и прекрасном обществе, которого до сих пор не знала история человечества.

Ленин ничего не приукрашивал и не замалчивал. Путь к коммунизму труден для любой, даже очень высокоразвитой, страны. И во сто крат тяжелее он для промышленно отсталой, неразвитой страны, большинство населения которой не знает ни азбуки, ни таблицы умножения. А именно такой была Россия в 1920 году.

Строительство коммунизма связано с глубокой качественной перестройкой всего хозяйства и сознания всех членов общества. Изобилие материальных благ, изобилие свободного от работы времени возможны только на основе предельно электрифицированного, комплексного автоматизированного производства, опирающегося на величайшие достижения науки и техники. И управлять таким производством может только всесторонне образованный, гармонически физически и духовно развитый, непрерывно совершенствующий себя человек.

Казалось бы, для России двадцатого года коммунизм — это невероятно далекое будущее. Но Ленин говорил о нем как о самом главном в жизни тех, кто сидел в зале, где проходил съезд. Он говорил о нем как об исторически неизбежной реальности.

Революции не сводятся только к разрушению и уничтожению, они никогда не разрушают все, что было завоевано человечеством в прошлом. Революции уничтожают только то, что к данному моменту времени потеряло право на существование, что мешает обществу двигаться вперед, тормозит его развитие. А уничтожив это, они открывают путь новому, неизмеримо более прогрессивному. Революция — это не только гигантское разрушение, но и еще более гигантское строительство.

В 1920 году многим в России казалось, что, разрушая старый социальный строй, надо вместе с ним выбросить на свалку истории всю прошлую науку, культуру, искусство и образование и вместо них создать небывалую во всех своих частях пролетарскую науку, культуру, искусство, образование. Помните лозунг футуристов: «Сбросим Пушкина, Достоевского, Толстого с парохода современности!»? Но Ленин твердо знал, что будущее рождается из прошлого, и потому после свержения старого социального строя надо проделать гигантскую работу по критическому пересмотру всех прошлых достижений человеческого гения.

Как известно, марксизм объединил в себе все лучшее, что к этому времени было создано в немецкой классической философии, английской политической экономии и французском утопическом социализме. Но для того чтобы выполнить эту гигантскую работу, Маркс должен был глубоко овладеть всеми этими идеями и теориями.

Выдающимся ученым был и Владимир Ильич Ленин. Поэтому он прекрасно понимал, что перед рабочими и крестьянами нашей страны стоит невероятно трудная задача — пересмотреть весь прошлый опыт человечества, отобрать из него все, что по-прежнему является прогрессивным, развить и усовершенствовать все это применительно к новым историческим условиям, новым задачам общества. Нетрудно было бы разрушить до основания старую буржуазную систему образования. А вот, как говорил Ленин, «уметь различать, что было в старой школе плохого и полезного нам, ...уметь выбрать из нее то, что необходимо для коммунизма» — эта задача была намного труднее. Уметь выбрать то, что необходимо для коммунизма в прошлой науке и культуре, искусстве и образовании, могли только те, кто хорошо овладел этой наукой и культурой, изучил это искусство и систему образования. Отсюда и следует главная задача, поставленная Ильичом в его речи,— учиться, учиться и учиться!

Но и учиться можно по-разному. Можно просто накапливать новые знания в своей памяти, превращая ее в подобие энциклопедии. Ленин был яростным противником таких «мертвых знаний», книжной универсальности. Именно в этой речи он произнес знаменитую фразу: «Коммунистом стать можно лишь тогда, когда обогатишь свою память знанием всех тех богатств, которые выработало человечество». Знание всех богатств, то есть основных фундаментальных законов природы и общества, — вот, по Ленину, путь ко всесторонне развитому человеку.

Но и эти богатства не должны лечь мертвым грузом в человеческой памяти. Они должны стать средством повседневной борьбы за построение коммунистического общества. Строить это общество — это значит каждый день, каждый час решать какие-то, пусть небольшие, скромные, но конкретные и полезные задачи. И Ленин приводит примеры таких задач, которые его слушатели должны решать повседневно: учиться самим и учить других — помочь ликвидировать неграмотность; создавать общественные огороды — помочь в борьбе с голодом; организовать в деревне или в своем квартале обеспечение чистоты — помочь в борьбе с эпидемическими заболеваниями. «Союз коммунистической молодежи должен быть ударной группой, которая во всякой работе оказывает свою помощь, проявляет свою инициативу, свой почин». Человек набирается жизненного опыта в практической деятельности. Без борьбы борцом не станешь. Строитель коммунизма — тот, кто строит, а не сидит сложа руки и не ждет, когда все будет сделано без его участия, а он придет на готовое.

В своей замечательной речи Ленин дал четкий ответ на все основные вопросы, стоявшие перед страной и ее молодым поколением: что такое коммунист, как стать коммунистом, чему и как учиться, как создавать коммунистическую мораль, как научиться ставить интересы общества выше своих собственных интересов. Это была законченная программа комсомола на все будущие времена. И все, что в ней содержится, справедливо в наши дни. Конечно, многие конкретные задачи, приведенные Лениным в качестве примеров, уже решены. Но коммунизм еще не построен. И каждый школьник должен стать активным участником этого строительства. А это, как и в прежние годы, означает — глубоко овладевать основами научных знаний, активно участвовать в общественно-полезном труде, каждый день в школе, дома, на улице решать конкретные задачи, связанные с формированием нового человека и строительством нового общества. И сегодня главная задача всей советской молодежи — учиться коммунизму!

И. Кикоин

Абрам Федорович Иоффе

Принимаясь за эту статью, я не имел в виду дать научную биографию выдающегося советского физика Абрама Федоровича Иоффе, 100-летие со дня рождения которого исполняется 30 октября 1980 года. Биография Иоффе хорошо известна и изложена в ряде книг и статей о нем. Я хотел только поделиться с читателями «Кванта» своими личными воспоминаниями об основоположнике советской школы физиков, учеником которого я имел счастье быть.

В 1922 году, когда я учился в выпускном классе средней школы, в одной из центральных газет появилась статья под названием «Физико-механический факультет», подписанная академиком Абрамом Федоровичем Иоффе. Мне в то время было всего 14 лет, жил я в Пскове, плохо понимал, что такое академик, а имя и фамилию автора слышал впервые.

Статью я внимательно прочитал. В ней рассказывалось о недавно созданном факультете в Петроградском политехническом институте. Из статьи было ясно, что этот факультет готовит специалистов, которые в одинаковой степени знают физико-математические науки и инженерные дисциплины. По окончании этого факультета студент получал звание инженера-физика. Меня в то время в равной степени интересовали как физика, так и техника, и я решил во что бы то ни стало поступить на физико-механический факультет.

Из статьи было ясно, что ее автор был создателем и руководителем этого факультета. Мне, конечно, захотелось о нем как можно больше узнать, и я стал искать книги А. Ф. Иоффе. К счастью, мне повезло — я нашел в одном из книжных магазинов только что вышедшую из печати книгу, которая называлась «Лекции по молекулярной физике». Эту книгу я не только прочитал, а стал внимательно изучать. Занятие было чрезвычайно увлекательное, но не очень-то легкое. Дело в том, что в отличие от других курсов физики, которые обычно начинались с описания методов измерения физических величин, этот курс начинался с изложения строения вещества. В увлекательной форме рассказывалось в книге об опытах Резерфорда, доказавших планетарное строение атомов, о движении электронов вокруг ядра атома и многое другое. Все это для нас, школьников, было новым. Дальше, после кратких сведений о законах механики, которые тоже излагались по-новому, автор непосредственно приступал к изложению молекулярной теории материи.

Так я познакомился заочно с академиком Абрамом Федоровичем Иоффе. (Из энциклопедии я, конечно, узнал, что академик — это высшее ученое звание в России.)

Осуществить свое желание поступить на физико-механический факультет я сумел лишь в 1925 году, когда мне исполнилось 17 лет, то есть столько, сколько необходимо было иметь, чтобы стать студентом вуза: моложе 17 лет в институты не принимали.

Когда я стал студентом физико-механического факультета, мне стало ясно, что имя его декана Абрама Федоровича Иоффе было окружено легендами: например, утверждали, что академик сам проверяет данные о каждом поступающем на этот факультет, решает вопрос о приеме, читает лекции студентам, приглашает лучших ученых страны для чтения лекций на факультете и, несмотря на все это, еще руководит научным Физико-техническим рентгеновским институтом (институт был расположен через дорогу от Политехнического института).

К великому моему сожалению, когда у нас начался курс лекций по общей физике, Абрам Федорович был в командировке за рубежом. Первые месяцы моего пребывания в институте, которые мне казались бесконечно долгими, я ни разу не смог увидеть Иоффе, хотя много о нем слышал.

Старшекурсники рассказывали нам о его научных работах, например, таких, как увеличение прочности материалов при ликвидации имеющихся на них микроскопических поверхностных трещин. Рассказывали о работах академика по созданию изоляторов, выдерживающих огромные электрические напряжения.

Такая важная экспериментальная работа, как доказательство существования элементарного заряда — электрона, наряду с Милликеном была проделана А. Ф. Иоффе. Мы были этим очень горды, и нам импонировало, что в книге Милликена «Электрон» мы находили ссылки на работу Иоффе.

Также от старшекурсников мы узнали, что довольно большое число студентов физико-механического факультета уже работает в Физико-техническом рентгеновском институте. Ясно, что каждый из нас мечтал стать сотрудником этого, тогда уже прославленного института.

Ходили слухи, что академик Иоффе дал указание всем преподавателям-физикам, большинство из которых были сотрудниками Физико-технического института, специально присматриваться к студентам и наиболее способных рекомендовать для работы в институт.

Время шло, а я все еще не смог увидеть Абрама Федоровича.

Впервые я увидел его в дни празднования 200-летия Академии наук, поздней осенью 1925 года, когда он у калитки двора Физико-технического института провожал группу ученых, приехавших на празднование юбилея. Это был стройный, высокий человек, с седеющими усами и довольно большой лысиной. Среди гостей резко выделялся человек в чалме, очевидно, индус (позже я узнал, что это был известный индусский физик Раман).

В 1926 году, будучи студентом второго курса, я был рекомендован для работы в Физико-технический рентгеновский институт и попал в лабораторию магнитных явлений, которой руководил Яков Григорьевич Дорфман. С этого времени я видел Абрама Федоровича Иоффе еженедельно по пятницам, так как каждую пятницу, с 5 до 7 часов вечера, в течение многих лет в институте происходило так называемое реферативное собрание. Это было научное собрание под неизменным председательством Абрама Федоровича, на котором сотрудниками института либо докладывались собственные научные работы, либо реферировались наиболее интересные статьи, появившиеся в мировой научной печати. Эти реферативные собрания были мощным средством коллективного воспитания молодых научных сотрудников, как, впрочем, и всех научных работников института. Здесь уместно вспомнить слова академика Николая Николаевича Семенова, который как-то сказал, что основное свое образование в физике он получил не в университете, а на реферативных собраниях Физико-технического института. Действительно, какие бы сложные и трудные вопросы ни разбирались на этих собраниях, они всегда проходили активно, остро, а в конце собрания Абрам Федорович умел так разъяснять любой сложный вопрос, что все оказывалось простым и ясным. Но поначалу нам, молодым сотрудникам, многое оставалось непонятным.

На реферативных собраниях обсуждался весьма широкий круг физических проблем, потому что научная тематика института была весьма разнообразной — она охватывала почти все проблемы современной физики. Так, например, в институте занимались вопросами атомных столкновений, акустикой, физикой магнитных явлений, оптикой, теплотехникой, радиофизикой и радиотехникой, физикой рентгеновских лучей и другими вопросами, включая физику диэлектриков, которая в те времена была основной специальностью Абрама Федоровича Иоффе. Нас всегда удивляла способность Абрама Федоровича до тонкости разбираться в каждой из столь разнородных областей физики. Мы восхищались его талантом рассказывать о самых сложных вещах с необычайной простотой и ясностью.

Вспоминаю один из первых докладов Абрама Федоровича Иоффе для студентов о прочности кристаллов, которая тогда была одной из актуальных проблем физики кристаллов. Сложность проблемы заключалась в том, что довольно строгая физическая теория позволяла рассчитать прочность кристаллов, но опыт показывал, что реальная прочность кристаллов значительно меньше расчетных значений. А. Ф. Иоффе нашел причину расхождения между измеренным на опыте значением прочности кристалла и предсказанным теорией. Причина эта заключалась в том, что на поверхности исследуемого кристалла всегда имеются дефекты в виде микроскопических трещин. При деформации кристалла, например, при его растяжении, на этих трещинах возникают громадные механические напряжения, значительно превышающие внешние напряжения, приложенные к кристаллу как целому. В силу этого именно в тех местах, где имеются микроскопические трещины, и происходит разрыв кристалла при его деформации при внешних напряжениях гораздо меньших, чем расчетные значения предельно допустимых напряжений.

Абрам Федорович Иоффе догадался, что, если поместить кристалл в растворяющую его жидкость, то поверхностный слой с его дефектами будет удален; следовательно, поверхность кристалла станет довольно совершенной, практически без дефектов, и прочность такого кристалла в жидкости должна приближаться к теоретической.

Проще всего было проверить это предположение на кристаллах поваренной соли, хорошо растворимой в воде. Кристалл каменной соли, погруженный в воду, должен быть значительно прочнее кристалла, находящегося в воздухе. Опыты А. Ф. Иоффе блестяще подтвердили эту идею, а само явление упрочнения кристалла в растворителе получило название эффекта Иоффе.

В упомянутом выше докладе Абрам Федорович демонстрировал идею об уменьшении прочности тела под влиянием небольших трещин на его поверхности следующим простейшим опытом. Он брал за концы полоску бумаги и пытался ее растянуть — бумага не разрывалась. Затем он делал маленький надрез поперек полоски, и тогда бумага от ничтожного усилия разрывалась.

Вслед за этим опытом он демонстрировал еще один. В большом стеклянном сосуде с водой находились стеклянные палочки, которые «мокли» в течение нескольких суток. Такие же сухие стеклянные палочки лежали на демонстрационном столе. Иоффе брал палочку из лежащих на столе и изгибал ее. Как и следовало ожидать, палочка тотчас ломалась. После этого он вынимал палочку из сосуда с водой и так же пытался ее изогнуть; при этом ему удавалось согнуть ее в кольцо. Это объяснялось тем, что вода, хотя и в незначительной степени, но растворяет стекло; после длительного пребывания в воде поверхность стеклянных палочек становилась свободной от трещин, и посему они легко сгибались. Так простыми опытами в сравнительно кратком докладе Абрам Федорович донес до своих слушателей сложную проблему теории прочности кристаллов.

В том, что Абрам Федорович обладал необыкновенным талантом находить способы изложения сложных вопросов физики простым и ясным языком, не жертвуя при этом строгостью изложения, я мог лишний раз убедиться, прослушав ряд лекций из общего курса физики, прочитанных им первому курсу нашего факультета, когда я был студентом второго курса. Иоффе не обладал ораторским талантом, но его изложение предмета отличалось необычайной ясностью, сопровождалось блестящими демонстрациями, и трудно было не увлечься физикой в его изложении.

Позже я узнал, что в большинстве передовых стран мира общий курс физики читают крупнейшие ученые. Это понятно, потому что именно в общем курсе физики студентам дается представление обо всей физике в целом, а это способны сделать только выдающиеся ученые, обладающие широким научным кругозором. Таким выдающимся физиком и был Абрам Федорович Иоффе. Наряду с большой научной работой, которую он постоянно вел, Абрам Федорович проявлял повседневную заботу о молодых научных сотрудниках и, естественно, студентах своего факультета.

Я вспоминаю первую экскурсию первокурсников по Физико-техническому институту. Руководил экскурсией сам академик Иоффе. Он водил нас по лабораториям, и мы воочию убедились, насколько интенсивно работали научные сотрудники института. Понятно, что большинство из нас впервые видели настоящую научную лабораторию, впервые видели современное научное оборудование: вакуумные насосы, создающие разрежение до 10^{-6} мм рт. ст. (это были диффузионные насосы, сделанные здесь же в институтской мастерской, которую нам тоже показали); электрометры, с помощью которых измерялись токи порядка 10^{-6} А, текущие через диэлектрики; ртутные лампы для получения ультрафиолетового света; рентгеновские установки... Затаив дыхание, слушали мы объяснения действий всех этих чудес, которые давал нам Абрам Федорович.

Правда, нас несколько смутила некая «неаккуратность» самих физических установок. Нам казалось, что они собраны недостаточно красиво и изящно, но мы не решались делать критические замечания по этому поводу.

Наконец, Абрам Федорович привел нас в лаборатории, где на столах были установки, смонтированные с большей тщательностью, где царил полный порядок. В этих лабораториях мы не встретили ни одной живой души, что немало нас удивило. Абрам Федорович прочел на наших лицах удивление и поспешил разъяснить увиденное немного извиняющимся тоном: «Вы не удивляетесь чистоте и порядку в этих лабораториях. Дело в том, что здесь сейчас никто не работает — сотрудники находятся в отпуске». После этих слов мы поняли, что при интенсивной научной работе люди больше обращают внимание на существо дела, а не на внешнюю красоту и изящество. Замечу тут же, что в то время непосредственной экспериментальной работой, то есть монтажом установки, сборкой схем, занимались все физики вне зависимости от их ранга, начиная с самого академика Иоффе и кончая только что поступившим в лабораторию студентом. Любой физик-экспериментатор в то время должен был быть мастером на все руки: и механиком, и стеклодувом, и электриком, и плотником.

Само собой разумеется, что после этой экскурсии всем нам казалось почти недосягаемым счастьем попасть в число сотрудников института.

...На всю жизнь запомнился мне 1928 год. В этом году состоялся очередной, шестой по счету, Всесоюзный съезд физиков. Организатором съезда был академик Иоффе.

Обычно участниками съездов были уже зрелые физики, которые должны были вносить денежные взносы, сравнительно значительные, во всяком случае с нашей студенческой точки зрения. Поэтому естественно, что студенты на съезд не попадали, но... Но этот съезд был особенный!

Во-первых, на организацию съезда правительство выделило довольно значительную сумму. Во-вторых, на съезд были приглашены крупнейшие физики мира, и многие из них на приглашение откликнулись. На съезд прибыло 20 иностранных делегатов из Германии, Франции, Англии, США, Голландии, Польши, Чехословакии; среди приехавших были такие всемирно известные физики, как Дебай, Бриллюен, Дирак, Люис, Поль, Борн... Так что этот съезд был практически международным. В-третьих, программа проведения съезда была необычной: съезд откроется в Москве, но основная часть его работы будет происходить на специально зафрахтованном пароходе, который отправится в плавание вниз по Волге от города Нижний Новгород (сейчас г. Горький). Понятно, что среди студентов только и было, что разговоров об этом чудо-съезде. О том, чтобы побывать на нем, мы не смели даже и мечтать.

И что же?...

Вскоре мы с восторгом узнали, что по настоянию Абрама Федоровича Иоффе оргкомитет принял решение пригласить на съезд некоторое количество лучших студентов физико-механического факультета Ленинградского политехнического института и физико-математических факультетов Ленинградского и Московского университетов. В числе приглашенных оказался и автор этих строк.

Съезд был открыт академиком А. Ф. Иоффе в актовом зале Московского государственного университета. За время работы съезда должно было быть прослушано около 160 докладов, из которых большая часть носила экспериментальный характер. Первое общее собрание было посвящено волновой механике. Вступительное слово и доклад о произведенных и возможных экспериментах, доказывающих волновую природу материи, сделал А. Ф. Иоффе.

Мне особенно запомнилось заседание, на котором обсуждалась работа Дейтона Милера, который повторил знаменитый опыт Майкельсона и получил будто бы прямо противоположный результат, что противоречило специальной теории относительности. Нужно сказать, что в те времена еще шли споры о справедливости специальной теории относительности Эйнштейна. Я, да и не только я, а все те, кому сейчас за шестьдесят, прекрасно помним ожесточенные диспуты на эту тему. И среди зарубежных, и среди советских физиков были противники этой теории. Естественно, они ухватились за работу Милера как за еще одно «доказательство» несостоятельности теории относительности. И я хорошо помню выступление Абрама Федоровича Иоффе на заседании, где он, сделав подробный анализ экспериментальной установки Милера, подверг ее уничтожающей критике и доказал несостоятельность выводов, сделанных автором. В дальнейшем Абраму Федоровичу неоднократно приходилось отстаивать справедливость теории относительности Эйнштейна от нападок ее противников.

Но вернемся к съезду физиков. На второй или третий день весь состав съезда, и это было примерно 150 человек, специальным поездом был доставлен в Нижний Новгород. Несколько заседаний было проведено в Нижегородском университете. Затем участники съезда были размещены на пароходе, и началось плавание вниз по Волге. Работа съезда не прекращалась ни на один день. Заседания проходили и на пароходе, и на остановках. В Казани и Саратове заседания состоялись в стенах университетов. И все время мы ощущали, что наш любимый Абрам Федорович Иоффе — душа съезда. Мы видели, каким авторитетом пользовался он не только у своих советских коллег, но и у иностранных физиков.

Во время плавания остановки делались не только по деловым соображениям, но и просто для отдыха в очень живописных местах Волги. Здесь, на отдыхе, мы наблюдали Абрама Федоровича уже в совершенно другой обстановке. Нам было непривычно видеть его, организующего игры на свежем воздухе; например, состязание в беге, в котором он сам принимал участие. Не лишним будет отметить, что Абрам Федорович неплохо бегал и довольно часто побеждал более молодых соперников.

После окончания официальной части съезда состоялась поездка его участников на Кавказ. В первый же день пути в наш студенческий вагон пришли в гости Иоффе, Поль, Дебай и другие не менее прославленные ученые. Как сейчас помню, Абрам Федорович предложил нам игру, заключавшуюся в следующем. Участники игры, расположившись по кругу, начинают по очереди называть имена известных ученых. Первый участник называет одну фамилию, второй называет уже названную фамилию и добавляет еще одну и так далее. Из игры выбывает первым тот, кто забудет хоть одну названную фамилию. Таким образом, число игроков непрерывно уменьшается, пока не остается один победитель, обладающий наилучшей памятью. Среди известных фамилий, конечно, были названы и фамилии участвовавших в игре физиков; самое смешное, что они-то и выбыли из игры одними из первых, так как забывали назвать собственные фамилии.

...1928 год был ознаменован еще одним важным событием — исполнилось 10 лет ЛФТИ (Ленинградскому физико-техническому институту). По этому поводу было организовано торжественное заседание, в котором приняли участие почти все физики Советского Союза. Мы с удовлетворением отмечали, что поздравительные речи и адреса фактически относились лично к Абраму Федоровичу Иоффе. Все, конечно, понимали, что работа Физико-технического института определяется его директором. Среди многочисленных выступлений было и приветствие представителя из Харькова, который в теплых словах благодарил Абрама Федоровича за его усилия по созданию в столице Украины (в то время Харьков был столицей УССР) нового физико-технического института. Ядро этого института составляла группа сотрудников ЛФТИ во главе с Иваном Васильевичем Обреимовым и Александром Ильичом Лейпунским. Это было началом осуществления идеи Абрама Федоровича Иоффе о необходимости создания научных физических центров в крупных промышленных районах Советского Союза.

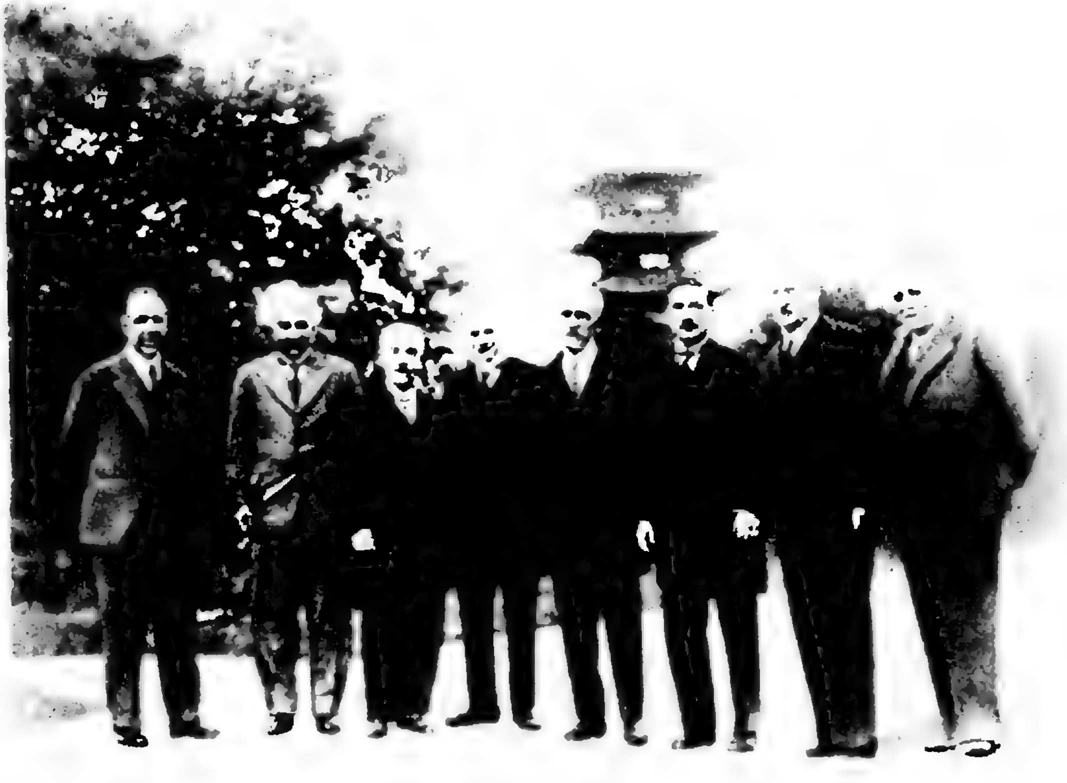
Абрам Федорович неоднократно разъяснял нам необходимость децентрализации науки в СССР. «Нельзя,— говорил он,— чтобы наука сосредоточилась в Москве и Ленинграде. Советская физика обязана оказывать свое влияние на развитие промышленности страны». Вслед за Украинским физико-техническим институтом (УФТИ) были организованы физические институты в Днепропетровске, Томске и Свердловске. Во все эти институты были направлены группы высококвалифицированных физиков из числа сотрудников ЛФТИ — учеников Иоффе.

В адресе, который преподнесли Абраму Федоровичу сотрудники ЛФТИ, было отмечено, что адрес этот подписывает не только огромное количество его прямых учеников, но и ученики учеников его первых учеников, которые сумели к этому времени стать неплохими физиками. Это было сказано не для красного словца, а отражало фактическое положение дела. Забегая вперед, могу сказать, что еще при жизни Абрама Федоровича Иоффе в числе его учеников насчитывалось не менее 15 академиков и около 30 членов-корреспондентов Академии наук СССР. Не знаю, найдется ли еще кто-либо из ученых мира, способный похвастаться лучшими результатами в своей стране.

Абрам Федорович действительно был не только выдающийся ученый, но и превосходный воспитатель молодежи. Это объясняется, в первую очередь, тем, что он владел секретом отбирать талантливых молодых сотрудников, которые сравнительно быстро становились крупными учеными. Помимо этого, Абрам Федорович сумел создать в институте такую рабочую атмосферу, в которой каждый сотрудник ощущал себя сопричастным к огромному, важному делу, сознавал нужность своей работы, чувствовал за нее ответственность. Люди работали увлеченно, не жалея сил. В институте можно было в любое время дня и ночи найти сотрудников за работой. И это было нормальным стилем работы института.

Наше увлечение экспериментальной работой было столь велико, что Абрам Федорович нередко журил нас за то, что мы слишком много времени проводим за экспериментом и слишком мало времени уделяем чтению научной литературы. Он даже поручил своему большому другу начальнику отдела теоретической физики института Якову Ильичу Френкелю организовать специально для экспериментаторов семинар по вопросам современной теоретической физики.

Но вернемся к празднованию 10-летия института. Абрам Федорович очень любил и высоко ценил хорошую, остроумную шутку. Вот почему по окончании торжественного заседания мы устроили то, что теперь называется капустником. Точнее, это была пьеса, написанная нами специально к юбилею и называвшаяся «10 лет, которые потрясли физику». Репетировали эту пьесу мы втайне, так что о ней знали лишь ее участники. Пьеса состояла из 10 актов, последовательно отражающих каждый год из жизни института со дня его создания. Нам, участникам, очень хотелось знать, как она будет воспринята зрителями, и поэтому мы внимательно следили за реакцией зала и прежде всего — за реакцией Абрама Федоровича Иоффе, который сидел в первом ряду. Пьеса имела большой успех: зрители, в том числе и Абрам Федорович, почти непрерывно смеялись и награждали актеров бурными аплодисментами.



Комитет Сольвеевского конгресса (слева направо): Н. Бор, А. Эйнштейн, Т. де Дондер, О. Ричардсон, П. Ланжевен, П. Дебай, А. Ф. Иоффе, Б. Кабрера. 1931 год.

В пьесе действительно было много смешных и остроумных моментов. Так, например, два ведомства, которые финансировали наш институт, были изображены в виде царей, восседавших на тронах с надписями «Царь-Наркомпрос» и «Царь-Совнарком». Для пущей важности они были одеты в докторские мантии самого Абрама Федоровича. Актеры, изображавшие дирекцию института, всячески старались угодить владыкам, показывая различные фокусы, вроде превращения воды в кровь, жезла в змею и т. д. За свое усердие они удостоились вознаграждения — получили мешок с монетами. Кончалась пьеса куплетами, которые исполняли актеры, сидящие в ракете, направляющейся в космос на заседание ученого совета. Каждый куплет кончался припевом

«Все выше, и выше, и выше
Летим на ракете в эфир.
Заполним мы физикой скоро
Весь звездный заоблачный мир».

Окрыленные успехом этой пьесы, мы ввели в традицию устройство такого рода вечеров два раза в году: на майские и октябрьские праздники. И неизменно они пользовались успехом у коллектива института. В пьесах часто принимал участие и сам Абрам Федорович Иоффе.

Вспоминаю один из таких вечеров, на котором обыгрывалось одно довольно значительное событие в жизни советских научных работников. Я имею в виду вышедшее в 1933 году постановление о введении ученых степеней и званий. Нам, молодым научным сотрудникам, оно казалось противоречащим духу строительства социализма, поскольку постановление предусматривало материальные преимущества за научную степень или звание, а не за непосредственно выполняемую работу.

На сцене представлялось заседание ученого совета института под председательством академика Иоффе, которого играл... Абрам Федорович Иоффе. Появление его на сцене было с восторгом воспринято зрителями. Ученый совет заслушивал защиты двух диссертаций. Первая диссертация была экспериментальной и, конечно, сопровождалась демонстрацией остроумных шуточных опытов. Достаточно сказать, что объектом исследования являлась α-брынза, электродами служили столовые вилки. Образец с воткнутыми в него электродами помещался между полюсами настоящего электромагнита; на полюсы были надеты детские ботиночки (в те времена полюсные наконечники электромагнитов называли полюсными башмаками). Результаты исследования диссертант проиллюстрировал графиком, на котором была изображена замысловатая кривая, проходящая через две экспериментальные точки. Комментируя этот график, диссертант заявил, что он построил его на основании известной физической теоремы о том, что через две данные экспериментальные точки можно провести кривую и притом только одну. В заключение он заявил, что исследованная им α-брынза обладает дырочной проводимостью; в доказательство справедливости этого вывода на экране появилось изображение брынзы, на котором, естественно, были видны дырки. Ясно, что защита диссертации проходила под смех и аплодисменты зрителей.

Вторая защита была чисто теоретической. Эта инсценировка была пародией на одного теоретика нашего института, любившего похвастаться своими успехами. После того как председательствующий предоставил слово второму диссертанту, тот развернул плакат, на котором было написано «Список ученых, которые цитируют меня» и дальше шло перечисление имен: Архимед, Лукреций, Галилей, Эйнштейн, Бор... Затем диссертант продемонстрировал второй плакат — «Список лиц, которые могут засвидетельствовать, что я первый сказал А». В списке значились фамилии вахтера, коменданта здания института, пожарника, уборщицы и других служащих института.

После «защиты» и краткого совещания членов ученого совета председательствующий Абрам Федорович серьезным тоном объявил, что совет присуждает обоим диссертантам ученые степени, пригласил их подойти к столу, опуститься на одно колено и надел на каждого докторские мантии. Все это сопровождалось бурными аплодисментами зала.

...С начала 30-х годов А. Ф. Иоффе заинтересовался физикой полупроводников. Я думаю, что какая-то интуиция подсказала Абраму Федоровичу, что полупроводники, которые были очень мало исследованы в то время, могут иметь важное техническое применение. Скудность экспериментальных данных о полупроводниках объяснялась тем, что у одного и того же по химическому составу полупроводника электрические свойства, например электропроводность, в широких пределах менялись от образца к образцу, и поэтому физики-экспериментаторы, отчаявшись получить однозначные данные, махнули рукой на полупроводники.

Абрам Федорович настолько заинтересовался этим классом веществ, что переключил на их исследование значительную часть сотрудников института. Разумеется, это делалось не в административном порядке. Абрам Федорович всегда умел внушать сотрудникам интерес, а следовательно, и энтузиазм к исследованию новых областей физики.

Уже первые полученные данные показали, что наблюдавшийся на опыте большой разброс данных об электрических свойствах полупроводников одного и того же химического состава объясняется ничтожными, с химической точки зрения, примесями. Поэтому Абрам Федорович и сосредоточил особое внимание на исследовании влияния малых количеств примесей на электрические свойства полупроводников. Заметим, что под термином «малые примеси» понимаются стотысячные и даже миллионные доли процентов по отношению к основному веществу, которые обычным химическим анализом не обнаруживаются.

Под руководством Абрама Федоровича Иоффе были разработаны

А. Ф. Иоффе за рабочим столом.

тончайшие физические способы регулирования количества примесей в некоторых типах полупроводников. Это позволило исследовать зависимость электропроводности полупроводника от количества введенных примесей. Я думаю, что в значительной степени именно под влиянием работ А. Ф. Иоффе и его школы началось быстрое развитие исследований в области физики полупроводников во многих странах мира.

Среди вопросов этой области физики Абрама Федоровича заинтересовала проблема выпрямления переменного тока. Было обнаружено, что контакт металла с полупроводником обладает выпрямляющими свойствами. При прохождении тока через такой контакт электрическое сопротивление существенно зависит от направления тока. Если при одном направлении тока сопротивление мало, то при обратном направлении тока оно резко возрастает. Таким образом, полупроводник с нанесенным на его поверхность слоем металла представляет собой выпрямитель, столь нужный для многих технических целей. Довольно скоро после проведенных в ЛФТИ исследований на «модных» в 30-х годах полупроводниках из закиси меди (Cu_2O) и селена (Se) в промышленности стали использоваться меднозакисные и селеновые выпрямители.

Абрам Федорович пытался найти физическое объяснение эффекту на границе металл — полупроводник. Совместно с Яковом Ильичом Френкелем он опубликовал теорию этого явления. Хотя количественные предсказания теории не совпадали с экспериментальными данными, ее физические основы в значительной степени сохранились и сейчас.

Абрам Федорович продолжал и даже расширял исследования в области полупроводников. В частности, его заинтересовали фотоэлектрические явления в полупроводниках. Это, в первую очередь, изменение электропроводности полупроводников под действием падающего на них света. Во-вторых, возникновение электродвижущей силы при освещении контакта металл — полупроводник или контакта двух полупроводников. Возникновение ЭДС под действием света — это прямое превращение световой энергии в электрическую. Понятно, какое большое значение могло бы это иметь для практики, если в качестве источника света использовать даровую энергию Солнца. Абрам Федорович довольно часто описывал нам радужные перспективы использования полупроводников в качестве генераторов электроэнергии, работающих на энергии излучения Солнца. Нам это казалось чистой фантастикой. Коэффициент полезного действия полупроводниковых фотоэлементов того времени не превышал 1—2%. Абрам Федорович нас убеждал, что в дальнейшем удастся повысить КПД полупроводниковых фотоэлементов до 10—15%, а это, напоминал он, вдвое выше, чем КПД паровоза.

Только теперь мы можем оценить необыкновенную прозорливость Абрама Федоровича. Начиная с 60-х годов, полупроводниковые фотоэлементы — их называют фотодиодами — широко применяются на практике. Их КПД достигает 10—15%. Наиболее широко используются солнечные фотодиоды на космических кораблях в качестве источников электропитания. Больше того, сейчас уже разрабатываются проекты силовых электростанций на солнечных фотодиодах. Таким образом, казавшаяся нам фантастической идея Иоффе на наших глазах превратилась в реальность.

Абрам Федорович вообще часто высказывал научные идеи, которые большинству физиков в то время казались фантастическими, а впоследствии получали свое реальное воплощение. Я помню, как в начале 30-х годов на одном из ученых советов Абрам Федорович намечал перспективы развития научных исследований в институте. При этом он высказал убеждение, что в институте следует развить работы в области ядерной физики. В обоснование этого предложения он утверждал, что в будущем представится возможность практически использовать энергию, выделяющуюся при ядерных превращениях. Тогда подобные прогнозы были восприняты как совершенно нереальные, потому что у многих еще было свежо в памяти высказывание основоположника ядерной физики Резерфорда о том, что атомное ядро есть не источник энергии, а могила для энергии.

В конце 1938 года, когда было открыто явление деления урана, всем стало ясно, что прав был А. Ф. Иоффе, а не Резерфорд. К счастью, еще при жизни Абрама Федоровича ядерная энергия была использована не только как орудие уничтожения, но и для мирных целей. Первая в мире атомная электростанция была пущена в Советском Союзе в 1954 году, за год до 75-летия А. Ф. Иоффе. Замечу, что Абрам Федорович никогда не хвастался своими осуществившимися предсказаниями, которые звучали почти как пророчества.

Тут уместно сказать, что в решении и проблемы создания ядерного оружия, и проблемы использования ядерной энергии в мирных целях руководящая роль принадлежала ученикам Абрама Федоровича Иоффе. Это на первый взгляд кажется странным, потому что до начала 30-х годов, то есть в первые 12—15 лет существования ЛФТИ, почти никто в институте (за исключением Д. В. Скобельцына) ядерной физикой не занимался. Но в самом начале 30-х годов, в период наиболее бурного развития физики ядра (открытие нейтрона, позитрона и т. д.), Абрам Федорович понял, что его институт, его сотрудники не могут остаться в стороне от решения животрепещущих проблем этой области. Я помню, как он со свойственными ему настойчивостью и тактом убеждал ряд ведущих физиков института круто изменить свою научную тематику и перейти на исследование мало знакомой области науки. Агитация имела успех, и довольно скоро две лаборатории института, которыми руководили Игорь Васильевич Курчатов и Абрам

Исаакович Алиханов, целиком перешли на новую тематику. По инициативе Абрама Федоровича в институте был организован специальный семинар, на котором обсуждались новые работы по физике атомного ядра, публикуемые во всех физических журналах мира, и намечались планы исследований в институте. Этот семинар помог нашим «ядерщикам», как мы их тогда называли, быстро войти в курс новой для института области физики с ее понятиями, терминологией, методами экспериментальных исследований. И нужно сказать, что довольно скоро новые лаборатории стали выпускать свою научную продукцию.

Уже к середине 30-х годов наши физики-ядерщики находились на уровне лабораторий Запада. Это подтвердила Всесоюзная конференция по ядерной физике, которая происходила в Ленинграде и практически была международной, поскольку в ней приняли участие многие иностранные ученые. На этой конференции с докладами выступали такие крупные, я бы сказал ведущие, ученые в области ядерной физики, как Жолио-Кюри, Дирак, Перрен. Доклады наших советских физиков — сотрудников ЛФТИ — показали, что достигнутый ими уровень был весьма высок.

И. В. Курчатов и А. Ф. Иоффе.

...В 1933 году ЛФТИ отмечал свое пятнадцатилетие. Мы подготовили к этому юбилею, кроме официальной программы, шуточное представление. Оно начиналось комическим торжественным заседанием ученого совета института. С докладом на заседании выступал Абрам Федорович Иоффе. Он начал свое выступление словами: «Товарищи, я хочу вам рассказать о 15-дневной деятельности нашего института.» Когда его из публики поправили «15-летней», Абрам Федорович повторил, что он делает доклад именно о 15-дневной деятельности, потому что за последние 15 дней сотрудники института провели такую работу по подготовке к празднованию юбилея, которая, с его точки зрения, сравнима по масштабу с их 15-летней научной деятельностью. Естественно, доклад неоднократно прерывался смехом зала и аплодисментами. После доклада ряду сотрудников были вручены премии, каждая из которых сопровождалась остроумными комментариями. Затем ученый секретарь совета огласил ряд приветствий юбиляру. Среди них была, например, телеграмма от Бойля — Мариотта: «Связи юбилеем вашего института сообщаем открытом нами законе $pV = \text{const}$ тчк надеемся вы его успехом примените вашей научной работе тчк Бойль — Мариотт тчк кладбище Пер Ляшез тчк 1776 год». Было и поздравление от Остапа Бендера из Рио-де-Жанейро: «Освещаем город фотоэлементами тчк шлите миллион ваших фотоэлементов».

Заканчивалась наша увеселительная программа пьесой под названием «Дела ядерные» в исполнении кукольного театра под руководством замечательного артиста Евгения Деммени. Героями пьесы были, конечно, сотрудники института, в том числе и Абрам Федорович Иоффе.

Куклы были сделаны кукольником, которого мы заранее специально приглашали на заседание ученого совета нашего института, где он и сделал наброски будущих персонажей. Разумеется, кроме организаторов, никто не знал о существовании пьесы.

Когда зал был полон и зрители сидели на своих местах в ожидании начала представления, неожиданно погас свет. Это было объяснено случайной неисправностью в сети. В действительности свет мы погасили специально для того, чтобы в темноте установить на сцене ширму для кукольников. Делалось все это очень быстро, и вскоре вспыхнул луч прожектора, который ярко осветил чуть шаржированное кукольное изображение Абрама Федоровича Иоффе. Читатели могут себе представить бурю оваций, которой была встречена эта столь неожиданная сцена. Такая встреча была предусмотрена режиссурой, и поэтому на кафедре был поставлен довольно большой колокольчик, который кукла взяла в руки и начала успокаивать публику в зале, что, естественно, вызвало еще большую овацию.

Пьеса имела успех и надолго запомнилась всем присутствовавшим в зале, особенно, наверное, женам главных действующих лиц, которым сразу же после окончания спектакля были розданы герои-куклы.

В 1936 году я уехал из Ленинграда в Свердловск, и повседневная связь с Абрамом Федоровичем была на некоторое время прервана.

В октябре 1940 года советские физики отмечали 60-летие Абрама Федоровича Иоффе. Автор этих строк явился на юбилей в качестве представителя уральских физиков. В преподнесенном нами адресе было сказано: «Вы, Абрам Федорович, являете собой второй после Ньютона пример использования продуктов питания для научных исследований». Имелись в виду легендарное яблоко Ньютона и поваренная соль, кристаллы которой часто использовал Абрам Федорович в своих исследованиях по физике кристаллов.

...С начала войны ЛФТИ под руководством Иоффе практически целиком переключился на работы, связанные с обороной нашей страны. К счастью, к этому времени в лабораториях института уже были решены многие важные вопросы оборонного значения, такие, например, как защита кораблей от магнитных мин (руководил этой работой Анатолий Петрович Александров, ныне президент Академии наук СССР), проблема радиолокации (Юрий Борисович Кобзарев) и другие.

На время войны значительная часть ЛФТИ во главе с Абрамом Федоровичем была эвакуирована в Казань. Часть сотрудников находилась непосредственно на флотах, занимаясь установкой систем магнитной защиты военных кораблей, часть осталась в Ленинграде (во главе с Павлом Павловичем Кобеко), где совместно с ленинградскими морскими организациями провела большую работу, связанную с доставкой грузов в осажденный Ленинград по льду Ладожского озера.

В 1942 году мы встретились с Абрамом Федоровичем в Свердловске во время состоявшейся там сессии Академии наук СССР. Абрам Федорович был полон сил и энергии и очень гордился вкладом своих учеников в военную мощь нашей армии. Не могу не отметить, что в начале 1943 года часть сотрудников ЛФТИ, так же как и бывшие его сотрудники, по рекомендации Абрама Федоровича Иоффе переключились на решение так называемой урановой проблемы.

Во время войны Абрам Федорович был вице-президентом Академии наук СССР и, находясь на этом посту, сумел направить работу значительной части физиков на решение актуальнейших для обороны страны проблем. Более детально я познакомился с деятельностью Абрама Федоровича Иоффе в Академии наук после моего избрания членом-корреспондентом, когда я был обязан посещать общие собрания Академии и все заседания отделения физико-математических наук.

Вспоминаю одно из заседаний отделения вскоре после окончания войны, посвященное чисто организационному вопросу — выдвижению и обсуждению кандидатуры президента Академии наук СССР. Дело в том, что до 1946 года президентом был академик Владимир Леонтьевич Комаров, но состояние его здоровья и возраст не позволяли ему эффективно руководить деятельностью этого важного учреждения. Советское правительство пригласило весь состав Президиума АН СССР на совещание, на котором обсуждался вопрос об избрании нового президента. На этом совещании была предложена кандидатура Сергея Ивановича Вавилова.

Сразу же были собраны отделения Академии наук СССР. На заседании отделения физико-математических наук его академик-секретарь Абрам Федорович Иоффе доложил рекомендацию правительства и попросил членов отделения высказаться по этому вопросу. После нескольких выступлений слово попросил один из старейших членов отделения академик Алексей Николаевич Крылов. Он сказал, что перед заседанием отделения, зная повестку дня, специально просмотрел устав Академии наук, чтобы выяснить, какие требования предъявляются к президенту Академии наук. Оказалось, что в действовавшем тогда уставе слова «президент Академии наук» упоминаются всего лишь один раз, а именно: «Президент Академии наук избирается общим собранием действительных членов Академии наук». Поэтому ему лично трудно обсуждать вопрос о кандидатуре президента, поскольку неизвестно, какие требования надо к нему предъявить. В качестве примера образцового устава Крылов сослался на судебный устав Петра I, процитировав следующие пункты:

«1. Кражей называется хищение чужой собственности, произведенное тайно.

2. Грабежом называется хищение чужой собственности, произведенное явно.

3. Разбоем называется хищение чужой собственности, произведенное с насилием».

Закончив эту цитату, академик Крылов сказал: «Как видите, в судебном уставе все сформулировано совершенно четко и ясно, а что такое президент Академии наук — совершенно не ясно». Последняя фраза, конечно, вызвала смех собравшихся. Абрам Федорович Иоффе не растерялся и ответил Крылову примерно так: «Я понимаю, что в действующем уставе Академии наук имеется пробел, но, по-видимому, составитель устава предполагал, что президент не будет заниматься ни кражей, ни грабежом, ни разбоем». Эти слова были встречены аплодисментами. Отделение вынесло решение рекомендовать общему собранию Академии наук кандидатуру академика С. И. Вавилова на пост президента. Вскоре он был избран президентом Академии наук СССР.

...Нельзя сказать, что жизненный путь Абрама Федоровича был усыпан розами. Я был свидетелем нескольких важных событий, которые, безусловно, сильно огорчили Абрама Федоровича Иоффе. Одним из таких событий была неудача с решением проблемы тонкослойной изоляции, на которую Абрам Федорович потратил много сил и времени. Это была чисто научная неудача. Он ее мужественно перенес и признал в печати ошибочность своих предпосылок.

В 1936 году в Москве состоялось общее собрание Академии наук, посвященное обсуждению научной деятельности ЛФТИ, возглавляемого Абрамом Федоровичем Иоффе. На этом собрании Абрам Федорович сделал соответствующий доклад. Физики, участвовавшие в обсуждении доклада, подвергли резкой критике деятельность института и самого Абрама Федоровича Иоффе.

Я думаю, что Абрам Федорович был очень огорчен необъективностью выступавших, среди которых были и его ученики. Все выступления звучали очень тенденциозно. Тем участникам собрания, которые могли выступить с объективной положительной оценкой деятельности института, слова не давали (в числе таковых оказался и автор этих строк).

Время показало, насколько несправедливой была эта критика.

В частности, Абрама Федоровича критиковали за то, что он развил в институте исследования по ядерной физике, которые, по утверждению выступавших, не сулили даже в далеком будущем практических применений. По тем же соображениям критиковали его и за развитие работ в области физики полупроводников. Теперь всем ясно, насколько ошибались критики Абрама Федоровича, насколько смехотворна была их аргументация. Нынешнее поколение должно воздать должное научной прозорливости Абрама Федоровича Иоффе, которая позволила ему своевременно сформулировать и поставить такие актуальные проблемы, как физика атомного ядра и физика полупроводников — основы современной научно-технической революции.

Нелегким был для Абрама Федоровича уход в 1950 году с поста директора ЛФТИ, который он основал и которым руководил более 30 лет. Тем более, что этот уход был обставлен довольно бестактно. Незадолго до этого события мы отмечали семидесятилетие Абрама Федоровича. Торжественное заседание происходило в актовом зале Академии наук СССР в Ленинграде и организовано было нарочито скромно. Из сотен приветствий и адресов, направленных юбиляру со всех концов страны и из-за рубежа, было зачитано только три: от Президиума Академии наук СССР, от сотрудников института и райкома партии. Само заседание ограничилось научным докладом Абрама Федоровича Иоффе «О проблемах полупроводников».

Вечером Абрам Федорович пригласил к себе домой наиболее близких своих учеников. За ужином Абрам Федорович говорил нам, что он, несмотря ни на что и даже на свой возраст, не оглядывается на прошлое и с оптимизмом смотрит в будущее. Он показывал нам почетные дипломы, присужденные ему различными организациями, в том числе и зарубежными научными учреждениями и университетами. Среди них был диплом Почетного члена Английского физического общества (1944 г.), Парижского университета (Сорбонна, 1946 г.), Бухарестского университета (1947 г.), университета Граце (Австрия, 1949 г.) и т. д.

Особенно мне понравился диплом Почетного члена Китайского общества физиков (1949 г.), оформленный в виде свитка из белой шелковой широкой ленты, на которой иероглифами был написан текст диплома (конечно, с приложенным к нему русским переводом).

Сказанное Абрамом Федоровичем о том, что он с надеждой и оптимизмом смотрит в будущее, было не «красным словцом». Действительно, вскоре после ухода с поста директора ЛФТИ он со свойственной ему энергией принялся за организацию Института полупроводников Академии наук СССР. В этом ему оказал большое содействие Президиум Академии наук и ее президент Сергей Иванович Вавилов. Таким образом, научная работа Абрама Федоровича Иоффе ни на один день не прерывалась.

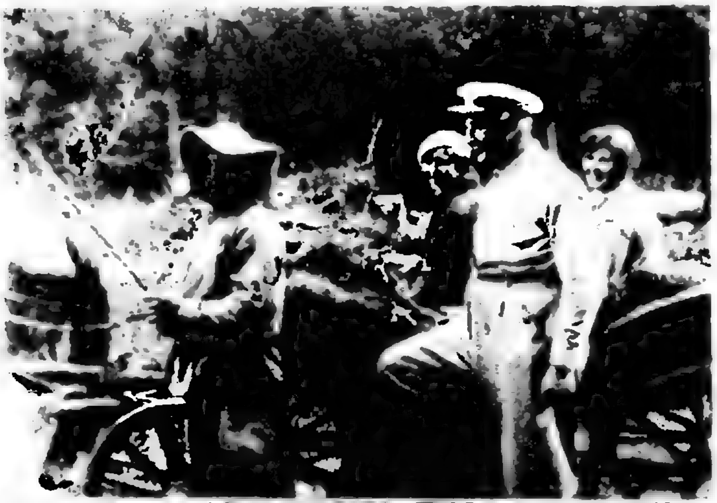
В 1955 году, в предверии 75-летия Абрама Федоровича Иоффе, группа академиков-физиков, его учеников, направила письмо в правительство с просьбой присвоить А. Ф. Иоффе звание Героя Социалистического Труда. В обоснование своей просьбы мы перечислили крупнейшие научные заслуги Абрама Федоровича и особо отметили его исключительную роль в деле подготовки научных кадров высшей квалификации, обеспечивших быстрое и своевременное решение урановой проблемы. В частности, мы указали, что среди учеников Абрама Федоровича уже насчитывается 15 академиков и около 30 членов-корреспондентов Академии наук СССР.

Для проведения юбилея Академия создала оргкомитет, и я был удостоен чести стать его председателем. Естественно, меня как председателя очень волновал вопрос о реакции правительства на упомянутое письмо с просьбой о награждении Абрама Федоровича Иоффе. До последней минуты мы не знали, как решится этот вопрос, и лишь в вагоне поезда, везшего нас в Ленинград на празднование юбилея, мы услышали по радио указ Президиума Верховного Совета СССР о присвоении академику А. Ф. Иоффе звания Героя Социалистического Труда. Радость моя была безмерна.

На сей раз торжественное заседание, происходившее в том же актовом зале Академии наук СССР в Ленинграде, прошло с большим подъемом. Число прибывших на чествование Абрама Федоровича было столь велико, что мы, при всем желании, не могли всем предоставить слово для приветствия.

Последние годы мы с Абрамом Федоровичем встречались сравнительно редко, но несколько раз все же он побывал у нас дома в Москве. Абрам Федорович очень много и интересно рассказывал не только о своих новых научных планах и идеях, но и о различных событиях из своей жизни. Например, он

А. Ф. Иоффе на отдыхе.



рассказал такую забавную историю. Однажды, в бытность свою в Голландии, Абрам Федорович был в гостях у крупного физика Пауля Эренфеста; там же были Нильс Бор и Паули. Абрам Федорович, Эренфест и Бор сидели на диване, а Паули, по своей привычке, расхаживал по комнате из угла в угол и что-то рассказывал. Вдруг Бор произнес: «Перестань разгуливать! Это меня раздражает». Паули спросил: «А что, собственно, тебя раздражает?» Бор, отличавшийся манерой точно формулировать свои мысли, задумался. И тут Эренфест ответил: «Раздражает момент, когда ты возвращаешься обратно».

Вспоминаю и другую рассказанную Абрамом Федоровичем историю, случившуюся с ним в молодости, когда он работал в Мюнхене. Однажды Абрам Федорович решил провести воскресный день в Альпах. Накануне вечером он сел в поезд. Его соседками по купе оказались две дамы. Попутчики разговорились. Узнав, что Абрам Федорович — физик, дамы спросили его, какая завтра будет погода. Абрам Федорович начал им объяснять, что он не метеоролог и поэтому предсказать погоду не может. Дамы, однако, оказались настойчивыми и требовали ответа, утверждая, что физики должны все знать. Дело происходило в июне, было жарко, и Абрам Федорович, шутя, ответил: «Завтра будет снег». Дамы весело рассмеялись и перешли к другой теме. Велико же было удивление Абрама Федоровича, когда, проснувшись наутро в гостинице, он увидел за окном... густо падающий снег.

...Последний раз я видел Абрама Федоровича Иоффе летом 1960 года, когда я был вместе со своей старшей дочерью в Ленинграде. Мы с ней получили приглашение провести воскресный день у него на даче в Комарове. Абрам Федорович прислал за нами машину. На даче Абрам Федорович и его жена Анна Васильевна водили нас по своему хозяйству, с гордостью показывали возделанные ими грядки с клубникой и овощами. Памятуя, что Абрам Федорович — директор основанного им агрофизического института, я спросил Абрама Федоровича, возделывал ли он грядки по всем правилам агрофизической науки. На это он, смеясь, ответил, что в основном следовал дедовским методам обработки почвы. Потом он повел нас на вышку, построенную специально для того, чтобы можно было любоваться видом на море. Абрам Федорович говорил, что он очень любит отдыхать на этой вышке.

Вернулись мы в гостиницу только поздно вечером. Было совершенно светло — в Ленинграде был разгар белых ночей.

Беседуя на даче с Абрамом Федоровичем, я, конечно, не рассказал ему, что мы, как и все физики страны, готовились отметить этой осенью его 80-летие. Не рассказал я ему и о том, что мною отправлена статья в журнал «Успехи физических наук», посвященная его юбилею. 14 октября утром мне на работу позвонили из редакции газеты «Известия» с просьбой срочно написать статью об Абраме Федоровиче Иоффе, которая должна была быть опубликована в день его рождения 30 октября. А через два часа после этого звонка мне сообщили из Ленинграда, что Абрам Федорович внезапно скончался у себя в лаборатории.

В. Иоффе

Мой отец — о моем будущем

Ниже публикуются воспоминания дочери Абрама Федоровича Иоффе Валентины Абрамовны Иоффе, доктора физико-математических наук, старшего научного сотрудника Института химии силикатов АН СССР.

Когда я кончала школу и должна была решить, чему учиться дальше, отец часто говорил со мной о моем будущем. Он очень хотел, чтобы я стала физиком, но какое бы то ни было давление с его стороны исключалось. Он лишь стремился обрисовать мне будущее научного работника-физика, а решать, соблазняет ли меня такая перспектива, предоставлял мне самой.

Мой отец был человеком очень широких интересов. Он любил и хорошо знал музыку, часто бывал в филармонии на концертах классической музыки. Талант юного Шостаковича он оценил с первых его шагов. Не меньше он любил и театр — оперу, драму; мог по нескольку раз смотреть спектакли театра имени Вахтангова, Художественного театра. С большим интересом относился ко всем экспериментам в области театрального искусства.

Он знал и любил стихи, особенно Пушкина и Лермонтова. Много читал, хорошо знал классику, но и за новой литературой следил до самого последнего времени.

Отец очень любил природу, особенное его восхищение вызывали деревья и цветы. Он любил далекие прогулки, нередко ходил в горы — в молодости в Швейцарии, а потом, уже в зрелом возрасте, в Крыму и на Кавказе. Хорошо плавал, играл в теннис.

Он любил жизнь во всех ее проявлениях и умел получать радость из разных источников. Но все меркло перед радостью, доставляемой ему занятием наукой — удачной догадкой, четко поставленным опытом. Он часто говорил, что в его увлеченности физикой присутствует азарт, в чем-то сходный с азартом игрока,— азарт догадки, в результате которой игрок получает выигрыш, а ученый — объяснение неизвестного явления. Он считал, что занятия физикой не требуют каких-то особых дарований — заниматься физикой и получать от этого радость может каждый. Важно почувствовать эту радость, и тогда жизнь будет наполнена живым интересом, очень мало зависящим от внешних обстоятельств.

Отец был горячим сторонником вовлечения в научную работу женщин. Он всегда с восхищением говорил о Марии и Ирэн Кюри, о Лизе Мейтнер и других женщинах-физиках, стоящих в первых рядах современной науки.

В заключение мне хочется привести выдержку из письма моего отца ко мне, пятнадцатилетней ученице последнего класса школы:

«...Ты увидишь, что если интересны некоторые факты, теории и методы, то еще интересней нерешенные проблемы, видимые противоречия, для которых надо найти решение, отыскав предварительно исходный корень, порождающий данное противоречие...

Ты, по-видимому, не очень веришь в свои таланты. Сейчас, конечно, нельзя их предсказать. Но разного типа ученые создавали наше современное мировоззрение. Нельзя описать точно, каким «должен» быть человек, который хочет стать ученым. Разными путями открывается истина...

Потом, уменье ясно видеть вещи, понимать ясное и узнавать непонятное духовно развивает и сравнивает с людьми наиболее высокой культуры.

Наконец, искать и находить новые пути и новое понимание — одно из самых больших удовольствий».

А. Иоффе

Электрон

Одна из составных частей атома — отрицательно заряженный электрон — была обнаружена еще в XIX в. В 1897 г. удалось, хотя и грубо, измерить заряд электрона; позднее измерена была его масса и еще позже были обнаружены другие его свойства — вращательный и магнитный моменты.

При освещении, в особенности ультрафиолетовым светом, отрицательно заряженное тело постепенно теряет свой заряд, а нейтральное — заряжается положительно. Явление это, называемое фотоэлектрическим эффектом или, короче, фотоэффектом, было исследовано Столетовым еще в XIX в. Характер испускаемых телом при фотоэффекте зарядов — электронов — особенно наглядно виден в поставленном мной в 1912 г. опыте, который был видоизменением уже ранее применявшихся устройств.

В пространстве между двумя параллельными горизонтальными пластинами A и B (рисунок 1) попадали мелкие заряженные металлические пылинки o. Если частичка оказывается заряженной отрицательно, то ее можно удержать от падения, зарядив верхнюю пластину положительно, а нижнюю — отрицательно. Положительно заряженная пылинка удерживается полем противоположного знака. Можно подобрать такую разность потенциалов U_1 между пластинами, чтобы электрическая сила как раз уравновешивала силу тяжести. Тогда пылинка повисает неподвижно на много часов.

Электрическая сила, которая действует на заряд e_1 пылинки, направлена вверх и равна $e_1\frac{U_1}{d}$, где d — расстояние между пластинами A и B. Обозначим силу тяжести, действующую на пылинку, через P. Условие равновесия пылинки в пространстве между пластинами — равенство силы тяжести и электрической силы:

$$P=e_1\frac{U_1}{d}.$$

В этом состоянии я освещал пылинку источником света, вызывающим фотоэлектрический эффект. Спустя некоторое время неподвижная прежде пылинка начинала падать. Так как сила тяжести P не могла измениться от освещения, не изменились U_1 и d, то, следовательно, уменьшился заряд e_1 до какой-то величины e_2.

Увеличивая разность потенциалов U_1 до нового значения U_2, можно было снова остановить падение пылинки; при этом должно удовлетворяться равенство $e_2\frac{U_2}{d}=P$.

Заряжая и снова разряжая пылинку, можно было этот процесс повторять сотни раз, каждый раз при соответственных потенциалах U_1, U_2, U_3,... Оказалось, что различные заряды e_1, e_2, e_3, ..., которые имела пылинка, точно выражались следующим соотношением:

$$e_1:e_2:e_3:\ldots=\frac{1}{U_1}:\frac{1}{U_2}:\frac{1}{U_3}:\ldots=1:2:3:\ldots$$

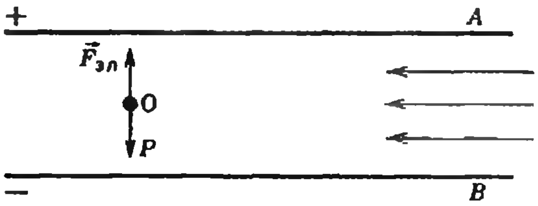


Рис. 1. Схема опыта по определению заряда электрона.

Эта статья — отрывок из книги А. Ф. Иоффе «Основные представления современной физики» (М.— Л., ГИТТЛ, 1949). Мы помещаем его с небольшими изменениями и дополнениями. Дополнения напечатаны мелким шрифтом.

Заряды пылинки изменялись как ряд целых чисел. Когда на пылинке оставался один отрицательный заряд, то она теряла его целиком при освещении и оставалась незаряженной. Действительно, никакой разностью потенциалов U (ни положительной, ни отрицательной) не удавалось замедлить падение частички. Но если во время падения продолжать освещение, то спустя некоторое время пылинка, теряя еще один заряд, заряжалась положительно, и тогда ее снова можно было остановить, но только уже противоположной разностью потенциалов, когда потенциал верхней пластины отрицательный, а нижней — положительный.

Тысячи таких опытов с пылинками из различных материалов показали, что заряд любой пылинки всегда состоит из целого числа вполне определенных порций, равных по наиболее точным современным измерениям $4{,}8024 \cdot 10^{-10}$ абсолютных электростатических единиц (за единицу принимается заряд, отталкивающий равный ему заряд, помещенный на расстояние в 1 см, с силой в 1 дину)*). Каждый раз, когда при освещении пылинка теряла отрицательный заряд, он оказывался равным $-4{,}8024 \cdot 10^{-10}$ абс. ед.

Эти единичные отрицательные заряды получили название электронов.

Никогда и нигде не удавалось наблюдать зарядов, меньших заряда электрона или равных нецелому числу зарядов электрона. Такие же отрицательно заряженные частицы — электроны — испускают накаленные тела. Это явление называют термоэлектронной эмиссией; им широко пользуются в радиолампах.

При пропускании электрического заряда сквозь сильно разреженные газы из отрицательного полюса (катода) выходит поток отрицательных зарядов, называемый катодными лучами. Удалось показать, что и катодные лучи — поток тех же электронов.

Поместив катодные лучи или поток фотоэлектронов в магнитное поле, можно определить отношение заряда электронов e к их массе m, а следовательно, и самую массу электронов.

Оказалось, что не только заряды, но и массы m электронов самого различного происхождения в точности совпадают и что

$$m = 9{,}1060 \cdot 10^{-28}\ \text{г}.$$

В течение первого десятилетия нашего века электрон был единственной известной тогда «элементарной» частицей. Физики думали, что электрон — последний и простейший элемент природы, и представляли его себе, как раньше атом, в виде шарика, по объему или по поверхности которого распределен электрический заряд.

Однако и тогда уже, в 1908 г., В. И. Ленин указывал, что принцип диалектического материализма о неисчерпаемом многообразии природы заставляет ожидать, что и электрон — сложное образование.

Это предвидение позже подтвердилось, хотя мы и сейчас не можем быть уверены в полноте существующей картины электрона.

Оказалось, что электрон обладает вращательным моментом (спином) s и магнитным моментом μ.

Магнитный момент электрона определяет максимальный момент сил, действующих на электрон в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$:

$$M_{\max} = |\vec{B}|\mu.$$

Для витка с током I

$$M_{\max} = |\vec{B}|IS,$$

где S — площадь, ограниченная витком (см. «Физика 9»). Поэтому магнитный момент витка с током равен $\mu = IS$. Магнитный момент — величина векторная. Вектор $\vec{\mu}$ направлен перпендикулярно плоскости витка.

Магнитные свойства электрона с полной наглядностью обнаруживаются в опытах, которые были поставлены Штерном и Герлахом по методу молекулярного пучка. В этом методе изучается поток молекул в виде тонкой ленты, выделенной при помощи системы узких щелей в пространстве, в котором создано возможно высокое разрежение. Всякое отклонение такого потока молекул от прямолинейного пути может быть вызвано только действием сил, а эти силы могут быть вычислены по начальной скорости молекул и величине отклонения. Этот метод применяется для обнаружения самых разнообразных воздействий, в том числе даже таких слабых, как силы тяготения.

---

*) По измерениям, проведенным к настоящему времени, наименьший электрический заряд (положительный или отрицательный) равен $e = 4{,}803250(21) \cdot 10^{-10}$ абсолютных электростатических единиц (ед. СГСЭ), или (в СИ) $e = 1{,}6021892(46) \cdot 10^{-19}$ Кл.

Если пропустить молекулярный пучок через сильное и притом резко неоднородное магнитное поле, то отдельные молекулы отклонятся тем сильнее, чем больше их магнитный момент и чем меньше угол между направлением магнитного момента и направлением магнитного поля, через которое проходят молекулы.

Магнитный момент может происходить как от магнитных свойств самого электрона, так и от того электрического тока, который электрон создает, двигаясь по замкнутой орбите. Если, например, электрон движется по окружности радиуса r со скоростью v, то через поперечное сечение окружности электрон проходит $v/2\pi r$ раз в секунду, перенося каждый раз свой заряд e. Таким образом, вращающийся по окружности радиуса r электрон представляет собой ток $i=ev/2\pi r$. Магнитный момент μ движущегося по круговой орбите электрона равен

$$\mu=\pi r^2 i=\frac{evr}{2}.$$

Механический момент количества движения такого вращающегося по орбите электрона — $L=mvr$.

Таким образом, для движущегося по круговой орбите электрона

$$\frac{\mu}{L}=\frac{e}{2m}.$$

В атомах водорода, лития и серебра механический вращательный момент электронов при движении по орбите равен нулю: $L=0$. Поэтому и магнитный момент μ должен быть равным нулю.

Между тем для потока всех этих атомов получилось хорошо измеримое отклонение при прохождении сквозь магнитное поле (рисунок 2). При этом весь поток разбивался на две части, отклонявшиеся в противоположные стороны на равные углы (фото на рисунке 2). Из результатов этого опыта мы заключаем, что:

1) электроны, независимо от своего движения, обладают определенным магнитным моментом даже при $L=0$;

2) проходя сквозь магнитное поле, электроны всех атомов ориентируются так, что их магнитные моменты $\vec{\mu}$ направлены либо по направлению магнитного поля (параллельная ориентация), либо в противоположную сторону (антипараллельная ориентация); промежуточные же ориентации полностью отсутствуют.

Оказывается, наряду с магнитными свойствами электрон обладает и определенным моментом вращения s; однако соотношение между μ и s в этом случае имеет иное значение:

$$\frac{\mu}{s}=\frac{e}{m}$$

— отношение μ/s вдвое больше, чем отношение μ/L.

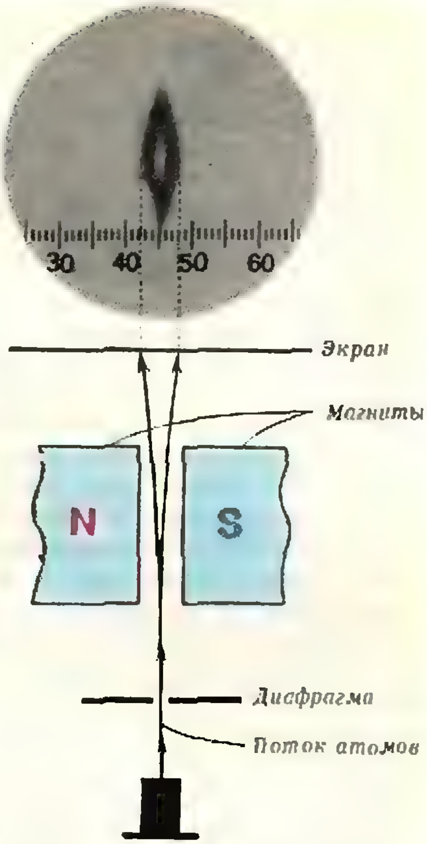


Рис. 2. Схема опыта Штерна и Герлаха.

Существование механического момента, связанного с магнитным, было показано в опытах, идея которых принадлежит Эйнштейну и де Хаасу, но которые в особо наглядной форме были поставлены П. Л. Капицей и мной в 1920 г.

В хорошо откачанной кварцевой трубе на длинной тонкой нити подвешивался намагниченный никелевый стерженек. Магнитное поле Земли было сведено к нулю. Окружая трубу горячей печью или пламенем газовой горелки, можно было быстро нагреть стерженек выше температуры в 360°С, когда никель размагничивается; в этот момент стерженек начинал закручиваться.

Намагничивание никеля вызвано тем, что магнитные моменты атомных электронов поворачиваются в одну сторону. При размагничивании они, наоборот, разбрасываются тепловым движением по всем направлениям.

Так как электронные магнитики в то же время вращаются вокруг своей оси, то намагниченный стерженек обладает скрытым в его электронах вращательным моментом. При размагничивании этот момент исчезает. Но, согласно основным законам механики, вращательный момент системы неизменен, как неизменна и ее энергия.

В нашем случае подвешенный в пустоте стерженек не может передать своего вращательного момента окружающей среде. Вращательный момент электронов намагниченного стерженька при размагничивании перешел в момент количества движения всего стерженька как целого — стерженек начал вращаться.

Первоначальные опыты Эйнштейна и де Хааса, проведенные с железом, дали для отношения μ/L значение, в пределах 20% совпадающее с величиной $e/2m$, относящейся к движению электронов по круговым орбитам. Однако впоследствии, устранив незамеченные прежде ошибки опыта, они установили, что

$$\frac{\mu}{L} = \frac{e}{m},$$

как это должно быть для вращающихся вокруг собственной оси электронов. Таким образом, опыты Эйнштейна и де Хааса показали, что намагничивание железа объясняется наличием у электронов собственных магнитных моментов, не связанных с движением электронов по орбитам.

Соотношение между μ и s было определено Барнетом другим методом: приводя в быстрое вращение стержни из различных материалов, Барнет ориентировал этим механические моменты (спины) электронов и таким образом превращал стержни в магниты. Эти измерения привели к тому же соотношению μ и s, которое имеет место для спинов электронов.

Все эти спины, в полном согласии с теорией, приводят к следующему результату: магнитный момент $\vec{\mu}$ электрона в магнитном поле устанавливается параллельно или антипараллельно полю, и проекции $\vec{\mu}$ на направление индукции $\vec{B}$ поля равны

$$\mu_B = \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{m}\,\frac{h}{2\pi} = \pm\frac{1}{2}\,\frac{e}{m}\,\hbar.$$

Знак «+» соответствует параллельной установке, знак «—» соответствует антипараллельной установке.

Этим проекциям магнитного момента соответствуют проекции спина s электрона

$$s_B = \pm\frac{1}{2}\,\frac{h}{2\pi} = \pm\frac{1}{2}\,\hbar.$$

В этих формулах h — универсальная постоянная (постоянная Планка), равная $6{,}624\cdot10^{-27}$ эрг · с *).

В полную характеристику электрона входит, наряду с его зарядом e и массой m, и его спин s.

Если система состоит из нескольких электронов, их спины могут устанавливаться только двумя путями: 1) параллельно друг другу, создавая механический и магнитный моменты системы, равные сумме моментов всех электронов; 2) антипараллельно, взаимно компенсируя друг друга, полностью или частично.

---

*) По современным данным $h = 6{,}626\times10^{-27}$ эрг · с $= 6{,}626\cdot10^{-34}$ Дж · с.

Ю. Михеев

Одной линейкой

На этом занятии математического кружка мы будем решать задачи на построение одной линейкой. Что можно построить таким образом из данных четырех точек? Мы дадим некоторый ответ на этот вопрос. Попутно будет решена задача М625.

Дан конечный набор точек, линейка и карандаш. Какие новые точки можно тогда построить?

Уточним постановку задачи. Точку будем считать *построенной*, если она одна из данных или является пересечением двух построенных прямых; в свою очередь, прямую будем считать *построенной*, если она проходит через построенные (в частности, данные) точки. Общая задача состоит в том, чтобы *описать множество точек, которые можно построить исходя из данного конечного набора точек*.

Ясно, что если даны одна, две или три точки, никаких новых точек построить нельзя (рис. 1); если даны четыре точки, какие-то три из которых (или все четыре) лежат на одной прямой, тоже, очевидно, никаких новых точек построить нельзя (рис. 2); если, наконец, даны четыре точки, лежащие в вершинах параллелограмма, можно построить только одну точку — его центр (рис. 3). Пусть теперь даны четыре точки, не образующие вершины параллелограмма и такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Для краткости будем здесь говорить, что такие точки находятся *в общем положении*.

Рассмотрим сначала частный случай: данные точки P, Q, P', Q' лежат в вершинах трапеции (рис. 4). В первых шести задачах эта конфигурация считается заданной.

Задача 1. *Разделить отрезок PQ пополам.*

Решение показано на рисунке 4. На нем черным изображены данные точки P, Q, P', Q' и параллельные прямые PQ, $P'Q'$, дальнейшие построения выполнены красным цветом, причем номерами указан порядок проведения прямых.

Задача 2. *Удвоить отрезок $P'Q'$.*

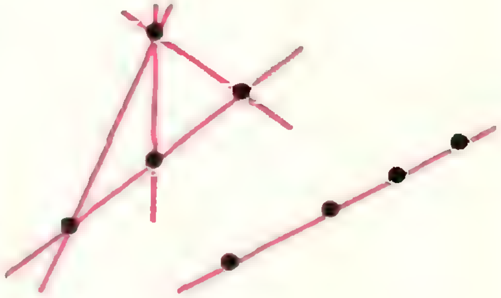


Рис. 2.

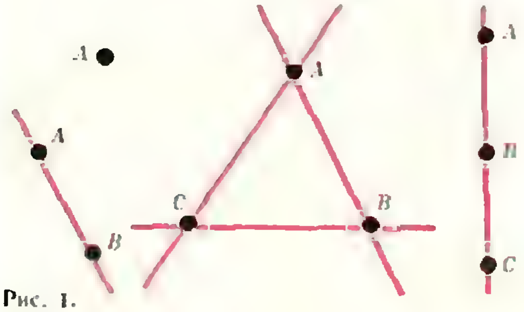


Рис. 1.

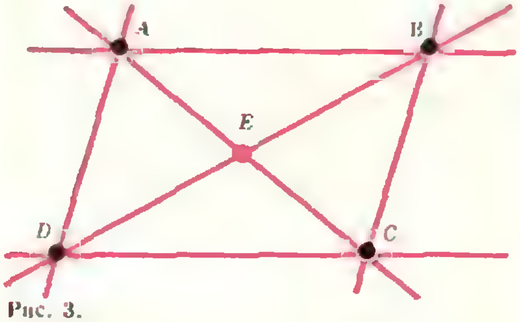


Рис. 3.

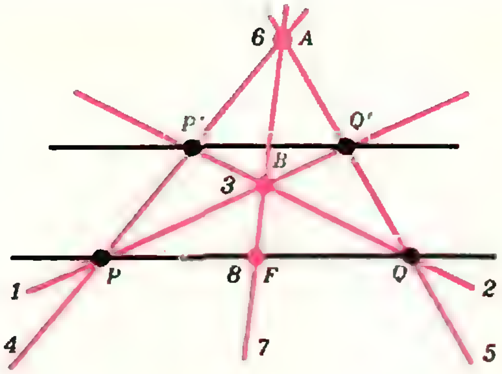


Рис. 4.

Решение показано на рисунке 5: на нем черным изображена и уже построенная точка F — середина $[PQ]$. Равенство $|P'Q'| = |Q'R'|$ следует из подобия треугольников $\triangle PMF \sim \triangle R'MQ'$, $\triangle FMQ \sim \triangle Q'MP'$ и равенства $|PF| = |FQ|$.

Задача 3. *Построить отрезок длины $n \cdot |P'Q'|$.*

Для этого нужно просто $n - 1$ раз повторить процедуру, использованную в предыдущей задаче. На рисунке 6 построение показано для $n = 3$.

Разумеется, аналогично на прямой PQ можно построить отрезок длины $m \cdot |PQ|$.

Задача 4. *Разделить отрезок $P'Q'$ на m равных частей.*

Решение. Сначала на прямой PQ строим $m - 1$ конгруэнтных отрезков PQ_2, $Q_2Q_3, \ldots, Q_{m-1}Q_m$. Затем строим (PP') и (Q_mQ') и соединяем их точку пересечения A с точками $Q_2, Q_3, \ldots, Q_{m-1}$. Полученные $m-1$ прямых делят $[P'Q']$ на m равных частей. Для $m = 4$ конструкция показана на рисунке 7.

(Заметим, что конструкция не проходит, если $(PP') \parallel (Q_mQ')$. Но эту трудность легко обойти: можно сначала удвоить $[PQ]$, затем построить m отрезков, конгруэнтных удвоенному отрезку, и далее повторить указанное в предыдущем абзаце построение.)

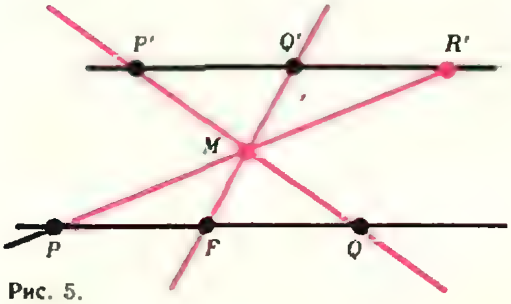


Рис. 5.

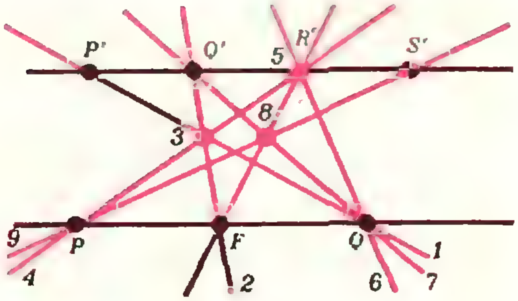


Рис. 6.

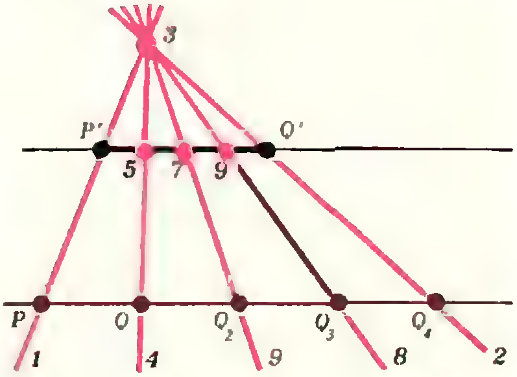


Рис. 7.

Для дальнейшего нам придется предположить, что данные точки F, Q, $P'Q'$ — *рациональные*, то есть имеют рациональные координаты относительно некоторой системы координат.

Задача 5. *Построить произвольную рациональную точку S на прямой PQ.*

Решение. Для рациональных точек P, Q, S отношение $|PS| : |PQ|$ рационально (докажите!), и значит $|PS| = \frac{m}{n}|PQ|$, где $m, n \in \mathbf{N}$. Поэтому достаточно разделить отрезок PQ на n равных частей и m раз отложить от точки P полученный отрезок.

Точно так же можно построить любую рациональную точку $T \in (P'Q')$.

Задача 6. *Построить произвольную рациональную точку T на плоскости.*

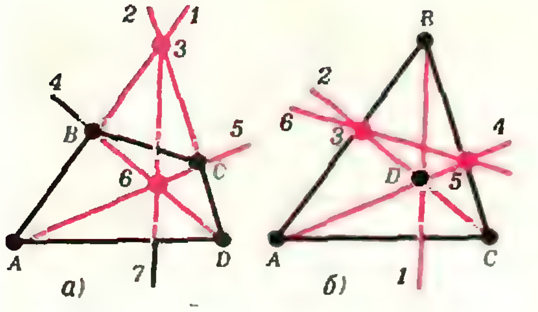


Рис. 8.

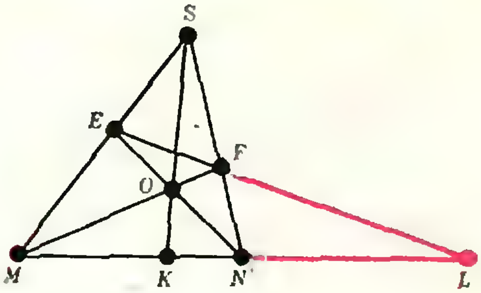


Рис. 9.

Решение. Допустим, точка T уже построена. Проведем прямые TP' и TQ'; они пересекут*) (PQ) в точках E и F. Так как прямые TP', TQ', PQ рациональны (то есть записываются в виде линейных уравнений с рациональными коэффициентами), координаты точек E и F получаются как решения систем линейных уравнений с рациональными коэффициентами и поэтому тоже рациональны. Умея строить E и F, мы построим и точку T.

Итак, отправляясь от трапеции с рациональными вершинами, можно построить вообще любую рациональную точку! Естественно спросить — а какие еще точки можно построить? Оказывается — никаких.

Задача 7. *Доказать, что любая точка, построенная одной линейкой из набора рациональных точек, рациональна.*

Действительно, прямая, проходящая через рациональные точки, рациональна и точка пересечения рациональных прямых (как решение системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами) тоже рациональна.

Заметим попутно, что нами решена задача М625а).

Пусть теперь A, B, C, D — четыре рациональные точки, находящиеся в общем положении. Вы, наверное, угадали, какие точки можно построить исходя из точек A, B, C, D — конечно же, как и в предыдущем случае, *все рациональные*. Более того, ясно, как можно постараться закончить доказательство этого факта: достаточно получить две параллельные прямые. Но это как раз самая трудная часть наших построений.

По условию точки A, B, C, D либо образуют выпуклый четырехугольник, отличный от параллелограмма, либо одна из точек находится внутри треугольника, образованного остальными тремя точками. Проведя в каждом из этих случаев прямые, как на рисунках 8, *а*, *б*, получим одинаковые конфигурации. Поэтому введем новые обозначения (см. рисунок 9, на котором данные и построенные точки не различаются).

Впрочем, из наших условий не следует, что прямые EF и MN пересекаются: они могут быть и параллельными. Когда же это произойдет?

Задача 8. *Доказать, что если* $|MK|=|KN|$, *то* $(MN)\parallel(EF)$.

Решение легко получить, если вспомнить решение задачи 2.

Задача 9. *В случае, когда* $|MK|=2|KN|$, *построить прямую, параллельную* (MN).

Решение. Сперва докажем, что в нашем случае $|MN|=|NL|$. Для этого нам придется применить теоремы Чевы и Менелая (их доказательства можно прочитать, например, в «Кванте», 1976, № 11, с. 22). Первая из этих теорем утверждает, что если вершины треугольника EFK (рис. 9) лежат соответственно на прямых MS, SN, NM, то

$$\frac{|MK|}{|KN|}\cdot\frac{|NF|}{|FS|}\cdot\frac{|SE|}{|EM|}=1. \qquad (1)$$

Вторая утверждает, что если точки E, F, L лежат соответственно на прямых SM, SN, MN и расположе-

---

*) В противном случае $T\in(P'Q')$, а этот случай уже разобран.

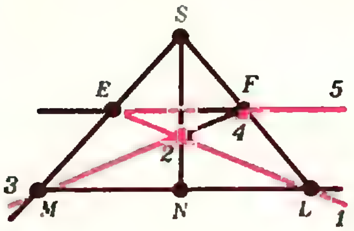


Рис. 10.

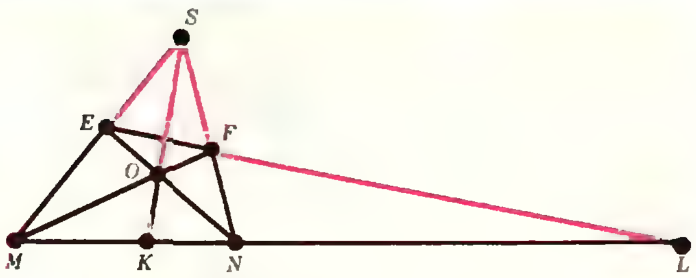


Рис. 11.

ны на одной прямой, то

$$\frac{|ML|}{|LN|}\cdot\frac{|NF|}{|FS|}\cdot\frac{|SE|}{|EM|}=1. \qquad (2)$$

Сопоставляя эти равенства, получаем $|ML|=2|NL|$, откуда $|MN|=|NL|$. А теперь построение параллельной прямой легко получается известным нам, в сущности, способом (рис. 10).

Задача 10. *В случае, когда $2|MK|=3|KN|$, постройте прямую, параллельную (MN).*

Указание. Покажите, что $|MN|=2|NL|$, (рис. 11), и примените задачу 9.

Задача 11. *Постройте прямую, параллельную прямой MN, в общем случае.*

Решение нам подсказывают предыдущие задачи. Пусть $|MK|:|KN|=p:q$, где $p>q$ (случай $p<q$ сводится к этому переименованием точек). Рассуждать мы будем индукцией по l. Базис индукции, то есть случай $l=1$, уже разобран (задача 8). Предположим, что при $p,\ q\leqslant l$ мы умеем по точкам M, K, L строить прямую, параллельную (MN). Пусть теперь $|MK|:|KN|=(l+1):q$. Сопоставляя (1) и (2), получаем

$$\frac{|MN|}{|ML|}=\frac{l+1-q}{q}$$

и можно воспользоваться предположением индукции, согласно которому по точкам M, N, L можно построить прямую, параллельную прямой (MN).

Таким образом, мы доказали следующую замечательную теорему (и попутно решили задачу М625):

Теорема. *Множество точек, которые можно построить одной линейкой из четырех рациональных точек, находящихся в общем положении, состоит из всех рациональных точек плоскости.*

Очевидно, увеличение числа исходных рациональных точек не меняет множества точек, которые можно построить.

Наверное, читателю хотелось бы узнать, какие точки можно построить исходя из четырех точек в общем положении, не все координаты которых рациональны. К сожалению, чтобы хорошо и точно сформулировать ответ, необходимо привлечь понятия из проективной геометрии. Однако интуитивно ясно, что в указанном случае получается множество точек, очень «похожее» на множество всех рациональных точек. Если говорить более точно, то данное множество «проективно-эквивалентно» множеству рациональных точек.

Упражнения

1. С помощью циркуля и линейки, исходя из четырех точек в общем положении, постройте точку, которую нельзя построить одной линейкой (циркулем разрешается строить окружность $O(A, |AB|)$, где A, B — построенные точки; точки пересечения построенной окружности с построенной прямой считаются построенными).

2. Даны три точки O, A, B и две параллельные прямые l, m, причем $A, B\in l$ и $O\notin l$, $O\notin m$. Построить одной линейкой

а) прямую, проходящую через O параллельно l;

б) прямую, проходящую через A параллельно OB.

3*. Даны пять точек $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(\sqrt{3}, 0)$. Какие точки можно из них построить одной линейкой?

задачник Кванта

Задачи

М646 — М650; Ф658 — Ф662

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 декабря 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М646, М647» или «Ф658». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М646. От точки O на плоскости отложены $2n$ векторов длины 1. Они раскрашены попеременно в красный и синий цвета. Пусть $\vec{s}$ — сумма n красных векторов, $\vec{r}$ — сумма n синих векторов. Докажите, что

$$|\vec{s}-\vec{r}| \leqslant 2...$$

Е. Шустин

М647. Докажите, что при любых $a \geqslant \frac{1}{2}$, $b \geqslant \frac{1}{2}$ справедливо равенство

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2 \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}.$$

С. Фомин

М648. Докажите, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.

И. Шарыгин

М649. Доказать равенство

$$c_n^2+(c_n-c_1)^2+(c_n-c_2)^2+\ldots+(c_n-c_{n-1})^2=\frac{n}{2},$$

где $c_1=1$, $c_2=1+\frac{1}{3}$, $c_3=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, ..., $c_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$.

С. Манукян

М650. Существует ли последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

а) натуральных чисел такая, что любое натуральное число единственным образом записывается в виде суммы нескольких ее членов:

$$a_{i_1}+a_{i_k}\ (i_1<\ldots<i_k,\ k\geqslant 1); \qquad (*)$$

б) натуральных чисел такая, что 1 не представляется в виде (*), а любое натуральное число, большее 1, представляется в виде (*) единственным образом;

в) целых чисел такая, что 0 не представляется в виде (*), а любое целое число, отличное от 0, представляется в виде (*) единственным образом;

г)* целых чисел такая, что 0 и 1 не представляются в виде (*), а любое целое число, отличное от 0 и 1, представляется в виде (*) единственным образом?

А. Разборов

Ф658. Из баллона, в котором находятся сильно разреженные пары калия, через узкую горизонтальную трубку выходит пучок атомов. Определить температуру паров, если на горизонтальном пути длиной $l=50$ см среднее смещение атомов по вертикали составляет $h=3{,}2$ мкм.

Ф659. Небольшой станок массой $m=200$ кг вибрирует при работе из-за неоднородности тяжелого маховика, вращающегося с угловой скоростью 600 об/с. Чтобы снизить вибрации перекрытия в цехе, в котором установлен станок, под станину положили упругую прокладку толщиной $h=10$ см из материала с модулем упругости $E=3{,}1\cdot10^8$ Н/м². Площадь основания станины $S=2$ м². Приведет ли установка прокладки к уменьшению вибраций перекрытия?

Р. Винокур

Ф660. Поплавок, изготовленный из однородного материала, имеет форму чечевицы — тела, ограниченного двумя сферическими поверхностями радиусов $R_1=R_2=R=3$ см. Максимальная толщина чечевицы $h=4$ см; масса чечевицы $m_1=5$ г. В поплавок на всю толщину вдоль оси симметрии воткнута спица длиной $l=10$ см и массой $m_2=3$ г. Устойчиво ли положение поплавка, когда он плавает на поверхности воды спицей вверх? Считать, что в жидкость погружена меньшая часть чечевицы.

Всероссийская олимпиада по физике

Ф661. На рисунке 1 приведены вольтамперные характеристики двух нелинейных резисторов R_1 и R_2. Какими будут токи, идущие через резисторы и источник с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=2$ Ом, если оба резистора подключить к источнику, соединив их: а) последовательно? б) параллельно?

И. Слободецкий

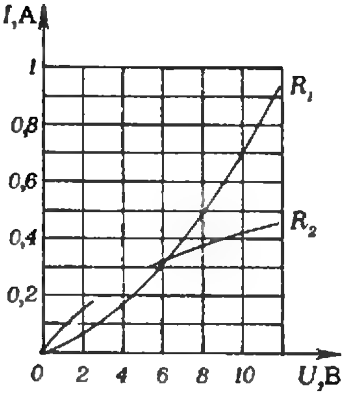


Рис. 1.

Ф662. Для подзарядки аккумулятора с ЭДС $\mathscr{E}=12$ В от мощного источника напряжения $U=5$ В собрана схема из катушки с индуктивностью $L=1$ Гн, диода $Д$ и прерывателя K (рис. 2), который периодически замыкается и размыкается на одинаковые промежутки времени $\tau_1=\tau_2=0{,}01$ с. Определить средний ток заряда аккумулятора.

А. Зильберман

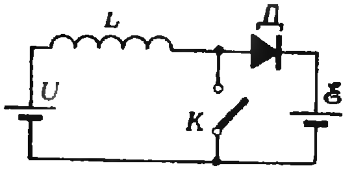


Рис. 2.

Решения задач

М600, М601, М603; Ф604—Ф607

М600. *Два велосипедиста едут по двум пересекающимся окружностям. Каждый едет по своей окружности с постоянной скоростью. Выехав одновременно из одной из точек их пересечения и сделав по одному обороту, велосипедисты вновь встретились в этой точке. Докажите, что на плоскости, в которой лежат окружности, существует такая неподвижная точка, расстояния от которой до велосипедистов все время одинаковы, если они едут: а) в одном направлении (против часовой стрелки); б) в разных направлениях.*

а) Изучим сначала случай, когда велосипедисты P и Q едут в одну сторону (оба — против часовой стрелки). В этом случае интересно смотреть на них из второй точки B пересечения окружностей: *точки P, Q находятся в течение всего движения на одной прямой, проходящей через B!* В самом деле, если вращать вокруг фиксированной точки окружности прямую l с постоянной угловой скоростью ω, то вторая точка пересечения прямой l с окружностью будет двигаться по этой окружности с угловой скоростью 2ω (то есть пока прямая повернется на угол ω, эта вторая точка пройдет дугу величиной 2ω — см. рис. 1)*). Таким образом, в нашей задаче обе точки P и Q, движущиеся по своим окружностям с одинаковыми угловыми скоростями, можно рассматривать как точки пересечения с окружностями прямой l, вращающейся вокруг точки B (с вдвое меньшей угловой скоростью). Теперь уже нетрудно доказать, что серединный перпендикуляр m к (подвижному) отрезку PQ будет все время проходить через одну и ту же (неподвижную) точку плоскости C. (Это и будет означать, что все время $|PC|=|QC|$.) Перпендикулярные l прямые, восстановленные в точках P и Q, проходят, очевидно, через проведенные точки B_1 и B_2, диаметрально противоположные B в одной и другой окружностях (рис. 2). Поэтому параллельная им прямая m, идущая ровно посередине между ними, проходит через середину C отрезка B_1B_2. (Заметим, хотя этого уже не требуется для решения, что неслучайно на нашем рисунке прямая B_1B_2 прошла через точку A пересечения окружностей: во-первых, в начальный момент времени, когда $l=(AB)$ и $P=Q=A$, все три перпендикуляра к l сливаются в одну прямую B_1B_2; во-вторых, $[O_1O_2]$ — средняя линия треугольника B_1BB_2 — делит хорду AB пополам.)

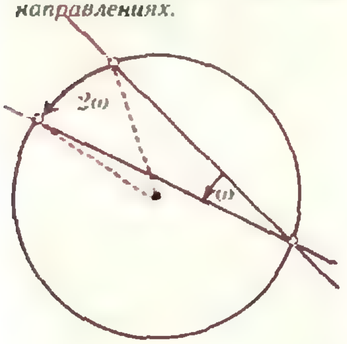


Рис. 1.

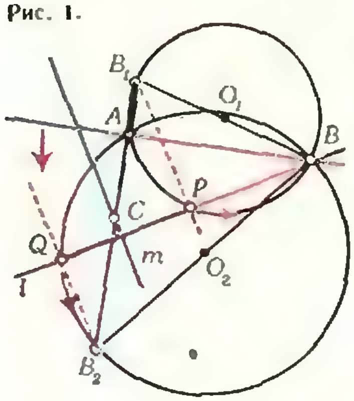


Рис. 2.

б) Для случая, когда точки P и Q вращаются в разных направлениях, также можно найти чисто геометрическое доказательство. Но мы приведем более простое аналитическое рассуждение, которое, кстати, дает еще одно решение и для уже рассмотренного случая.

Пусть точка P «бегает» по окружности радиуса r с центром O и $|OK|=R$. Если угловая скорость точки P равна ω, а угол между векторами OK и OP в момент времени $t=0$ равен φ_0, то в любой момент времени t квадрат расстояния $f(t)=|KP|^2$

$$f(t)=r^2+R^2-2rR\cos(\varphi_0+\omega t)$$

(график функции f изображен на рисунке 3).

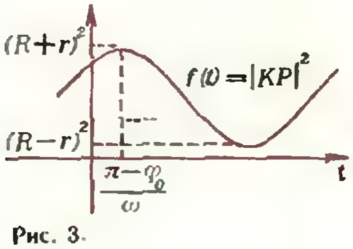


Рис. 3.

Мы хотим, чтобы такие функции, определенные для двух разных окружностей (разного радиуса, с центрами, находящимися на разных расстояниях от точки K), тождественно совпадали. Но, с другой стороны, ясно, что, зная $f(t)$ для всех t, мы однозначно определим значения $(R+r)^2$ и $(R-r)^2$, а значит, $R+r$ и Rr, то есть определим и пару чисел $(R; r)$; правда, эта пара определяется лишь с точностью до перестановки: окружность радиуса R, центр которой удален от точки K на расстояние r, будет (при надлежащей «начальной фазе» точки P) давать в точности ту же функцию f, что и исходная окружность. (Заметим, что мы

---

*) В книге Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые» (М., «Наука», 1978) это утверждение — «теорема о колечке на окружности» — рассматривается как вариант теоремы о вписанном угле.

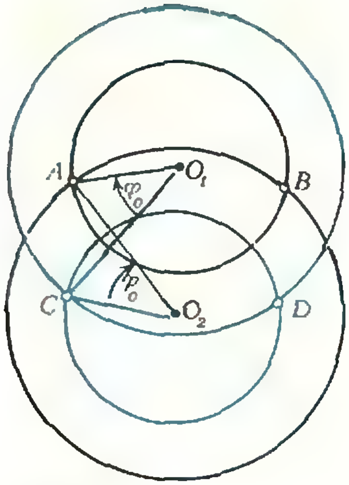


Рис. 4.

можем также поменять знак у ω и одновременно у φ_0, $-\pi\leqslant\varphi_0\leqslant\pi$, не меняя f.)

В этом — ключ к построению точки C из задачи а), совершенно отличному от предложенного выше; заодно мы получим и нужную в задаче б) точку D, и готовое доказательство.

Пусть данные окружности — радиуса r с центром O_1 и радиуса R с центром O_2. Проведем (голубые) окружности: радиуса R с центром O_1 и радиуса r с центром O_2 (рис. 4). Точки пересечения C и D этих окружностей (они получаются соответственно из точек A и B симметрией относительно серединного перпендикуляра n отрезка O_1O_2) и есть искомые точки. После сказанного выше нужно проверить лишь, что начальные фазы φ_0 либо а) совпадают (при одинаковых ω), либо б) противоположны (при ω, противоположных по знаку) — тогда и функции f, соответствующие движениям точек P и Q по окружностям, будут совпадать.

В случае а) равенство углов $\overrightarrow{O_1C}$ с $\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2C}$ с $\overrightarrow{O_2A}$ следует из симметрии относительно n; в случае б) равенство углов $\overrightarrow{O_1D}$ с $\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2D}$ с $\overrightarrow{O_2A}$ (с переменной знака) видно из того, что четырехугольник AO_1DO_2 — параллелограмм.

Н. Васильев

◆

М601. *Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот треугольника ABC с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A, и делит этот отрезок пополам.*

Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, A' — точка описанной окружности, диаметрально противоположная вершине A (рис. 1). Соединим точку A' с вершинами B и C. Треугольники ABA' и ACA' — прямоугольные (углы при вершинах B и C опираются на диаметр), а потому $[A'B]\parallel[CH]$ и $[A'C]\parallel[BH]$. Значит, четырехугольник $BA'CH$ — параллелограмм. Его диагонали $[BC]$ и $[A'H]$ в точке пересечения делятся пополам, откуда и следует утверждение задачи.

Итак, мы доказали, что точка A', симметричная точке H относительно середины стороны BC, лежит на описанной окружности. Заметим, что точка A^*, симметричная точке H относительно прямой BC, также лежит на описанной окружности — это проекция точки A' на продолжение высоты AH (рис. 2). Аналогично можно построить точки B' и B^*, C' и C^*. Образ описанной около треугольника ABC окружности при гомотетии с центром H и коэффициентом $1/2$ — это знаменитая «окружность Эйлера», или «окружность девяти точек» (имеются в виду образы точек A, B, C, A', B', C', A^*, B^*, C^*) треугольника ABC («Квант», 1979, № 8).

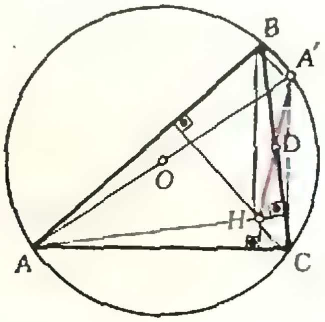


Рис. 1.

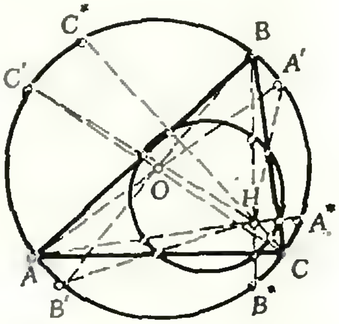


Рис. 2.

И. Клумова

Задача М602 решена в статье *А. Абрамова*, которая будет напечатана в одном из ближайших номеров.

М603. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3, \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на y, второе — на x и сложим эти два уравнения. Получим

$$2xy+\frac{(3x-y)y-(x+3y)x}{x^2+y^2}=3y$$

или

$$2xy-1=3y.$$

Отсюда $y\neq 0$. Поэтому

$$x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2y}.$$

Подставим полученное соотношение во второе уравнение исходной системы; получим

$$y\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2y}\right)^2+y^2\right]-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2y}\right)-3y=0$$

или

$$4y^4-3y^2-1=0,$$

откуда $y^2=1$, то есть $y_1=1$, $y_2=-1$, $x_1=2$, $x_2=1$.

Л. Купцов

Ф604. *В условиях невесомости жидкость, помещенная в стеклянный цилиндрический сосуд с радиусом основания R_1, приняла форму, показанную на рисунке 1. Свободная поверхность жидкости имела форму сферы с радиусом R_0. Та же жидкость, помещенная в стеклянный сферический сосуд радиуса R_2, приняла форму, показанную на рисунке 2. Свободная поверхность жидкости была плоской. Определить высоту уровня жидкости в сферическом сосуде. Какую форму будет иметь жидкость в сферическом сосуде, если радиус сосуда больше R_2? меньше R_2?*

◆

Краевой угол, который образуют в точке соприкосновения трех сред поверхности этих сред (касательные к этим поверхностям в данной точке), определяется силами взаимодействиями между молекулами в этих средах и не зависит от силы тяжести. Поэтому краевой угол должен быть одним и тем же в невесомости и на Земле и именно он определяет форму поверхности жидкости вблизи точек соприкосновения трех данных сред (в нашем случае — жидкости, твердого тела и газа).

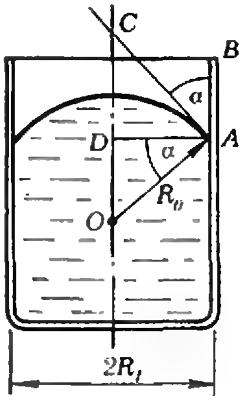


Рис. 1.

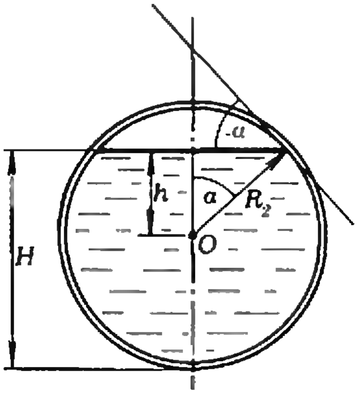


Рис. 2.

Из рисунков 1 и 2 видно, что

$$\cos\alpha=\frac{R_1}{R_0}\ \text{и}\ \cos\alpha=\frac{h}{R_2}.$$

Отсюда находим $h=R_1R_2/R_0$. Следовательно, высота уровня жидкости в сферическом сосуде равна

$$H=h+R_2=\frac{R_2}{R_0}(R_1+R_0).$$

В сосудах с радиусами $R<R_2$ и $R>R_2$ уровни жидкости будут соответственно выше и ниже, чем в сосуде с радиусом R_2. В любом случае в точке соприкосновения трех сред краевой угол равен α.

В. Скороваров

Ф605. *Проволочный предохранитель перегорает, если напряжение на нем равно 10 В. При каком напряжении будет перегорать предохранитель, если его длину увеличить вдвое?*

Ответ на эту задачу очевиден — предельное напряжение на «длинном» предохранителе равно 20 В.

Рассмотрим более сложную задачу: при каком напряжении будет перегорать предохранитель, если его длину l увеличить в n раз, а диаметр d — в k раз.

Если напряжение U на предохранителе (и ток, идущий по нему) таковы, что температура проводника равна T (например, температура плавления), в проводнике выделяется количество теплоты

$$Q_1 = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{\varrho\dfrac{l}{s}} = \frac{\pi U^2 d^2}{4\varrho l}$$

(R — сопротивление, ϱ — удельное сопротивление проводника, $s = \pi d^2/4$ — площадь поперечного сечения). Окружающей среде отдается количество теплоты

$$Q_2 = \alpha S(T - T_{\text{ср}}) = \alpha\pi dl(T - T_{\text{ср}})$$

($S = \pi dl$ — площадь поверхности проводника, $T_{\text{ср}}$ — температура окружающей среды и α — коэффициент пропорциональности). При тепловом равновесии $Q_1 = Q_2$, то есть

$$\frac{\pi U^2 d^2}{4\varrho l} = \alpha\pi\, dl(T - T_{\text{ср}}).$$

Отсюда найдем напряжение U на проводнике, при котором он нагревается до температуры T:

$$U = 2l\sqrt{\frac{\alpha\varrho(T - T_{\text{ср}})}{d}}.$$

При длине проводника $l_1 = nl$ и диаметре проводника $d_1 = kd$ температура проводника равна T при напряжении

$$U_1 = 2ln\sqrt{\frac{\alpha\varrho(T - T_{\text{ср}})}{kd}}.$$

Таким образом,

$$U_1 = U\frac{n}{\sqrt{k}}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф606. *Шайба соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости с углом α. Коэффициент трения между шайбой и поверхностью наклонной плоскости изменяется с расстоянием l от вершины по закону $\mu = kl$ ($k = \text{const}$). На каком расстоянии от вершины надо поставить упор, чтобы после одного упругого соударения с упором шайба остановилась как можно выше?*

Пусть в точке A, находящейся на расстоянии l_0 от вершины наклонной плоскости, сила трения, действующая на шайбу, равна (см. рис.) $|\vec{F}_{\text{тр}}| = m|\vec{g}|\sin\alpha$, где m — масса шайбы. Поскольку в точке A коэффициент трения $\mu_A = kl_0$, в этой точке $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu_A|\vec{N}| = kl_0 m|\vec{g}|\cos\alpha$, то есть

$$m|\vec{g}|\sin\alpha = kl_0 m|\vec{g}|\cos\alpha,$$

откуда

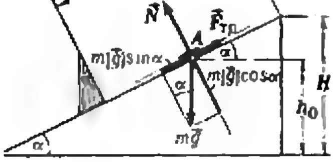
$$l_0 = \operatorname{tg}\alpha/k.$$

Нетрудно показать, что максимально возможная высота подъема шайбы после одного удара об упор — это высота h_0, соответствующая точке A. Чтобы после удара шайба остановилась в точке A, надо, чтобы при подъеме после удара шайба имела в точке A скорость, равную нулю.

Найдем, на каком расстоянии l от вершины наклонной плоскости надо установить упор, чтобы шайба после удара остановилась в точке A. Запишем закон сохранения энергии (см. рис.):

$$mgH = mgh_0 + F_{\text{ср}\,1}l + F_{\text{ср}\,2}(l - l_0). \qquad (*)$$

Здесь $F_{\text{ср}\,1}l$ — энергия, «потерянная» на преодоление трения на пути от вершины наклонной плоскости до упора; на этом участке среднее значение силы трения $F_{\text{ср}\,1} = klmg(\cos\alpha)/2$. $F_{\text{ср}\,2}(l - l_0)$ — энергия, затраченная на преодоление трения на пути от упора до точки A; на этом участке



$F_{\text{ср. }2}=k(l+l_0)mg(\cos\alpha)/2$. С учетом этого из (•) получаем

$$(H-h_0)=\frac{k}{2}l^2\cos\alpha+\frac{k}{2}(l^2-l_0^2)\cos\alpha.$$

Отсюда, учитывая, что $H-h_0=l_0\sin\alpha$, находим

$$l=\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{k}}$$

В. Белонучкин

◆

Ф607. *Самолет летит по замкнутому маршруту ABC. Пункты A, B и C лежат в вершинах правильного треугольника. В каком случае время, затраченное на перелет, будет меньше: если ветер дует в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$ или если ветер дует в направлении вектора $\overrightarrow{BA}$?*

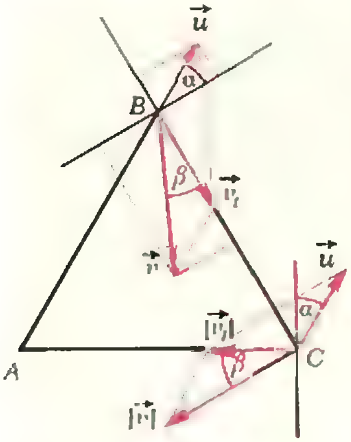


Рис. 1.

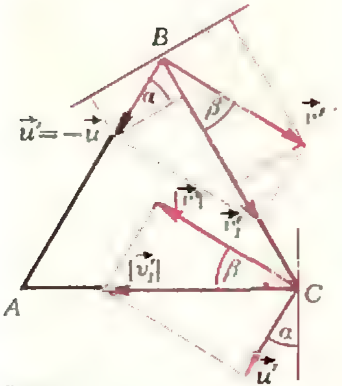


Рис. 2.

Обозначим l длину стороны треугольника ABC. Если скорость вектора равна u и он дует в направлении $\overrightarrow{AB}$, то вдоль вектора $\overrightarrow{AB}$ самолет летит со скоростью $u+v$ (где v — модуль скорости самолета) и затрачивает на перелет $A\to B$ время

$$t_1=\frac{l}{u+v}=\frac{l}{v(1+d)},\text{ где }d=\frac{u}{v}.$$

Вдоль вектора $\overrightarrow{BC}$ самолет летит со скоростью $\vec{v}_1=\vec{v}+\vec{u}$ (рис. 1). Так как вектор $\vec{v}_1$ направлен вдоль вектора $\overrightarrow{BC}$, модуль вектора $\vec{v}_1$ равен сумме проекций векторов $\vec{v}$ и $\vec{u}$ на $\overrightarrow{BC}$, а сумма проекций этих векторов на ось, перпендикулярную $\overrightarrow{BC}$, равна нулю:

$$v_1=v\cos\beta-u\sin\alpha,$$
$$v\sin\beta-u\cos\alpha=0.$$

Отсюда, учитывая, что $\alpha=30^\circ$, получим

$$v_1=v\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}\cos^2\alpha}-u\sin\alpha=\frac{1}{2}v\sqrt{4-3d^2}-\frac{1}{2}d.$$

Такой же по модулю будет скорость на участке CA. Поэтому на перелет $B\to C\to A$ самолет затратит время

$$t_2=\frac{2l}{v_1}=\frac{4l}{v\sqrt{4-3d^2}-dv}.$$

Полное время t перелета $A\to B\to C\to A$ равно t_1+t_2.

Если ветер дует вдоль вектора $\overrightarrow{BA}$, то перелет $A\to B$ совершается за время

$$t_1'=\frac{l}{v-u}=\frac{l}{v(1-d)}.$$

Скорость на участках BC и CA в этом случае (рис. 2) будет равна по модулю

$$v_1'=\sqrt{v^2-\frac{3}{4}u^2}+\frac{1}{2}u=v\sqrt{1-\frac{3}{4}d^2}+\frac{1}{2}dv,$$

и на перелет $B\to C\to A$ потребуется время

$$t_2'=\frac{2l}{v_1'}=\frac{4l}{v\sqrt{4-3d^2}+dv}.$$

Полное время t' перелета $A\to B\to C\to A$ равно в этом случае $t_1'+t_2'$. Отношение времен t' и t равно

$$\frac{t'}{t}=\frac{\dfrac{1}{1-d}+\dfrac{4}{\sqrt{4-3d^2}+d}}{\dfrac{1}{1+d}+\dfrac{4}{\sqrt{4-3d^2}-d}}.$$

Проведя алгебраические преобразования, получим

$$\frac{t'}{t}=1.$$

Н. Кушнир

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В данном примере на умножение (см. рисунок) одна из цифр заменена звездочкой, а остальные — точками. Известно, что сумма цифр четырехзначного сомножителя равна 19. Восстановите пример.

2. В прямоугольном треугольнике на гипотенузе AB от вершины A отложим отрезок AD, конгруэнтный катету AC, а от вершины B — отрезок BE, конгруэнтный катету BC. Докажите, что длина отрезка DE равна диаметру окружности, вписанной в треугольник ABC.

3. Выпишем несколько первых степеней тройки: 3^1, 3^2, 3^3, ..., 3^8 (см. рисунок). Получаются числа, у которых в разряде десятков стоит четная цифра. Верно ли, что так будет всегда?

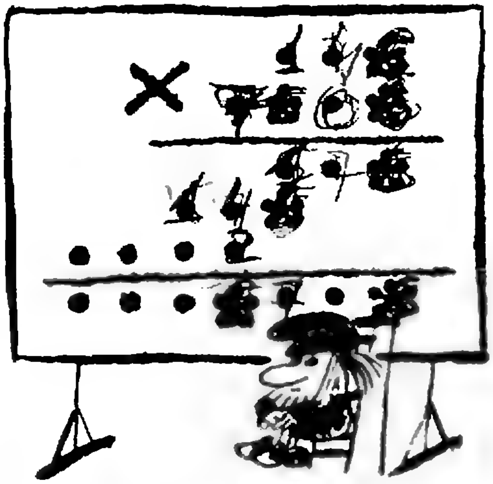
4. Доля блондинов среди голубоглазых больше, чем их доля среди всего населения. Верно ли, что доля голубоглазых среди блондинов больше, чем их доля среди всего населения?

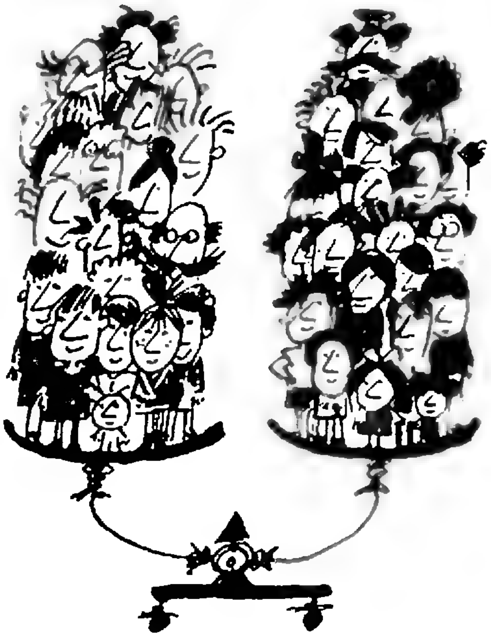
5. Обозначим через $\overline{\underbrace{a\ldots bcd}_{n}}$, n-значное число, у которого d единиц, c десятков, b сотен, а в старшем разряде стоит цифра a. Найдите трехзначное число $\overline{abc}$, для которого

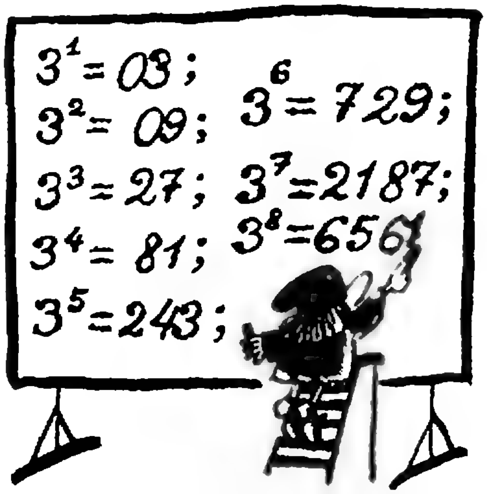
$$(\overline{abc})^a=\overline{bc(a-1)bc}$$

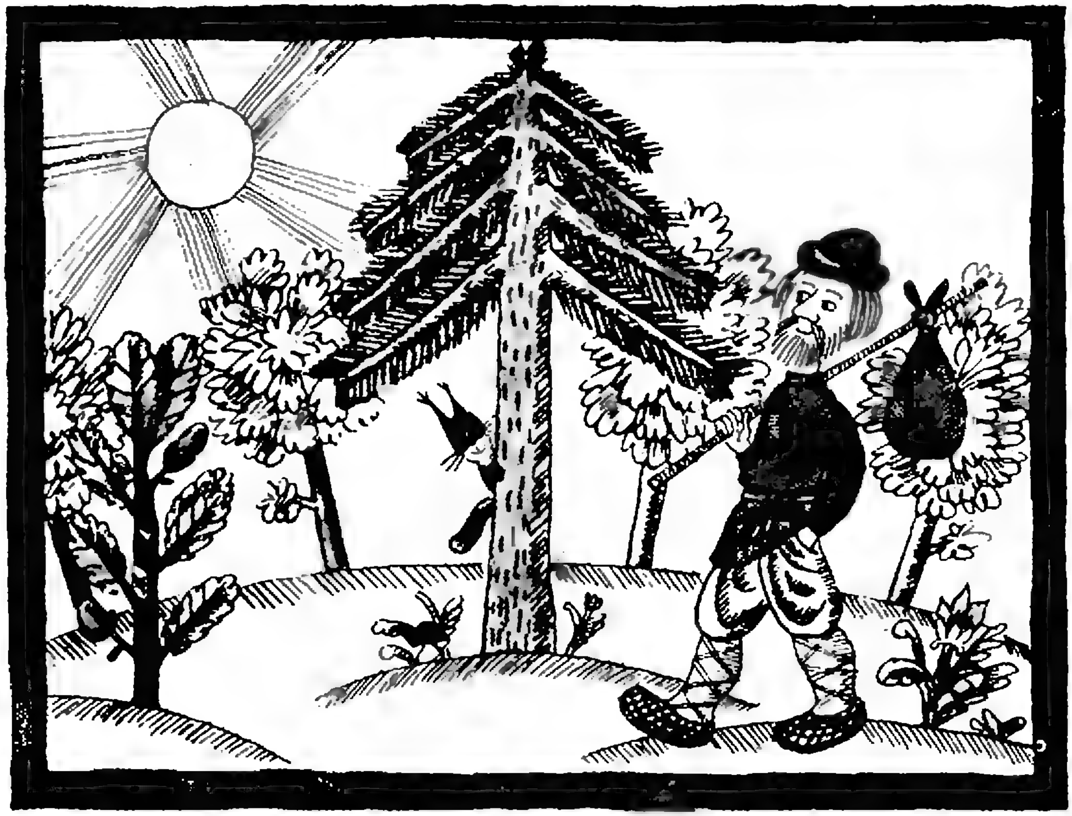
(у пятизначного числа в правой части в разряде сотен стоит цифра $a-1$).

Эти задачи нам предложили
Ф. Бартенев, А. Майоров,
И. Михалкович, А. Савин,
А. Толпыго









И. Юфанова

Волшебная сказка с физическими вопросами

Жил старик с тремя сыновьями. На краю света жил. Кругом тишь, места непроходимые.

Выросли сыновья и просят отца отпустить их из родного дома. Хочется им по белу свету побродить, на людей посмотреть, уму-разуму поучиться.

Договорились братья путешествовать вместе: идти туда, куда каждый по очереди вести будет. Сначала старший вел всех на юг. Прошли братья 10 верст. Затем впереди пошел средний. Еще 10 верст прошли братья, но теперь уже на запад. Настала очередь младшему. Он прошел со своими братьями 10 верст на север. И оказались братья, к своему удивлению, ... в родном доме, откуда совсем недавно в путь отправились.

Где жил старик со своими сыновьями?

Вновь собрались братья в дорогу. Подошли к развилке трех дорог и пошли каждый своей дорогой. Условились через три года встретиться на том же месте.

Долго бродили братья по белу свету, разным ремеслам обучались да на дивности любовались. Вернулись в назначенный день домой и поведали о своих приключениях.

Первым речь повел старший брат:

«Еду я однажды по дороге и вижу поляну. Посреди огромная ель растет, а около нее белка резвится.

Волшебная, наверное. Поймать бы, думаю. Будет она песни петь да орешки с золотыми скорлупками грызть. А в этих орешках ядра — из чистого изумруда.

Сделал я шаг к дереву, а белка скок за ствол. Спряталась. Только мордочку с любопытными глазками показывает.

Обойду-ка, думаю, дерево, зайду к белке сзади да и поймаю ее.

Пошел я по круглой поляне, не приближаясь к ели. А белка, хитрющая, в противоположную сторону от меня движется. Да так в аккурат, что только глазки из-за ствола и видно.

Четыре раза я поляну обошел, а белку так и не поймал.»

Обошел ли старший брат белку хоть раз? Кто из них быстрее двигался? Что видела белка: стоял старший брат или двигался?

Продолжил рассказ средний брат:

«Однажды я весь день был в пути, а к вечеру, когда для человека, для зверя, для птицы настает время сна, прилег и быстро заснул.

Много ли, мало ли я спал, только разбудили меня шум и свист. Чувствую, братцы, по воздуху плыву. Понял я, что заснул на ковре-самолете и теперь лечу на нем. Обрадовался такому приключению. Да, видно, рановато.

Сначала никак не мог усесться. Свесил ноги вниз — сидеть удобно, привычно, но очень в ноги дует. Так в сторону относит, что они под острым углом к туловищу располагаются. Да и холодно очень.

Кое-как устроился, вытянув ноги вдоль ковра. А тут солнышко зашло. Еще больше похолодало, зуб на зуб не попадает.»

С чем можно сравнить полет среднего брата — с полетом аэростата или самолета? Как можно вновь увидеть закатившееся за горизонт Солнце? С какой скоростью должен лететь сказочный ковер-самолет, чтобы Солнце всегда обогревало его пассажиров?

Последним поведал свой рассказ младший брат:

«Довелось мне, братцы, побывать в саду сказочной красоты. Цветов там видимо-невидимо. Гранатовые деревья точно красной краской выкрашены, столько на них плодов. Были там и яблони с золотыми плодами. Воздух кругом сладкий, душистый. Куда ни глянь, сидит соловей да песни распевает.

Но самой прекрасной была в том саду принцесса, дочь владельца сада. Да околдовал ее злой волшебник, превратил в уточку. Девицей-красавицей разрешил только на качелях качаться. Любила она это развлечение. Если качели движутся, на них она — девица. Как только останавливаются, в тот же миг оборачивается девица уточкой и улетает так быстро, что ее только и видели.

Прослышал я, что если долго смотреть на неподвижную принцессу, колдовство пропадет. Так я и сделал. Освободил от чар злого волшебника прекрасную принцессу, за что и получил вознаграждение.»

Как это удалось сделать младшему брату?

И. Габович

Предел функции

Понятие «предел функции» является одним из важнейших в школьном курсе математики. Через него определяются «непрерывность» и «производная».

Основное определение (§ 38 пособия «Алгебра и начала анализа 9») сформулируем двумя способами.

Сначала на «арифметическом» языке: число b называется *пределом функции f при x, стремящемся к a,* если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что при всех x, удовлетворяющих двойному неравенству*)

$$0<|x-a|<\delta, \qquad (1)$$

выполняется неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon. \qquad (2)$$

Чтобы сформулировать определение предела функции на «геометрическом» языке, введем термин, которого нет в школьном пособии. Как известно, *окрестностью* точки $a\in\mathbf{R}$ называется интервал вида $]a-\delta;\ a+\delta[$, где δ — произвольное положительное число. Назовем *проколотой окрестностью* точки $a\in\mathbf{R}$ ее окрестность, из которой выкинута («выколота») сама точка a, то есть «разорванное» множество вида $]a-\delta;\ a[\cup]a;\ a+\delta[$. Теперь определение предела функции может быть сформулировано так: число b называется *пределом функции f при x, стремящемся к a,* если для любой окрестности B точки b найдется такая проколотая окрестность A точки a, что $f(A)\subset B$ (рис. 1).

Таким образом, не требуется, чтобы неравенство (2) выполнялось и при $x=a$. Функция f в точке a может быть даже не определена — это ничуть не влияет на ее предел при x, стремящемся к a. Например, функция $\frac{x^2-9}{x-3}$ не определена при $x=+3$, но ее предел при $x\to+3$ существует.

Более общий пример: функция $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ всегда не определена при $\Delta x=0$, но ее предел при $\Delta x\to0$ «часто» существует (он называется *производной* функции f в точке x_0).

Впрочем, «очень часто» неравенство (2) выполняется и при $x=a$; если при этом $b=f(a)$, функция f называется *непрерывной* в точке a.

Если утверждение вида

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \qquad (3)$$

доказывать исходя непосредственно из определения, надо для любого $\varepsilon>0$ найти соответствующее $\delta>0$ или, по крайней мере, доказать, что такое $\delta>0$ существует.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{7}}(3-2x)=\frac{19}{7}$.

Для этих «действующих лиц» $\left(f(x)=3-2x,\ a=\frac{1}{7},\ b=\frac{19}{7}\right)$ неравенство (2) принимает вид

$$\left|3-2x-\frac{19}{7}\right|<\varepsilon. \qquad (4)$$

Чтобы найти нужное δ, «раскроем» неравенство (4) и постараем-

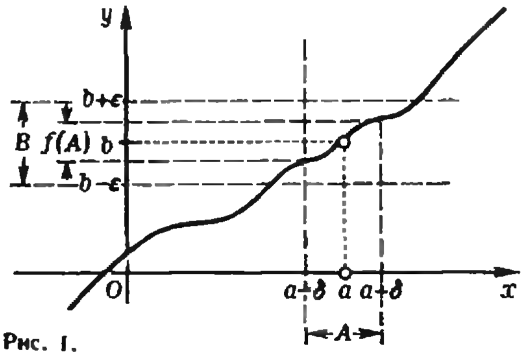


Рис. 1.

---

*) $|x-a|>0 \Leftrightarrow x\neq a$

ся «обнажить» x. Неравенство (4) равносильно неравенствам

$$\left|-2x+\frac{2}{7}\right|<\varepsilon,$$

$$-\varepsilon<-2x+\frac{2}{7}<\varepsilon,$$

$$-\frac{2}{7}-\varepsilon<-2x<-\frac{2}{7}+\varepsilon,$$

$$\frac{1}{7}+\frac{\varepsilon}{2}>x>\frac{1}{7}-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\frac{1}{7}-\frac{\varepsilon}{2}<x<\frac{1}{7}+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5)$$

Теперь «свернем» неравенство (5) и постараемся получить неравенство вида (1):

$$-\frac{\varepsilon}{2}<x-\frac{1}{7}<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|x-\frac{1}{7}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Мы достигли цели. Таким образом, при $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ из $0<\left|x-\frac{1}{7}\right|<\delta$ вытекает (4). В данном примере неравенство (2) = (4) верно и при $x=a$; в качестве δ можно, очевидно, взять любое число из $\left]0;\frac{\varepsilon}{2}\right]$.

Впрочем, второе замечание тривиально и носит общий характер: если для некоторого $\varepsilon_0>0$ годится некоторое $\delta_0>0$, то есть из

$$0<|x-a|<\delta_0 \qquad (6)$$

вытекает

$$|f(x)-b|<\varepsilon_0, \qquad (7)$$

то для этого $\varepsilon_0>0$ годится, разумеется, и любое $\delta\in]0;\delta_0[$: если $0<|x-a|<\delta$, то из $\delta<\delta_0$ следует (6), а значит, и (7).

Пример 2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to-2}\frac{5}{x}=-\frac{5}{2}$.

Неравенство (2) в данном случае имеет вид

$$\left|\frac{5}{x}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right|<\varepsilon. \qquad (8)$$

Пойдем опять по тому же пути. Неравенство (8) равносильно неравенствам

$$\left|\frac{5}{x}+\frac{5}{2}\right|<\varepsilon,$$

$$-\varepsilon<\frac{5}{x}+\frac{5}{2}<\varepsilon,$$

$$-\frac{5}{2}-\varepsilon<\frac{5}{x}<-\frac{5}{2}+\varepsilon. \qquad (9)$$

Чтобы достичь цели — «обнажить» x, нам надо почленно разделить 1 на каждую часть двойного неравенства (9); но делать это можно только в том случае, если все части неравенства имеют одинаковый знак, поскольку соответствующее свойство числовых неравенств гласит: *если $a<b$ и числа a, b имеют одинаковый знак* (короче: $ab>0$), *то* $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ (докажите это утверждение!). $-\frac{5}{2}-\varepsilon<0$. Поэтому нам надо, чтобы остальные две части неравенства (9) были отрицательными. Достаточно потребовать

$$-\frac{5}{2}+\varepsilon<0 \text{ или } \varepsilon<\frac{5}{2}.$$

Итак, пусть сначала $\varepsilon<\frac{5}{2}$ (заметьте это место — мы к нему еще вернемся). Тогда все части неравенства (9) отрицательны. Поэтому

$$\frac{1}{-\frac{5}{2}-\varepsilon}>\frac{x}{5}>\frac{1}{-\frac{5}{2}+\varepsilon},$$

$$\frac{5}{-\frac{5}{2}-\varepsilon}>x>\frac{5}{-\frac{5}{2}+\varepsilon}$$

$$\frac{5}{-\frac{5}{2}+\varepsilon}<x<\frac{5}{-\frac{5}{2}-\varepsilon}$$

$$\frac{10}{-5+2\varepsilon}<x<\frac{10}{-5-2\varepsilon}. \qquad (10)$$

x «обнажили». Теперь нам надо получить из (10) неравенство вида (1):

$$|x-(-2)|<\delta,$$

$$-\delta<x-(-2)<\delta,$$

$$-2-\delta<x<-2+\delta. \qquad (11)$$

Из (10):

$$-2+\frac{10}{-5+2\varepsilon}+2<x<-2+\frac{10}{-5-2\varepsilon}+2,$$

$$-2-\frac{4\varepsilon}{5-2\varepsilon}<x<-2+\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}. \qquad (12)$$

Пока еще неравенство (12) не вполне имеет вид (11). При $\varepsilon<\frac{5}{2}$

$$\frac{4\varepsilon}{5-2\varepsilon}>\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}.$$

Значит,

$$-2-\frac{4\varepsilon}{5-2\varepsilon}<-2-\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}. \quad (13)$$

«Огрубим» неравенство (12):

$$-2-\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}<x<-2+\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}. \quad (14)$$

Из (13) вытекает, что если x удовлетворяет неравенству (14), то он удовлетворяет и неравенству (12) (см. рис. 2). Но (14) имеет уже вид (11). Из (14)

$$|x-(-2)|<\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}.$$

Таким образом, если $\varepsilon<\frac{5}{2}$, то при $\delta=\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}$ из $0<|x-(-2)|<\delta$ вытекает (8).

Но нам ведь надо доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, а мы пока это доказали только для $\varepsilon<\frac{5}{2}$. Однако, по существу, этого достаточно, потому что для $\varepsilon\geqslant\frac{5}{2}$ годится то же δ! В самом деле, пусть $\varepsilon_1\geqslant\frac{5}{2}$; возьмем произвольное $\varepsilon_2<\frac{5}{2}$ и $\delta_2=\frac{4\varepsilon_2}{5+2\varepsilon_2}$; по доказанному из

$$0<|x-(-2)|<\delta_2$$

вытекает $\left|\frac{5}{x}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right|<\varepsilon_2$;

но $\varepsilon_2<\frac{5}{2}\leqslant\varepsilon_1$; значит,

$$\left|\frac{5}{x}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right|<\varepsilon_1.$$

Это замечание носит общий характер: оказывается, всегда можно искать δ не для всех $\varepsilon>0$, а для всех положительных ε, меньших любого выбранного нами положительного числа.

Разумеется, и в данном примере неравенство (2) = (8) верно при $x=a$.

Пример 3. Докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

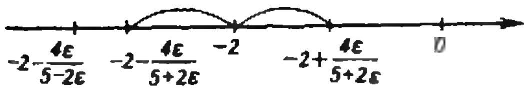

$-2-\frac{4\varepsilon}{5-2\varepsilon}$
$-2-\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}$
-2
$-2+\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}$
0

Рис. 2.

Неравенство (2) в данном случае имеет вид

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon. \quad (15)$$

Если бы мы в этом примере сразу же пошли тем же путем, что и в предыдущих, мы бы не достигли цели: x нам бы «обнажить» не удалось. Поэтому начнем с того, что «огрубим» неравенство (15): поскольку $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$,

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|. \quad (16)$$

Из (16) вытекает, что вместо (15) достаточно искать δ для неравенства $|x|<\varepsilon$. Поскольку в нашем случае неравенство (1) имеет вид $0<|x|<\delta$, ясно, что в качестве искомого δ можно взять ε.

В данном примере неравенство (2) = (15) при $x=a=0$, конечно, не верно: функция $x\sin\frac{1}{x}$ при $x=0$ не определена.

Запомните дважды примененный нами прием «огрубления» — он часто бывает полезным.

В рассмотренных нами примерах отыскание δ не вызвало больших затруднений. Однако для более сложных функций доказательство утверждения (3) в «лоб», прямым отысканием δ, обычно не удается. В таких случаях может помочь теория.

Приведем пример из «нешкольной» теории. Справедлива такая теорема: *если* $\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$ *и существует* $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *то существует и* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *и*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Эта теорема называется *правилом Лопиталя.* По этому правилу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-\frac{1}{e-x}+1}=\frac{2}{1-\frac{1}{e}}=\frac{2e}{e-1}.$$

В. Матизен

Найдем ошибку

Решая задачи, абитуриенты и школьники часто получают ответы, ошибочность которых ясна опытному человеку с первого взгляда. Дело в том, что неправильность результата зачастую можно установить весьма простыми средствами, не решая задачу заново.

В этой заметке показаны простейшие способы быстрой проверки. Сразу оговоримся: ни один из них не дает стопроцентной гарантии. Но если в ответе содержится грубая ошибка, она будет выявлена с большой вероятностью. Кроме того, проверка гораздо полезнее того способа самоконтроля, которым, увы, единственно владеет большинство учащихся,— сверки с соседом. Итак, учитесь проверять себя сами!

1. Тождества и тождественные преобразования

Пусть требуется *упростить выражение*

$$f(x,y)=\sin^2\frac{x-y}{2}+\sin^2\frac{x+y}{2}-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\cos y.$$

Проведя выкладки

$$f(x,y)=\frac{1-\cos(x-y)}{2}+\frac{1-\cos(x+y)}{2}-(\cos x+\cos y)\cos y=\qquad f_1(x,y)$$

$$=1-\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}-\cos x\cdot\cos y-\cos^2 y=\qquad f_2(x,y)$$

$$=1-\cos x\cdot\cos y-\cos x\cdot\cos y-\cos^2 y=\qquad f_3(x,y)$$

$$=\sin^2 y-2\cos x\cdot\cos y\qquad f_4(x,y)$$

вы получили некий ответ.

Подставим в полученное равенство $f(x,y)=f_4(x,y)$ «самую простую» пару $(0;\ 0)$. Получим $f(0,0)=0$, $f_4(0,0)=-2$. Значит, в преобразованиях где-то вкралась ошибка. Чтобы найти место, где она допущена, запустим в цепочку $f(x,y)=\ldots=f_4(x,y)$ «меченый атом»: будем подставлять пару $(0;\ 0)$ последовательно в $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $f_3(x,y)$. Уже $f_1(0,0)=-2\neq f(0,0)$. Значит, вы совершили ошибку на первом же шаге. Попробуем «поймать» ее. При переходе от $f(x,y)$ к $f_1(x,y)$ были использованы два тождества

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=\cos x+\cos y.$$

Первое выдерживает $\alpha=0$, второе при подстановке пары $(0;0)$ дает $0=2$. Вот где ошибка — была написана неверная формула!

Конечно, проверка не укажет правильную формулу, если вы даже приблизительно не помните, как она выглядит. Но если припомнить, что правая часть искомой формулы находится среди следующих:

$$\sin x-\sin y,\ \sin y-\sin x,\ \sin x+\sin y,$$
$$\cos x-\cos y,\ \cos y-\cos x,$$

то проверкой несложно выделить истинную. Все эти формулы обращаются в верные равенства при подстановке точки $(0;0)$, но уже точку $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}\right)$ «выдерживает» только последняя. Она и будет верной.

Конечно, хорошо подготовленный школьник обязан знать стандартные формулы и безошибочно пользоваться ими. К сожалению, практика экзаменов показывает — ошибки «на ровном месте» происходят слишком часто; поэтому приемы самоконтроля, хотя и не являются абсолютными, очень полезны в подобных задачах.

Иногда сомнение в правдоподобности тождества возникает по соображениям симметрии. Допустим, что при разложении на множители многочлена

$$P(x, y, z) = (x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$$

вы получили

$$3(x+y)(x+z)(y-z); \qquad P_1(x, y, z)$$

вы тогда должны сразу сообразить, что ошиблись: в многочлене $P(x, y, z)$ переменные x, y, z равноправны (то есть он не меняется при любых перестановках переменных*): $P(x,y,z)=P(x,z,y)=P(z,x,y)=\ldots$), а в многочлене $P_1(x, y, z)$ — нет: $(P_1(x, y, z)=-P_1(x, z, y))$.

2. Уравнения, системы уравнений

Решив уравнение, попробуйте подставить в него полученные ответы и, если вычислить затруднительно, хотя бы прикинуть, равны ли обе его части. Это часто полезно независимо от того, требуется ли формальная проверка для отсеивания лишних корней. Скажем, если при решении уравнения

$$\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$$

вы получили корни 5 и 170, прикидка сразу же покажет, что при $x=170$ левая часть явно больше правой и найденное значение корня $x=170$ ошибочно. Можно и из общих соображений установить, что данное уравнение может иметь не более одного корня. В самом деле, функция $f(x)=\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}$ возрастает на всей области определения, то есть при $x \geqslant 3$ (объясните, почему, не вычисляя производную), и в силу этого может принять значение 5 не более одного раза. Если же немного знать свойства непрерывных монотонных функций («Алгебра и начала анализа 10», п. 84), то из того, что $f(3)=\sqrt{7}<5$, а $f(10)=2\sqrt{14}>5$, можно заключить, что между 3 и 10 обязательно найдется такое x_0, что $f(x_0)=5$.

Заметить ошибку в решении системы уравнений часто позволяют наблюдения за симметрией. Например, система

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 \end{cases}$$

не меняется при перестановке неизвестных и при одновременной замене x на $-x$ и y на $-y$ (проверьте!). Поэтому, если в найденное вами решение войдет пара (2; 1) и не войдет хотя бы одна из пар (1; 2), (—2; —1), (—1; —2), то вы где-то потеряли решение.

Аналогичным образом можно заметить, что вместе с решением $(x_0;\ y_0)$ системы

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=a, \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}=b \end{cases}$$

ей будут удовлетворять также пары $\left(x_0;\ \frac{1}{y_0}\right)$, $\left(\frac{1}{x_0};\ y_0\right)$, $\left(\frac{1}{x_0};\ y_0\right)$, $\left(\frac{1}{x_0};\ \frac{1}{y_0}\right)$, $(y_0;\ x_0)$, $\left(y_0;\ \frac{1}{x_0}\right)$ и $\left(\frac{1}{y_0};\ \frac{1}{x_0}\right)$.

3. Неравенства

Пусть требуется *решить неравенство* $\sqrt{7+x} \geqslant 5-x$.

«Ответ»: [2; 9].

Для проверки начнем просматривать действительную ось, двигаясь из «минус бесконечности» в «плюс бесконечность». Прежде всего заметим, что «большие» отрицательные числа не входят в множество решений: для них подкоренное выражение в левой части нашего неравенства отрицательно и неравенство не определено (проверьте, подставив $x=-10^2;\ -10$). При увеличении x функция $7+x$ возрастает, а функция $5-x$ убывает. Начиная с $x=-7$, мы входим в область определения неравенства. Подставим несколько удобных для расчета обеих частей значений, например $x=-6;\ -3;\ 0$. Видим, что при этих значениях левая часть все еще меньше правой. Подставим нижнюю границу нашего ответа, то есть $x=2$. Равенство! При дальнейшем увеличении x правая часть убывает, левая возрастает —

---

*) Математики называют многочлены (и даже функции), обладающие этим свойством, *симметрическими*.

следовательно, дальнейшие значения x входят в множество решений. Подставим в неравенство правую границу $x=9$. Получаем $4>-4$. Неравенство верное, но озадачивающее. Почему при такой разнице между частями неравенства ответ показывает, что дальше решений нет? Подставим «большое» положительное число, например $x=10^3$. Неравенство явно справедливо! Легко заключить, что потерян весь промежуток $]9;\ +\infty[$: ведь при любом $x>9$ правая часть отрицательна, а левая положительна, и при $x>9$ неравенство верно. Наша проверка не только обнаружила неверность ответа, но и позволила указать верный ответ.

(Получить $[2;\ 9]$ в качестве множества решений можно, например, так:

$$\sqrt{7+x}>5-x;\ 7+x>(5-x)^2;$$
$$x^2-11x+18<0;\ 2<x<9.$$

Чтобы уловить ошибку, воспользуемся меченой точкой, не входящей в ответ и удовлетворяющей исходному неравенству, например $x=18$. Уже подстановка во второе неравенство показывает, что на первом же шаге, при возведении в квадрат, мы потеряли корни.)

Итак, получив ответ, часто бывает целесообразно «пройтись» по всей числовой оси: может быть, упущен целый промежуток; может быть, в ответ вкрались явно не удовлетворяющие неравенству числа. Обязательно подставьте «большие» и «малые» значения: это и просто, и полезно. Особое внимание обратите на границы полученных в ответе промежутков: *это, как правило, или границы области определения неравенства или значения, при которых достигается равенство.*

Эффективным и наглядным способом контроля нередко является графический. Если график обеих частей неравенства построить несложно — сделайте это!

4. Геометрические задачи

Простейшая проверка геометрической формулы основана на том, что обе ее части должны иметь одинаковую размерность. Складывать можно лишь величины одной размерности; при этом сумма имеет ту же размерность, что и слагаемые. Размерность произведения равна сумме размерностей сомножителей, размерность частного — разности размерностей делимого и делителя. Константам приписана нулевая размерность, длине — размерность 1. Площадь и объем имеют размерность 2 и 3 соответственно, тригонометрические функции — нулевую. В силу перечисленных свойств размерности невозможны, скажем, такие «формулы»:

$$l=\frac{a+b}{a-b},\ V=a^2\cdot\frac{b}{a+c},$$
$$\sin\varphi=\frac{a^2+b^2}{S^2},\ S=a^2+\frac{b}{c},$$

где l, S, V — длина, площадь и объем, a, b, c — длины. В первых трех формулах не совпадают размерности левой и правой части (один и ноль, три и два, ноль и минус два); в правой части четвертой формулы складываются величины размерностей 2 и 0.

Столь же просто использовать для контроля симметрию. Дело в том, что симметрия в условиях задачи должна влечь за собой симметрию ответа. Например, если в задаче требуется найти расстояние от точки внешнего касания двух окружностей с радиусами a и b до их общей касательной, то в формуле для искомого расстояния a и b должны быть равноправны, то есть формула не должна меняться от их перестановки. Поэтому из трех ответов:

$$x=\sqrt{a^2+2b^2},\ x=b\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right),$$
$$x=\frac{2ab}{a+b}$$

первый явно не годится; про второй сразу ничего не скажешь — его следует преобразовать к симметричному виду, который и дан в третьей формуле.

Точно так же еще до решения задачи следует заметить, что объем тетраэдра с равносторонним основанием и двугранными углами при основании α, β, γ представляет собой симметрическую функцию от α, β, γ

(определение дано в сноске на с. 44) и что в формулу для медианы m_c треугольника со сторонами a, b, c лишь a и b должны входить одинаковым образом (объясните, почему!).

Можно проверять ответ и подстановкой частных значений. Например, в приведенной задаче о расстоянии до касательной результат геометрически очевиден: искомое расстояние равно радиусу. Это же дает и формула. Почти не требует расчетов проверка в предельных случаях, когда одна из переменных стремится к границе области определения. В рассматриваемой задаче при $a \to 0$ искомое расстояние также должно стремиться к 0; то же показывает и формула $x = ab/(a+b)$.

Чтобы проверить задачу с численными данными, нужно представлять себе примерную величину ответа. Скажем, если требуется найти длину биссектрисы l_a треугольника со сторонами $a=7$, $b=6$, $c=5$, то ответы $\sqrt{50}$ и $3/\sqrt{7}$ явно неверны: первый слишком велик, а второй слишком мал.

В заключение сформулируем основные приемы оперативной проверки, которыми мы пользовались:

1. Подстановка частных значений.
2. Исследование вблизи границ.
3. Наблюдения за симметрией.

Постарайтесь их освоить. Для этого вам предлагается ряд задач. К каждой приведено несколько ответов, из которых правилен только один. Найдите его.

1. Упростить выражение $3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$;

а. $4\cos^4\alpha$. б. $8\cos^3\alpha$. в. $8\cos^4\alpha$. г. $8-6\,\mathrm{tg}^4\,\alpha$.

2. Решить уравнение $\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{4\log_4 x-2}=4$;

а. $\{-8\}$. б. $\{8\}$. в. $\{4;\ 129\}$. г. $\{8;\ 0{,}01\}$.

3. Решить неравенство $\sqrt{24-2x-x^2}/x<1$;

а. $]-\infty;\ -6[\cup]0;\ 4]$. б. $]-6;\ 0[$.

в. $[-6;\ 0[\cup]2;\ 4]$. г. $[-6;\ 0[\cup]3;\ 4]$.

4. В трапеции с основанием a, b найти длину отрезка, заключенного между боковыми сторонами, параллельного основанию и проходящего через точку пересечения диагоналей.

а. $\dfrac{2ab}{a+b}$. б. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. в. $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

г. $\dfrac{a+2b}{2}$. д. $\dfrac{ab}{a+b}$.

5. В основании пирамиды — равносторонний треугольник со стороной a. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углами α, α, β. Найти объем пирамиды.

а. $\dfrac{a^3}{8(\mathrm{ctg}\,\alpha+2\,\mathrm{ctg}\,\beta)}$. б. $\dfrac{a^3\cos 2\beta}{8(\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta)}$.

в. $\dfrac{a^3\sin 2\alpha}{4\sin\beta}$. г. $\dfrac{a^3}{8(\mathrm{ctg}\,\beta+2\,\mathrm{ctg}\,\alpha)}$.

6. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды перпендикулярно ему проведена плоскость. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если длина стороны основания пирамиды равна 2 см, длина бокового ребра равна 8 см.

а. $\dfrac{\sqrt{118}}{5}$ см². б. $\dfrac{64\sqrt{37}}{31^2}$ см².

в. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{10}$ см². г. $\dfrac{2}{\sqrt{210}}$ см².

7. В двух системах указаны некоторые решения. Не решая системы, выпишите некоторые другие решения:

А. $\begin{cases} |x|+xy+|y|=11, \\ x^2|y|+y^2|x|=30 \end{cases}$

$\{(5;\ 1),\ (-2;\ -3)\}$.

Б. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2, \\ \dfrac{1}{xy}-xy=\dfrac{9}{20} \end{cases}$

$\left\{\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{4};\ \dfrac{-5+\sqrt{5}}{4}\right),\ \left(\dfrac{2}{5};\ 2\right)\right\}$.

Поправка

В статье «Перемещения пространства» («Квант», 1980, № 8) на с. 7 — в формулировке теоремы 2 и в последнем абзаце — по вине автора пропущен один тип перемещений: композиция поворота вокруг прямой и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной этой прямой.

Заочная школа программирования

Урок 10: Программирование задач в полярной системе координат

Материал этого урока предназначен для учащихся 8—10 классов. Для учащихся младших классов этот материал считается не обязательным.

О полярной системе координат

Для определения положения точки на плоскости существуют различные системы координат. Наряду с системой, известной вам из школьных учебников (она называется *декартовой*), для решения многих задач используют *полярную* систему координат.

Полярные координаты точки на плоскости — два числа, определяющие положение этой точки относительно некоторой фиксированной точки O, называемой *полюсом*, и некоторого фиксированного луча OX, называемого *полярной осью.*

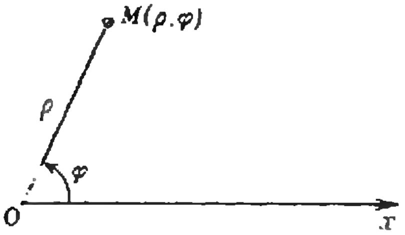


Рис. 1.

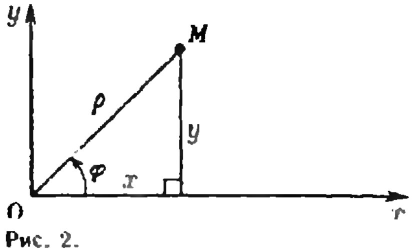


Рис. 2.

Первая координата ϱ (*полярный радиус*) точки M равна $|OM|$ (следовательно, $\varrho\geqslant 0$); вторая координата φ (*полярный угол*) есть угол, на который надо повернуть полярную ось до совпадения с лучом OM; для полюса величина полярного угла не определена (рис. 1).

Полярные координаты имеют преимущество перед декартовыми при исследовании и построении графиков некоторых кривых, например спиралей. Велико значение полярных координат в описании одного из наиболее распространенных видов движения — вращения.

При переходе от декартовой системы координат XOY к полярной с полюсом в начале координат и полярной осью, совпадающей с осью абсцисс OX (рис. 2), координаты точек преобразуются по формулам

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

при обратном преобразовании — по формулам

$$x=\varrho\cos\varphi,\quad y=\varrho\sin\varphi.$$

Спираль Архимеда

Допустим, что нужно построить кривую, которую описывает точка, движущаяся с постоянной скоростью v по лучу, вращающемуся около полюса O с постоянной угловой скоростью ω. Уравнение этой кривой в полярных координатах имеет вид

$$\varrho=a\varphi, \qquad (1)$$

где $a=\frac{v}{\omega}$. Кривая (1) известна под названием *спирали Архимеда* (рис. 3).

Для построения спирали Архимеда на ЭВМ средствами графической системы Шпага удобно воспользоваться процедурой ПОЛЯР («Квант», 1980, № 1, с. 56).

Проверьте самостоятельно, что программа (2), написанная на языке Рапира, рисует спираль Архимеда (границей цикла ПОКА выбрана величина $5\times 2\pi$, обеспечивающая ри-

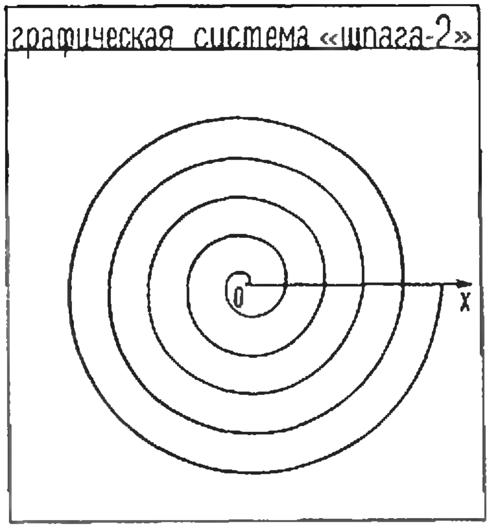


Рис. 3.

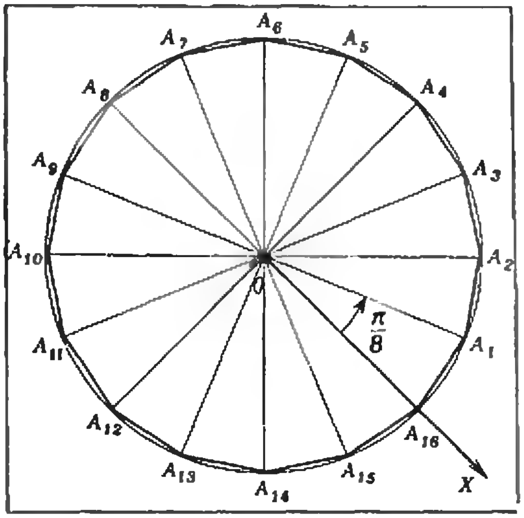


Рис. 4.

сование пяти витков спирали). Не забудьте, что при использовании процедур ПОДВОД и ЛУЧ первый диаметр играет роль полярного радиуса, а второй — полярного угла.

```
Р(100,100); Н(50,50);
.ПОЛЯР; 2—>А; 0—>ФИ;
3.1416—>ПИ; П(0,0);            (2)
ПОКА ФИ<10*ПИ::
  ФИ+0.01—>ФИ;
  Л(А*ФИ,ФИ)
ВСЕ;
 КОНЕЦ;
```

Задание 10.1. *Составьте программу для построения кривых, описываемых уравнениями:*

а) $\varrho = a\,(1+\cos\varphi)$ — *кардиоида,*

б) $\varrho = \frac{a}{\varphi}$ — *гиперболическая спираль.*

Семейство «цветочков»

На второй странице обложки воспроизведены сделанные на ЭВМ рисунки семейства «цветочков». Уравнение данного семейства кривых в полярных координатах имеет вид

$$\varrho = A \sin B\varphi. \qquad (3)$$

Задание 10.2.

1) *Что определяет коэффициент A?*

2) *В каком порядке вырисовываются отдельные лепестки?*

3) *Как изменится рисунок, если в уравнении* (3) *заменить* $\sin B\varphi$ *на* $|\sin B\varphi|$?

4) *Как связано количество лепестков со значением коэффициента* B?

Рассмотрите отдельно случаи, когда B четно и когда B нечетно.

5) *Как нужно организовать цикл, чтобы:*

а) *рисовать «цветочки» в том порядке, в каком они изображены на обложке (восстановите программу)?*

б) *изобразить в семействе «цветочков» только те из них, которые имеют нецелые значения параметра* B?

в) *нарисовать семейство «цветочков» только с целыми значениями* B?

(Подписи под рисунками программировать не надо.)

Правильный 16-угольник

В олимпиаде по программированию («Квант», 1980, № 3) были предложены две задачи, которые решаются проще, если использовать полярную систему координат.

Первая из них (задача 3) формулируется так: *составить программу для изображения правильного 16-угольника, в котором проведены все диагонали, не проходящие через центр.*

Рассмотрим полярную систему координат с полюсом в центре многоугольника *O* и полярной осью *OX*, направленной вдоль луча OA_{16} (рис. 4).

Найдем полярные координаты вершин данного многоугольника. Первая координата (полярный радиус) у всех вершин одинакова и равна радиусу описанной окружности R, а вторая координата (полярный угол) вычисляется по формуле $\varphi_K = (\pi/8) * K$, где K — номер вершины.

Чтобы нарисовать требуемую фигуру, нужно вершину с номером N ($1 < N < 16$) соединить со всеми вершинами, номера которых больше N, кроме вершины с номером (N+8) (ведь именно отрезок, соединяющий вершины с номерами N и N+8, проходит через центр). Если каждую вершину N мы соединяли бы со всеми остальными вершинами, то каждый отрезок рисовался бы дважды.

Придавая параметру R различные значения, будем получать подобные правильные 16-угольники.

Параметрами процедур могут быть любые арифметические выражения. Например, в процедурах ПОДВОД и ЛУЧ с помощью выражений предварительно вычисляются координаты соответствующей точки. В процедурах РАМКА и НАЧАЛО выражения участвуют в качестве параметров для того, чтобы обеспечить расположение правильного многоугольника строго в середине поля рисунка. По процедуре ДИАГ с параметром K вершина с номером N будет соединена с вершиной номер K.

```
ПРОЦ ДИАГ К;
  П(R, N*ПИ/8);
  Л(R, К*ПИ/8);
КНЦ;
```

Окончательная программа имеет вид:

```
50—>R;
Р(2*R+50,2*R+50);
Н(R+25, R+25); 3.1416—>ПИ;
.ПОЛЯР; 1—>N;
ПОКА N<16::
  1+N—>К;
  ПОКА К<16::
    ЕСЛИ К/=N+8 ТО
      ДИАГ (К); К+1—>К
      ВСЕ;
      N+1—>N
  ВСЕ;
 КОНЕЦ;
```

Результат работы этой программы — рисунок 5.

Задание 10.3. *Напишите процедуру, рисующую правильный N-угольник.*

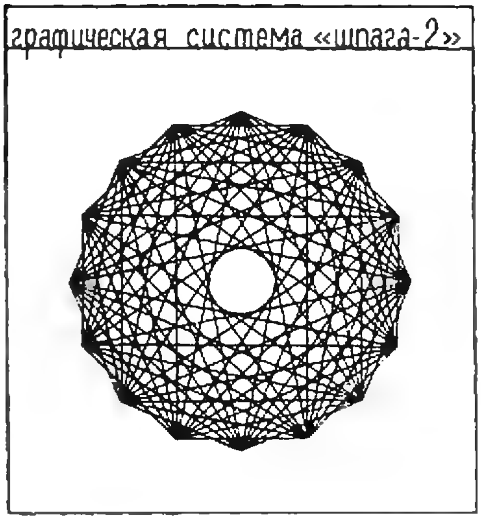


Рис. 5.

Задача о выпуклом многоугольнике

В задаче 8а олимпиады по программированию рассматривался выпуклый многоугольник, заданный множеством M пар координат всех вершин многоугольника; пары были записаны в виде кортежей, задача формулировалась так: *построить по множеству M кортеж K, в котором вершины многоугольника расположены в том порядке, в каком они встречаются при обходе контура многоугольника по часовой стрелке, начиная с самой «нижней» вершины (если таких вершин две, начиная с самой левой из них).*

Решение этой задачи непосредственно в декартовых координатах выглядит довольно громоздко и его трудно обосновать, не выходя за рамки школьного курса и Заочной школы программирования. Если же выбрать подходящую полярную систему, например поместить полюс в начальную точку обхода, выбранную в соответствии с условиями задачи, а полярную ось направить по горизонтали вправо, то принцип решения становится очевидным: при обходе по контуру многоугольника, начиная со второй точки полярный угол строго убывает (докажите это!). Программа, выполняющая построение такого кортежа, состоит из четырех последовательных частей, которые удобно оформить в виде отдельных процедур:

1) отыскание начальной вершины (это процедура почти ничем не отличается от программы из задачи 1а олимпиады);

2) перевод координат всех вершин в полярную систему по приведенным выше формулам (с учетом переноса начала);

3) построение кортежа пар координат, расположенных в порядке убывания полярного угла (сравните с задачей 1б);

4) перевод координат точек кортежа обратно в декартову систему и их выдача на печать с сохранением их порядка.

Задачи олимпиады 8б и 8в удобно решать в полярной системе координат, полюс которой совпадает с точкой T.

Н. Юнерман

Полезное начинание

По Постановлению ЦК КПСС и Совета Министров СССР с 1969 года при высших учебных заведениях открыты подготовительные отделения для рабочей и сельской молодежи, демобилизованных воинов Советской Армии. Сам факт существования подготовительных отделений предполагает, что их слушатели имеют определенные пробелы в знаниях; поэтому первоочередная задача подготовительных отделений состоит в том, чтобы ликвидировать эти пробелы, помочь слушателям восстановить утраченные знания. Многие слушатели кончали средние школы до введения новых программ, следовательно, подготовительные отделения должны помочь им в кратчайшие сроки овладеть новым материалом, необходимым для дальнейшего успешного обучения в вузе.

Для успешного решения этих задач подготовительные отделения должны иметь широкий арсенал высококачественных учебных пособий, специально написанных для их слушателей.

К сожалению, до сих пор большинство учебных пособий, которыми пользуются подготовительные отделения, в частности, по математике, являются либо пособиями по самообразованию, либо пособиями по подготовке в вузы, написанными по старой программе.

Хорошо известна та коренная переработка, которой подверглись школьные программы по математике, и естественно, что отсутствие полноценных учебных пособий по курсу математики отрицательно сказывается на работе подготовительных отделений.

В 1979 году издательство «Высшая школа» выпустило в свет учебное пособие А. Мордковича*) по математике, специально написанное для подготовительных отделений.

Эта книга состоит из 11 глав. Первая глава, которая называется «Действительные числа», является вводной. Кроме материала, связанного с действительными числами, она содержит элементы теории множеств, элементы математической логики. Здесь же идет речь о простейших преобразованиях целых рациональных выражений, о линейных уравнениях с одной и двумя переменными, о линейных неравенствах с одной переменной. Основное назначение этой главы — ввести читателя в круг основных идей алгебры на простейшем уровне, дать ему материал для практических занятий, не дожидаясь более подробного и тщательного развития теории, которое делается в следующих главах.

Вторая глава посвящена преобразованиям алгебраических выражений (целых, дробных, иррациональных), а четвертая — решению алгебраических уравнений (целых, дробных, иррациональных) и систем таких уравнений. Третья глава посвящена функциям. Понятие функции вводится в книге на основе понятия соответствия между множествами. Определяются основные свойства функций (четность, периодичность, монотонность), а затем изучаются конкретные функции (линейная, степенная, тригонометрические). Четко и аккуратно вводится трудное понятие обратной функции и на его основе изучаются обратные тригонометрические функции и степенная функция с любым рациональным показателем. В этой главе подробно рассматриваются различные преобразования графиков, а заканчивается глава параграфом о графическом решении уравнений, неравенств и систем уравнений.

Пятая глава называется «Основные формулы тригонометрии и их применение». Она построена следующим образом: формулируется теорема сложения, а затем из формул

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

выводятся все остальные формулы тригонометрии. Полученные формулы применяются для преобразования выражений, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции, для доказательства тригонометрических тождеств и решения тригонометрических уравнений.

Шестая глава посвящена неравенствам. Здесь излагается метод интервалов для решения рациональных неравенств с одной переменной, вводятся понятия системы и совокупности неравенств, рассматриваются неравенства и системы неравенств с двумя переменными. Отдельный параграф посвящен изложению различных способов доказательства неравенств.

Седьмая глава называется «Последовательности». Она содержит основные понятия, связанные с последовательностями, от способов задания последовательностей до предела последовательности, содержит вопросы, связанные с арифметической и геометрической прогрессиями. Отдельный параграф посвящен методу математической индукции.

Восьмая глава содержит изложение вопросов, связанных с понятиями непрерывной функции в точке и предела функции.

Девятая глава содержит элементы дифференциального и интегрального исчисления, десятая посвящена изучению показательной и логарифмической функции и решению соответствующих уравнений и неравенств. Последняя, одиннадцатая глава, содержит элементы комбинаторики.

---

*) А. Мордкович. Алгебра и начала анализа. М., «Высшая школа», 1979.

Уже этот перечень показывает, что в книге изложен весь основной теоретический материал, соответствующий школьному курсу алгебры и начал анализа и необходимый для изучения высшей математики в вузе. Книга написана в соответствии с современной школьной программой по математике, причем так, что ее с успехом могут использовать как те слушатели подготовительных отделений, которые знакомы с нынешней школьной программой, так и те, которые закончили школу давно и учились по старой программе.

Книга написана хорошим доступным языком и вместе с тем на достаточно высоком научно-методическом уровне.

Но к сожалению, в книге имеются и существенные недостатки.

При изучении курса математики нельзя ограничиться только изложением теоретического материала. Все теоретические положения должны сопровождаться большим количеством тщательно продуманных упражнений, которые должны разъяснять теоретические положения и закреплять их в памяти учащихся. Однако упражнения, приведенные в книге, не полны, и зачастую настолько искусственны и громоздки, что их решения вызывают добавочные трудности, не связанные с изучаемым материалом. Необходимо отметить также большое количество ошибок в ответах. Вызывают возражения и отдельные методические установки автора.

1. Понятие непрерывности функции в точке, свойства непрерывных функций и классификация точек разрыва изложены до понятия предела функции в точке и теории пределов. Целесообразность такого построения вызывает сомнения. Так как понятие одностороннего предела не вводится, то нельзя всерьез говорить и о классификации точек разрыва, не говоря уже о том, что этот вопрос не входит в программу средней школы.

2. Не всегда удачна терминология, предлагаемая автором: «полупарабола», «НОЗ», «график уравнения», «аркфункции», «кривая знаков», «плюс дробно-рациональной функции» и т. д.

3. Нецелесообразно помещение отдельной главы связанной с комбинаторикой, т. к. этот раздел выпал из школьной программы.

Однако в целом книга получилась удачной.

Думается, что основной своей цели — помочь рабочей молодежи повторить школьный курс математики и подготовиться к последующему обучению в вузе — автору удалось достичь.

Книга сразу завоевала популярность у читателей. Практически весь 180-тысячный тираж книги быстро разошелся, в результате чего даже многие подготовительные отделения вузов не успели ее приобрести. Это делает актуальным вопрос о переиздании книги.

В заключение хотелось бы порекомендовать автору при подготовке второго издания ликвидировать указанные выше недостатки (в первую очередь решить вопросы с упражнениями и пересмотреть методику изложения теории пределов).

Н. Розов, М. Смолянский

Повторение опыта Майкельсона и Морли

Все выводы специальной теории относительности основаны на том, что скорость света в вакууме не зависит ни от скорости движения источника, ни от скорости движения наблюдателя. Она является, как говорят, фундаментальной постоянной.

Этот важный факт был впервые проверен экспериментально американским физиком Майкельсоном в 1881 году, а в 1886 году опыт был проведен еще раз, уже совместно с Морли, тоже американским ученым. С тех пор опыт Майкельсона и Морли, повторяемый неоднократно, вошел в историю физики как один из важнейших опытов*).

Майкельсон и Морли обнаружили, что скорость распространения света вдоль направления движения Земли вокруг Солнца и перпендикулярно к этому направлению одна и та же. Говоря точнее, из опытов можно было заключить, что отношение «продольной» скорости света $v_{\parallel}$ (по движению Земли) к «поперечной» скорости $v_{\perp}$ (перпендикулярной к движению Земли) отличается от единицы на очень малую величину. Так, из опытов, проделанных в последние годы, следовало, что

$$\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} = 1 \pm 10^{-5}.$$

Недавно два физика — Брилле из Франции и Холл из США — построили новую установку для проведения опыта Майкельсона и Морли, в которой источником света является лазер. Им удалось значительно увеличить точность эксперимента и получить, что

$$\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} = 1 \pm 10^{-15}.$$

На сегодняшний день этот опыт представляет собой самую точную проверку основного постулата специальной теории относительности.

Я. Смородинский

---

*) Об опыте Майкельсона и Морли можно прочитать, например, в учебнике по физике для 10 класса (см. §93).

Всероссийская олимпиада школьников

С 24 по 27 марта 1980 года в Калинине, Курске, Уфе и Иркутске проходил заключительный этап VI Всероссийской олимпиады по математике и физике.

Для проведения Всероссийской олимпиады при Министерстве просвещения РСФСР был создан Оргкомитет, который, как и в прошлом году, возглавил известный советский математик академик В. С. Владимиров.

Всероссийская олимпиада проводится в четыре этапа: первый этап — школьные олимпиады; второй — районные (городские); третий — республиканские (АССР), краевые и областные; четвертый — зональные олимпиады.

В четвертом этапе принимают участие по одной команде (из трех школьников восьмых -- десятых классов) от АССР, краев, областей, специализированных школ-интернатов при Московском, Ленинградском и Новосибирском университетах. (Команды Москвы и Ленинграда в четвертом этапе участия не принимают.) Команды составляются из победителей третьего этапа. Кроме них в зональных олимпиадах участвуют победители заключительных этапов предыдущих Всесоюзной и Всероссийской олимпиад, получившие дипломы I и II степени, а также победители конкурса журнала «Квант».

В этом году конкурсное задание четвертого этапа по математике состояло из 5 задач, на решение которых отводилось 4 часа. Кроме того, всем участникам было предложено программированное задание, составленное методической комиссией Министерства просвещения СССР. Задание включало 10 вопросов по школьной программе, к каждому из которых прилагался набор из 5 ответов (см. «Квант», 1980, № 9, с. 47). Школьники должны были выбрать правильный ответ.

На этом этапе наиболее успешно выступили учащиеся специализированных школ-интернатов № 45 при ЛГУ, № 18 при МГУ, № 165 при НГУ, представители школ Башкирской и Татарской АССР, Красноярского и Приморского краев, Белгородской, Вологодской, Иркутской, Кемеровской, Московской, Пермской и Ульяновской областей.

Конкурсное задание четвертого этапа по физике включало 4 теоретические задачи (на решение которых отводилось 4 часа) и 2 экспериментальные задачи (на их выполнение давалось 3 часа). Все предложенные задачи оказались для школьников посильными. С каждой задачей справились не менее 10 участников.

Ниже приводятся задачи заключительного этапа по математике и физике и фамилии призеров Всероссийской олимпиады.

Математика

8 класс

1. Группу туристов решили рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было одинаковое количество пассажиров. Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, однако оказалось, что при этом не удается посадить одного туриста. Когда же один автобус уехал, то в оставшиеся автобусы все туристы сели поровну. Выяснить, сколько первоначально было автобусов и сколько туристов в группе, если известно, что в каждый автобус помещается не более 32 человек.

2. Расположим $2n$ точек на отрезке AB симметрично относительно середины отрезка. Какие-то n из них назовем красными, остальные — синими. Докажите, что сумма расстояний от всех красных точек до точки A равна сумме расстояний от всех синих точек до точки B.

3. $ABCDEH$ — правильный шестиугольник, M — середина отрезка CD, K — середина отрезка DE, O — точка пересечения отрезков AM и BK. Докажите, что площади треугольника ABO и четырехугольника $MDKO$ равны, и найдите величину угла между прямыми AM и BK.

4. Сколько различных чисел встречается в последовательности

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right],\ \left[\frac{2^2}{1980}\right],\ \left[\frac{3^2}{1980}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{1980^2}{1980}\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x?

5. Из произвольной точки M описанной около треугольника ABC окружности проведены перпендикуляры MH и MK к прямым AB и AC соответственно (точки H и K лежат соответственно на прямых AB и AC). Для какой точки M длина отрезка HK будет наибольшая?

9 класс

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 30 записать в таблицу, имеющую 5 строк и 6 столбцов, так, чтобы:

а) суммы чисел в каждом столбце были одинаковы?

б) суммы чисел в каждой строке были одинаковы?

2. Укажите все натуральные числа n, для которых число $2^8+2^{11}+2^n$ является квадратом натурального числа.

3. Каждая вершина выпуклого $(2n+1)$-угольника окрашена в один из трех цветов так, что любые две соседние вершины окрашены в разные цвета. Докажите, что $(2n+1)$-угольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы вершины каждого треугольника были окрашены в различные цвета.

4. Даны натуральные числа m и n, причем $n \leqslant 100$. При обращении дроби $\frac{m}{n}$ в десятичную ученик получил после запятой на некотором месте последовательные цифры 167. Докажите, что ученик допустил ошибку в вычислениях.

5. На плоскости расположены два правильных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (вершины указаны по часовой стрелке) так, что середины сторон BC и B_1C_1 совпадают. Найдите:

а) величину угла между $[AA_1]$ и $[BB_1]$;

б) отношение длин $|AA_1|:|BB_1|$.

10 класс

1. Для каждой вершины тетраэдра строится точка, симметричная этой вершине относительно центра противолежащей грани. Найдите отношение объема тетраэдра, вершинами которого являются построенные точки, к объему исходного тетраэдра. (Центром грани называется точка пересечения ее медиан.)

2. Город в плане представляет собой выпуклый многоугольник. Его улицами являются все диагонали многоугольника, а перекрестками — пересечения улиц (но не вершины многоугольника). В городе введено трамвайное движение. Каждый маршрут проходит по своей улице от одного ее конца до другого с остановками на всех перекрестках этой улицы и в ее концах. Известно, что на каждом перекрестке пересекаются лишь две улицы и по крайней мере по одной из них проходит трамвайный маршрут. Докажите, что с любого перекрестка можно проехать на трамвае на любой другой перекресток, сделав не более двух пересадок.

3. Докажите, что среди чисел 2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, ..., $2^{n-1}-1$, где n — нечетное число, хотя бы одно делится на n.

4. Найдите все функции f, областью значений которых являются числовая ось $\mathbb{R}$ и которые для любых a, b, $p \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству

$$f(pa+(1-p)b) \leqslant pf(a)+(1-p)f(b).$$

5. На плоскости даны три квадрата $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ (вершины квадратов перечислены против часовой стрелки), причем A_1 совпадает с A, C_2 совпадает с C. Докажите, что отрезки D_1D_2 и BM, где M — середина $[B_1B_2]$, взаимно перпендикулярны, причем $[D_1D_2]$ вдвое длиннее $[BM]$.

Решения задач будут опубликованы в журнале «Математика в школе». Мы рекомендуем нашим читателям попробовать решить их самостоятельно.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. На рисунке 1 представлен график зависимости проекции скорости точки, движущейся прямолинейно, от времени. На какое максимальное расстояние от начального положения отклонялась точка за это время?

2. На рисунках 2, а и б изображены курс корабля и границы области возбуждаемого им волнения на двух участках пути. Известно, что на первом участке течения нет. Направление течения на втором участке показано синей стрелкой. Определите скорость течения, если скорость корабля относительно Земли одинакова на обоих участках и ее модуль равен 18 км/ч.

3. При каком соотношении между сопротивлениями r_1, r_2, r_3 и r_4 резисторов выполняется равенство $R_{12}=R_{34}$? Резисторы собраны по схеме, показанной на рисунке 3.

4. Два полярника решили выпить кофе. Выпилив кусок льда массой 1 кг, они положили его в кастрюлю, а кастрюлю поставили на плитку мощностью 1,2 кВт. Когда получившаяся вода нагрелась до 30°C, 0,5 л воды отлили для других полезных нужд. Оставшаяся вода закипела через 20 мин после того, как кастрюлю со льдом поставили на плитку. Определите КПД плитки, если первоначальная температура льда была —40°C, его удельная теплоемкость 2100 Дж/(кг · К), удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг. Парообразованием пренебречь.

9 класс

1. Невесомый тонкий стержень длиной L с закрепленным наверху маленьким массив-

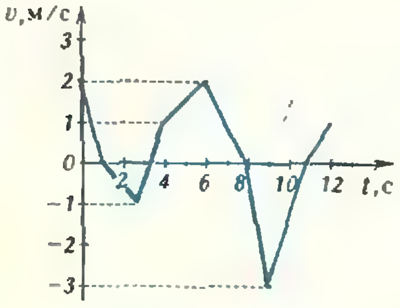


Рис. 1.

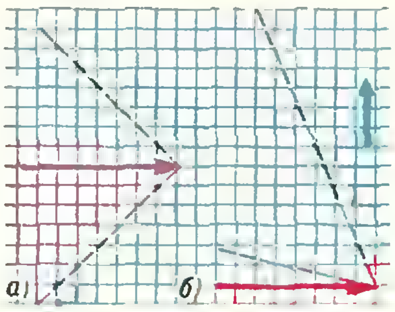


Рис. 2.

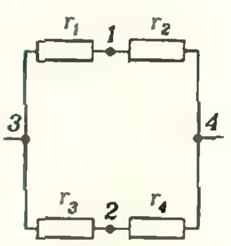


Рис. 3.

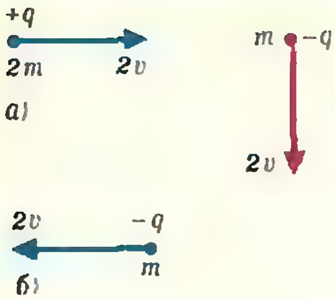


Рис. 4.

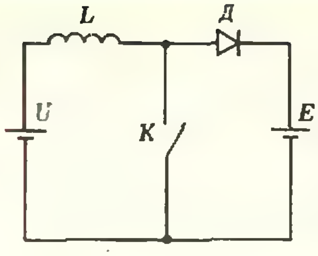


Рис. 5.

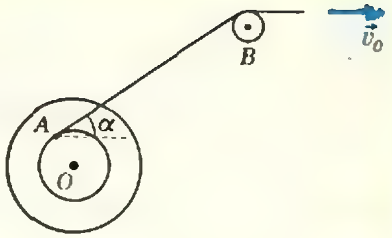


Рис. 6.

ным шариком находится в положении неустойчивого равновесия на жесткой, очень шероховатой горизонтальной поверхности. После легкого толчка он начинает падать. Определите вертикальную и горизонтальную проекции скорости шарика в момент его удара о поверхность.

2. Идеальный газ сжимают от большего начального объема до меньшего конечного, причем процесс проводится в две стадии. В каком случае от газа получат большее количество теплоты, если вести процесс: а) сначала при постоянном давлении, а потом при температуре, пропорциональной квадрату объема; б) сначала при температуре, пропорциональной квадрату давления, а потом при постоянном объеме? В обоих случаях начальная температура газа равна конечной.

3. Два тела массами $2m$ и m несут разноименные, но равные по величине электрические заряды. В некоторый момент времени тела движутся со скоростями, указанными на рисунке 4, *а*. В этот момент включается медленно меняющееся внешнее однородное электрическое поле. Сразу после выключения поля скорость тела массой m стала такой, как указано на рисунке 4, *б*. Какова в этот момент скорость тела массой $2m$? Величину v можно считать малой по сравнению со скоростью света.

4. Поплавок, изготовленный из однородного материала, имеет форму чечевицы — тела, ограниченного двумя сферическими поверхностями радиусом R. Толщина чечевицы $h<2R$. Масса чечевицы m_1. В поплавок вдоль оси симметрии на всю толщину воткнута тонкая спица длиной $l>h$ и массой m_2. Устойчиво ли положение поплавка, когда он плавает на поверхности воды спицей вверх? Считать, что в жидкость погружена лишь меньшая часть чечевицы.

10 класс

1. Тонкое массивное кольцо подвешено на трех невесомых нерастяжимых вертикальных нитях одинаковой длины. Точки прикрепления нитей к кольцу отстоят друг от друга на равных расстояниях. Как изменится период малых крутильных колебаний кольца, если в центр кольца поместить при помощи невесомых спиц небольшой груз той же массы, что и кольцо?

2. Для подзарядки аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E}=12$ В от мощного источника напряжения $U=5$ В собрана схема из катушки индуктивностью $L=1$ Гн, диода *Д* и прерывателя *K*, который периодически замыкается и размыкается на одинаковые промежутки времени $\tau_1=\tau_2=0{,}01$ с (рис. 5). Определите средний ток зарядки аккумулятора. Внутренние сопротивления аккумулятора и источника тока, сопротивления замкнутого прерывателя и диода в прямом направлении считать пренебрежимо малыми.

3. Нить, намотанная на катушку, выбирается через блок B с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ (рис. 6). При этом катушка без проскальзывания катится по горизонтальной поверхности. Определите зависимость модуля скорости центра катушки O от угла α, образуемого нитью с горизонтом. Внешний и внутренний радиусы катушки равны R и r соответственно.

4. Плоская разомкнутая рамка вращается в однородном вертикальном магнитном поле вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью ω. Магнитное поле меняется по закону $|\vec{B}|=|\vec{B}_0|\sin\omega t$. Определите частоту возникающей в рамке ЭДС индукции

Экспериментальный тур

8 класс

1. Определите плотность поваренной соли (NaCl).

Оборудование: весы без равновесов, два стакана, сосуд с водой, мензурка, поваренная соль.

2. Определите коэффициент трения ученической линейки о тело цилиндрической формы.

Оборудование: тело цилиндрической формы, линейка деревянная с делениями, кусок пластилина, карандаш.

9 класс

1. Определите плотность тела.

Оборудование: тело с плотностью, большей плотности воды, сосуд с водой, резиновый шнур, гиря известной массы, миллиметровая бумага, штатив с двумя лапками.

2. Определите сопротивление школьного амперметра. Рассчитайте и изготовьте шунт для расширения шкалы амперметра в 5 раз.

Оборудование: 2 учебных лабораторных амперметра, источник постоянного тока (4 В), медный провод, реостат, провода, масштабная линейка.

10 класс

1. Определите емкость конденсатора.

Оборудование: источник переменного тока, конденсатор известной емкости C, конденсатор неизвестной емкости C_x, высокоомные головные телефоны, реохорд, соединительные провода.

2. Определите индуктивность катушки.

Оборудование: источник постоянного тока (4 В), амперметр лабораторный, катушка индуктивности (дроссельная катушка), стальной сердечник, диод, конденсатор известной емкости, вольтметр, соединительные провода, ключ.

Призеры Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Касимов Н. (Казань, с. ш. № 131),
Котовец И. (Новороссийск, с. ш. № 40),
Матвеев К. (Новосибирск, с. ш. № 74),
Савкин А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 9 классам —

Бережной Д. (Казань, с. ш. № 131),
Бураго Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Гринчук М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Дрясова Н. (Ангарск, с. ш. № 10),
Фомин Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 10 классам —

Артюшкин И. (Пенза, с. ш. № 16),
Келарев А. (Свердловск, с. ш. № 141),
Корошнов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Лихачев Д. (Владивосток, с. ш. № 1),
Магадив Б. (Уфа, с. ш. № 114),
Мегрецкий А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ), *Павлющик С.* (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Матюшов С. (Вологда, с. ш. № 29),
Плисс О. (Владивосток, с. ш. № 23),
Спивак А. (Стерлитамак, с. ш. № 10),
Ходоровский В. (Нововоронежский, с. ш. № 1);

по 9 классам —

Аралкин А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Балашов А. (Махачкала, с. ш. № 8),
Качарманов А. (Белорецк, с. ш. № 14),
Матвеев А. (Ульяновск, с. ш. № 5),
Пяшов П. (Дубна Московской обл., с. ш. № 9),
Хомич С. (Ангарск, с. ш. № 10);

по 10 классам —

Боричев А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ)
Капустин В. (Барнаул, с. ш. № 3),
Меденников Е. (Ульяновск, с. ш. № 5),
Стадниченко С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Ивлев В. (Железногорск-Илимский, с. ш. № 4),
Малышев В. (Волгоград, с. ш. № 131),
Пронин Д. (Горький, с. ш. № 36),
Ухов В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 9 классам —

Беспалов А. (Горький, с. ш. № 40),
Габдуллин Р. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Крупнов В. (Горький, с. ш. № 40),
Осоедов А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Семенченко М. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 10 классам —

Брюков М. (Камышин, с. ш. № 5),
Голобоков А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Лебедянцев С. (Куйбышев, с. ш. № 135),
Овсянников Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Печкин Н. (п. Архара Амурской обл., с. ш. № 1),
Пивоваров В. (Красноярск, с. ш. № 10),
Светлов М. (Пермь, с. ш. № 9).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Гордиенко А. (Ульяновск, с. ш. № 60),
Крюков А. (Улан-Удэ, с. ш. № 14),
Пироженко А. (Мытищи, с. ш. № 25),
Сюньков С. (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —

Богаевский И. (Калининград Московской обл., с. ш. № 17),
Кащеев А. (Братск, с. ш. № 9),
Пименов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Смирнов А. (Курган, с. ш. № 28);

по 10 классам —

Долганов А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ишикаев С. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Китаев А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Ляпин Р. (Уфа, с. ш. № 39),
Ратников Ф. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Шикалов В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Министерство просвещения РСФСР наградило грамотами учителей, которые подготовили учащихся, занявших три первых места на заключительном этапе олимпиады.

О. Овчинников, С. Резниченко,
К. Шалимова, Г. Яковлев

XI праздник юных математиков в Батуми

В восьмом номере нашего журнала за этот год мы рассказали о Празднике юных физиков. В этом номере мы расскажем о Празднике юных математиков.

Первый праздник юных математиков был проведен в Батуми одиннадцать лет назад по инициативе преподавателя математики батумской средней школы № 7 М. И. Жгенти. Из года в год рос интерес к Празднику и расширялись состав и география его участников. В настоящее время в Празднике принимают участие школьники и математики из многих городов нашей страны.

Для проведения Праздника Министерство просвещения Аджарии создало оргкомитет, возглавляемый заместителем министра. В состав оргкомитета вошли батумские математики, учителя средних школ, представители общественных организаций.

Много сил и энергии для проведения Праздника приложили Батумский горком КП Грузии, Алжарский обком и Батумский горком ЛКСМ Грузии, Министерство просвещения и Совет профсоюзов Аджарии, Аджарское отделение общества «Знание», ученики школы № 7, возглавляемые своей замечательной учительницей М. И. Жгенти.

Мы надеемся, что такие праздники, очень полезные школьникам, будут организовываться и в других городах нашей страны.

С 4 по 10 ноября 1979 года в Батуми проходил XI традиционный праздник юных математиков. На Праздник съехались 13 делегаций — около 170 школьников 6—10 классов из Тбилиси, Сухуми, Рустави, Кутаиси, Баку, Киева и Москвы, а также юные математики из ПТУ № 24 Ленинграда.

В программу Праздника входили научная конференция школьников, математический КВН, вечер занимательной математики, а также развлекательная часть — поездки по окрестностям Батуми, экскурсии в музеи, встречи с батумскими школьниками.

На торжественном открытии Праздника выступил председатель оргкомитета Праздника заместитель министра просвещения Аджарской АССР И. Шервашидзе. Он пожелал ребятам успешно выступить на конференции, победить в состязании веселых и находчивых, подружиться и хорошо отдохнуть.

На конференции учащиеся 6—10 классов прочитали около 40 докладов, тематика которых была весьма разнообразной. Несколько докладов были посвящены теории графов (Г. Вагобов из 46 школы Баку, Ю. Скуратовский из 208 школы Киева и А. Дьячков из 19 школы Москвы). Интересную серию докладов по

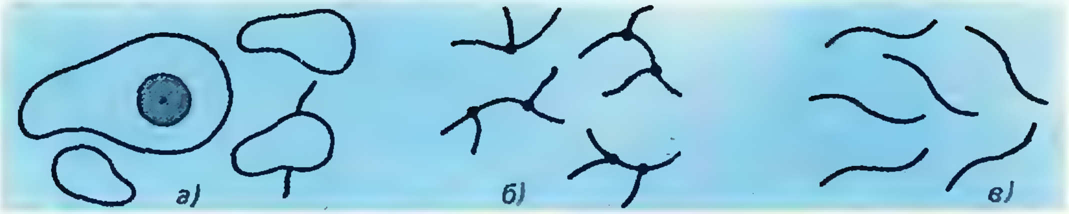


Рис. 1.

теории чисел подготовили шестиклассники и семиклассники из математического кружка при Тбилисском дворце пионеров (М. Малазония, З. Дидбаридзе, З. Джанджгава, М. Бегашвили, Д. Турашвили). Три доклада представили восьмиклассники М. Ашкалова, Н. Гогличидзе и Д. Дургарян из 96 школы Тбилиси (см. с. 60—61). Киевлянин Ян Брегман рассказал о построении сечений на проекционных чертежах многогранников в n-мерном пространстве, ученик 91 школы Москвы М. Концевич — о системах линейных разностных уравнений, А. Горицкий из той же школы — об одном свойстве чисел вида $\frac{1}{n}$, где $n \in N$, ученик ФМШ при МГУ С. Беспамятных — о том, что нечетные совершенные числа должны иметь не менее четырех различных простых делителей.

Шесть докладов были отмечены оргкомитетом и жюри Праздника как лучшие, а их авторы были награждены грамотами и ценными подарками.

Пожалуй, самым сложным из этих докладов был доклад Л. Новикова из московской школы № 91, рассказавшего о доказанной им теореме высшей алгебры о некоторых общих свойствах колец*).

В докладе Елены Гавениной из школы № 46 Баку наглядно и доступно рассказывалось о применении сложных методов динамического программирования к решению экономических задач.

Большой интерес вызвал доклад П. Ахметьева из московской школы № 57. Хорошо известно, что на плоскости можно расположить не более чем счетное множество*) непересекающихся фигур, каждая из которых имеет внутренние точки (то есть точки, входящие в фигуру вместе с некоторой окрестностью — рис. 1, а). То же самое верно и для фигур, составленных из линий и имеющих точки, из которых выходит три или больше линии (см. рис. 1, б). П. Ахметьев доказал следующую замечательную теорему: *если располагать на плоскости непересекающиеся фигуры, конгруэнтные данной фигуре Ф, представляющей собой произвольным образом «изогнутый» отрезок (рис. 1, в), то расположение на плоскости более чем счетного множества таких фигур возможно тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий — либо существуют точка О и число* $\varepsilon > 0$ *такие, что все фигуры* $R_O^{\varphi}(\Phi)$, *где* $0 < \varphi < \varepsilon$, *попарно не пересекаются, либо существует параллельный перенос* $\vec{a}$ *такой, что все фигуры* $(\lambda\vec{a})(\Phi)$, *где* $0 < \lambda < 1$, *тоже попарно не пересекаются (рис. 2).* Нетрудно

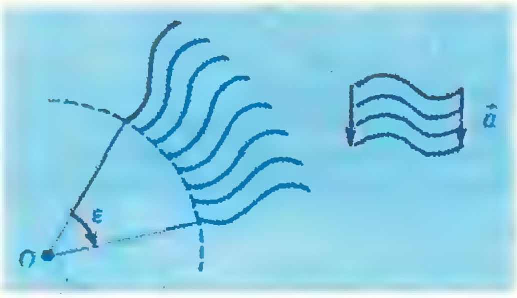


Рис. 2.

---

*) О кольцах смотри статью А. Бельского и Л. Садовского в «Кванте», 1974, № 2.

*) Бесконечное множество называется счетным, если все его элементы можно занумеровать натуральными числами; пример счетного множества — рациональные числа, пример несчетного множества — все действительные числа (см. «Алгебра и начала анализа 9», п. 18, а также раздел «Бесконечные множества» в пособии «Факультативный курс — Избранные вопросы математики 7—8»).

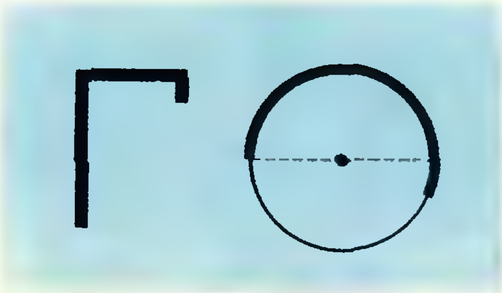


Рис. 3.

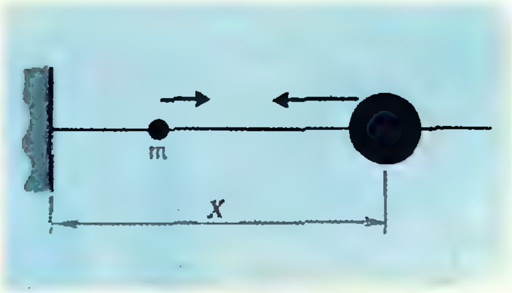


Рис. 4.

проверить, что эти условия не выполняются для дуг, больших 180°, или для буквы «Г» (рис. 3), так что на плоскости нельзя расположить более чем счетное множество непересекающихся фигур, конгруэнтных указанным фигурам.

Десятиклассники М. Шайхеев и И. Бессонов из ФМШ при МГУ рассказали о задачах, связанных с движением по прямой двух шаров различных масс m_1 и m_2, абсолютно упруго сталкивающихся друг с другом.

В докладе М. Шайхеева рассматривалось движение на отрезке $[0;l]$ оси Ox с упругим отскоком от «стенок» — концов отрезка. Если обозначить координаты шариков (считающихся точечными) через x_1 и x_2 и ввести вспомогательные координаты $z_1=\sqrt{m_1}x_1$, $z_2=\sqrt{m_2}x_2$, то одновременному движению шариков будет отвечать движение точки A (z_1, z_2) на координатной плоскости Oz_1z_2 такое, что все время $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant l$, то есть $0\leqslant z_1/\sqrt{m_1}\leqslant z_2/\sqrt{m_2}\leqslant l$. Эти неравенства задают на плоскости треугольник T, и законы упругого соударения (то есть законы сохранения импульса и энергии) получают интересную геометрическую интерпретацию: точка A движется внутри треугольника T с постоянной по величине скоростью, отражаясь от его сторон по биллиардному закону (угол падения равен углу отражения)*). Докладчик применил эту конструкцию к исследованию периодичности движений. Отметим, что общий критерий периодичности движений для такой системы пока не известен.

В докладе И. Бессонова «Одномерная термодинамика» рассматривалась модель идеального газа, состоящего из одного атома — шарика массы m, движущегося по прямой между неподвижной стенкой и «поршнем» — шаром массы $M\gg m$ (рис. 4). Когда поршень сближается со стенкой, за счет его энергии кинетическая энергия атома m увеличивается («газ нагревается»), но затем начинает уменьшаться, отталкивая поршень. Игорь вывел аналоги уравнений газового состояния $PV=RT$ и адиабатического процесса $PV^{\gamma}=\text{const}$ для этой модели, исходя из кинематических соображений и законов сохранения, используя, опять-таки, сведение движения шаров m и M к биллиарду внутри некоторого угла на плоскости Oz_1z_2. Роль объема V играет расстояние x между поршнем и стенкой, роль давления P — средняя по времени величина импульса, которым обмениваются шары m и M при соударениях; показатель адиабаты γ оказывается равным 3.

Очень интересный доклад «Модель Изинга» сделал девятиклассник В. Фок из школы № 91 Москвы. Модель Изинга была предложена еще в 1925 г. для изучения структуры ферромагнетиков. Володя рассказал решение задачи о расположении магнитных моментов в ферромагнитных доменах при различных значениях параметров модели и о фазовых переходах, при которых проявляются магнитные свойства ферромагнетиков. Хотя модели Изинга посвящена обширная литература, эта задача, поставленная проф. Р. Л. Добрушиным, в литературе не встречается.

---

*) См. задачу 1 в статье «Арифметика и геометрия столкновений» («Квант», 1978, № 4).

ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ !

Большинство докладов произвело хорошее впечатление не только своим содержанием, но и удачным изложением.

Как и на предыдущих праздниках, большой интерес участников и многочисленных зрителей вызвал математический КВН. Силы команд были настолько близки, что первое место поделили две команды: 208 школа Киева и 91 школа Москвы; второе место заняла команда 46 бакинской школы, а третье поделили сразу три команды: 7 школа Батуми, 19 школа Москвы и ФМШ № 18 при МГУ. В конкурсе капитанов победу одержал москвич М. Концевич.

Участникам КВН были предложены интересные задачи. Попробуйте и вы решить некоторые из них:

1°. *Решите уравнение* $\text{ШИШ}^{\text{И}} = \text{ШАБАШ}$. *(Здесь буквы* А, Б, И, Ш *нужно заменить цифрами так, чтобы получилось верное равенство.)*

2°. *Имеется* 23 *монеты достоинством* 1, 2, 3 *или* 5 *копеек, составляющие в сумме* 48 *копеек. Есть ли среди этого набора монет двухкопеечная монета?*

3°. (Предлагалась на конкурсе капитанов.) *На плоскости задано конечное множество точек. Играют двое. За один ход можно соединить линией любые две точки, причем так, чтобы из каждой точки выходило не более двух линий. Линии не должны пересекаться. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.*

Заметим, что в последней задаче капитаны не сумели найти стратегию, которая приводит к выигрышу. Может быть, это удастся сделать вам.

Участники праздника не только хорошо поработали, но и хорошо отдохнули. Они совершили экскурсию в Ботанический сад, побывали в дельфинарии. 7 ноября ребята были гостями на праздничной демонстрации, и посетили краеведческий музей и музей Революции.

Встреча юных математиков надолго запомнится всем ее участникам как светлый и радостный праздник творчества и дружбы ребят разных союзных республик.

Б. Гейдман, Б. Давидович, А. Земляков

* * *

Три доклада на Батумском празднике

За активное участие в Празднике юных математиков подпиской на «Квант» на 1981 год награжден ряд школ (см. «Квант» № 9). Среди них — тбилисская школа № 96. Эта школа — не математическая, а обычная средняя школа. При школе создан музей математики, работает математический кружок, школьники выпускают математический журнал. Доклады восьмиклассников этой школы (руководители команды — учителя математики Л. А. Штейнгарц и О. Э. Шамаилов) были очень хорошо и тщательно оформлены. Краткое изложение этих докладов, присланное Л. А. Штейнгарцем, мы предлагаем вашему вниманию.

Разрезание фигур на конгруэнтные части

Будем говорить, что фигура F *разрезана на части* A *и* B, если $A \cup B = F$ и $A \cap B = \varnothing$ (аналогично определяется разрезание на три части, на четыре части и т. д.).

На рисунке 1 прямая разрезана на две конгруэнтные части (A — объединение «красных» отрезков без левых концов, B — объединение «синих» отрезков без левых концов). Прямую легко разрезать на любое число конгруэнтных частей.

На две конгруэнтные части можно разрезать луч (как с началом, так и без начала), окружность, синусоиду, плоскость и угол.

А вот отрезок на две конгруэнтные части разрезать нельзя (предположим противное; тогда A отображается на B центральной симметрией или параллельным переносом; с помощью теоремы Вейерштрасса о существовании предела можно прийти к противоречию).

Нельзя также разрезать на две конгруэнтные части круг и квадрат.

(Докладчик сказал, что ему неизвестен способ, как узнать по фигуре, можно ли ее разрезать на две конгруэнтные части.)

Л. Дургарян

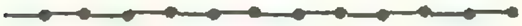


Рис. 1.

Необычные шары

Если между элементами a, b множества M определить расстояние $\rho(a, b)$ так, чтобы выполнялись три аксиомы:

1) $\rho(a, b) \geqslant 0$,
$\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;
2) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;
3) $\rho(a, b) \leqslant \rho(a, c) + \rho(c, b)$

(см. п. 4 пособия «Геометрия 6—8»), то множество M с введенным понятием расстояния называется *метрическим пространством.*

В метрическом пространстве шар определяется «как в школе» (§ 62 пособия «Геометрия 9—10»): шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in M$ — это множество $\{x \in M \mid \rho(a, x) \leqslant r\}$.

Пример 1. Определим расстояние между двумя клетками шахматной доски наименьшим числом ходов, достаточным для того, чтобы ладьей попасть из одной клетки в другую. Легко проверить, что все аксиомы расстояния выполняются — множество клеток шахматной доски стало метрическим пространством.

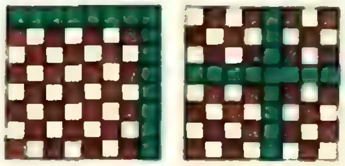


Рис. 2.

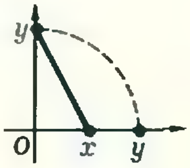


Рис. 3.

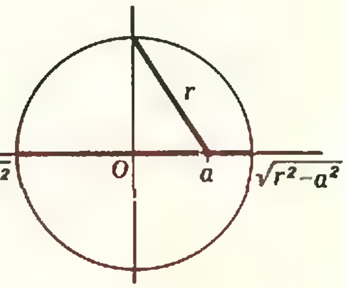


Рис. 4.

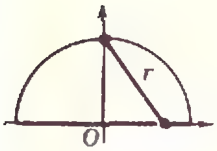


Рис. 5.

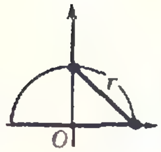


Рис. 6.

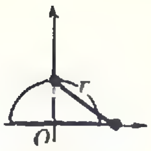


Рис. 7.

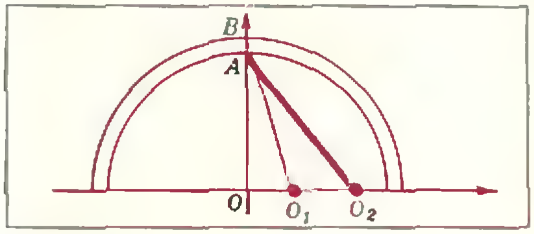


Рис. 8.

Расстояние между любыми двумя (различными) клетками в этом пространстве равно 1 или 2.

На рисунке 2 зеленым цветом показаны шары радиуса 1, имеющиеся в этом пространстве. Вся доска является шаром радиуса 2 с центром в любой клетке (между прочим, ее можно считать и шаром любого радиуса $r>2$!).

Пример 2. Определим расстояние между действительными числами x, y следующим образом (рис. 3):

$$\rho(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & \text{если } x\neq y,\\ 0, & \text{если } x=y.\end{cases}$$

Легко проверить, что все аксиомы расстояния снова выполняются. В этом пространстве шаром с центром 0 радиуса r является отрезок $[-r;\ r]$. Для $a\neq0$ шар с центром a радиуса $r>|a|$ строится так, как показано на рисунке 4. Поэтому для $a\neq0$ шар с центром a радиуса $r>a\sqrt{2}$ имеет центр внутри себя (рис. 5), при $r=|a|\sqrt{2}$ центр лежит на границе шара (рис. 6), при $|a|<r<|a|\sqrt{2}$ центр лежит вне шара (рис. 7). При $r=|a|$ шар состоит из двух точек: 0 и a; наконец, при $0<r<|a|$ шар состоит только из самой точки a (таким образом, каждая точка $a\neq0$ «в одиночку» является шаром). В этом пространстве существует «возрастающая» последовательность шаров

$$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\ldots$$

$(K_{n+1}\neq K_n)$ с убывающей последовательностью радиусов (на рисунке 8 $|O_2B|<|O_1A|$)

$$r_1>r_2>r_3>\ldots$$

М. Ашкалова

Непривычные уравнения

Определим сумму числового множества A с числом b как множество чисел вида $a+b$, где $a\in A$. Аналогично определяются множества $A-b$, $A\cdot b$, $A:b$. Например:

$$\{1,\ 5,\ 10\}+3=\{4,\ 8,\ 13\},$$
$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots\}:2=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}.$$

Теперь мы можем писать «уравнения с множествами», уравнения, в которых «искомыми» значениями переменной являются числовые множества. Например, легко видеть, что множество четных чисел является корнем уравнения

$$X+2=X, \qquad (1)$$

а множество чисел вида 2^p $(p\in\mathbf{Z})$ — корнем уравнения

$$X\cdot2=X. \qquad (2)$$

Между прочим, каждое из этих «уравнений первой степени с одной переменной» имеет бесконечное множество корней. Уравнение (1) равносильно уравнению $X-2=X$, а уравнение (2) — уравнению $X:2=X$.

Определим теперь квадрат числового множества следующим образом: $A^2=\{a^2\mid a\in A\}$. Теперь можно составлять и решать «квадратные» уравнения. Уравнение

$$X^2=X$$

опять имеет бесконечное множество корней (множество $\{\ldots,\ \sqrt[4]{2},\ \sqrt{2},\ 2,\ 4,\ 16,\ \ldots\}$ — один из его корней), а уравнение

$$X^2+1=X$$

корней не имеет*). (Это легко вывести из того, что если A — его корень и $a\in A$, то $\sqrt{a-1}\in A$.)

(Докладчица сказала, что ей неизвестно, при каких a, b, c уравнение $aX^2+c=X\cdot b$ имеет корни.)

Н. Гоглачидзе

---

*) Если не считать пустого множества. (*Прим. ред.*)

Умножим уравнения

Старшеклассники знают, что уравнение прямой на плоскости имеет вид $y=kx+b$. А можно ли одним уравнением задать две, три прямые?

Пусть уравнение первой прямой $y=k_1x+b_1$, второй $y=k_2x+b_2$. Перенесем в обоих уравнениях все члены в левую часть: $y-k_1x-b_1=0$ и $y-k_2x-b_2=0$. Теперь приравняем произведение левых частей к нулю:

$$(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)=0. \qquad (1)$$

Ясно, что уравнение (1) будет удовлетворяться, если хотя бы один сомножитель равен нулю. Точки, принадлежащие первой и второй исходным прямым, обращают в нуль то первый, то второй сомножитель. Раскрыв скобки, мы придем к хорошо известному факту, что в частном случае уравнение второй степени может задавать две параллельные или две пересекающиеся прямые.

Подобным же образом можно перемножить три, четыре уравнения. Например, можно умножить уравнения двух окружностей или прямой и окружности:

$$(y-kx-b)((x-a)^2+(y-c)^2-R^2)=0 \qquad (2)$$

(здесь a и c — координаты центра окружности, R — ее радиус). Уравнение (2) задает кривую третьего порядка, «распадающуюся» на прямую и окружность. Выбирая соотношения коэффициентов, можно добиться, чтобы эти фигуры касались или пересекались.

Перемножая уравнения других линий, можно образовывать и более сложные сочетания.

Пусть теперь мы имеем некоторое уравнение, задающее линию — простую или состоящую из нескольких компонент. Если немного изменять в уравнении один из коэффициентов, мы будем получать геометрически близкие объекты. Так, изменяя параметр b в уравнении прямой, получаем близкую ей параллельную прямую. Попробуем теперь в уравнении, полученные умножением более простых уравнений, подставлять вместо нуля в правой части небольшие величины — положительные и отрицательные. В итоге мы получим семейства линий, постепенно удаляющихся от исходных (по мере роста абсолютного значения величины в правой части) и расположенных с той или иной «стороны» от них в зависимости от знака добавки.

Если проделать указанную операцию с уравнением (1) двух пересекающихся прямых — получим гиперболы, для которых исходные прямые являются асимптотами.

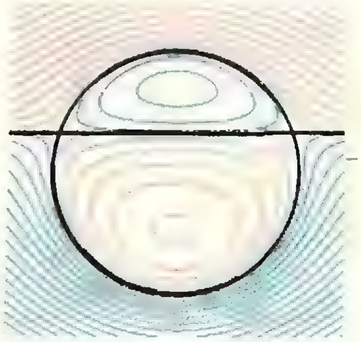


Рис. 1.

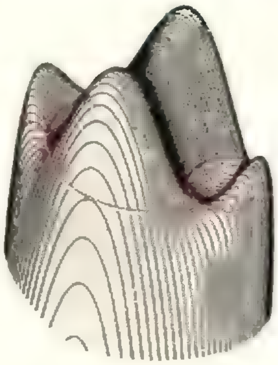


Рис. 2.

Привлекая на помощь машинную графику, построим этим способом кривые, исходя из уравнения (2), задающего пересекающиеся окружность и прямую. На рисунке 1 красным цветом показаны кривые, соответствующие положительным «добавкам», синим цветом — отрицательным. Все они не имеют особых точек.

Из семейства линий на плоскости нетрудно соорудить поверхность в пространстве — стоит только вместо «параметра семейства» (то есть нашей «добавки») ввести третью координату (z). Попробуйте представить себе, какую форму имеет поверхность, построенная с помощью семейства, показанного на рисунке 1!

На рисунке 2 показана поверхность, полученная с помощью перемножения уравнений трех окружностей и подстановки в правую часть координаты ($-z$). На рисунке показаны три эти окружности, располагающиеся, как легко сообразить, в плоскости $z=0$. Линии, получающиеся при сечении этой поверхности плоскостями $z=\mathrm{const}\neq 0$, на рисунке не показаны. Сама же поверхность представлена линиями сечений плоскостями $y=\mathrm{const}$. Любопытно, что в точках, где окружности пересекаются,— поверхность гладкая.

Вместо z в правую часть уравнения можно подставить z^2, $-z^2$, или z^n, $-z^n$. Подумайте, какую форму будет иметь показанная на рисунке 2 поверхность, если в правой части будет z^2.

На четвертой странице обложки показана довольно близкая поверхность, полученная подстановкой в правую часть того же уравнения выражения $A-z^2$, где A — некоторая константа. (На поверхности изображены и видимые, и невидимые части линий пересечения вертикальными плоскостями, но пояса между соседними видимыми участками линий раскрашены). Изменяя A, можно получить несколько иные поверхности — без «дырочек» либо распавшиеся на три отдельные компоненты. Меняется конфигурация поверхности и в зависимости от взаимного положения исходных окружностей.

Близкие вопросы обсуждались в статье «Овал, восьмерка, два овала» («Квант», 1979, № 8).

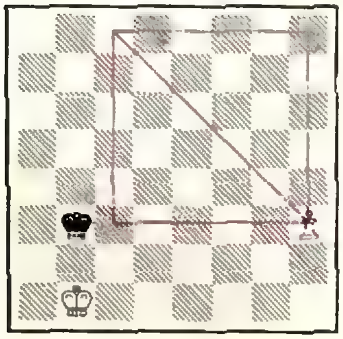
Ю. Котов

Консультирует чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Математика пешечного эндшпиля

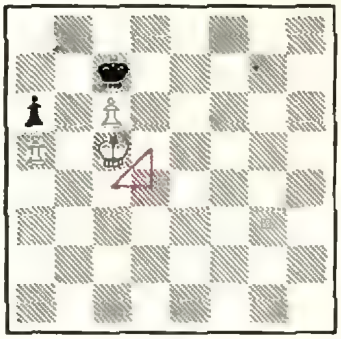
Этюды Р. Рети и И. Майзелиса («Квант», 1980, № 1, 3) показывают, что геометрия шахматной доски довольно необычна — кратчайшее расстояние на ней измеряется не обязательно по прямой. На нашей шахматной страничке мы еще не раз будем рассказывать о различных математических идеях, содержащихся в шахматной игре. Сегодня мы рассмотрим несколько простейших правил пешечного эндшпиля.

Правило квадрата. В следующей позиции белый король не принимает участия в игре, и все зависит от того, успеет ли его черный коллега догнать пешку h3.



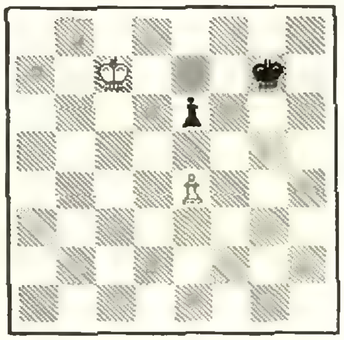
Здесь неопытные шахматисты часто путаются (особенно, если на доске есть еще какие-нибудь пешки), и дело кончается просчетом. Однако исход игры легко оценивается при помощи «правила квадрата». Достаточно посмотреть, попадает ли король при своем ходе в «квадрат» пешки. Для удобства можно мысленно провести всего одну линию — диагональ квадрата (h3—c8). В нашей позиции черные при своем ходе делают ничью (попадают в квадрат), а при ходе противника проигрывают.

Метод треугольника. В следующей позиции черные при своем ходе сразу проигрывают, так как пропускают белого короля на поле b6 и теряют пешку a6.

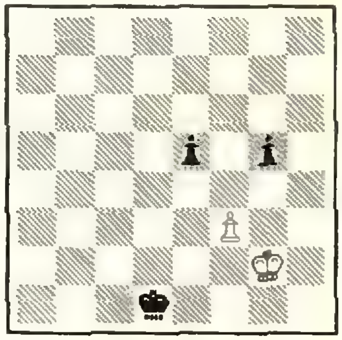


Но как белым передать очередь хода противнику или, пользуясь шахматным языком, выиграть темп? После 1.Крd5 Крc8 ничего не дает 2.Крd6 Крd8 3.c7+ Крc8 4.Крc6 — пат!, а 2.Крc5 Крc7 приводит к исходной позиции. Выигрыш темпа достигается при помощи «метода треугольника». Для данного примера этот треугольник (c4—d4—d5) изображен на рисунке. После **1. Крd5 Крc8 2. Крd4 Крb8 3. Крc4! Крc8 4. Крd5** белые достигают цели, так как на 4...Крd8 уже выигрывает 5. Крd6, а на 4...Крc7 — 5. Крc5.

Геометрическая оппозиция. Оппозиция (иначе — противостояние) играет основную роль при разыгрывании пешечных эндшпилей. Геометрическая оппозиция означает, что белый и черный короли находятся на одной линии и их разделяет нечетное число полей. Если одно, то оппозицию называют ближней, если три или пять, то дальней. Если короли стоят на одной горизонтали (вертикали), то оппозиция горизонтальная (вертикальная). Сторона, после хода которой возникла оппозиция, имеет определенное преимущество (говорят, что она «владеет оппозицией»). Решающую роль здесь играют маневры королей и пешек. В следующей позиции при своем ходе белые выигрывают, при ходе черных — ничья. Результат зависит от того, кто займет оппозицию. Пусть ход черных: **1...e5! 2.Крc6 Крg6!** (черные держат горизонтальную оппозицию) **3.Крd5 Крf7** (а это так называемая диагональная оппозиция) **4. Кр:e5 Крe7** (вертикальная оппозиция) **5. Крf5 Крf7 6. e5 Крe7 7.e6 Крe8!** (после 7...Крf8 8.Крf6 Крe8 9.e7 белые выигрывают) **8.Крf6 Крf8!** (вновь вертикальная оппозиция) **9.e7+ Крe8 10.Крe6 пат.**



При ходе белых решает **1.e5! Крf8 2.Крd8! Крf7 3.Крd7 Крf8 4.Кр:e6 Крe8** (черные заняли оппозицию, но это уже не спасает: белый король прорвался на шестую горизонталь) **5.Крd6 Крd8 6.e6 Крe8 7.e7 Крf7 8.Крd7**, и пешка проходит в ферзи.



В этой позиции белые надеются на ничью. Однако в случае ближней оппозиции им помешала бы собственная пешка: 1.Крf1? Крd2 2.Крf2 Крd3!, и оппозиция теряется — 3.Крg3 Крe3 4.Крg2 Крe2 5.Крg3 Крf1 6.Крh3 Крf2 7. Крg4 Крg2 с выигрышем.

Партию спасает только дальняя оппозиция: **1.Крh1! Крc2** (после 1...g4 2.Крg2 Крd2 3.fg e4 4.g5 пешки превращаются одновременно) **2.Крg2 Крd2 3.Крh2! Крc2 4.Крg2 Крe3 5.Крg3** с ничьей.

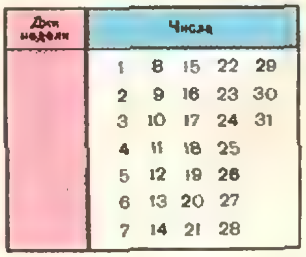
«Квант» для младших школьников

(«см. «Квант» № 9)

1. Перейдем к «безномерным» обозначениям: $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$, $a_4=d$, $a_5=e$. Начнем выписывать наши числа, учитывая, что $a^2=b^2=c^2=d^2=e^2=1$:

a, ·b, c, d, e, ab, bc, cd, de, eab, ac, bd, ce, abd, bce, abcd, bcde, abcde, acde, ade, ae, a, b, c, d, e, ...

Мы видим, что, начиная с a_{22}, числа повторяются, то есть *период* равен 21. Поскольку 1980 при делении на 21 дает в остатке 6, $a_{1980}=a_6=ab=-1$.



Дни недели	Числа				
	1	8	15	22	29
	2	9	16	23	30
	3	10	17	24	31
	4	11	18	25	
	5	12	19	26	
	6	13	20	27	
	7	14	21	28	

Рис. 1.

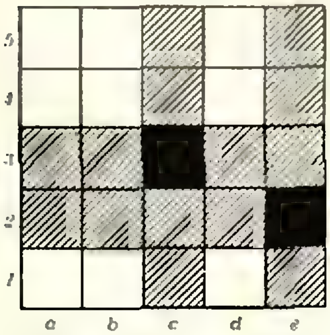


Рис. 2.

2. Саше надо посоветовать прекратить решать задачу, так как искомая раскладка карточек невозможна.

Если бы она была возможна, то карточка $\boxed{5}$ должна была бы занимать крайнее верхнее (или нижнее) положение и касаться только карточек $\boxed{1}$ и $\boxed{9}$. Тогда в центре нельзя положить ни одну из оставщихся карточек, поскольку для каждой из них остается не более пяти кандидатов в соседи (запрещены ее «старые» соседи — их 3 или 4 — и она сама), в то время как центральная карточка должна иметь шесть соседей.

3. В январе 31 день. «Календарь января» можно представить в таком виде, как на рисунке 1. Согласно условию как «понедельник», так и «пятница» должны стоять в четырех нижних строчках столбца «Дни недели». Ставя по очереди «понедельник» в каждую из этих строчек, увидим, что он может стоять только в нижней строчке. Значит, в первой строчке стоит «вторник».

4. После первого вычеркивания остаются цифры, стоящие в заданном числе на четных местах, после второго — стоящие на местах, кратных четырем; после третьего — на местах, кратных восьми, и т. д. Самая большая степень двойки, не превышающая сотни,— 64. Поэтому последней будет вычеркнута цифра, стоящая в заданном числе на 64-м месте, то есть 4.

5. Докажем, что требуемую раскраску осуществить невозможно. Допустим противное и рассмотрим клетку c3 (см. рис. 2) — пусть она будет красная. Возьмем любую клетку, на которую можно попасть с поля c3 ходом коня, например клетку e2; тогда e2 по условию — тоже красная. Заштрихуем остальные клетки двух столбцов и двух строк, в которых расположены клетки c2 и e2. Очевидно, заштрихованные клетки уже не могут быть красными.

Одна из незаштрихованных клеток строки 1 должна быть красного цвета. В строку 1 можно попасть только из строк 2, 3. Из e2 попасть в строку 1 уже нельзя. Значит, путь по красным клеткам в строку 1 идет из c3. Следовательно, красной должна быть одна из клеток b1, d1. Если красная — b1, то в столбце a красной может быть только клетка a4 (в клетку a5 ходом коня можно попасть только с заштрихованных, то есть некрасных клеток). Теперь в строке 5 красной может быть только клетка d5, но тогда обойти красные клетки, побывав на каждой по разу, невозможно.

Случай d1 разберите сами.

Номер готовили:
А. Виленкин, А. Егоров, Н. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Т. Кольченко, Г. Красиков, Э. Назаров,
Н. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова, Н. Вершинина

Корректор В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62

Сдано в набор 14.08.80.

Подписано в печать 25.09.80

Печать офсетная

Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,33. Т-17807.

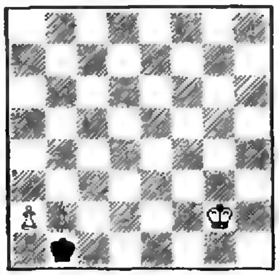
Цена 30 коп. Заказ 2007

Тираж 260 586 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли

шахматный конкурс „Кванта“

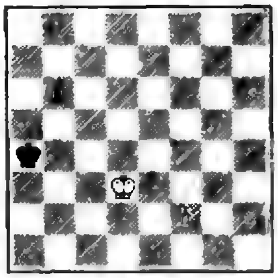
Это выражение, принадлежащее великому французскому шахматисту XVIII века Франсуа Филидору, как нельзя лучше подходит для заголовка сегодняшнего тура — в предлагаемых позициях участвуют только пешки и короли. Расскажем прежде всего об одном забавном эпизоде, который произошел с известным шахматным мастером и композитором Н. Григорьевым в дни его юности (1913 год). Как-то в шахматном клубе он играл партию с одним старичком. Юноша очень волновался, полагая, что перед ним сидит маститый шахматист. Однако дела шли неплохо, и в конце концов на доске возникло примерно такое положение:



Старичок дрожащей рукой снял с доски пешку «b» — **1...Кр:b2**, но зато другая пешка двинулась вперед — **2. а4**. Противник ринулся за ней — 2...Кра3. Юного шахматиста взяло сомнение: а вдруг старичок знает секрет и преследует пешку не зря? Однако терять было нечего, и гонка продолжалась: **3. а5 Кра4 4. а6 Кра5** (черный король ни на шаг не отставал от пешки) **5. а7 Кра6.** Здесь белые с возгласом «Ферзь!» сделали последний ход пешкой **6. а8Ф.** Лицо старого человека выразило скорбь. «Эх, не успел!!» — выдохнул он в отчаянии. Старик верил в свое счастье, но внезапное появление ферзя разбило все его надежды. Вот к какой драме может привести незнание в пешечном эндшпиле правила квадрата!

А Николай Григорьев впоследствии стал одним из крупнейших специалистов в мире в области пешечных окончаний. В 1936 году он послал 10 пешечных этюдов на международный конкурс во Франции и завоевал десять призов!

Вот один этюд Григорьева, опубликованный им в 1928 году:

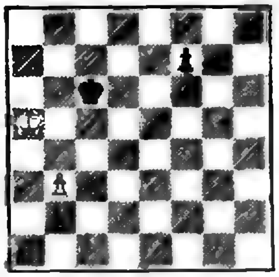


Белые начинают и выигрывают

Пешка-душа
шахмат

Идея этого этюда в том, что при одновременном превращении пешек белым удается заматовать короля противника: **1. Крd4! b5 2. f4 b4 3. f5 b3 4. Крc3 Кра3 5. f6 b2 6. f7 b1Ф 7. f8F+ Кра2** (7...Кра4 8. Фа8+ Крb5 9. Фb8+) **8. Фа8х;** 1...Крb5 2. Крd5! Кра6 (2...Кра4 3. f4 b5 4. f5 b4 5. Крc4 b3 6. Крc3 Кра3 7. f6 приводит к основному варианту) 3. f4! Крb7 4. f5 Крc7 5. Крe6! Крd8 6. Крf7 b5 7. f6 b4 8. Крg7 b3 9. f7 h2 10. f8Ф+.

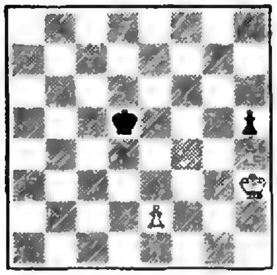
Окончания «пешка против пешки» содержит немало хитростей, и даже гроссмейстеры иногда ошибаются в них.



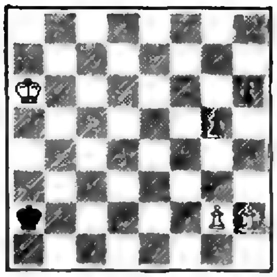
Любоевич — Браун

Эта позиция возникла на международном турнире в Амстердаме в 1972 году. После **39...f5? 40. Крb4** последовало соглашение на ничью, которую оба гроссмейстера считали закономерным исходом. Однако это положение является почти «зеркальным» отражением только что рассмотренного этюда лишь с переменой цветов! После 39...Крd5!, как мы знаем, черные выигрывали партию.

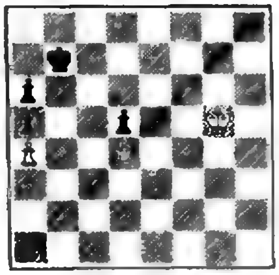
Предлагаем вам самостоятельно решить три этюда. Любопытно, что этюд № 3 получился у экс-чемпиона мира во время анализа турнирной партии.



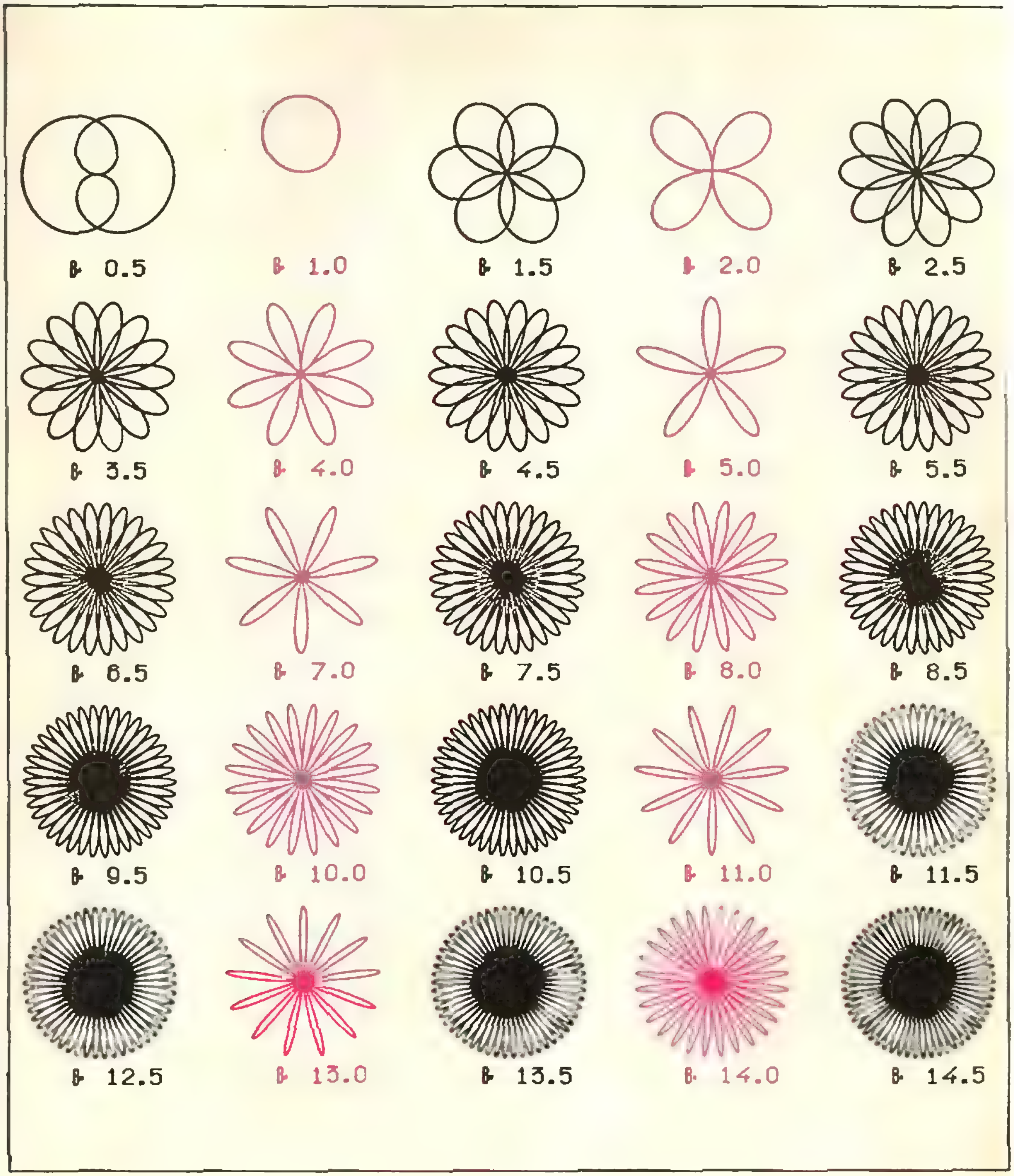
1. Белые начинают и выигрывают.



2. Н. Григорьев. 1936 г. Белые начинают и выигрывают.



3. М. Ботвинник, 1939 г. Белые начинают и выигрывают.


β 0.5
β 1.0
β 1.5
β 2.0
β 2.5
β 3.5
β 4.0
β 4.5
β 5.0
β 5.5
β 6.5
β 7.0
β 7.5
β 8.0
β 8.5
β 9.5
β 10.0
β 10.5
β 11.0
β 11.5
β 12.5
β 13.0
β 13.5
β 14.0
β 14.5

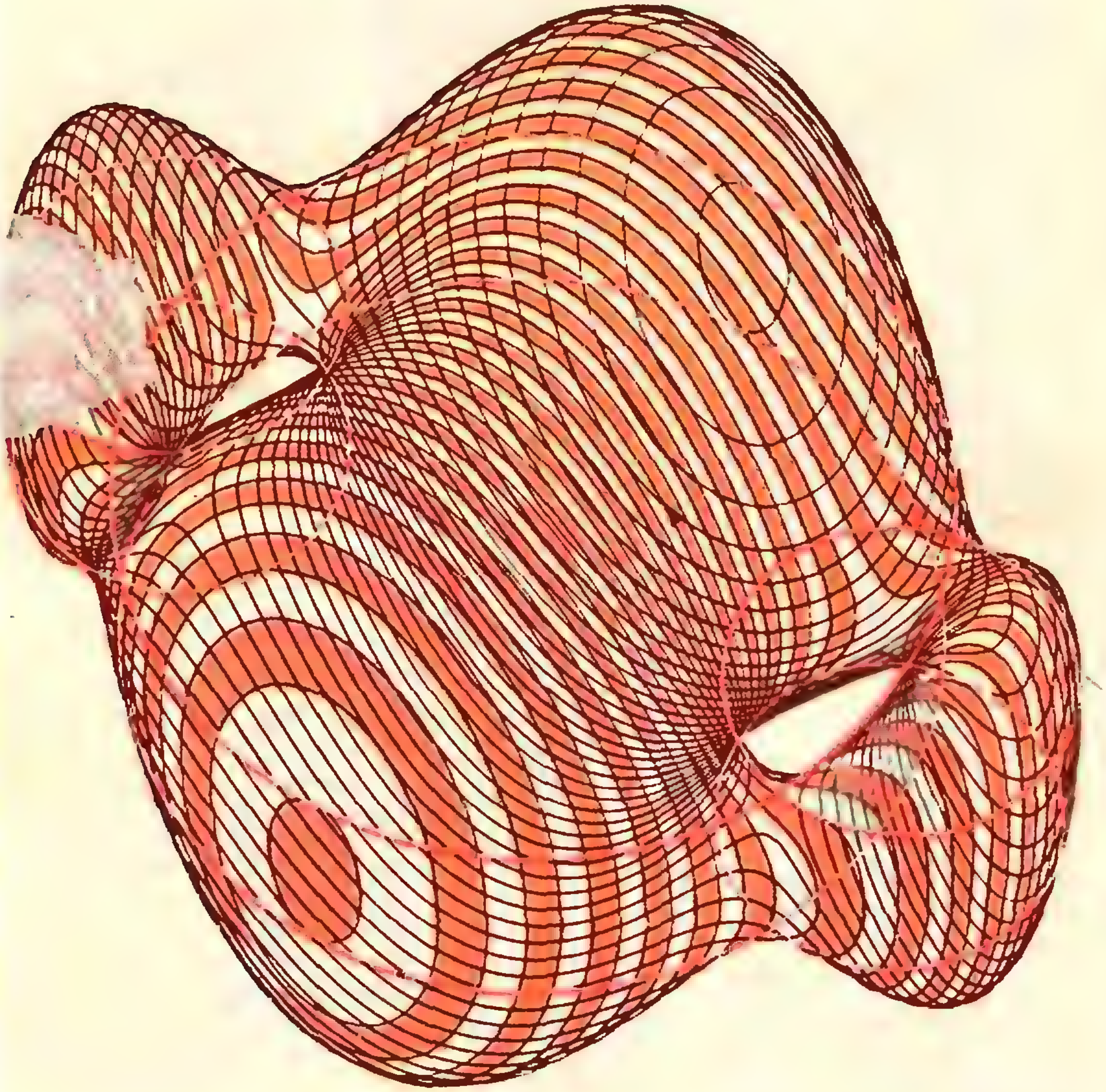
Это семейство «цветочков» нарисовала ЭВМ. Уравнение данного семейства кривых в полярных координатах имеет вид

$$\varrho = A \sin \beta\varphi.$$

Подписи под рисунками цветочков указывают значения параметра *B* (см. также с. 47, задание 10.2).

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Эту замысловатую поверхность шестого порядка нарисовала машина ЕС-1022 по программе Ю. Котова. Геометрически поверхность весьма своеобразна: она замкнута, но имеет две дырки — топологи такие поверхности называют «кренделями». А алгебраическим геометрам она интересна в частности тем, что содержит шесть окружностей — они выделены красным цветом. Аналитически поверхность получена из... трех окружностей с помощью простого приема: подробно об этом вы можете прочитать на с. 62.



НОМЕР
11

Основан в 1970 году

Квант

11
1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *Л. Ашкинази.* МГД-генератор
8 *П. Блехер.* О людях правдивых, лгунах и обманщиках

Лаборатория «Кванта»

12 *Дж. Уокер.* Физический фейерверк

Математический кружок

15 *В. Залгаллер.* Задача о треугольниках с общим основанием

Задачник «Кванта»

19 Задачи М651—М655, Ф663—Ф667
21 Решения задач М605—М608; Ф608—Ф612
27 *А. Аврамов.* Арифметические прогрессии в треугольнике Паскаля

«Квант» для младших школьников

29 Задачи
30 *Е. Гик.* Морской бой

По страницам школьных учебников

33 *Ю. Иванов.* Сколько вариантов?

Практикум абитуриента

38 *Л. Асламазов.* Силы трения и движение

Искусство программирования

42 Заочная школа программирования. Урок 11

Информация

XIV Всесоюзная олимпиада школьников

45 *В. Вавилов, А. Земляков, И. Клумова.* Олимпиада по математике
51 *Т. Петрова, Л. Чернова.* Олимпиада по физике
54 *Т. Романовский.* Экспериментальный тур олимпиады по физике
59 Призеры XIV Всесоюзной олимпиады школьников
61 **Шахматная страничка**
62 **Ответы, указания, решения**
Шахматный конкурс *(3-я с. обложки)*
Наша обложка *(37)*
Смесь *(7, 11)*

На первой странице обложки изображено объединение пяти конгруэнтных симметрично расположенных икосаэдров, видимые части одного из них выделены цветом

©Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1980

Л. Ашкинази

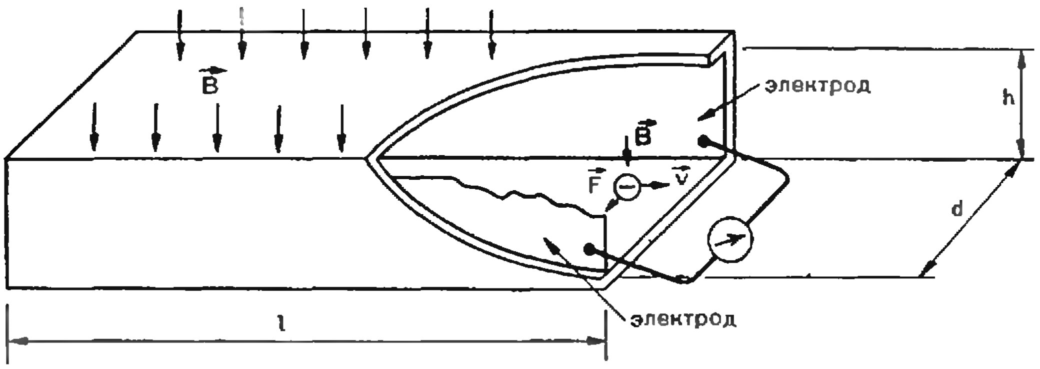
МГД-генератор

Человеческое общество не может жить без энергии. Пока основной источник энергии для человека — природное топливо: уголь, нефть, газ. Но запасы этого топлива невечны. Правда, мы знаем другие источники энергии — Солнце и атом. В будущем основными источниками станут именно они, но их освоение требует времени, а запасы природного топлива тем временем убывают. Как эффективнее использовать эти запасы? Естественное предложение — повышать коэффициент полезного действия устройств, преобразующих энергию природного топлива в электрическую энергию. Немаловажным преимуществом преобразования энергии с высоким КПД является уменьшение загрязнения окружающей среды.

Как известно, КПД тепловой машины увеличивается при увеличении максимальной и уменьшении минимальной температур рабочего тела. Но минимальная температура ограничена снизу — это температура окружающей среды. Чем ограничена сверху максимальная температура? Прочностью лопастей турбин — ибо прочность всех металлов падает с ростом температуры, а на быстродвижущиеся детали приходятся наибольшие нагрузки. Лопасти турбин ТЭС работают «на пределе», и одна из основных забот турбостроителей — получение материалов, обладающих высокой прочностью при высоких температурах. В лучших ТЭС достигнут КПД 35—40%.

Если мы хотим увеличить КПД за счет повышения температуры рабочего тела, надо искать способ преобразования энергии горячего газа в электрическую энергию, не требующий от материалов высокой прочности.

Однажды на мосту через Темзу стоял человек и пытался измерить разность потенциалов между двумя



электродами, опущенными в воду. Однако разность потенциалов получилась равной нулю, и огорченный Майкл Фарадей (а это был именно он) пошел домой. Неудача Фарадея объяснялась лишь низкой чувствительностью приборов, которыми он пользовался. А разность потенциалов существовала, и она была измерена спустя 19 лет физиком Волластоном. И тогда же Уильям Томсон (лорд Кельвин) предложил использовать этот эффект для преобразования энергии движения морской воды во время приливов в электрическую энергию.

Так были заложены идейные основы нового метода преобразования энергии, который дает возможность использовать природное топливо с бо́льшим КПД, чем в традиционных ТЭС. Этот метод называют магнитогидродинамическим.

МГД-генератор

Представим себе трубу, сделанную из электроизолирующего материала и имеющую на двух противоположных стенках изнутри проводящие электроды. Труба помещена в магнитное поле. Внутри трубы движется струя горячего газа. Такова принципиальная схема магнитогидродинамического генератора — МГД-генератора. (Движение горячей струи газа во многих отношениях похоже на движение жидкости. Отсюда — название и самого метода, и генератора.) В МГД-генераторе механическая энергия движущегося горячего газа преобразовывается в электрическую энергию. Посмотрим, как это делается.

Пусть для определенности газ в МГД-канале (так называют трубу с электродами на внутренних стенках) движется слева направо со скоростью $\vec{v}$, а индукция $\vec{B}$ магнитного поля направлена так, как показано на рисунке.

Если в газе, движущемся по МГД-каналу, есть свободные электроны, то под действием силы Лоренца $F = evB$ они будут дрейфовать в газе по направлению к ближайшему к нам (на рисунке) электроду и скапливаться на нем. В результате между электродами на стенках МГД-канала будет создаваться разность потенциалов. Если мы подключим к электродам какую-нибудь электрическую нагрузку, то по цепи нагрузки будет протекать ток.

Итак, задача решена — поместив поток горячего газа в трубу с двумя электродами и магнитное поле, мы сделали генератор электрической энергии.

Механизм возникновения тока в МГД-генераторе такой же, как и в любом электрическом генераторе — ток возникает в проводнике, движущемся в магнитном поле. Но только в электрических генераторах эти проводники металлические, твердые, а в МГД-генераторе это — горячий газ.

Однако это лишь принцип действия. Чтобы понять, при каких условиях будет работать такой генератор, вычислим его параметры — ЭДС и внутреннее сопротивление. Пусть сопротивление нагрузки бесконечно, иначе говоря — нагрузка разомкнута. Каково будет напряжение $\mathcal{E}$ на выходе генератора, то есть ЭДС? Оно равно работе по перемещению единичного заряда между электродами. Поскольку эта работа производится против силы $F=evB$, при ширине канала, равной d, $\mathcal{E}=Fd/e=vBd$. Для $d=3$ м, $v=1500$ м/с и $B=5$ Тл $\mathcal{E}$ составит 22,5 кВ — вполне значительную величину, достаточную для практических применений.

Вернемся на минуту во времена Фарадея и оценим ЭДС для пары электродов, опущенных в Темзу (конечно, река — это не струя проводящего газа, а струя проводящей жидкости, но принципиальной разницы нет). Темза — река широкая (это хорошо), но медленная (это плохо), а магнитное поле Земли маленькое (это тоже плохо). Полагая $d=30$ м, $v=0{,}1$ м/с, $B=10^{-4}$ Тл, получим $\mathcal{E}=3\cdot10^{-4}$ В. (Такую величину Фарадей измерить не смог...)

Теперь найдем внутреннее сопротивление МГД-генератора.

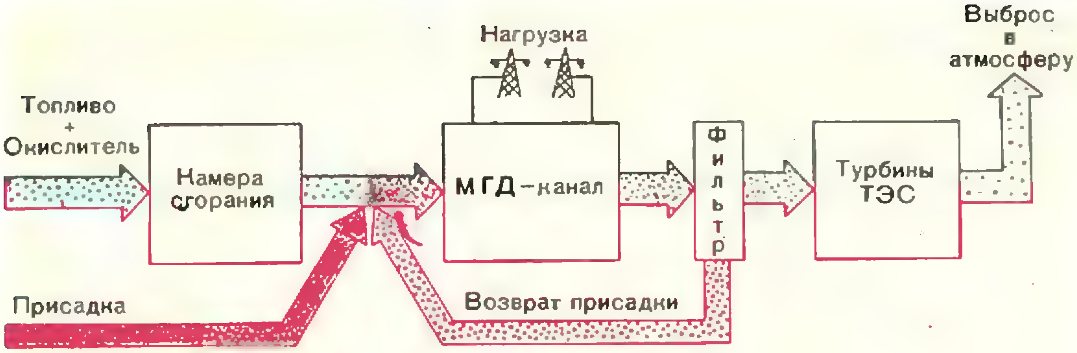
Как известно, сопротивление металлического проводника длины L и сечения S равно $R=\frac{mL}{e^2n\tau S}$, где m и e — масса и заряд электрона, n — концентрация свободных электронов в металле, τ — время свободного пробега электрона (см. «Физика 9», с. 175). Мы можем воспользоваться этой формулой и для случая газа с электронной проводимостью, подставляя в формулу «газовые» значения τ и n. При температуре $T=2000$ К и давлении газа в канале 10^5 Па (величины, обычные для МГД-генераторов) τ составляет $\sim10^{-12}$ с. Как видно из рисунка, в нашем случае $L=d$, $S=hl$, так что $R=3{,}5\cdot10^{19}\frac{d}{nhl}$. Итак, мы связали внутреннее сопротивление R МГД-генератора с размерами канала и концентрацией электронов в газе.

Какие же величины R надо обеспечить, чтобы применение МГД-генератора было экономически целесообразно? Пусть от генератора с размерами канала $d=h=3$ м, $l=15$ м мы хотим получить мощность $P=2000$ МВт. Если сопротивление нагрузки $R_н$, то ток в генераторе и нагрузке $I=\mathcal{E}/(R+R_н)$, мощность, развиваемая генератором, $P_г=\mathcal{E}I=\mathcal{E}^2/(R+R_н)$, мощность, выделяющаяся в нагрузке, $P=\mathcal{E}^2R_н/(R+R_н)^2$, мощность потерь $P_п=\mathcal{E}^2R/(R+R_н)^2$. Так как по условию $P=2000$ МВт, а $\mathcal{E}=22{,}5$ кВ, то $R_н=4(R+R_н)^2$. Основное, ради чего мы «изобретаем» МГД-генератор, — высокий КПД. Значит, $P_п$ должно составлять лишь небольшую часть $P_г$ — скажем, не более 10%. Иначе МГД-генератор окажется не эффективнее обычной ТЭС. Итак, пусть $P_п\leqslant0{,}1P_г$, то есть $\mathcal{E}^2R/(R+R_н)^2\leqslant0{,}1\mathcal{E}^2/(R+R_н)$; тогда $R\leqslant0{,}11\,R_н$. Отсюда и из $R_н=4(R+R_н)^2$ имеем $R\leqslant0{,}022$ Ом. Для того чтобы при заданных величинах $d=h=3$ м, $l=15$ м получить такое R, надо иметь концентрацию электронов $n\geqslant10^{20}$ электронов/м^3. Но откуда взяться в газе такому количеству электронов? При температуре 2000 К газ практически целиком состоит из неионизированных молекул; его можно ионизировать, нагрев, например, до 8000 К. Но ведь при такой температуре плавятся все известные материалы — МГД-канал и камеру сгорания просто не из чего будет делать...

Однако концентрацию электронов можно увеличить добавлением к газу легкоионизирующихся добавок. Такими добавками, или, как их называют, присадками, могут быть щелочные металлы, причем наиболее эффективно добавление калия и цезия. Например, добавка к смеси CO_2+H_2O (продукты сгорания угля или природного газа) 1% калия создает при температуре газа 2500 К концентрацию электронов, в 10^{24} раз бо́льшую, чем в его отсутствие.

Присадка калия вводится в самое начало МГД-канала, сразу за камерой сгорания, в виде солей K_2CO_3 или K_2SO_4 — дешевых и легкодоступных соединений калия. Частицы должны быть мелкими, размером порядка микрона,— они должны успеть расплавиться, испариться, разложиться и ионизироваться в самом начале канала, чтобы к электродам пришел газ уже с достаточной проводимостью.

Еще больше увеличивает проводимость газа добавка цезия. Но цезий весьма дорог, и применять его можно только в том случае, если при работе МГД-генератора не будет необходимости в постоянном расходе


Топливо
+
Окислитель
Камера сгорания
Нагрузка
МГД-канал
Фильтр
Турбины ТЭС
Выброс в атмосферу
Присадка
Возврат присадки

МГД-генератор с открытым циклом.

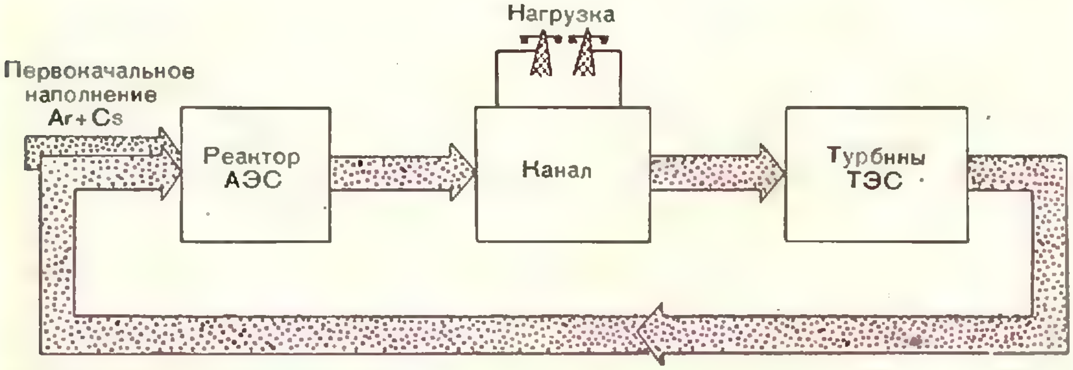
присадки. Чтобы узнать, как расходуется присадка при работе МГД-генератора, нам придется заняться вопросом о судьбе газа, прошедшего через МГД-канал.

Этот газ имеет еще вполне достаточную энергию, чтобы вращать турбины ТЭС. В этом случае МГД-генератор будет играть роль «самой высокотемпературной ступени» в ТЭС. Это еще более повысит его КПД. После МГД-канала и турбин газ выбрасывается в атмосферу. И хотя фильтры задерживают на выходе из канала почти 95% присадки, из труб МГД-электростанции мощностью 2000 МВт все равно будет выбрасываться в атмосферу 4 тонны присадки в час. Поэтому в МГД-генераторе, который после канала выбрасывает газы в атмосферу, цезий применять нельзя — слишком дорого обойдется. Для таких МГД-генераторов, называемых *МГД-генераторами с открытым циклом*, в качестве присадки возможно применение только калия в виде K_2CO_3 или K_2SO_4.

Раз существует МГД-генератор с открытым циклом, то, наверное, существует и МГД-генератор с замкнутым циклом? Да. В нем рабочим телом обычно является инертный газ (как правило, аргон), присадкой — цезий.

Газ после канала и турбин (если они есть) возвращается... куда? Не в камеру сгорания — гореть в МГД-генераторе с замкнутым циклом нечему, природное горючее в нем не сжигается. Газ возвращается в зону нагрева, которой может быть, например, «внутренность» атомного реактора. Потерь газа и присадки в этом случае нет, и можно использовать цезий, который создает бо́льшую проводимость, чем калий.

Применение МГД-генератора с замкнутым циклом может повысить КПД атомной электростанции, но для широкого применения МГД-генераторов как с открытым, так и с замкнутым циклом надо решить группу проблем, из которых наиболее сложная, так сказать, «узловая».


Нагрузка
Первоначальное наполнение Ar+Cs
Реактор АЭС
Канал
Турбины ТЭС

МГД-генератор с закрытым циклом.

Проблема канала.

Необходимы изоляционные и проводящие материалы, не слишком быстро разрушающиеся в условиях работы МГД-генератора. А условия эти непростые.

СРЕДА в МГД-генераторе с открытым циклом — химически активные продукты сгорания топлива с еще более химически активными примесями (сера) и присадкой (калий).

В МГД-генераторе с замкнутым циклом — хотя и химически неактивные инертные газы, но зато очень химически активная присадка (цезий).

ТЕМПЕРАТУРА $2000 \div 3000$ К.

И вдобавок этот химически активный и довольно горячий ветер имеет

СКОРОСТЬ $1000 \div 2000$ м/с.

Такие условия выдерживают только самые тугоплавкие соединения (Al_2O_3, MgO). Их используют в качестве изоляторов стенок МГД-канала. А металлы таких условий не выдерживают вовсе. Поэтому электроды делают не из металлов, а из проводящих химических соединений и их смесей ($ZrO_2 + CeO_2$, $ZrO_2 + La_2O_3$, $LaCrO_3$ и др.). Однако стойкость этих материалов также оставляет желать лучшего. Многочисленные попытки защитить электроды от действия потока горячих газов пока не увенчались полным успехом. Если «проблему канала» и ряд других, тоже достаточно сложных проблем (мощный электромагнит, высокотемпературный атомный реактор) удастся решить, то перед МГД-генератором откроются следующие

Перспективы применения.

1. МГД-ГЕНЕРАТОР С ОТКРЫТЫМ ЦИКЛОМ НА ПРИРОДНОМ ГОРЮЧЕМ КАК МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ С МАКСИМАЛЬНЫМ КПД.

Такой генератор будет работать на угле, нефти или газе, имея КПД 50—60% (при двухступенчатой схеме: МГД-генератор+турбины ТЭС на его выходе). Для генерирования, например, мощности 2000 МВт генератор (МГД+ТЭС) должен иметь канал с сечением 9 м² ($d = h = 3$ м) и длиной 15 м. Скорость газов в канале будет 1500 м/с, магнитное поле 5 Тл. Ежесекундно в камере сгорания две тонны горючего будут превращаться в смесь газов $CO_2 + H_2O$, нагретую до 2500 К, а в начало канала ежесекундно будет вводиться 20 кг присадки K_2CO_3. Сопротивление газа в канале будет 0,02 Ом. Важным параметром МГД-генератора как высокотемпературной ступени ТЭС будет время непрерывной работы — нельзя же слишком часто останавливать МГД-электростанцию для ремонта канала. (Обеспечение большого времени непрерывной работы — еще одна важная проблема в создании мощных МГД-генераторов.) На действующем МГД-генераторе У25 (максимальная мощность 20 МВт) достигнуто время непрерывной работы около 10 дней при рабочей мощности 3 МВт. Но для того чтобы применение МГД-генераторов было экономически целесообразно, мощность должна быть увеличена в 10—100 раз.

2. МГД-ГЕНЕРАТОР С ОТКРЫТЫМ ЦИКЛОМ НА ПРИРОДНОМ ГОРЮЧЕМ ДЛЯ ПОКРЫТИЯ «ПИКОВЫХ НАГРУЗОК» В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ.

Такие электростанции называют «пиковыми» или «полупиковыми», в отличие от «базовых». Потребление энергии в течение суток меняется — например, в городах «пик нагрузки» приходится на вечер. Изменение режима работы обычной ТЭС довольно сложно, и вечером энергии не хватает. Ситуация может быть облегчена при наличии МГД-генератора соответствующей мощности, так как его включение или изменение режима работы занимает несколько минут. Такой генератор включался бы только в период «пика нагрузки» и увеличивал бы в необходимой степени мощность электростанции.

3. МГД-ГЕНЕРАТОР КАК МОЩНЫЙ МЕСТНЫЙ ИСТОЧНИК ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ ДЛЯ КРАТКОВРЕМЕННОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ.

Для питания экспериментальных физических установок часто требуются весьма большие мощности, иногда более 10^4 МВт. При этом источник питания должен работать недолго и с большими перерывами — скажем, по 5 минут раз в полчаса. 10^4 МВт — это крупнейшая ТЭС, строить ее долго и дорого; запуск котлов и турбин занимает более часа, так что работать ей придется непрерывно, а не по 5 минут. Тянуть линию электропередачи на 10^4 МВт тоже долго и дорого. А МГД-генератор на 10^4 МВт — это установка, которую можно будет перевезти тягачами. Стоить она будет много дешевле ТЭС, запуск ее будет занимать менее минуты.

А импульсные МГД-генераторы на меньшие мощности совсем скромны по размерам. Например, самый мощный на сегодняшний день импульсный МГД-генератор «Урал», предназначенный для генерации мощности 50 МВт в течение двух секунд, имеет длину канала всего 1,2 м. Вывод его на режим занимает одну секунду; всего за три секунды работы он «съедает» 300 кг твердого топлива — пороха.

В заключение предлагаем вам несколько вопросов. Эти вопросы — не задачи в привычном смысле; это, скорее,

Информация к размышлению

1. Почему при вычислении проводимости мы учитывали движение только электронов и не учитывали движение ионов?

2. Как еще можно использовать тепло газов, выходящих из МГД-канала? Имеет ли смысл подогревать топливо и воздух, подаваемые в камеру сгорания?

3. Имеет ли смысл для увеличения стойкости электродов охлаждать их? Как при этом изменится внутреннее сопротивление МГД-генератора?

4. Магниты первых МГД-генераторов были выполнены на железном сердечнике с медной обмоткой. Такие магниты потребляли примерно такую же мощность, какую давал соответствующий МГД-генератор. МГД-генераторы работали практически только «на себя». Как можно сильно уменьшить потребление энергии электромагнитом?

5. МГД-генератор может работать по следующей «двухконтурной» схеме: топливо сгорает, продукты сгорания нагревают аргон, находящийся в замкнутом контуре и являющийся рабочим телом. Каковы преимущества и недостатки такого МГД-генератора?

Задачи, предлагавшиеся на математическом бое на XIV Всесоюзной олимпиаде школьников

(см. с. 48)

1. Докажите, что при любом простом p произведение $(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)\times\ldots$ $\ldots\times(p^2+1)$ при делении на p дает в остатке либо 0, либо 4.

2. Найдите хотя бы одно целочисленное решение $(x;\ y)$ уравнения

$$x^2+xy-y^2=1,$$

для которого $x>100$ и $y>100$.

3. Выясните, при каких значениях x предел последовательности

$$x_n=x^n\sin\pi x^n$$

существует и равен 0.

4. Выясните, при каких значениях a существует предел последовательности (x_n), заданной рекуррентным соотношением

$$x_{n+1}=\frac{2x_n^3}{3x_n^2-1}$$

и своим первым членом $x_1=a$.

5. На плоскости даны n отрезков и $n+2$ точки «общего положения», то есть отрезки не параллельны, не пересекаются по три в одной точке, а точки не лежат на данных отрезках или их продолжениях. Докажите, что какие-то две из данных точек можно соединить отрезком, не пересекающим ни один из данных отрезков.

6. Отрезок AB пересекает сферу в двух точках. Докажите, что множество точек M таких, что обе прямые MA и MB касаются данной сферы, является плоским (целиком содержится в некоторой плоскости).

7. Внутри сферы радиуса R заключен выпуклый многогранник, ребра которого имеют длины $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, а двугранные углы при этих ребрах — величины $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$ соответственно (в радианах). Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(\pi-\varphi_k)<8\pi R.$$

(Заметим, что задачи 6 и 7 не удалось решить ни одной из команд.)

Н. Блехер

О людях правдивых, лгунах и обманщиках

Среди математических задач на сообразительность особый интерес представляют логические задачи. Такие задачи, как правило, не требуют специальных математических знаний, и их условие может быть объяснено даже людям, весьма далеким от математики.

В настоящей статье мы разберем четыре логические задачи. В этих задачах у нас будут присутствовать люди правдивые, говорящие во всех случаях только правду, и лгуны, всегда говорящие только неправду. Однако наибольшую трудность и наибольший интерес, как мы увидим, будут представлять те задачи, в которых встречаются еще и обманщики, то есть люди, говорящие что угодно, только бы запутать спрашивающего.

Задача 1*). *На развилке двух дорог, одна из которых ведет в город A, где живут правдивые люди, а другая ведет в город B, где живут лгуны, математик встретил жителя одного из этих городов. Может ли математик за один вопрос выяснить у встреченного им жителя, какая из дорог ведет в город A?*

Ответ в задаче 1 является положительным даже при дополнительном условии, которого мы всегда будем придерживаться в статье: вопрос должен задаваться в такой форме, чтобы ответом на него служили слова «да» и «нет». Вопрос, решающий задачу 1, таков: «*Ведет ли эта дорога* (указывая на одну из дорог) *в ваш родной город?*». Легко проверить, что ответ «да» означает, что данная дорога ведет в A, ответ «нет» — что в B. В самом деле, если отвечающий является жителем города A, то он всегда говорит правду и поэтому что ответ «да» означает, что указанная дорога ведет в A, а ответ «нет» — что в B. Если же отвечающий живет в B, то его ответ «да», поскольку этот человек всегда говорит неправду, означает, что указанная дорога ведет не в B, то есть в A, а ответ «нет» означает, что эта дорога ведет в его родной город, то есть в B. Таким образом, в обоих случаях ответ «да» означает, что данная дорога ведет в A, и ответ «нет» — что в B, что и утверждалось.

Заметим, что мы не определяем при ответе, с кем мы разговариваем — с жителем города A или с жителем города B, но это и не требовалось. Автору известны и другие решения задачи 1, но все они основаны на одной и той же идее: вопрос о том, ведет ли данная дорога в город A, нужно задать в такой форме, чтобы лгуну приходилось давать «дважды отрицательный» ответ. Поскольку двойное отрицание эквивалентно положительному ответу, лгун в этом случае дает тот же ответ, что и человек, говорящий правду. Это и происходит в приведенном нами решении.

Вторая задача, которую мы разберем, является усложнением первой. Это усложнение связано с появлением среди отвечающих обманщика.

Задача 2. *Пусть в условиях задачи 1 математик встретил на развилке не одного, а трех человек, один из которых является жителем города A, второй — жителем города B, а третий — обманщиком. При этом математик знает, что среди этих троих один — житель города A, другой — житель города B, а третий — обманщик, но конкретно не знает, кто из них есть кто. Может ли математик за два вопроса выяснить дорогу в A?*

---

*) Задачи 1 и 2 были сообщены автору венгерским математиком П. Майором

Уточним, что каждый из двух вопросов может быть задан любому из трех лиц, встреченных математиком на развилке, и на вопрос отвечает только тот, кому этот вопрос задан. Кроме того, каждый из встреченных знает «кто есть кто» среди них и какая дорога ведет в A и какая — в B.

Решение задачи 1 наталкивает на мысль: а нельзя ли первым вопросом выделить из трех человек того, который не является обманщиком? Тогда задача 2 будет сведена к задаче 1 и, задав выделенному человеку тот же вопрос, что и в задаче 1, мы узнаем дорогу в A. Оказывается, такой первый вопрос задать можно, хотя догадаться до него, как кажется автору, непросто.

Перенумеруем для удобства всех трех человек произвольным образом. Вопрос задается первому. Вот он: *«Предположим, что каждый из вас троих сейчас отправится в А или в В по следующему принципу: житель города А пойдет в город А, житель города В — в город В, а обманщик — если только обманщиком не являетесь вы сами — пойдет вместе с вами; если же вы — обманщик, то вы пойдете куда угодно. Пойдет ли при этих условиях в А вот этот* (указывая на второго) *человек?»*.

Мы утверждаем, что при ответе «да» третий человек — не обманщик, а при ответе «нет» второй человек — не обманщик. Действительно, если вопрос мы задали обманщику, то и второй и третий из опрашиваемых не являются обманщиками. Далее, если вопрос мы задали человеку, который всегда говорит правду, то его «да» означает, что второй является обманщиком и, стало быть, третий им не является. Наоборот, его ответ «нет» свидетельствует о том, что второй человек является лгуном (ведь только лгун не идет вместе с ним). Если же вопрос мы задали лгуну, то его «да» означает, поскольку обманщик идет в B, а человек, говорящий правду,— в A, что второй человек — обманщик, а третий — человек, говорящий правду. «Нет» же означает, что, наоборот, второй — это человек говорящий правду, а третий — обманщик.

Проанализировав все возможности, нетрудно увидеть, что при ответе «да» третий человек, а при ответе «нет» второй человек заведомо не являются обманщиками. Таким образом, в обоих случаях мы можем указать человека, не являющегося обманщиком, и тем самым задача 2 решена.

Заметим, что, как и при решении задачи 1, основная идея состояла в том, чтобы заставить лгуна сделать двойное отрицание, то есть добиться того, чтобы его ответы имели тот же смысл, что и у человека, говорящего правду, и чтобы они при этом различали обманщика и необманщиков.

Задача 3. *На химический конгресс приехали N ученых; некоторые из них являются химиками, остальные — алхимиками, причем известно, что химиков больше. Химик на все вопросы отвечает правдиво, а алхимик всегда лжет. На конгресс попал математик, задавшийся целью установить о всех ученых, кто из них есть химик, а кто — алхимик. Для этого ему разрешается спрашивать любого ученого о любом другом ученом, кто он. Укажите способ, при котором математик может выяснить «кто есть кто» за $(N-1)$ вопросов.*

Решение задачи 3 сравнительно несложно. А именно, спросим у любого ученого (назовем его для определенности *первым*) о каждом из остальных. В результате эти $(N-1)$ ученых будут разбиты на две группы: группа тех, кто по словам первого ученого является химиком, и группа тех, кто по словам первого ученого является алхимиком. Отнесем первого ученого к первой группе. Выберем из этих групп бóльшую. Тогда ученые этой группы — химики, ученые другой группы — алхимики (докажите!). Тем самым задача решена.

Теперь мы подошли к центральной задаче нашей статьи — задаче М585 («Квант», 1979, № 9). Ее условие совпадает с условием задачи 3, за тем исключением, что алхимики являются уже не лгунами, а обманщиками. В задаче М585 предлагалось *выяснить «кто есть кто» на конференции за* а) $4N$, б) $2N-2$, в) $[3N/2]$ *вопросов.*

Эта задача является несравненно более сложной, чем задача 3, и опять это связано с тем, что ответы лгуна хотя и являются неправильными, но они, так сказать, «постоянно неправильны», что позволяет извлекать из них почти столько же информации, что и из правильных ответов правдивого человека. Ответы же обманщика произвольны, и извлечь из них какую-либо информацию — задача гораздо более сложная.

Приводимое ниже решение дает возможность выяснить, кто — химик, а кто — алхимик, даже за меньшее, чем $[3N/2]$, число вопросов, а именно — за $q=3k$ вопросов, если $N=2k+1$ — число нечетное, и за $q=3(k-1)$ вопросов, если $N=2k$ — число четное.

Вначале мы рассмотрим нечетные N. Искомый способ мы определим индукцией по k. Если на конференции присутствовал $N=1$ ученый $(k=0)$, то он, очевидно, химик, поскольку химиков должно быть больше; никаких вопросов в этом случае задавать не надо: $q=0=3\cdot 0$.

Предположим теперь, что для всех нечетных чисел, меньших данного числа $N=2k+1$, мы уже имеем способ, позволяющий решить задачу в требуемое число вопросов. Укажем такой способ для числа $N=2k+1$. Перенумеруем для удобства всех участников конференции произвольным образом и начнем спрашивать второго, третьего и т. д. ученых, кто есть первый ученый. Этот опрос мы прекратим, как только произойдет одно из двух событий:

Событие А. *Среди опрошенных ученых большинство высказалось за то, что первый ученый — алхимик.*

Событие В. *Число ученых, утверждающих, что первый ученый — химик, равно* k.

Ясно, что если произошло событие A и к этому моменту t ученых утверждали, что первый ученый — химик, и f — что он алхимик, то $f=t+1$. (Действительно, $f>t$, а если предположить, что $f\geqslant t+2$, то событие A должно произойти хотя бы на один вопрос раньше.) Ясно, кроме того, что при этом опросе было задано $q_1=f+t=2f-1$ вопросов. (Частным случаем события A является ситуация, когда уже второй ученый сказал, что первый является алхимиком — здесь $t=0$, $f=1$.)

Если же произошло событие B и при этом f ученых утверждали, что первый ученый — алхимик, то общее число заданных вопросов равно $q_1=k+f$.

Нетрудно видеть, что опрос прервется до того, как будут опрошены все ученые, присутствующие на конференции. В самом деле, предположим противное. Значит, перед опросом последнего ученого не произошло ни одно из событий A, B. Пусть в этот момент среди опрошенных ученых t человек высказались за то, что первый ученый — химик и f — за то, что он алхимик. Поскольку не произошло события A, $f\leqslant t$. Поскольку не произошло события B, $t\leqslant k-1$. Поэтому общее число опрошенных $f+t\leqslant 2(k-1)$. Добавив к ним первого и последнего ученых, мы получаем, что общее число участников конференции не превосходит $2k$, тогда как их $2k+1$. Полученное противоречие доказывает, что одно из событий — A или B — произойдет до того, как будет опрошен последний ученый.

Пусть произошло событие A. Тогда мы утверждаем, что в группе ученых, состоящей из первого ученого и всех опрошенных ученых, число алхимиков не меньше числа химиков.

Действительно, если первый ученый — химик, то те f ученых, которые утверждали, что он алхимик,— сами алхимики. Поскольку общее число ученых в рассматриваемой группе есть $1+t+f=2f$, число алхимиков в группе в этом случае не меньше числа химиков. Если же первый ученый — алхимик, то алхимиками являются и те t ученых, которые утверждали, что он химик. Поэтому и в этом случае число алхимиков не меньше $1+t=f$, то есть не меньше половины.

Далее, поскольку общее число химиков превосходит по условию задачи общее число алхимиков, в оставшейся группе из $N-2f=2(k-f)+1$ ученых число химиков также должно превосходить число алхимиков. Число $N-2f$, очевидно, меньше N, поэтому по предположению индукции существует способ, позволяющий за $q_2=3(k-f)$ вопросов выяснить, кто в оставшейся группе ученых есть химик и кто — алхимик. Выберем теперь из этой группы произвольного химика (такой, очевидно, найдется) и спросим его (на это уйдет $q_3=1$ вопрос), кто есть первый ученый.

Если он алхимик, то те t ученых, которые утверждали, что он химик,— алхимики. Поэтому нам остается лишь выяснить у выбранного нами химика, «кто есть кто» среди тех f ученых, которые утверждали, что первый ученый — алхимик (на это уйдет еще $q_4=f$ вопросов). В результате мы восстановим полную картину разбиения участников конференции на химиков и алхимиков и истратим на это $q=q_1+q_2+q_3+q_4=2f-1+3(k-f)+1+f=3k$ вопросов, что и требовалось.

Если же первый ученый оказался химиком, то те f ученых, которые утверждали, что он алхимик, сами являются алхимиками. Поэтому нам остается выяснить у выбранного нами химика лишь «кто есть кто» в группе из t ученых, утверждавших, что первый ученый — химик. На это мы затратим $q_4=t$ вопросов. Общее число вопросов $q=q_1+q_2+q_3+q_4=2f-1+3(k-f)+1+t=3k-1$ в этом случае даже меньше того числа вопросов которое мы вправе использовать. Тем самым случай, когда произошло событие A, полностью разобран.

Рассмотрим теперь тот случай, когда произошло событие B. Мы утверждаем, что в этом случае первый ученый химик.

В самом деле, если бы он был алхимиком, то и те k ученых, которые утверждали, что он химик, тоже были алхимиками и общее число алхимиков было бы не меньше $k+1$, то есть больше половины, а это противоречит условию задачи.

Итак, первый ученый — химик, а те f ученых, которые утверждали, что он алхимик, сами — алхимики. Выясним теперь у первого ученого «кто есть кто» среди тех k ученых, которые утверждали, что он химик (на это уйдет $q_2=k$ вопросов), и «кто есть кто» среди остальных ученых, не участвовавших в опросе (на это уйдет еще $q_3=N-(1+k+f)=2k+1-1-k-f=k-f$ вопросов). Таким образом, мы полностью выясним «кто есть кто» на конференции и затратим на это $q=q_1+q_2+q_3=k+f+k+k-f=3k$ вопросов. Тем самым оба случая — и когда происходит событие A, и когда происходит событие B — рассмотрены, и поэтому для нечетного числа участников задача полностью решена.

Для четных N решение задачи почти дословно повторяет решение, данное нами для нечетных N, и мы оставляем его в качестве упражнения тем, кто хочет глубже понять проведенное рассуждение.

Задача для исследования

а) Для каких натуральных k верна следующая теорема: На сфере расположено шесть точек так, что лучи, соединяющие центр сферы с этими точками, образуют три взаимно перпендикулярные прямые. Тогда сумма k-х степеней расстояний от любой точки сферы до этих шести точек одна и та же.

б) А если вместо этих шести точек взять на сфере четыре вершины правильного тетраэдра?

в) Восемь вершин вписанного куба?

Выясните, вообще, для каких k и n можно расположить на сфере n точек так, чтобы сумма k-х степеней расстояний до этих точек от любой точки сферы была постоянной, и опишите все (или наиболее симметричные) такие расположения

Ю. Бабенко

Дж. Уокер

Физический фейерверк

Задачи-вопросы, публикуемые ниже, взяты из книги Дж. Уокера «Физический фейерверк», выпущенной недавно издательством «Мир». Большинство задач связано с различными явлениями природы, встречающимися практически на каждом шагу. Чтобы ответить на все поставленные вопросы, нужно провести соответствующие опыты или наблюдения.

Ответы, приведенные в конце журнала, как правило, лишь уточняют задачу или подсказывают путь к ее решению.

1. Волшебный пропеллер

Пропеллер на палочке с зарубками — замечательная игрушка, которую вы без труда можете сделать сами. По всей длине одной палочки делаются небольшие поперечные вырезы; на конце ее гвоздиком закрепляется свободно вращающийся пропеллер (рис. 1, *а*). Второй палочкой проводят по вырезам.

Взяв палочку с зарубками левой рукой так, чтобы большой палец был обращен к вам, а указательный находился с противоположной стороны палочки, начинайте водить другой палочкой взад-вперед по зарубкам. Теперь прижмите к палочке с зарубками указательный палец. Пропеллер начнет крутиться. Ослабьте нажим указательного пальца и прижмите к палочке большой палец, продолжая при этом водить другой палочкой по зарубкам. Пропеллер закрутится в другую сторону.

Показывая этот фокус непосвященным, незаметно нажимайте на палочку по очереди то большим, то указательным пальцами: зрители будут поражены неожиданными переменами направления вращения пропеллера. Вы же можете давать этому явлению самые фантастические объяснения. Например, говорите, что изменение направления вращения пропеллера связано с флуктуациями интенсивности космического излучения.

Первый вопрос, на который предстоит ответить: почему пропеллер вообще крутится? Следующий вопрос потруднее: почему направление его вращения зависит от того, с какой стороны вы нажимаете на палочку?

Если вам хочется сделать этот фокус позанятнее, укрепите на палочке четыре пропеллера (рис. 1, *б*). Правда, разница тут невелика, потому что все они будут вращаться в одну сторону. И еще одна конструкция: два пропеллера укрепляются друг за другом (рис. 1, *в*). Здесь возможны прямо-таки чудеса: оба пропеллера можно заставить крутиться вправо или влево или, что гораздо интереснее, можно сделать так, чтобы один пропеллер крутился в одну сторону, а другой — в другую.

2. Смотанный шланг

Если вы попробуете налить воду в шланг, как показано на рисунке 2, то из другого его конца не выльется ни капли. Да и влить вам удастся очень мало. Почему?

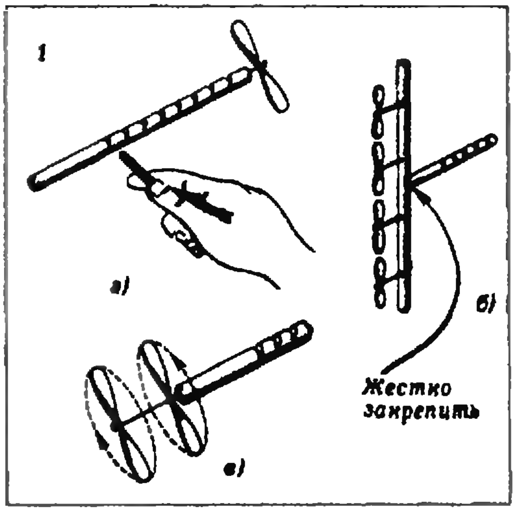


Рис. 1.

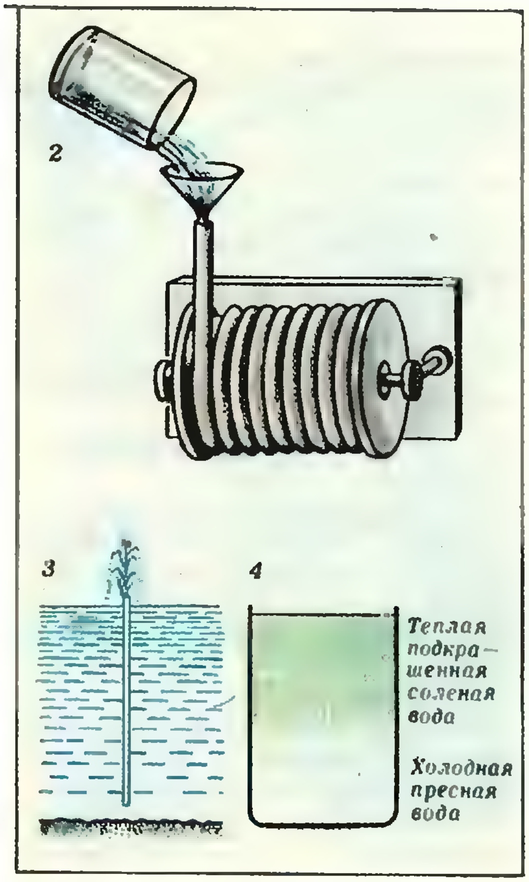


Рис. 2, 3, 4.

3. Перевернутый стакан с водой

Накройте стакан с водой (не обязательно полный) куском картона. Затем, придерживая картонку рукой, осторожно переверните стакан. Теперь уберите руку. Картонка остается на месте, и вода из стакана не выливается. Почему?

Попробуйте сделать такой же опыт с длинной стеклянной трубкой (длиной около 60 см и диаметром 3—4 см), запаянной с одного конца. Вы обнаружите, что, если трубка почти пустая или почти полная, картонка удерживается на месте и вода из трубки не выливается. Если же трубка наполнена примерно наполовину, вода из нее выливается. Почему?

4. Удержится ли вода в перевернутом стакане?

Представьте себе, что картонка, о которой шла речь в предыдущей задаче, внезапно исчезла из-под перевернутого стакана. Вода из стакана начинает вытекать. Почему?

Разумеется, на нее действует сила тяжести. Но разве поверхность воды в начальный момент не находится в равновесии и разве в этом случае не те же самые силы, как и в задаче 3, противодействуют силе тяжести?

5. Вечный соленый фонтан

Как известно, у поверхности тропических морей вода теплая и соленая, а с глубиной она становится холоднее и содержание соли в ней уменьшается.

Нельзя ли соорудить нечто вроде вечно действующего фонтана (рис. 3) — опустить трубу до дна моря, насосом накачать в нее холодную и более пресную воду, а затем предоставить систему самой себе?

Что заставляет фонтан работать и действительно ли он вечен?

6. Соляные «пальцы»

Нечто подобное соленому фонтану вы можете наблюдать у себя дома. Наполните аквариум до половины холодной пресной водой, а сверху осторожно налейте теплый крепкий раствор соли, слегка подкрашенный чернилами (чернила нужны только для большей наглядности).

Тотчас вы увидите, как из слоя раствора в нижний слой пресной воды начнут протягиваться «пальцы» (рис. 4). Такие «пальцы» можно наблюдать и в отсутствие разности температур между слоями жидкости — достаточно поверх раствора соли налить подкрашенный раствор сахара.

Почему вырастают «пальцы» и почему они столь устойчивы?

7. Соляной «маятник»

Обыкновенную консервную банку наполните насыщенным раствором соли (для наглядности подкрасьте его), проделайте в донышке банки маленькое отверстие и частично погрузите банку в сосуд с пресной водой.

Смешаются ли эти две жидкости? Да, и притом весьма удивительным

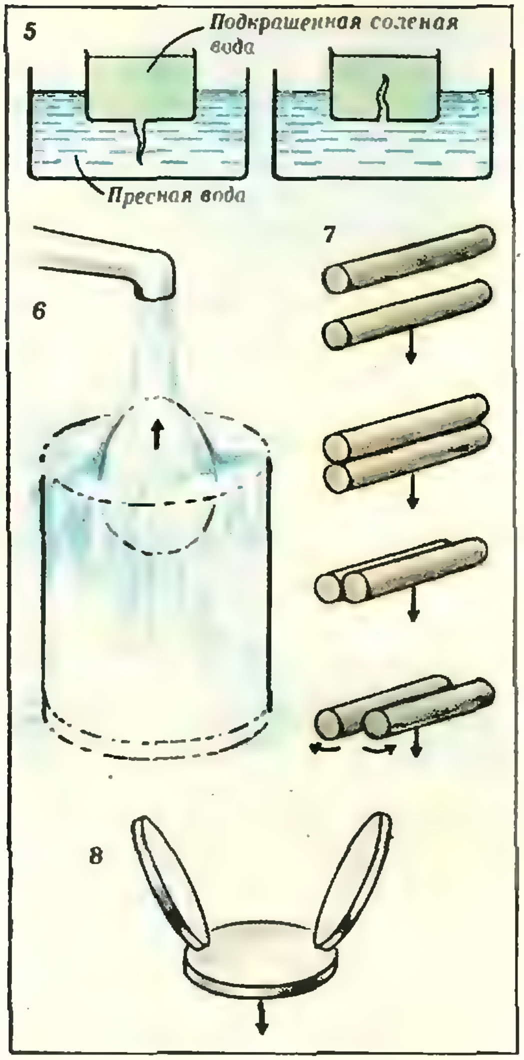


Рис. 5, 6, 7, 8.

образом: сначала из отверстия вытечет немного соленой воды, затем в него войдет немного пресной воды и т. д. (рис. 5). Такие колебания — их период составляет около 4 секунд — могут продолжаться до четырех дней.

Почему возникает такой колебательный процесс и чем определяется его период?

8. Яйцо «выскакивает» из стакана

Опустите яйцо в стакан с водой и поставьте стакан под кран (рис. 6). Если поток воды превышает некоторую критическую величину, то яйцо поднимается, как будто его притягивает струя воды. Почему это происходит?

9. Вихрь в чашке кофе

Осторожно покрутите ложечкой в чашке с горячим кофе так, чтобы кофе начал равномерно вращаться. Теперь аккуратно тонкой струйкой вливайте в центр чашки холодное молоко. Вы увидите, что там образуется небольшой вихрь. Возможно, вы заметите и небольшое углубление в его середине. Если же вливать в кофе горячее молоко, вихря не будет. Почему вихрь возникает в первом случае и не возникает во втором?

10. «Взаимодействие» тонущих предметов

Когда несколько предметов одновременно погружаются в вязкую жидкость, например в масло или сахарный раствор, между ними могут возникать весьма странные взаимодействия.

Приведем примеры.

1) Опустите в вязкую жидкость один за другим два цилиндра (рис. 7). При определенных значениях вязкости жидкости, размеров и скоростей цилиндров второй цилиндр может догнать первый и обойти вокруг него так, что они расположатся на одном уровне. Затем они начнут вращаться и, погружаясь, разойдутся в разные стороны.

2) Бросьте в жидкость один диск, а следом за ним еще два. Вы увидите, что последние догонят первый и все три образуют устойчивую конфигурацию «бабочки» (рис. 8).

3) Теперь бросьте в вязкую жидкость кучкой несколько шариков (три — шесть). Они разойдутся таким образом, что окажутся в вершинах горизонтально расположенного правильного многоугольника, который по мере погружения будет увеличиваться в размерах.

Как это можно объяснить?

В. Залгаллер

Задача о треугольниках с общим основанием

В пятом номере «Кванта» за 1978 год было предложено найти геометрическое решение следующей задачи: *два треугольника на плоскости имеют общее основание, а их вершины C_1, C_2 различны и лежат по одну сторону от основания; доказать, что расстояние между вершинами C_1 и C_2 больше, чем расстояние между центрами O_1 и O_2 вписанных окружностей этих треугольников.*

За прошедшие два года редакция получила много писем по поводу этой интересной и трудной задачи. Однако доказательства, учитывающего все возможности взаимного расположения вершин, не удалось найти ни одному из наших читателей.

Мы помещаем два доказательства; первое придумал харьковский математик А. И. Медяник, второе представляет собой доказательство, предложенное авторами задачи В. А. Залгаллером и А. А. Ивановым, упрощенное по совету академика А. В. Погорелова.

Первое доказательство

Нам понадобится следующее свойство биссектрисы угла треугольника («Геометрия 6—8», задача 914): *если AD — биссектриса угла A треугольника ABC $(D \in [BC])$, то* $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

Пусть точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности (рис. 1). Выразим вектор $\vec{\varrho} = \overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ и через их длины a, b, c.

Легко видеть, что

$$\vec{\varrho} = \frac{|AO|}{|AD|} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{|AO|}{|AD|}\left(\vec{c} + \frac{|BD|}{|DC|}\vec{a}\right).$$

По свойству биссектрисы

$$\frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|DC| + |BD|} = \frac{c}{b+c}.$$

Аналогично (BO — биссектриса угла B).

$$\frac{|AO|}{|AD|} = \frac{1}{1 + \frac{|OD|}{|AO|}} = \frac{1}{1 + \frac{|BD|}{c}}.$$

Из $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{c}{b}$ и $|BD| + |DC| = a$ получаем $|BD| = \frac{ac}{b+c}$.

Поэтому $\frac{|AO|}{|AD|} = \frac{b+c}{a+b+c}$.

Воспользовавшись тем, что $\vec{a} = -(\vec{b} + \vec{c})$, получим окончательно

$$\vec{\varrho} = \frac{b\vec{c} - c\vec{b}}{p}, \qquad (1)$$

где $p = a + b + c$.

Теперь приступим к решению задачи. Выразим длину вектора $\vec{d_0} = \overrightarrow{O_1O_2}$ через $d = |C_1C_2|$ и длины сторон треугольников ABC_1, ABC_2.

По доказанному (см. рис. 2)

$$\vec{d_0} = \vec{\varrho_2} - \vec{\varrho_1} = \frac{b_2\vec{c} - c\vec{b_2}}{p_2} + \frac{c\vec{b_1} - b_1\vec{c}}{p_1}.$$

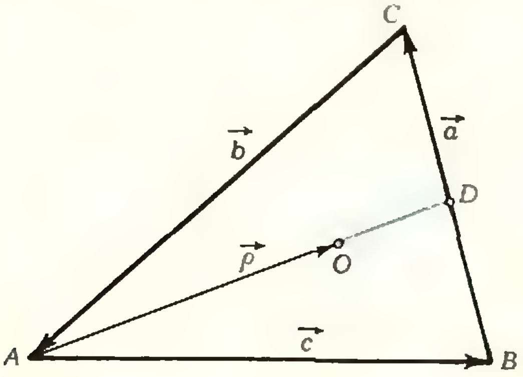
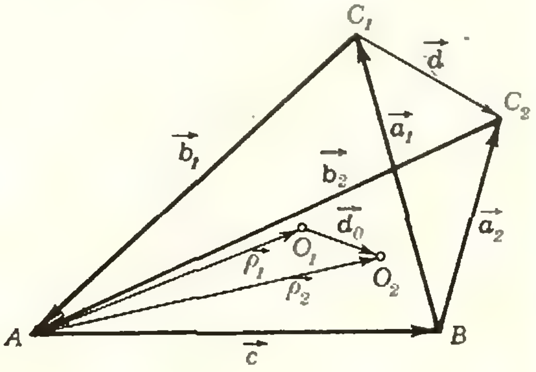


Рис. 1.



где $p_1 = a_1 + b_1 + c, \quad p_2 = a_2 + b_2 + c.$

Вычисляя $\vec{d_0} \cdot \vec{d_0} = d_0^2$, после несложных преобразований получим

$$p_1^2 p_2^2 d_0^2 = p_1^2 c b_2 [2cb_2 - 2(\vec{b_2}\vec{c})] + p_2^2 c b_1 [2cb_1 - 2(\vec{b_1}\vec{c})] + 2p_1 p_2 [cb_2(\vec{b_1}\vec{c}) - c^2(\vec{b_1}\vec{b_2}) - b_1 b_2 c^2 + cb_1(\vec{b_2}\vec{c})]. \qquad (2)$$

Заметим, что $2(\vec{b_1}\vec{c}) = a_1^2 - b_1^2 - c^2$, $2(\vec{b_2}\vec{c}) = a_2^2 - b_2^2 - c^2$; поэтому

$$2cb_1 - 2(\vec{b_1}\vec{c}) = 2cb_1 - a_1^2 + b_1^2 + c^2 = (a_1 + b_1 + c)(b_1 - a_1 + c) = p_1(b_1 - a_1 + c),$$

аналогично,

$$2cb_2 - 2(\vec{b_2}\vec{c}) = p_2(b_2 - a_2 + c).$$

Это позволяет сократить равенство (2) на $p_1 p_2$. Кроме того, $\vec{d} = \vec{b_2} - \vec{b_1}$, откуда $2(\vec{b_1}\vec{b_2}) = b_1^2 + b_2^2 - d^2$. Поэтому (2) принимает вид

$$p_1 p_2 d_0^2 = p_1 c b_2 (b_2 - a_2 + c) + p_2 c b_1 (b_1 - a_1 + c) + [cb_2(a_1^2 - b_1^2 - c^2) - c^2(b_1^2 + b_2^2 - d^2) - 2b_1 b_2 c^2 + cb_1(a_2^2 - b_2^2 - c^2)],$$

откуда

$$p_1 p_2 (d^2 - d_0^2) = [(a_1 + b_1 + c)(a_2 + b_2 + c) - c^2] d^2 + [(a_2 - b_2 - c)(a_1 + b_1 + c) b_2 + (a_1 - b_1 - c)(a_2 + b_2 + c) b_1 + (b_1^2 - a_1^2 + c^2) b_2 + (b_1^2 + b_2^2) c + 2b_1 b_2 c + (b_2^2 - a_2^2 + c^2) b_1] c,$$

что после преобразований внутри квадратных скобок дает

$$p_1 p_2 (d^2 - d_0^2) = [(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) + c(a_1 + b_1 + a_2 + b_2)] d^2 + [c(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) + (a_1 b_2 - b_1 a_2)(a_2 - a_1 + b_1 - b_2)] c. \qquad (3)$$

Чтобы доказать, что $d > d_0$, нам достаточно убедиться в положительности правой части равенства (3). Последняя состоит из двух слагаемых. Поскольку $a_1 + b_1 > c$ и $a_2 + b_2 > c$, первое слагаемое больше, чем $3c^2 d^2$. Остается проверить, что второе слагаемое по модулю меньше, чем $3c^2 d^2$. Очевидны соотношения $|a_2 - a_1| < d$, $|b_2 - b_1| < d$.

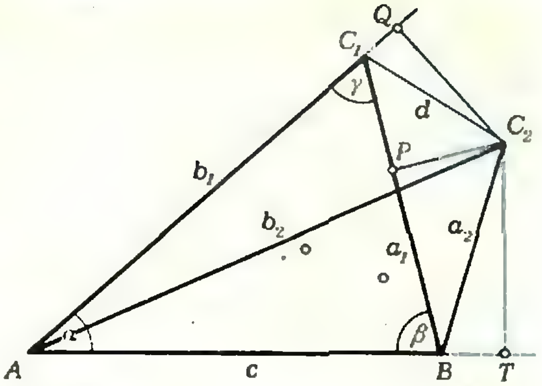


Рис. 3

Поэтому

$$p_1 p_2 (d^2 - d_0^2) > (c^2 + 2c^2) d^2 - |c^2 (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)| - |a_1 b_2 - b_1 a_2| (|a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|) c > 3c^2 d^2 - c^2 d^2 - 2dc |a_1 b_2 - b_1 a_2| = 2c^2 d^2 - 2dc |a_1 b_2 - b_1 a_2|. \qquad (4)$$

Ниже будет доказано, что $|a_1 b_2 - b_1 a_2| \leqslant cd$.

Поэтому правая часть неравенства (4) неотрицательна.

Следовательно, $d > d_0$.

Итак, осталось доказать следующую лемму.

Лемма. *Пусть в плоскости треугольника ABC_1 произвольным образом расположена точка C_2. Тогда* (рис. 3)

$$|a_1 b_2 - b_1 a_2| \leqslant cd.$$

Доказательство. Опустим из точки C_2 перпендикуляры C_2P, C_2Q, C_2T на прямые BC_1, AC_1, AB.

Вокруг четырехугольника AQC_2T можно описать окружность с диаметром AC_2.

Так как $Q\widehat{A}T = \alpha$, по теореме синусов, $|QT| = b_2 \sin \alpha$.

Рассматривая аналогично четырехугольники C_1PC_2Q и PC_2TB, получим $|PQ| = d \sin \gamma$ и $|PT| = a_2 \sin \beta$.

Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника AC_1B'. По теореме синусов, $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$, $\sin \beta = \frac{b_1}{2R}$, $\sin \alpha = \frac{a_1}{2R}$. Поэтому $|QT| = \frac{a_1 b_2}{2R}$, $|PT| = \frac{a_2 b_1}{2R}$, $|PQ| = \frac{cd}{2R}$.

Из неравенства треугольника следует $||PT| - |QT|| \leqslant |PQ|$; поэто-

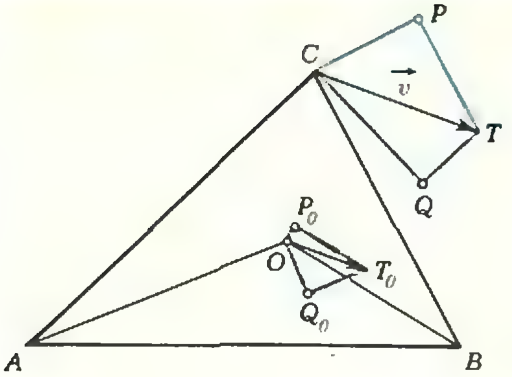


Рис. 4

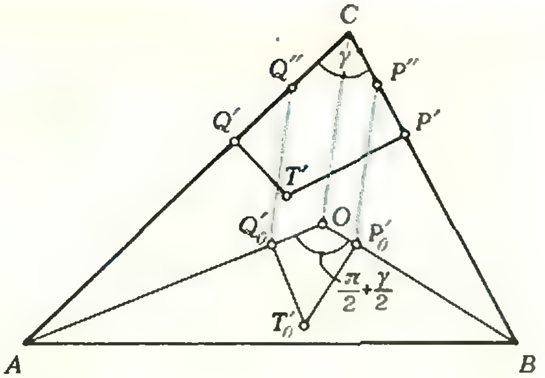


Рис. 5

му после подстановки выражений для $|QT|$, $|PT|$, $|PQ|$ и упрощений получим

$$|a_1b_2-a_2b_1|\leqslant cd.$$

Второе доказательство

Будем при закрепленном основании AB равномерно двигать вершину C вдоль отрезка C_1C_2 из C_1 в C_2. При этом центр O вписанного круга будет по какому-то пути перемещаться из O_1 в O_2.

Лемма. *При движении вершины C с ненулевой скоростью центр O двигается с меньшей скоростью.*

Из этой леммы следует, что, когда C пройдет с постоянной скоростью отрезок C_1C_2, точка O, двигаясь в каждый момент с меньшей скоростью, пройдет из O_1 в O_2 более короткий путь. Тем более прямой путь $|O_1O_2|$ короче, чем $|C_1C_2|$.

Прежде чем доказывать лемму, заметим следующее. Если вершина C движется со скоростью $\vec{v}\neq 0$, то лучи BC и AC, идущие вдоль сторон треугольника, поворачиваются с некоторыми угловыми скоростями ω_1 и ω_2, причем хотя бы одна из этих скоростей — не нуль. Условимся о знаках: считаем угловую скорость положительной, если луч поворачивается по часовой стрелке, и отрицательной, если луч поворачивается против часовой стрелки.

Скорости $\vec{v}$ и ω_1, ω_2 связаны между собой. Если от точки C отложить вектор $\vec{v}=\overrightarrow{CT}$ (рис. 4), то длина $|CP|$ его проекции на направление, перпендикулярное лучу BC, равна $|\omega_1|\cdot|BC|$. (Это вызвано тем, что полная скорость перемещения точки C слагается из скорости ее движения вместе с поворачивающимся лучом BC и из скорости ее движения вдоль этого луча.) Аналогично, длина $|CQ|$ проекции $\vec{v}$ на направление, перпендикулярное лучу AC, равна $|\omega_2|\cdot|AC|$. Вокруг четырехугольника $CPTQ$ можно описать окружность. При этом $|\vec{v}|$ равен диаметру этой окружности.

Аналогичное построение можно проделать для скорости $\vec{v_0}$ движения центра O, только в этом случае $[BC)$, $[AC)$ заменяются на $[BO)$, $[AO)$, а ω_1, ω_2 заменяются на $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$.

Хотя бы одна из скоростей ω_1, ω_2 — не нуль. Кроме того, одновременное изменение знаков у ω_1, ω_2 меняет на противоположное направление $\vec{v}$ и $\vec{v_0}$, не меняя величин $|\vec{v}|$, $|\vec{v_0}|$. Поэтому при доказательстве неравенства $|\vec{v}|>|\vec{v_0}|$ можно, не теряя общности, считать, что $\omega_1>0$, и рассмотреть отдельно три случая: $\omega_2>0$, $\omega_2=0$, $\omega_2<0$.

Случай 1. Пусть $\omega_2>0$. Повернем на 90° четырехугольник $CPTQ$ вокруг точки C в положение $CP'T'Q'$ (рис. 5), а четырехугольник $OP_0T_0Q_0$ — вокруг O в положение $OP_0'T_0'Q_0'$, и проведем $(P_0'P'')\parallel(Q_0'Q'')\parallel(OC)$. Точки P'' и Q'' разделят пополам отрезки CP', CQ', потому что $|CP'|/|CB|=\omega_1$, а $|OP_0'|/|OB|=\frac{\omega_1}{2}$.

Поскольку $|\vec{v}|$ — диаметр круга, описанного вокруг треугольника $CP'Q'$, а $|\vec{v_0}|$ — диаметр круга, опи-

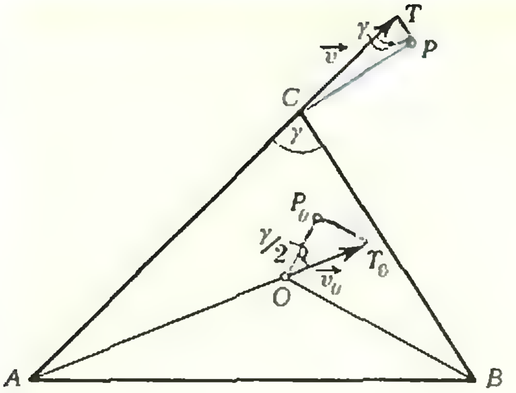


Рис. 6

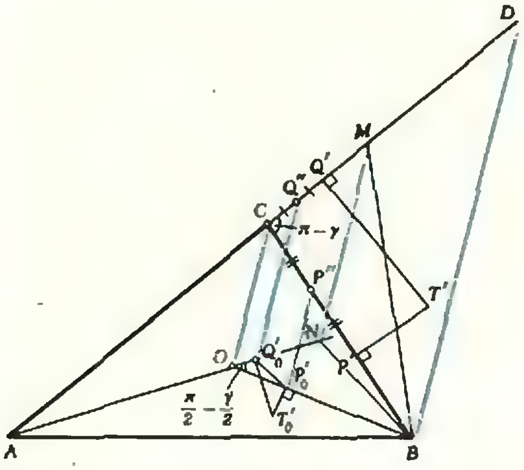


Рис. 7.

Кол.

санного вокруг $OP_0'Q_0'$, имеем

$$|\vec{v}| = \frac{|P'Q'|}{\sin\gamma} = \frac{|P''Q''|}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$|\vec{v}_0| = \frac{|P_0'Q_0'|}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{|P_0'Q_0|}{\cos\frac{\gamma}{2}}. \qquad (5)$$

Отрезок $P_0'Q_0'$ наклонен к биссектрисе CO круче, чем один из лучей AO, BO, и тем более круче, чем AC и BC, которые наклонены к CO под углом $\frac{\gamma}{2}$. Поэтому расстояние между параллельными прямыми $P_0'P''$ и $Q_0'Q''$ превосходит $|P_0'Q_0'|\sin\frac{\gamma}{2}$. Тем более $|P''Q''|>|P_0'Q_0'|\sin\frac{\gamma}{2}$, что вместе с (5) дает $|\vec{v}|>|\vec{v}_0|$.

Случай 2. Пусть $\omega_2=0$ (рис. 6); тогда $|CP|=\omega_1|BC|$, $|OP_0|=\frac{\omega_1}{2}$, откуда $|\vec{v}|=\frac{\omega_1}{\sin\gamma}|BC|$, $|\vec{v}_0|=\frac{\omega_1}{2\sin\frac{\gamma}{2}}|BO|$. Но $|BC|>|BO|$ (так как $\angle BOC$ — тупой), а $\sin\gamma<2\sin\frac{\gamma}{2}$, откуда $|\vec{v}|>|\vec{v}_0|$.

Случай 3. Пусть $\omega_2<0$. Как и в случае 1, повернем на 90° четырехугольники $CPTQ$, $OP_0T_0Q_0$ в положение $CP'T'Q'$, $OP_0'T_0'Q_0'$ (рис. 7) и проведем $(P_0'P'')\parallel(Q_0'Q'')\parallel(BD)\parallel(OC)$. Точки P'', Q'' снова лежат в серединах отрезков CP', CQ'.

На этот раз снова

$$|\vec{v}| = \frac{|P'Q'|}{\sin(\pi-\gamma)} = \frac{|P''Q''|}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$|\vec{v}_0| = \frac{|P_0'Q_0'|}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{|P_0'Q_0'|}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

и, чтобы убедиться, что $|\vec{v}|>|\vec{v}_0|$, нам достаточно проверить, что в этом случае

$$|P''Q''|>|P_0'Q_0'|. \qquad (6)$$

Подвергнем отрезок $P''Q''$ гомотетии с центром C так, чтобы он перешел в некоторый отрезок BM. Аналогично подвергнем отрезок $P_0'Q_0'$ гомотетии с центром O так, чтобы он перешел в некоторый отрезок BN. Существенно, что коэффициенты гомотетии при этом одинаковы. Поэтому для доказательства (6) достаточно убедиться, что $|BM|>|BN|$. Но последнее видно из того, что треугольник BNM имеет тупой угол при вершине N. Действительно, если N лежит слева от прямой BD, то $M\widehat{N}B>C\widehat{O}B>\frac{\pi}{2}$, а если N лежит справа от BD, то $M\widehat{N}B>M\widehat{N}O=C\widehat{O}A>\frac{\pi}{2}$. Лемма доказана.

Замечание. Из леммы нетрудно вывести, что неравенство $|O_1O_2|<|C_1C_2|$ сохранится, во-первых, если C_1, C_2 будут лежать по разные стороны от прямой AB, во-вторых, если треугольники ABC_1, ABC_2 с общим основанием AB расположены в пространстве в разных плоскостях.

Вопрос. Зафиксируем основание треугольной пирамиды и будем двигать ее вершину. Будет ли центр вписанного шара двигаться с меньшей скоростью, чем вершина?

задачник Кванта

Задачи

M651 — M655; Ф663 — Ф667

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 января 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М651, М652» или «Ф663». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

М651. Дама сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж, корзину, картину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж, вместе взятые, и столько же, сколько картина, корзина и картонка, вместе взятые. Картина, корзина и картонка весили поровну и каждая из них — больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если к ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.

А. Тоом

М652. Женя разрезал выпуклый картонный многогранник на грани (по ребрам) и послал этот набор граней по почте Вите. Витя склеил из всех этих граней выпуклый многогранник. Может ли случиться так, что многогранники Жени и Вити не конгруэнтны?

Н. Васильев

М653. Имеется линейка с двумя делениями (рис. 1). С помощью линейки можно проводить произвольные прямые и откладывать отрезки определенной длины. Постройте с ее помощью
а) какой-нибудь прямой угол;
б)* прямую, перпендикулярную данной прямой.

В. Гутенмахер

М654. Верно ли такое утверждение: из любых шести натуральных чисел можно выбрать три числа, каждые два из которых не имеют общих делителей, бо́льших 1, или три числа, имеющие общий делитель, больший 1?

Ж. Раббот

М655. На столе у чиновника Министерства околичностей*) лежит n томов Британской энциклопедии, сложенных в несколько стопок. Каждый день, придя на работу, чиновник берет из каждой стопки по одному тому и складывает взятые тома в новую стопку, затем располагает

---

*) Ч. Диккенс. Крошка Доррит.

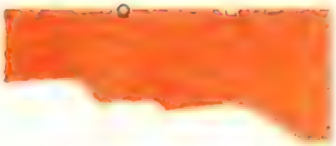


Рис. 1.

стопки по количеству томов (в невозрастающем порядке) и заполняет ведомость, в которой указывает количество томов в каждой стопке (рис. 2). Кроме сказанного выше, чиновник никогда ничего не делает.

а) Какая запись будет сделана в ведомости через месяц, если общее количество томов $n=3$, $n=6$, $n=10$ (начальное расположение произвольно)?

б) Докажите, что если общее число томов $n=k(k+1)/2$, где k — натуральное, то, начиная с некоторого дня, ведомость будет заполняться одинаковыми записями.

в)* Исследуйте, что будет через много дней работы при других значениях n.

С. Лиманов, А. Гоом

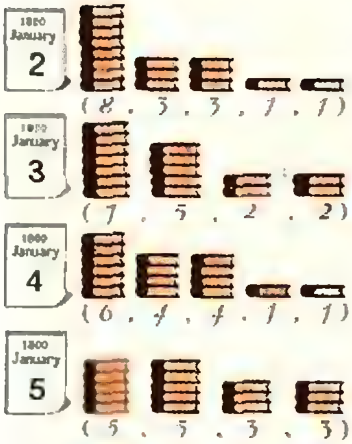


Рис. 2.

Ф663. Тяжелая тележка движется со скоростью v по горизонтальной плоскости и въезжает на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Переход между плоскостями плавный. На тележке на нити длиной l висит шарик. Какова будет амплитуда колебаний шарика, когда тележка въедет на наклонную плоскость?

Ф664. При фотографировании удаленного точечного источника на фотографии из-за невысокого качества объектива и применяемого фотоматериала получается светлый кружок диаметром $d=0{,}1$ м. С какого максимального расстояния можно сфотографировать в тех же условиях два точечных источника, расположенные на расстоянии $l=1$ см друг от друга, так, чтобы на фотографии их изображения не перекрывались? Фокусное расстояние объектива $F=5$ см.

Ф665. В теплоизолированном сосуде имеются две жидкости с удельными теплоемкостями c_1 и c_2, разделенные нетеплопроводящей перегородкой. Температуры жидкостей различны. Перегородку убирают, и после установления теплового равновесия разность между начальной температурой одной из жидкостей и установившейся в сосуде температурой оказывается в два раза меньше разности начальных температур жидкостей. Найти отношение масс m_1 и m_2 первой и второй жидкостей.

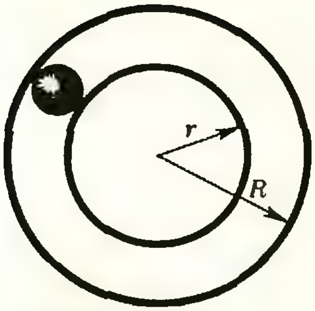


Рис. 3.

Ф666. Радиус внутренней обоймы шарикоподшипника равен r, а внешней — R (см. рисунок). Сколько оборотов сделает шарик между этими обоймами, если внешняя обойма сделает n_1, а внутренняя — n_2 оборотов вокруг оси?

Ф667. Электрон находится внутри соленоида на расстоянии r от его оси. За малое время Δt индукция поля внутри соленоида увеличилась от B до $2B$. Как при этом изменилась скорость электрона? Насколько мала должна быть величина Δt, чтобы решение было верным?

Решения задач

М605—М608; Ф608—Ф612

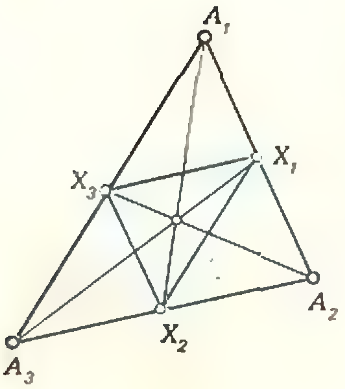
М605. *На плоскости отмечены $2n+1$ различных точек. Занумеруем их числами $1, 2, \ldots, 2n+1$ и рассмотрим следующее преобразование R плоскости: сначала делается симметрия относительно первой точки, затем — относительно второй и т. д. — до $(2n+1)$-й точки.*

а) Покажите, что у этого преобразования R есть единственная «неподвижная точка» (точка, которая отображается в себя).

Рассмотрим всевозможные способы нумерации наших $2n+1$ точек (числами $1, 2, \ldots, 2n+1$). Каждой такой нумерации соответствует свое преобразование плоскости R и своя неподвижная точка. Пусть F — множество неподвижных точек всех этих преобразований.

б) Укажите множество F для $n=1$.

в) Какое максимальное и какое минимальное количество точек может содержать множество F при каждом $n=2, 3, \ldots$?



Фиксируем произвольную систему координат.
Пусть точки $A(x;\ y)$ и $A^*(x^*;\ y^*)$ симметричны относительно точки $A'(x';\ y')$. Тогда $x'=(x+x^*)/2$, $y'=(y+y^*)/2$, откуда

$$x^*=2x'-x,\ y^*=2y'-y.$$

Таким образом, точка с координатами $(x;\ y)$ при симметрии относительно точки с координатами $(x';\ y')$ переходит в точку с координатами $(2x'-x;\ 2y'-y)$.

Поэтому при нашем преобразовании R точка с координатами $(x;\ y)$ перейдет в точку с координатами $(-x+2x_1-2x_2+\ldots+2x_{2n+1};\ y+2y_1-2y_2+\ldots+2y_{2n+1})$, где $(x_i;\ y_i)$ — координаты i-й из заданных $2n+1$ точек.

а) Для неподвижной точки $(x;\ y)$ преобразования R эти координаты определяются однозначно из условия

$$\begin{cases} -x+2x_1-2x_2+\ldots+2x_{2n+1}=x, \\ -y+2y_1-2y_2+\ldots+2y_{2n+1}=y \end{cases}$$

и равны $(x_1-x_2+\ldots-x_{2n}+x_{2n+1};\ \ y_1-y_2+\ldots-y_{2n}+y_{2n+1})$ или

$$\left(\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{i-1}x_i;\ \ \sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{i-1}y_i\right). \qquad (*)$$

Утверждение а) доказано.

б) Пусть сначала данные точки X_1, X_2, X_3 не лежат на одной прямой. Если точка A_1 после симметрии относительно точек X_1, X_2, X_3 отобразилась в себя (см. рисунок), то X_1, X_2, X_3 — середины отрезков A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, где $A_2=S_{X_1}(A_1)$, $A_3=S_{X_2}(A_2)$. Значит, $[A_1X_2]$, $[A_2X_3]$, $[A_3X_1]$ — медианы треугольника $A_1A_2A_3$, так что точки A_1, A_2, A_3 можно получить из точек X_1, X_2, X_3 гомотетией с центром в центре тяжести O треугольника $X_1X_2X_3$ и коэффициентом (-2). Этим положение точек A_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ определяется однозначно. С другой стороны, каждая точка A_i при соответствующей композиции симметрий относительно точек X_i отображается в себя (например, $S_{X_2}(S_{X_1}(S_{X_3}(A_3)))=A_3$). Поэтому множество F — это три точки, получающиеся из данных точек X_1, X_2, X_3 гомотетией с центром O и коэффициентом (-2). Легко видеть, что, если данные точки X_1, X_2, X_3 лежат на прямой, ответ получается, в разумном смысле, тот же.

в) Глядя на выражение $(*)$, нетрудно сообразить, что в множестве F точек не больше, чем число способов выбрать из $2n+1$ данных точек те n точек, перед абсциссами которых в выражении $(*)$ будет стоять знак «минус», то есть не больше, чем C_{2n+1}^{n}. Очевидно, эта оценка точна (возьмите, например, $2n+1$ точек на одной прямой с целыми координатами $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2n}$).

Оценим теперь число неподвижных точек снизу. Спроектируем данные $2n+1$ точек на прямую так, чтобы никакие две точки не попали в одну. На этой прямой введем координаты и перенумеруем точки в порядке возрастания координат: $x_1<x_2<\ldots<x_{2n+1}$. Поставим n минусов перед первыми n числами и рассмотрим сумму $-x_1-x_2-\ldots-x_n+x_{n+1}+\ldots+x_{2n+1}$; она будет соответствовать некоторой неподвижной точке из нашего множества F. Далее произведем следующую операцию: выберем пару чисел x_i и x_{i+1} таких, что перед x_i стоит минус, а перед x_{i+1} — плюс, и поменяем у них знаки (на первом шаге, очевидно, $i=n$). Каждая такая операция приводит к сумме, соответствующей неподвижной точке из множества F, причем, поскольку после каждой такой операции сумма уменьшается, все эти неподвижные точки различны. Всего таких операций (вне зависимости от их порядка) мы можем произвести $n(n+1)$, что уже даст нам

$n(n+1)+1$ неподвижных точек. Значит, в F точек не меньше $n(n+1)+1$. Ровно столько неподвижных точек получится, если, например, снова взять $2n+1$ точек на прямой с целыми координатами $-n$, $-(n-1)$, ..., -1, 0, 1, 2, ..., $n-1$, n. При всевозможных способах расстановки n «минусов» перед некоторыми из них максимальное значение суммы этих чисел равно $2\cdot(1+2+\ldots+n)=n(n+1)$, минимальное значение равно $-n(n+1)$, причем сумма может принимать любое четное значение между числами $-n(n+1)$ и $n(n+1)$ — всего $n(n+1)+1$ значений.

И. Клумова, А. Талалай

◆

M606. *Функция f такова, что для всех действительных x $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$. Докажите, что f — периодическая функция.*

По условию для любого действительного x справедливы равенства

$$f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1)=\sqrt{2}\,(\sqrt{2}f(x)-f(x-1))=$$
$$=2f(x)-\sqrt{2}f(x-1),$$

то есть

$$f(x+2)=f(x)-\sqrt{2}f(x-1).$$

Поэтому

$$f(x+4)=f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1)=$$
$$=f(x)-\sqrt{2}\,(f(x-1)+f(x+1))=-f(x).$$

Следовательно,

$$f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$$

для любого $x\in\mathbf{R}$, так что f — периодическая функция, период которой равен 8.

Заметим, что функции, удовлетворяющие исходному уравнению, существуют: например, $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$.

Э. Туркевич

◆

M607. *а) Разрежьте квадрат на равнобедренные трапеции.*
б) Разрежьте равнобедренный прямоугольный треугольник на равнобедренные трапеции.
в) Докажите, что любой многоугольник можно разрезать на равнобедренные трапеции.

Заметим, что правильный треугольник легко разбить на равнобедренные трапеции (рис. 1); поэтому достаточно довести разбиение до правильного треугольника.

Теперь можно предложить следующие решения нашей задачи:

а) Искомые разбиения могут быть, например, такими, как на рисунках 2, 3.

б) Равнобедренный прямоугольный треугольник может быть разрезан, например, так, как показано на рисунках 4 и 5. Каждое из этих разбиений дает новые способы разбиения квадрата.

Другие способы разрезания этих фигур получаются из пункта в).

в) Очевидно, каждый многоугольник разбивается на выпуклые многоугольники, и каждый выпуклый многоугольник разрезается на треугольники диагоналями, выходящими из любой вершины. Всякий же треугольник может быть разбит на два прямоугольных треугольника высотой, опущенной на одну из сторон; наконец, каждый прямоугольный треугольник можно разрезать на два равнобедренных, соединив середину гипотенузы и вершиной прямого угла.

Поэтому достаточно доказать утверждение для произвольного равнобедренного треугольника.

Будем для краткости называть равнобедренный треугольник с углом α при основании «α-треугольником».

Рассмотрим три случая.

1°. $30^\circ<\alpha<60^\circ$. Нужное разрезание представлено на рисунке 6.

2°. $0<\alpha<30^\circ$. Как видно из рисунка 7, если можно разрезать 2α-треугольник, то можно разрезать и α-треугольник. Отсюда и из 1° последовательно получаем разрезаемость равнобедренных треугольников с углами при основании

$$15^\circ<\alpha<30^\circ,\ 7{,}5^\circ<\alpha<15^\circ,\ 3{,}75^\circ<\alpha<7{,}5^\circ\ldots$$

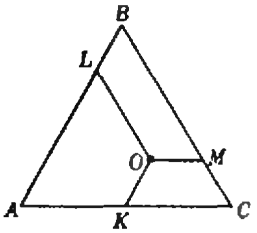


Рис. 1.

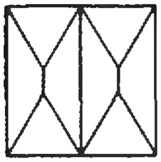


Рис. 2.

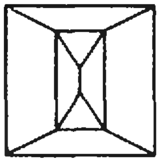


Рис. 3.

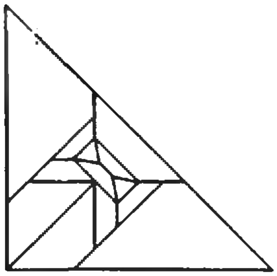


Рис. 4.

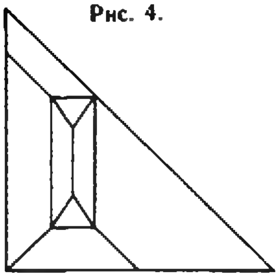


Рис. 5.

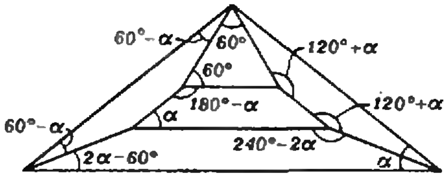


Рис. 6.

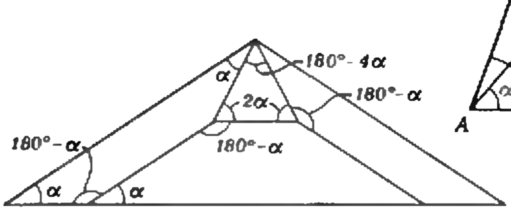


Рис. 7.

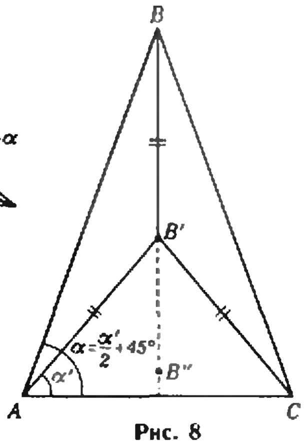


Рис. 8

Поскольку любое α, $0°<\alpha<30°$, попадает, очевидно, в один из указанных промежутков, получаем, что при $\alpha<30°$ всякий α-треугольник также можно разрезать нужным образом.

3°. $60°<\alpha<90°$. Доказательство аналогично случаю 2° (рис. 8). Очевидно, $\widehat{BAB'}=45°-\frac{\alpha'}{2}<45°$ (B' — центр окружности, описанной около треугольника ABC), и поэтому треугольники BAB' и BCB' «разрезаемы».

Продолжая указанный процесс для треугольников $AB'C$ (точка B''), $AB''C$, ..., мы, очевидно, рано или поздно получим равнобедренный треугольник с углом при основании, меньшим 60°.

В. Лев

◆

М608. *На клетчатой бумаге (сторона клетки 1) нарисован n-угольник, все стороны которого лежат на линиях сетки и имеют нечетную длину.*

а) Докажите, что n делится на 4.

б) Докажите, что при n = 100 площадь этого n-угольника обязательно нечетна. Выясните, какова четность площади при других n.

а) Очевидно, у данного многоугольника горизонтальных сторон столько же, сколько вертикальных, потому что горизонтальные и вертикальные стороны чередуются. Значит, $n=2k$, где k — число вертикальных (или горизонтальных) сторон. Так же очевидно, что сумма длин вертикальных сторон четна, поскольку в результате мы «спускаемся вниз» на столько же, на сколько «поднимаемся вверх». Но длина каждого отрезка нечетна; значит, вертикальных сторон — четное число, то есть $k=2m$. Поэтому $n=4m$ делится на 4.

б) Введем систему координат так, чтобы оси Ox и Oy содержали самую нижнюю и самую левую сторону нашего $4m$-угольника. Тогда координаты вершин нашего многоугольника будут равны

$$(a_1;\,b_1),\ (a_2;\,b_1),\ (a_2;\,b_2),\ (a_3;\,b_2),\ (a_3;\,b_3),\ \ldots,(a_{2m-1};\,b_{2m-1}),\\ (a_{2m};\,b_{2m-1}),\ (a_{2m};\,b_{2m}),\ (a_1;\,b_{2m}),$$

где a_i, b_i — целые неотрицательные числа, причем все разности $a_{i+1}-a_i$, $b_{i+1}-b_i$ ($i=1, 2, \ldots, 2m$) нечетны; здесь и ниже $a_{2m+1}=a_1$, $b_{2m+1}=b_1$. Нетрудно выразить через эти координаты и площадь S многоугольника, представив ее как сумму и разность площадей прямоугольников $|a_{i-1}-a_i|\times b_i$:

$$S=\left|\sum_{i=1}^{2m}(a_{i+1}-a_i)b_i\right|.$$

Поскольку все разности $a_{i+1}-a_i$ нечетны, сумма S имеет ту же четность, что и сумма $b_1+b_2+\ldots+b_{2m}$. Четности чисел $b_1, b_2, \ldots, b_{2m}$ чередуются (поскольку все разности $b_{i+1}-b_i$ нечетны), так что все m сумм b_1+b_2, b_3+b_4, ..., $b_{2m-1}+b_{2m}$

нечетны. Итак, площадь S $4m$-угольника нечетна при m нечетном (в частности, 100-угольника при $m=25$) и четна при m четном.

Н. Васильев, И. Клумова

◆

Ф608. *Космический корабль массой $M=12$ т движется вокруг Луны по круговой орбите на высоте $h=100$ км. Для перехода на орбиту прилунения на короткое время включается реактивный двигатель. Скорость вылетающих из сопла ракеты газов $u=10^4$ м/с. Радиус Луны $R_{\text{л}}=1{,}7\cdot10^3$ км, ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_{\text{л}}=1{,}7$ м/с².*

1) Какое количество топлива необходимо израсходовать для того, чтобы при включении тормозного двигателя в точке A траектории корабля он опустился на Луну в точке B (рис. 1)?

2) Во втором варианте прилунения кораблю в точке A сообщается импульс в направлении на центр Луны, чтобы перевести корабль на орбиту, касающуюся Луны в точке C (рис. 2). Какое количество топлива необходимо израсходовать в этом случае?

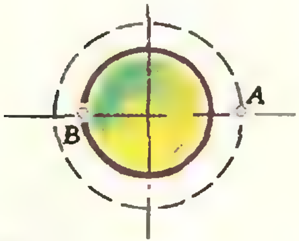


Рис. 1.

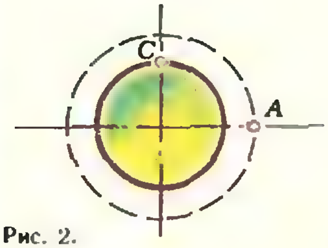


Рис. 2.

1) При движении корабля вокруг Луны по круговой орбите центростремительное ускорение кораблю сообщается силой тяготения. Поэтому

$$\frac{Mv^2}{R}=\gamma\frac{MM_{\text{л}}}{R^2},$$

где v — скорость корабля на круговой орбите, $M_{\text{л}}$ — масса Луны и $R=R_{\text{л}}+h$ — радиус орбиты корабля. Из этого уравнения находим

$$v=\sqrt{\gamma\frac{M_{\text{л}}}{R}}=\sqrt{g_{\text{л}}\frac{R_{\text{л}}^2}{R}}\approx1{,}65\cdot10^3\ \text{м/с}.$$

После изменения скорости корабля в точке A корабль перейдет на эллиптическую орбиту. Обозначим v_A и v_B скорости корабля соответственно в точках A и B этой орбиты. Согласно закону сохранения энергии

$$-\gamma\frac{M_{\text{л}}M_1}{R}+\frac{M_1v_A^2}{2}=-\gamma\frac{M_{\text{л}}M_1}{R_{\text{л}}}+\frac{M_1v_B^2}{2}\qquad(1)$$

($-\gamma\frac{MM_{\text{л}}}{R}$ — потенциальная энергия тела массы M на круговой орбите в поле тяготения Луны, M_1 — масса спускаемого аппарата); согласно закону сохранения момента импульса (или, что то же, согласно второму закону Кеплера)

$$v_AR=v_BR_{\text{л}}.\qquad(2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$v_A=\sqrt{2\gamma\frac{M_{\text{л}}R_{\text{л}}}{R(R_{\text{л}}+R)}}=v\sqrt{\frac{2R_{\text{л}}}{R+R_{\text{л}}}}.$$

Следовательно, для перехода с круговой орбиты на эллиптическую в точке A скорость корабля необходимо изменить на

$$\Delta v=v-v_A=v\left(1-\sqrt{\frac{2R_{\text{л}}}{R+R_{\text{л}}}}\right)=v\left(1-\sqrt{\frac{2R_{\text{л}}}{h+2R_{\text{л}}}}\right)=$$

$$=v\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{2R_{\text{л}}}}}\right)\approx v\left[1-\left(1-\frac{h}{4R_{\text{л}}}\right)\right]=$$

$$=v\frac{h}{4R_{\text{л}}}\approx24\ \text{м/с}.$$

Так как двигатель включается на короткое время, можно считать, что импульс системы «спускаемый аппарат — топливо» сохраняется. Поэтому можно воспользоваться законом сохранения импульса, что дает

$$(M-m)\Delta v=mu,$$

где m — масса сгоревшего топлива. Отсюда

$$m=\frac{\Delta v}{\Delta v+u}M\approx\frac{\Delta v}{u}M\approx29\ \text{кг}.$$

2) Во втором случае скорость v корабля в точке A меняется на величину Δv, и скорость v_A на новой орбите такая, что $v_A^2=v^2+(\Delta v)^2$ (так как $\Delta\vec{v}\perp\vec{v}$).

Из закона сохранения энергии (выражение, аналогичное (1), с заменой v_B на v_C) и закона сохранения момента импульса ($v_AR=v_CR_{\text{л}}$) находим

$$\Delta v=\sqrt{g_{\text{л}}\frac{(R-R_{\text{л}})^2}{R}}=\sqrt{g_{\text{л}}\frac{h^2}{R_{\text{л}}+h}}\approx97\ \text{м/с}.$$

Масса топлива, расходуемого в этом случае, равна

$$m\approx\frac{\Delta v}{u}M\approx 116\ \text{кг}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф609. *Деталь, изготовленная из алюминия, взвешивается на аналитических весах с помощью латунных гирь. При одном взвешивании воздух внутри весов сухой, при другом — влажный, давление водяных паров в котором равно $p_{\text{в. п}}=15{,}2$ мм рт. ст. Внешнее давление ($p=760$ мм рт. ст.) и температура ($t=20°\text{C}$) воздуха в обоих случаях одинаковы.*

При какой массе детали можно заметить разницу в показаниях весов, если их чувствительность $m_0=0{,}1$ мг? Плотность алюминия $\varrho_1=2{,}7$ г/см³, латуни $\varrho_2=8{,}5$ г/см³.

Запишем условие равновесия при взвешивании в сухом воздухе:

$$m_1g-F_{A1}=m_2g-F_{A2}.$$

Здесь $m_1=\varrho_1V_1$ — масса детали (V_1 — ее объем); $m_2=\varrho_2V_2g$ — масса гирь (V_2 — их объем); $F_{A1}=\varrho_{\text{с. в}}V_1g$, $F_{A2}=\varrho_{\text{с. в}}V_2g$ — архимедовы силы, действующие соответственно на деталь и на гири со стороны сухого воздуха ($\varrho_{\text{с. в}}$ — плотность сухого воздуха). Таким образом, в состоянии равновесия при взвешивании в сухом воздухе

$$(\varrho_1-\varrho_{\text{с. в}})V_1-(\varrho_2-\varrho_{\text{с. в}})V_2=0. \qquad (1)$$

Чтобы можно было обнаружить отклонение весов от равновесия во влажном воздухе (при той же массе гирь), должно выполняться условие

$$(\varrho_1-\varrho_{\text{в. в}})V_1-(\varrho_2-\varrho_{\text{в. в}})V_2>m_0, \qquad (2)$$

где $\varrho_{\text{в. в}}$ — плотность влажного воздуха.

Из (1) и (2) находим условие, которому должна удовлетворять масса детали:

$$m_1=\varrho_1V_1>m_0\varrho_1\frac{\varrho_2-\varrho_{\text{с. в}}}{(\varrho_{\text{с. в}}-\varrho_{\text{в. в}})(\varrho_2-\varrho_1)}. \qquad (3)$$

Выразим величины $\varrho_{\text{с. в}}$ и $\varrho_{\text{в. в}}$ через параметры, заданные в условии задачи — $T=293$ К, $p\approx10^5$ Па, $p_{\text{в. п}}\approx2\cdot10^3$ Па.

Из уравнения газового состояния $pV=\dfrac{m}{M}RT$ следует, что

$$\varrho_{\text{с. в}}=\frac{p_{\text{с. в}}M_{\text{с. в}}}{RT}=\frac{pM_{\text{с. в}}}{RT},$$

где $M_{\text{с. в}}=29\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса сухого воздуха. Плотность влажного воздуха равна

$$\varrho_{\text{в. в}}=\varrho'_{\text{с. в}}+\varrho_{\text{в. п}},$$

где $\varrho'_{\text{с. в}}$ — плотность сухого воздуха, имеющегося в объеме V влажного воздуха; $\varrho_{\text{в. п}}$ — плотность водяных паров, находящихся в объеме V влажного воздуха. Согласно уравнению газового состояния

$$\varrho_{\text{в. п}}=\frac{p_{\text{в. п}}M_{\text{в. п}}}{RT},\quad \varrho'_{\text{с. в}}=\frac{(p-p_{\text{в. п}})M_{\text{с. в}}}{RT},$$

где $M_{\text{в. п}}=18\cdot10^{-3}$ мг/моль — молярная масса пара, $(p-p_{\text{в. п}})$ — парциальное давление сухого воздуха в объеме V влажного воздуха. Таким образом,

$$\varrho_{\text{в. в}}=\frac{(p-p_{\text{в. п}})M_{\text{с. в}}+p_{\text{в. п}}M_{\text{в. п}}}{RT}.$$

Подставив $\varrho_{\text{с. в}}$ и $\varrho_{\text{в. в}}$ в выражение (3), найдем

$$m_1=\varrho_1V_1>m_0\varrho_1\frac{\varrho_2RT-pM_{\text{с. в}}}{p_{\text{в. п}}(M_{\text{с. в}}-M_{\text{в. п}})(\varrho_2-\varrho_1)}\approx43{,}2\ \text{г}.$$

В. Белонучкин

◆

Ф610. *В советско-французском эксперименте по оптической локации Луны импульсное излучение рубинового лазера на длине волны $\lambda=0{,}69$ мкм направлялось с помощью телескопа с диаметром зеркала $D=2{,}6$ м на лунную поверхность. На Луне был установлен отражатель,*

1) Точность установки оптической оси телескопа определяется дифракционной расходимостью пучка:

$$\delta\varphi\approx\frac{\lambda}{D}=2{,}6\cdot10^{-7}\ \text{рад}=0{,}05''.$$

2) Радиус светового пятна на Луне равен $\dfrac{\lambda}{D}L$. Следовательно, доля энергии лазера, попавшего на отражатель, составляет

$$K_1=\frac{d^2}{4(L\lambda/D)^2}=\left(\frac{dD}{2\lambda L}\right)^2$$

который работал как идеальное зеркало диаметра $d=20$ см, отражающее свет точно в обратном направлении. Отраженный свет улавливался тем же телескопом и фокусировался на фотоприемнике.

1) С какой точностью должна быть установлена оптическая ось телескопа в этом эксперименте?

2) Пренебрегая потерями света в атмосфере Земли и в телескопе, оценить, какая доля световой энергии лазера будет после отражения от Луны зарегистрирована фотоприемником.

3) Можно ли отраженный световой импульс зарегистрировать невооруженным глазом, если пороговую чувствительность глаза принять равной $n=100$ световых квантов, а энергия, излучаемая лазером в течение импульса, равна $W=1$ Дж?

4) Оценить выигрыш, который дает применение отражателя. Считать, что поверхность Луны рассеивает $\alpha=10\%$ падающего света равномерно в телесный угол 2π ср. Расстояние от Земли до Луны $L=380\cdot10^3$ км. Диаметр зрачка глаза принять равным $d_{зр}=5$ мм. Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Радиус светового пятна на Земле, возникшего после отражения света от Луны, равен $\frac{\lambda}{d}L$. Поэтому доля отраженной энергии, попавшей в телескоп, составляет

$$K_2=\left(\frac{Dd}{2\lambda L}\right)^2.$$

Таким образом, доля энергии лазера, попавшей в фотоприемник после отражения света от отражателя на Луне, равна

$$K_0=K_1K_2=\left(\frac{dD}{2\lambda L}\right)^4\approx10^{-12}.$$

3) В зрачок невооруженного глаза попадает доля энергии лазера, равная

$$K_{зр}=K_0\left(\frac{d_{зр}}{D}\right)^2\approx3{,}7\cdot10^{-18}.$$

Это соответствует числу квантов

$$N=K_{зр}\frac{W}{h\nu}\approx12.$$

Так как $N<n$, невооруженным глазом зафиксировать отраженный импульс невозможно.

4) В отсутствие отражателя $\alpha=10\%$ энергии лазерного излучения, попавшего на Луну, рассеивается лунной поверхностью в телесном угле 2π ср. Телесный угол, в котором видно с Луны зеркало телескопа, составляет $\frac{\pi D^2}{4L^2}$ ср. Поэтому в телескоп попадает часть энергии

$$K=\alpha\frac{\pi D^2/4L^2}{2\pi}=\alpha\frac{D^2}{8L^2}\approx0{,}5\cdot10^{-18}.$$

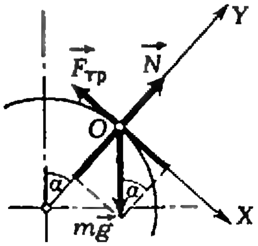
Таким образом, выигрыш, который дает применение отражателя, составляет

$$\beta=\frac{K_0}{K}=2\cdot10^6.$$

С. Козел

◆

Ф611. *Акробат, находясь на боковой поверхности цилиндра, лежащего на очень шероховатом полу, перебирает ногами и движется с постоянной скоростью вправо. Считая коэффициент трения ботинок акробата о поверхность цилиндра равным μ, определить предельный угол α, который может составить с вертикалью радиус цилиндра, проведенный в точку, в которой находится акробат. Чему будет равна при этом сила трения ботинок акробата о цилиндр?*



Силы, действующие на акробата, это сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$ (см. рисунок). По условию задачи акробат движется с постоянной скоростью. Следовательно, согласно II закону Ньютона, векторная сумма сил $m\vec{g}$, $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{N}$ равна нулю. Запишем это условие в проекциях на оси X и Y, направленные так, как на рисунке (система координат XOY движется вправо с той же скоростью, что и акробат; начало координат совпадает с точкой, в которой находится акробат):

в проекциях на ось X —

$$mg\sin\alpha-F_{тр}=0; \qquad (1)$$

в проекциях на ось Y —

$$N-mg\cos\alpha=0. \qquad (2)$$

Учитывая, что $F_{тр}<\mu N$, из (1) и (2) находим предельный угол $\alpha=\alpha_0$:

$$\alpha_0=\operatorname{arctg}\mu.$$

Величина силы трения при $\alpha=\alpha_0$ равна

$$F=mg\sin\alpha_0=mg\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

С. Кротов

Ф612. *Какое количество теплоты Q необходимо сообщить $m=0.1$ кг неона для его нагревания на $\Delta t=5°C$, если при нагревании давление неона прямо пропорционально его объему?*

Согласно первому началу термодинамики

$$Q=\Delta U+A, \qquad (*)$$

где ΔU — изменение внутренней энергии неона; A — работа, совершенная газом при его нагревании.

Неон — одноатомный газ. Поэтому

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(\Delta T) = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R(\Delta T)$$

($\nu=\frac{m}{M}$ — число молей неона, $M=20\cdot10^{-3}$ кг/моль — его молярная масса).

Работа A газа равна произведению среднего давления $p_{ср}$ на изменение объема:

$$A=p_{ср}V=p_{ср}(V_2-V_1),$$

где V_2 — конечный, V_1 — начальный объемы газа. Так как при нагревании газа давление пропорционально объему, среднее давление равно среднему арифметическому начального p_1 и конечного p_2 давлений. Поэтому

$$A=\frac{1}{2}(p_2+p_1)(V_2-V_1).$$

Эту формулу можно преобразовать так:

$$A=\frac{1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)+\frac{1}{2}(p_1V_2-p_2V_1).$$

Давление неона при нагревании прямо пропорционально его объему, то есть $p_1=\alpha V_1$, $p_2=\alpha V_2$, где α — коэффициент пропорциональности. Поэтому $p_1V_2-p_2V_1=\alpha V_1V_2-\alpha V_2V_1=0$.

Таким образом,

$$A=\frac{1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)=\frac{1}{2}\Delta(pV),$$

где $\Delta(pV)$ — изменение произведения pV. Согласно уравнению газового состояния $pV=\frac{m}{M}RT$, поэтому $\Delta(pV)=\frac{m}{M}R(\Delta T)$ и

$$A=\frac{1}{2}\frac{m}{M}R(\Delta T).$$

Подставив значения ΔU и A в выражение (*), найдем

$$Q=2\frac{m}{M}R(\Delta T)\approx41{,}5 \text{ Дж}.$$

И. Слободецкий

А. Аврамов

Арифметические прогрессии в треугольнике Паскаля

Задача, в которой пойдет речь в этой заметке (М602 — «Квант», 1980, № 2), связана с *треугольником Паскаля* — числовым треугольником, n-я строка которого ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$) состоит из $n+1$ чисел

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \ldots,\ C_n^n$$

(C_n^m — число сочетаний из n по m)*).

На рисунке (с. 28) приведены первые восемь строк треугольника Паскаля ($n=0, 1, 2, \ldots, 7$). Восьмая строка ($n=7$) состоит из чисел

1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

Она замечательна тем, что в ней второе, третье и четвертое (а также пятое, шестое и седьмое) числа образуют арифметическую прогрессию.

А есть ли в треугольнике Паскаля другие строки с аналогичным

---

*) О треугольнике Паскаля см. пособие «Алгебра и начала анализа 9», п. 7, 8. Кроме того, в 1979 году в издательстве «Наука» в серии «Популярные лекции по математике» вышло 2-е издание брошюры В. А. Успенского «Треугольник Паскаля».

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

свойством, то есть строки, в которых три числа, стоящие рядом, образовывали бы арифметическую прогрессию?

Допустим, что существуют натуральные n и k такие, что тройка чисел C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1} является арифметической прогрессией. Это означает, что

$$2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$$

$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, то есть

$$\frac{2n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!},$$

откуда получаем уравнение

$$4k^2 - 4nk + n^2 - n - 2 = 0, \qquad (1)$$

которое надо решить в натуральных числах.

Решим его как квадратное уравнение относительно k:

$$k_{1,2} = \frac{n \mp \sqrt{n+2}}{2}.$$

Положим $n+2 = t^2$, где t — некоторое натуральное число. Получим

$$k_1 = \frac{(t+1)(t-2)}{2},$$

$$k_2 = \frac{(t-1)(t+2)}{2},$$

причем при $t \geqslant 3$ и k_1, и k_2 — натуральные числа, $1 < k_1 < n-1$, $1 < k_2 < n-1$.

Итак, если натуральные n и k удовлетворяют уравнению (1), то они находятся по формулам

$$\begin{cases} n = t^2 - 2, \\ k_{1,2} = \dfrac{t^2 \mp t - 2}{2}, \end{cases} \qquad (2)$$

где t — натуральное число и $t \geqslant 3$.

Кроме того, для всех натуральных $t \geqslant 3$ каждая пара чисел n и k, получающихся по формулам (2), удовлетворяет уравнению (1) — убедитесь в этом.

Этим доказано, что в треугольнике Паскаля бесконечно много строк, содержащих трехчленные арифметические прогрессии из подряд идущих чисел. При этом каждая такая строка содержит две прогрессии. Это и неудивительно: ведь треугольник Паскаля симметричен. Поэтому обе эти прогрессии состоят из одних и тех же чисел: первая (получающаяся при $k = k_1$) возрастает, а вторая (при $k = k_2$) убывает.

При $t = 3$ получаем $n = 7$ — с этой строки мы начали свои наблюдения. При $t = 4$ получаем $n = 14$, $k_1 = 5$, $k_2 = 9$. Это соответствует пятнадцатой строке треугольника Паскаля: 1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1; здесь выделенные числа образуют арифметическую прогрессию.

А что будет, если $t < 3$? $t = 1$, очевидно, не годится, а при $t = 2$ получаем $n = 2$, $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Это соответствует третьей строке треугольника, в которой стоят числа 1, 2, 1. Если слева и справа к ним приписать по нулю и отсчитывать числа от нуля, мы снова получим две арифметические прогрессии: 0, 1, 2 и 2, 1, 0.

Легко видеть, что в треугольнике Паскаля нет ни одной строки, в которой была бы арифметическая прогрессия, состоящая более чем из трех членов (идущих подряд). В самом деле, если бы такая строка нашлась, то в ней было бы не менее двух трехчленных арифметических прогрессий, состоящих из разных членов. Но выше мы показали, что каждая строка с арифметической прогрессией (в которой числа идут подряд) устроена так: в ней ровно две прогрессии, составленные из одних и тех же чисел.

Мы предлагаем вам убедиться самостоятельно в том, что в треугольнике Паскаля нет ни одной строки, в которой была бы трехчленная геометрическая прогрессия.

Квант для младших школьников

Задачи

1. На столе лежат четыре карточки (см. рисунок).

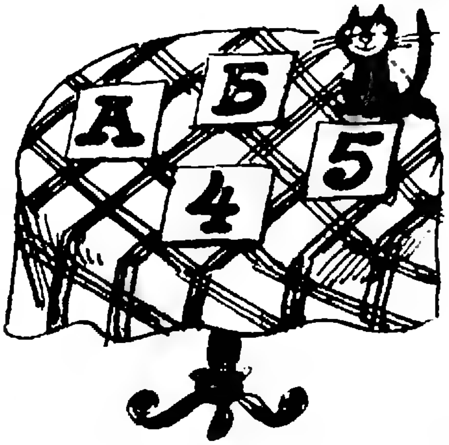
Известно, что на каждой карточке с одной стороны — буква, а с другой — натуральное число. Какие карточки достаточно перевернуть, чтобы выяснить, истинно или ложно предложение *Если на одной стороне карточки — гласная буква, то на другой — четное число?*

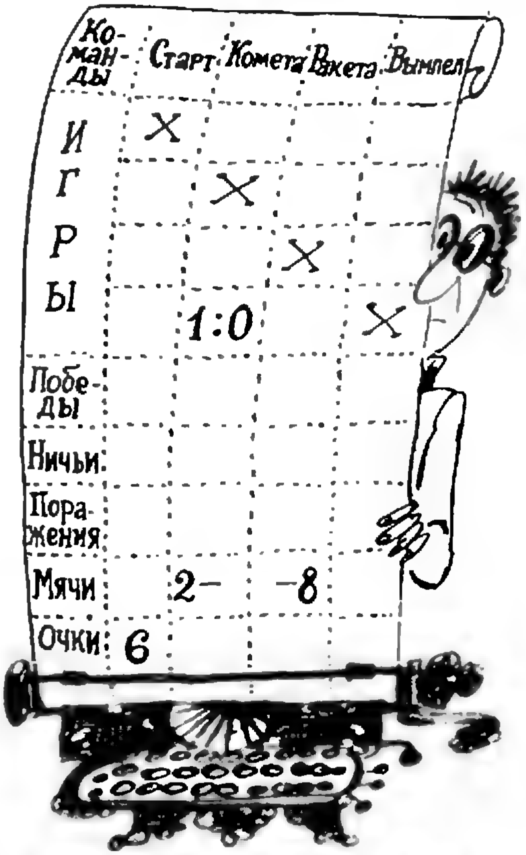
2. Четыре футбольные команды: «Старт», «Комета», «Ракета» и «Вымпел» — провели каждая с каждой по одному матчу. Судья изготовил таблицу, содержащую результаты их встреч. Машинистка отпечатала таблицу с образца и отдала ее судье. Но оказалось, что печатная машинка (она была очень старая) почти ничего не отпечатала (см. рисунок). Однако судья помнил, что остальные матчи окончились со счетом 2:0, 1:1, 2:2, 3:1, 5:3. Помогите судье заполнить таблицу! (В графе «Мячи» слева записывается количество забитых мячей, справа — количество пропущенных мячей. За победу начисляется 2 очка, за ничью — по 1 очку.)

3. Даны 1980 последовательных натуральных чисел. Можно ли возвести каждое число в какую-нибудь четную степень так, чтобы сумма полученных чисел была квадратом натурального числа?

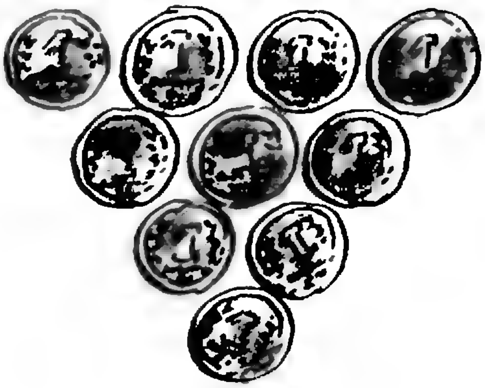
4. Десять одинаковых монет образуют равносторонний треугольник, направленный «вниз» (см. рисунок). Переложите ровно три монеты так, чтобы получился равносторонний треугольник, направленный «вверх».

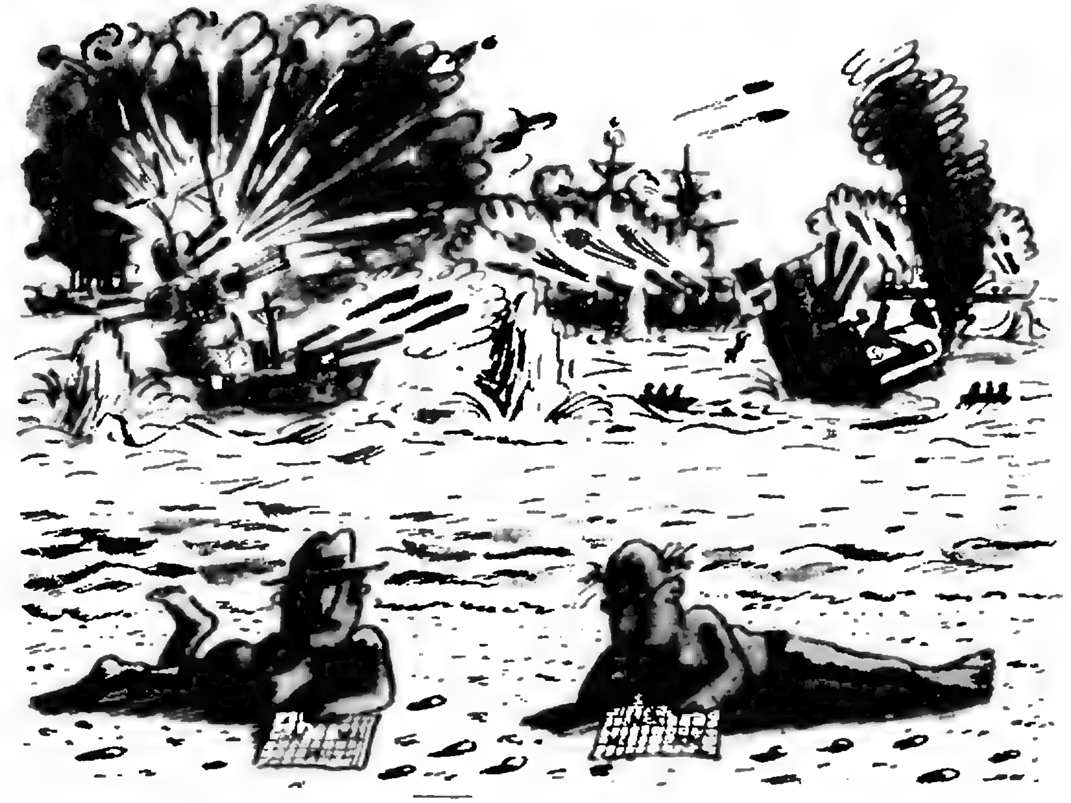
Эти задачи нам предложили Э. Абдуллаев, Н. Никольская, Ц. Реморов, А. Халамайзер





Команды	Старт	Комета	Ракета	Вымпел
И	X			
Г		X		
Р			X	
Ы		1:0		X
Победы				
Ничьи				
Поражения				
Мячи		2–	–8	
Очки	6			





Е. Гик

Морской бой

Трудно представить себе человека, который ни разу в жизни не играл в морской бой. Каждый из двух игроков рисует на клетчатом листе бумаги две доски размером 10×10. На одной из них он расставляет свои корабли, а на второй стремится угадать расположение кораблей противника. В состав флотилии входят десять кораблей: один *линкор* (корабль размером 4×1), два *крейсера* (3×1), три *эсминца* (2×1) и четыре *катера* (1×1). Корабли могут занимать любые поля доски, но не должны касаться друг друга ни сторонами, ни углами.

После размещения своего флота игроки начинают по очереди «стрелять» по неприятельским кораблям, то есть называть поля доски — а3, в7, к9 и т. д. (горизонтали доски обозначаются числами от 1 до 10, а вертикали — буквами от а до к; см. рисунок 1). После каждого выстрела игрок получает от партнера следующую информацию: «попал», если выстрел пришелся на поле с кораблем, «потопил», если это последнее поле корабля (то есть по остальным полям, занятым им, попадание произошло раньше), и, наконец, «промах», если поле пустое. В первых двух случаях игрок получает право на дополнительный выстрел и т. д., до первого промаха, после чего очередь хода передается партнеру. Победителем становится игрок, которому удается первым потопить все десять кораблей противника.

Обычно выстрел в морском бое обозначается точкой, а при попадании в корабль точка превращается в крестик (при этом потопленный корабль обводится прямоугольником). Конечно, точки ставятся и на те поля, про которые уже точно известно, что они не могут входить в состав ни одного из кораблей (лежат наискосок от «подбитых» полей или окружают потопленный корабль).

Очевидно, традиционная форма доски в морском бое, вид кораблей и состав флотилии особого значения

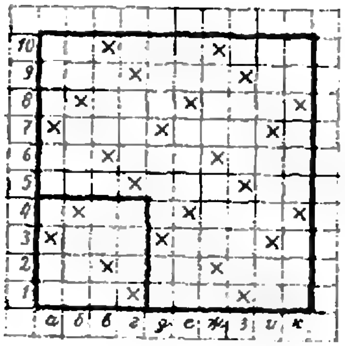


Рис. 1.

не имеют; так, шахматисты, возможно, предпочтут играть на доске 8×8.

Ясно, что успех в морском бое в какой-то мере зависит от везения. Можно совершенно беспорядочно наносить удары по «морю» и при этом без промаха уничтожить все корабли противника. Но вряд ли на это стоит рассчитывать. С другой стороны, если нам известно пристрастие партнера располагать корабли в центре доски или, наоборот, на ее краю, то это повышает наши шансы.

Если говорить об искусстве игры в морской бой, возникают два вопроса: 1) как производить выстрелы, чтобы повысить вероятность попадания в неприятельские корабли, 2) как расставить свои собственные корабли, чтобы противнику было труднее их потопить?

Предположим, что мы хотим попасть в неприятельский линкор. Если мы будем стрелять последовательно сначала по полям первой горизонтали (слева направо), затем по полям второй горизонтали и т. д., то не исключено, что мы попадем в линкор только на 97-м ходу (если он занимает поля с ж10 по к10). Однако, если мы будем наносить удары только по полям, обозначенным крестиками на рисунке 1, мы наверняка попадем в линкор не позднее 24-го хода.

Интересно рассмотреть более общий случай. Пусть на доске $n\times n$ расположен корабль $k\times1$. Совокупность выстрелов, гарантирующих нам попадание в этот корабль, назовем *стратегией*. Стратегию, содержащую минимальное число выстрелов, назовем *наилучшей*.

Одна из наилучших стратегий для обнаружения линкора на доске 4×4 выделена в левом нижнем квадрате на рисунке 1 (она состоит из четырех выстрелов). Наилучшие стратегии для доски $n\times n$ можно получить из нее соответствующими сдвигами вверх и вправо на 4 поля; в частности, на рисунке 1 указана стратегия для доски 10×10. Ясно, что для попадания в корабль $k\times1$, расположенный на доске $n\times n$, выстрелы должны отстоять друг от друга на k полей по вертикали и на столько же по горизонтали. Это означает, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали содержится примерно по $\frac{n}{k}$ выстрелов наилучшей стратегии; значит, общее число выстрелов равно приблизительно $\frac{n^2}{k}$, а для линкора $\approx\frac{n^2}{4}$.

Задача 1*). а) Сколько существует наилучших стратегий для попадания в линкор 4×1 на доске 4×4? б) Тот же вопрос для доски 10×10. (Стратегии, совпадающие при поворотах и отражениях доски, считаются одинаковыми.)

Опытные игроки в морской бой обычно действуют так. Сначала, пользуясь стратегией типа той, что представлена на рисунке 1, обнаруживают линкор противника. Когда с ним покончено, принимаются за поиск крейсеров. Теперь удары наносятся не через четыре поля по вертикали и горизонтали, а через три. Потопив оба крейсера, переходят к эсминцам. Когда на доске остаются одни катера, удары по всем ее свободным полям наносятся в произвольном порядке. Конечно, более «легкие» корабли могут быть обнаружены и при охоте за более «тяжелыми».

Итак, труднее всего обстоит дело с потоплением катеров; по существу, для их обнаружения не существует никакой стратегии. Поэтому при размещении своей флотилии игрокам надо расположить все крупные ко-

---

*) Задачи 1, 2 принадлежат В. Чванову.

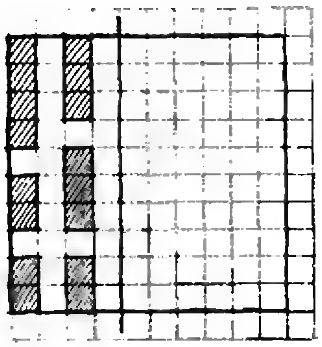


Рис. 2.

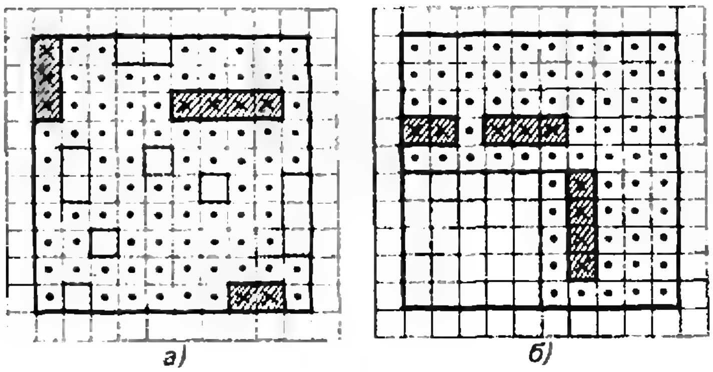


Рис. 3.

рабли поплотнее, оставив противнику для поиска катеров как можно больше свободного пространства. Наиболее выгодное в этом смысле расположение кораблей представлено на рисунке 2. Если даже противник уже потопил все шесть крупных кораблей (слева от черты), для поиска четырех катеров у него имеется наибольшая территория — 60 полей (справа от черты).

Конечно, случайность в морском бое играет немалую роль, и без промахов здесь не обойтись. Тем интереснее ситуации, в которых промахи недопустимы. Рассмотрим «окончание» одной партии в морской бой.

На рисунке 3 изображена «позиция», которая возникла в процессе игры. К данному моменту обе флотилии — и наша (рис. 3, *а*), и противника (рис. 3, *б*) — пострадали одинаково. Расположение всех наших кораблей противнику уже известно (на рисунке 3, *а* они обведены пунктиром), и при своем ходе он без единого промаха разгромит весь наш флот. Но сейчас ход наш, и судьба партии в наших руках. В этом «тяжелом» бою нам нужно уничтожить один за другим все семь кораблей противника, сосредоточенных в квадрате а1-д1-д5-а5. Комбинация, позволяющая нам одержать победу в этом напряженном бою, вытекает из решения следующей задачи.

Задача 2. Докажите, что при любом расположении на доске 5×5 крейсера, двух эсминцев и четырех катеров их можно потопить без единого промаха.

Существует множество модификаций игры в морской бой. Например, ход может состоять не из одного выстрела, а сразу из нескольких; ведется, так сказать, массированный огонь по неприятельскому флоту. Соперник сообщает общие результаты стрельбы, не указывая при этом, в какой корабль и на каком поле произошло попадание. Остальные правила не меняются. После каждого хода и ответа на него игроки извлекают определенную информацию о дислокации неприятельских кораблей и на следующих ходах пытаются использовать ее.

В другом варианте игры каждому партнеру разрешается одновременно производить выстрелы по стольким полям доски, сколько у него еще осталось непотопленных кораблей (первый ход состоит из десяти выстрелов). Обстреливаемый игрок вновь сообщает стреляющему только общее число попаданий, потоплений и промахов. Когда все корабли пойдут на дно, игрок лишается права хода (0 выстрелов), но оно ему больше и не нужно — бой закончился его поражением.

Ю. Иванов

Сколько вариантов?

Ах, эти задачи, начинающиеся со слов «Сколькими способами можно...»! Учителя знают, какую путаницу в качестве решений таких задач предлагают иногда школьники. В настоящее время эта тематика (комбинаторика) осталась лишь в факультативе. Предлагаемый материал как раз разрабатывался на факультативе по математике для IX класса, но, по нашему убеждению, будет интересен и полезен не только его участникам. В публикуемой ниже первой части статьи разбираются задачи, решаемые по «правилу произведения»; во второй части (которую мы опубликуем в следующем номере) приемы решения будут разнообразнее.

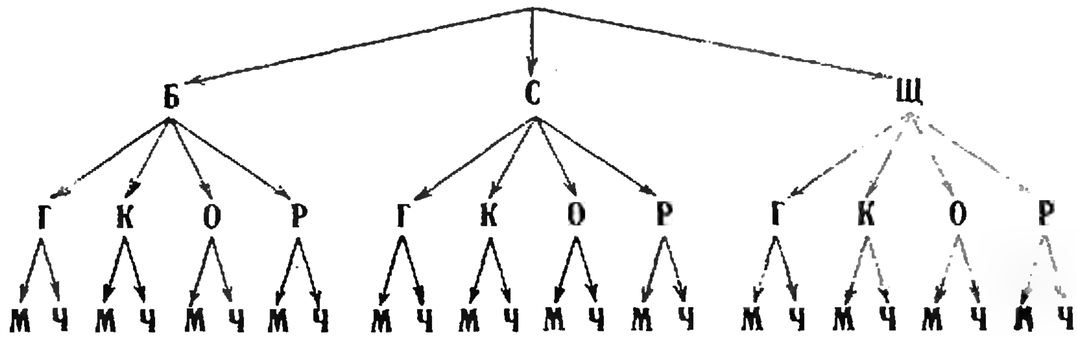
Схема перебора

Представим себе, что мы зашли в столовую и решили выбрать обед из трех блюд. Мы смотрим в меню и видим в перечне первых блюд борщ, суп и щи, в перечне вторых блюд — гуляш, котлеты, оладьи и рыбу и, наконец, на третье нам предлагают морс или чай. Все представленные нам возможности удобно изобразить следующей схемой (см. рисунок).

На этой схеме представлены все варианты выбора обеда. Три строчки схемы соответствуют тому, что выбор обеда осуществляется в три шага. На первом шаге мы выбираем первое блюдо (три имеющихся у нас возможности обозначены буквами Б, С, Щ). Независимо от принятого нами на первом шаге решения у нас есть четыре возможности выбора второго блюда. На схеме эта независимость выражается в том, что из букв первой строчки выходит поровну стрелок во вторую строчку (а именно по четыре стрелки). Независимо от того, какие блюда мы выбрали на первых двух шагах, у нас есть две возможности выбора третьего блюда, и на схеме из каждой буквы второй строчки выходят две стрелки в третью строчку. Каждому варианту обеда соответствует на схеме путь, идущий по стрелкам из верхней строчки в нижнюю. Так, например, путь С→К→М соответствует обеду «суп — котлеты — морс», а путь Щ→К→Ч соответствует обеду «щи — котлеты — чай».

С помощью схемы легко подсчитать число всех возможных вариантов выбора обеда — оно равно числу путей из верхней строчки в нижнюю или, что то же самое, числу букв в нижней строчке. Так как в первой строчке 3 буквы, во второй вчетверо больше — $3 \cdot 4$, а в третьей вдвое больше, чем во второй, — $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$, всего возможно 24 варианта обеда.

Именно подсчет числа возможных вариантов будет нашей целью в последующих задачах. Такой подсчет удобно осуществлять с помощью



схем, подобных изображенной на рисунке 1. При этом схему не обязательно рисовать — достаточно лишь представить ее себе, тем более что при большом числе вариантов нарисовать схему невозможно.

Разберем теперь несколько задач.

Задача 1. *Сколько имеется четырехзначных чисел, в десятичной записи которых все цифры различны?*

Решение. Построение каждого четырехзначного числа, удовлетворяющего условию задачи, можно разбить на четыре шага. На первом шаге выбирается первая цифра числа. Такой выбор можно осуществить девятью способами (цифра 0 не может быть первой цифрой числа), так что в первой строчке воображаемой схемы 9 цифр. На втором шаге выбирается вторая цифра числа. Хотя выбор второй цифры зависит от выбора первой цифры (вторая цифра должна быть отлична от первой), но число возможностей выбора второй цифры, независимо от цифры, выбранной на первом шаге, равно 9. Поэтому из каждой цифры первой строки воображаемой схемы выйдет 9 стрелок во вторую строку, в которой, следовательно, будет $9 \cdot 9$ цифр. На третьем шаге выбирается третья цифра; так как она должна быть отлична от цифр, выбранных на первых двух шагах, независимо от решения, принятого нами на первых двух шагах, на третьем шаге нам предоставляется выбор из восьми возможностей. Следовательно, в третьей строке схемы будет $9 \cdot 9 \cdot 8$ цифр. На четвертом шаге мы можем выбрать любую из семи цифр, не использованных на первых трех шагах, и потому число цифр в нижней строке равно $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. Так как число цифр в нижней строке равно, очевидно, числу путей из верхней строки в нижнюю, 4536 и есть требуемое число.

Упражнение 1. Сколько имеется четырехзначных чисел, в десятичной записи которых соседние цифры различны?

Задача 2. *Сколько различных натуральных делителей имеет число $2^3 \cdot 3^{10} \cdot 7^{15} \cdot 11^9$?*

Решение. Ясно, что каждый делитель такого числа имеет вид $2^k \cdot 3^l \cdot 7^m \cdot 11^n$, где $0 \leqslant k \leqslant 7$, $0 \leqslant l \leqslant 10$, $0 \leqslant m \leqslant 15$, $0 \leqslant n \leqslant 9$. Выбор каждого делителя может быть, поэтому разбит на четыре шага: выбор k, выбор l, выбор m, выбор n. Так как первый шаг мы можем осуществить восемью способами, на втором шаге, независимо от первого шага, у нас 11 возможностей, на третьем шаге, независимо от первых двух шагов, есть 16 возможностей и, наконец, независимо от первых трех шагов, мы можем десятью способами осуществить четвертый шаг, рассуждая так же, как и в предыдущих задачах, мы придем к ответу $8 \cdot 11 \cdot 16 \cdot 10 = 14\,080$.

Аналогичные рассуждения приводят к общей формуле для числа делителей $\tau(n)$ натурального числа n, если известно разложение числа n на простые множители. Именно, *если* $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$, *где* $p_1, p_2, \ldots, p_s$ *— различные простые числа,* $k_1, k_2, \ldots, k_s$ *— натуральные числа, то*

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_s + 1).$$

Упражнение 2. Сколько различных натуральных делителей имеет число $20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 20$?

Правило произведения

Во всех разобранных задачах подсчет числа интересующих нас предметов (вариантов обеда, четырехзначных чисел с неповторяющимися цифрами, делителей данного числа) происходил по одной и той же схеме: мы представляли себе построение произвольного из пересчитываемых предметов в виде последовательности нескольких шагов, на каждом из которых число возможностей выбора легко находилось и не зависело от решений, принятых на предыдущих шагах. Произведение этих чисел и давало ответ задачи. Эти схему решения принято называть «правилом произведения»:

Предположим, что нам нужно подсчитать количество предметов, удовлетворяющих некоторым условиям. Предположим, что построение произвольного такого предмета мы разбили на несколько последовательных шагов, причем на первом шаге у нас есть выбор из a_1 возможно-

стей; независимо от результата первого шага, у нас есть a_2 различных возможностей на втором шаге; независимо от результатов первых двух шагов, есть a_3 способов осуществления третьего шага и т. д.; наконец, независимо от решений, принятых на предыдущих шагах, у нас есть a_n возможностей осуществления последнего шага. Тогда общее количество пересчитываемых предметов равно произведению $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Упражнение 3. В номере автомашины стоят в начале три буквы русского алфавита (содержащего 33 буквы), а затем четыре цифры. Сколько можно составить различных номеров автомашин?

Упражнение 4. На рояле 88 клавиш. Сколькими способами можно последовательно извлечь 6 звуков?

Разберем теперь несколько более трудную задачу.

Задача 3. *Сколько имеется четных четырехзначных чисел, составленных из цифр 1, 3, 4, 6, 7, в записи каждого из которых соседние цифры различны?*

Решение. Если на первом шаге выбирать первую цифру такого числа, на втором шаге — вторую цифру и т. д., то на первом шаге у нас 5 возможностей, на втором и третьем шагах по 4 возможности (на каждом из этих шагов мы можем выбирать любую цифру, кроме той, которая выбрана на предыдущем шаге). Однако при осуществлении четвертого шага число возможностей зависит от результата предыдущего шага: так как последняя цифра должна быть четной и отличной от предпоследней цифры, то мы имеем на последнем шаге две возможности, если на третьем шаге была выбрана одна из цифр 1, 3, 7, и одну возможность, если в качестве третьей цифры мы выбрали 4 или 6.

Выходит, что правило произведения к решению данной задачи неприменимо? Этот вывод был бы преждевременным. Правило произведения неприменимо из-за неудачно выбранной нами последовательности шагов построения четырехзначного числа с требуемыми свойствами. Если же мы на первом шаге будем выбирать четвертую цифру, а затем третью, вторую и первую, то у нас будет 2 возможности на первом шаге и по 4 возможности на каждом из последующих шагов. По правилу произведения искомое число четырехзначных чисел равно $2 \cdot 4^3 = 128$.

Искусство решения комбинаторных задач (так называют рассматриваемые нами задачи пересчета) в значительной степени состоит в умении выбрать последовательность шагов, приводящих к построению пересчитываемых предметов. Как правило, эту последовательность выбирают так, чтобы на первых шагах удовлетворить максимальному числу ограничений, накладываемых условием задачи.

Упражнение 5. Сколько имеется пятизначных чисел n, удовлетворяющих условию:

а) n оканчивается двумя семерками;

б) n начинается с двух одинаковых цифр;

в) все цифры числа n различны, причем вторая и четвертая цифры нечетны;

г)* n делится на 4, его соседние цифры различны и отличны от 0, 4, 8?

Упражнение 6*. На координатной плоскости рисуются всевозможные ломаные, все вершины которых имеют целые координаты, и звенья параллельны координатным осям и не проходят дважды через одну вершину; L_n — число таких ломаных, выходящих из начала координат и имеющих длину n. Докажите, что $4 \cdot 2^{n-1} \leqslant L_n \leqslant 4 \cdot 3^{n-1}$.

Перестановки

Начнем с такой задачи.

Задача 4. *Сколькими способами можно выписать в колонку фамилии 30 учеников?*

Решение. Здесь последовательность шагов такова: сначала выбираем ученика на первое место, затем ученика на второе место и т. д. На первом шаге у нас 30 возможностей, на втором — 29 возможностей, на третьем — 28 возможностей и т. д., наконец, на последнем, тридцатом шаге у нас останется 1 возможность: записать ученика, чья фамилия не была написана ни на одном из 29 предыдущих шагов. Ответом задачи является, следовательно, число $30! = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Эту задачу мы привели здесь лишь потому, что она является частным случаем следующей важной задачи.

Задача 5 (число перестановок из n элементов). *Сколькими способами можно упорядочить данное множество, состоящее из n элементов?*

Упорядочить множество — значит расположить его элементы в некотором порядке. Каждое такое расположение называют *перестановкой* данного множества. Таким образом, задачу можно сформулировать так: сколько существует перестановок множества из n элементов? Рассуждая так же, как и в задаче со списком учеников (каждый такой список — это перестановка множества учеников), мы получим, что *число перестановок n-элементного множества равно* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Упражнение 7. Сколько существует перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 0 занимает третье место, цифра 4 — пятое место, цифра 7 — седьмое место?

Упражнение 8. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладьей так, чтобы никакие две из них не били друг друга?

Упражнение 9. Сколько существует перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 6 следует непосредственно за цифрой 9?

Разберем теперь две задачи, при решении которых используются как формула для числа перестановок, так и правило произведения.

Задача 6. *Сколько существует перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых четырех мест, а цифра 9 — одно из трех последних мест?*

Решение. Построение произвольной такой перестановки разобьем на три шага: выберем место для цифры 0 (первый шаг), выберем место для цифры 9 (второй шаг), расположим остальные восемь цифр на оставшихся восьми местах (третий шаг). На первом шаге у нас 4 возможности; независимо от того, какую возможность мы изберем, у нас есть 3 возможности на втором шаге и, наконец, как бы мы ни расположили цифры 0 и 9, у нас будет 8! возможностей расположения остальных восьми цифр на восьми местах. Согласно правилу произведения, число $4 \cdot 3 \cdot 8! = 12 \cdot 8!$ является решением задачи.

Как видите, на третьем шаге мы воспользовались решенной ранее задачей о числе перестановок восьми предметов. При решении комбинаторных задач на перебор вариантов есть возможность эффективно использовать накопленный опыт: любая решенная задача может помочь на одном из шагов в более сложной задаче.

Задача 7. *Сколькими способами можно рассадить за 15 парт 15 мальчиков и 15 девочек так, чтобы за каждой партой слева сидел мальчик, а справа — девочка?*

Решение. Построение произвольного варианта рассадки разобьем на два шага: рассадим 15 мальчиков на пятнадцати предназначенных для них местах, а затем рассадим 15 девочек на пятнадцати оставшихся местах. На каждом шаге мы решаем задачу о перестановке пятнадцати человек и потому имеем 15! возможностей. В силу правила произведения ответом задачи является число $(15!)^2$.

Упражнение 10. Сколькими способами можно расставить на полке четыре десятитомных собрания сочинений так, чтобы все тома каждого из собраний сочинений стояли подряд, хотя и не обязательно в порядке следования томов?

Упражнение 11. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых между цифрами 2 и 3 стоят три другие цифры?

Число подмножеств конечного множества

Число, указанное в подзаголовке, часто встречается в задачах. Попытаемся его найти в частных случаях.

Выпишем все подмножества каждого из множеств

$A = \{a_1; a_2\}$, $B = \{a_1; a_2; a_3\}$, $C = \{a_1; a_2; a_3; a_4\}$.

Подмножества множества A:
$\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_1; a_2\}$.

Подмножества множества B:
$\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_1; a_2\}$, $\{a_1; a_3\}$, $\{a_2; a_3\}$, $\{a_1; a_2; a_3\}$.

Подмножества множества C:
$\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_4\}$, $\{a_1; a_2\}$, $\{a_1; a_3\}$, $\{a_1; a_4\}$, $\{a_2; a_3\}$, $\{a_2; a_4\}$, $\{a_3; a_4\}$,

$\{a_1; a_2; a_3\}$, $\{a_1; a_2; a_4\}$, $\{a_1; a_3; a_4\}$, $\{a_2; a_3; a_4\}$, $\{a_1; a_2; a_3; a_4\}$.

Таким образом, в множестве A четыре подмножества, в множестве B восемь подмножеств, в множестве C 16 подмножеств.

Выписывая подмножества, мы располагали их по возрастанию числа элементов. Пытаясь таким путем подсчитать число подмножеств произвольного конечного множества, мы приходим к более трудной задаче подсчета числа подмножеств с заданным числом элементов. Однако есть и другой путь решения задачи.

Пусть $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ — n-элементное множество. Выбор произвольного подмножества B множества A можно разбить на следующие шаги: на первом шаге мы решаем, включать ли элемент a_1 в подмножество B, на втором шаге мы решаем, включать ли в B элемент a_2, и т. д., на последнем, n-м шаге мы решаем, включать ли в подмножество B элемент a_n. Так как на каждом шаге, независимо от решений, принятых на предыдущих шагах, у нас есть две возможности (включать в B очередной элемент или не включать), то по правилу произведения число подмножеств множества A равно произведению n двоек, то есть равно 2^n. Итак, *в n-элементном множестве имеется 2^n различных подмножеств.*

Это утверждение поможет нам в решении следующей задачи.

Задача 8. *Сколькими способами можно рассадить за пятнадцатью партами 15 мальчиков и 15 девочек так, чтобы каждый мальчик сидел за одной партой с девочкой?*

Вспоминая решенную ранее задачу, мы на первом шаге рассадим учеников так, чтобы за каждой партой мальчик сидел слева, а девочка — справа, а на втором шаге выберем множество парт, на которых мальчик и девочка поменяются местами. На первом шаге у нас $(15!)^2$ возможностей, на втором 2^{15} возможностей. По правилу произведения получим ответ: $(15!)^2 \cdot 2^{15}$.

Упражнение 12. Сколькими способами можно 9 различных монет разложить в два кармана?

Наша обложка

Магические восьмиугольники

На четвертой странице обложки изображены 25 «магических восьмиугольников» В узлах каждого из них записаны четыре «синих» и четыре «зеленых» числа, в центре записано «красное» число (все числа — между 1 и 25).

Если красное число сложить с четырьмя синими (или зелеными) числами «своего» восьмиугольника, мы получим магическую сумму 65. Возьмем, для примера, восьмиугольник с числом 13 в центре: $13 + (19+5+7+21) = 13 + (10+22+16+4) = 65$. (Любопытно, что здесь магическую сумму составляют и два соседних числа, сложенные с диаметрально противоположными: $13 + (22+5) + (4+21) = 13 + (5+16) + (21+10) = 13 + (16+7) + (10+19) = 13 + (7+4) + (19+22) = 65$. Тем же свойством обладают и некоторые другие восьмиугольники, например в левом верхнем углу.

Интересно, что продлевая синие и зеленые «кресты» с центром в красном числе 13 и складывая получающиеся на концах числа с числом 13, мы снова получим число 65 в сумме: $13 + (20+6+24+2) = 13 + (13+13+13+13) = 13 + (6+20+2+24) = 13 + (4+22+16+10) = 13 + (1+25+17+9) = \ldots = 65$. (Аналогичным свойством обладают некоторые другие красные центры).

А внутри черной рамки получился самый настоящий «магический квадрат» размером 5×5 (суммы чисел по каждой строке, по каждому столбцу и двум главным диагоналям одинаковы и равны 65):

1	12	20	23	9
8	19	22	5	11
24	10	13	16	2
15	21	4	7	18
17	3	6	14	25

Проверьте, что магический квадрат образуют так же и красные числа

Возьмем теперь, начиная с верхнего ряда, зеленые числа:

15	7	4	21	18
17	14	6	3	25
24	16	13	10	2
1	23	20	12	9
8	5	22	19	11

Снова получился магический квадрат с суммой 65.

Оставшиеся зеленые числа:

23	9	20	1	12
7	18	4	15	21
16	2	13	24	10
5	11	22	8	19
14	25	6	17	3

снова образуют магический квадрат. То же самое верно и для синих чисел.

Итак, мы нашли один красный квадрат, один разноцветный (в рамке), два зеленых и один синий... Еще один синий квадрат найдите сами.

Е. Кривошеев

Л. Асламазов

Силы трения и движение

Движению тела обычно препятствуют силы трения. Если соприкасаются поверхности твердых тел, их относительному движению мешают силы сухого трения. Характерной особенностью сухого трения является существование зоны застоя. Тело нельзя сдвинуть с места, пока абсолютная величина внешней силы не превысит определенного значения. До этого момента между поверхностями соприкасающихся тел действует сила трения покоя, которая уравновешивает внешнюю силу и растет вместе с ней (рис. 1). Максимальное значение силы трения покоя определяется формулой

$$|\vec{F}_{\text{тр max}}| = \mu |\vec{N}|,$$

где μ — коэффициент трения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей; $\vec{N}$ — сила нормального давления.

Когда абсолютная величина внешней силы превышает значение $|\vec{F}_{\text{тр max}}|$, возникает относительное движение — проскальзывание. Сила трения скольжения обычно слабо зависит от скорости относительного движения, и при малых скоростях ее можно считать равной $|\vec{F}_{\text{тр max}}|$.

Движению тела в жидкости и газе препятствуют силы жидкого трения. Главное отличие жидкого трения от сухого — отсутствие зоны застоя. В жидкости или газе не возникают силы трения покоя, и поэтому даже малая внешняя сила способна вызвать движение тела. Сила жидкого трения при малых скоростях пропорциональна скорости, а при больших — квадрату скорости движения.

Задача 1. *При экстренной остановке поезда, двигающегося со скоростью $|\vec{v}| = 70$ км/ч, тормозной путь составил $s = 100$ м. Чему равен коэффициент трения между колесами поезда и рельсами? Каким станет тормозной путь, если откажут тормоза в одном из $n = 10$ вагонов? Массу локомотива принять равной массе вагона; силами сопротивления воздуха пренебречь.*

При торможении ускорение $\vec{a}$ поезду сообщает сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$:

$$M\vec{a} = \vec{F}_{\text{тр}},$$

где M — масса всего состава. Сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ представляет собой равнодействующую всех сил трения, действующих на состав (рис. 2), и равна по модулю $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu |\vec{N}| = \mu M g$. Следовательно,

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}_{\text{тр}}|}{M} = \mu g \quad \text{и} \quad \mu = \frac{|\vec{a}|}{g}.$$

С другой стороны, $|\vec{a}| = |\vec{v}|^2/2s$. Подставляя это значение в выражение

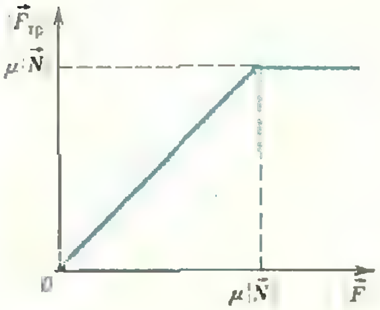


Рис. 1.

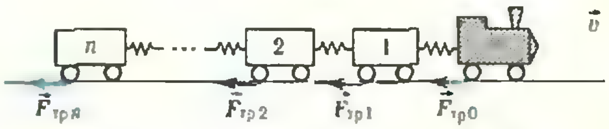


Рис. 2.

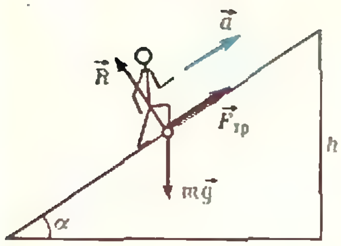


Рис. 3.

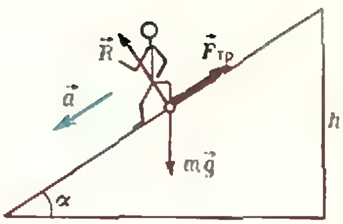


Рис. 4.

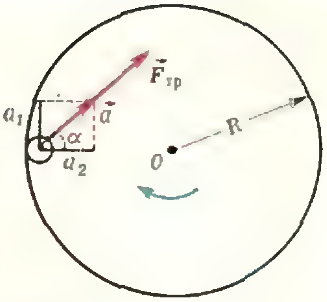


Рис. 5.

для μ, получаем

$$\mu = \frac{|\vec{v}|^2}{2gs} \approx 0{,}2.$$

В том случае, когда не работают тормоза у одного из вагонов, суммарная сила трения, действующая на вагоны и локомотив, равна

$$|\vec{F}'_{тр}| = \mu n m g,$$

где m — масса одного вагона. Масса всего состава равна $M = (n+1)m$, так что $m = M/(n+1)$. Ускорение поезда в этом случае равно

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{F}'_{тр}|}{M} = \frac{n}{n+1}\mu g,$$

а тормозной путь равен

$$s' = \frac{|\vec{v}|^2}{2|\vec{a}'|} = \frac{n+1}{n}\frac{|\vec{v}|2}{2\mu g} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)s = 110 \text{ м}.$$

***

Важно понимать, что сила трения не всегда тормозит движение. Во многих случаях движение становится возможным именно благодаря ей.

Смогли бы вы разбежаться на скользком льду? Очевидно, нет; в лучшем случае вам удалось бы бежать на месте. Сила трения между подошвами и землей, препятствуя проскальзыванию, создает необходимое для разгона ускорение.

Задача 2. *При каком коэффициенте трения человек сможет вбежать на горку высотой $h = 10$ м с углом наклона $\alpha = 0{,}1$ рад за время $t = 10$ с без предварительного разгона? Считать, что мощность человека не ограничивает время движения, а сопротивление воздуха мало.*

Сила трения, действующая на человека, препятствует проскальзыванию и поэтому направлена вверх (рис. 3). На человека также действуют сила притяжения к Земле $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{R}$. Величина последней силы определяется из условия равенства нулю суммы проекций всех сил на направление, перпендикулярное плоскости горки (в этом направлении нет ускорения):

$$mg\cos\alpha - |\vec{R}| = 0.$$

Как видно, сила реакции $|\vec{R}| = mg\cos\alpha$, а значит и равная ей по модулю сила нормального давления $\vec{N}$, меньше силы тяжести.

Напишем теперь второй закон Ньютона, спроектировав все силы на направление вдоль плоскости горки:

$$m|\vec{a}| = \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

С другой стороны, ускорение связано со временем движения и пройденным путем кинематической формулой

$$l = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{|\vec{a}|t^2}{2}.$$

Из последних двух уравнений для коэффициента трения получаем

$$\mu = \frac{(2h/gt^2) + \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \approx 0{,}3.$$

* * *

Если человек не вбегает на горку, а сбегает с нее, то сила трения, препятствуя скольжению, может тормозить его движение. Именно благодаря силе трения человеку удается медленно спускаться с горки.

Задача 3. *Какую минимальную скорость будет иметь человек, сбежавший с горки высотой $h = 10$ м с наклоном $\alpha = 0{,}1$ рад при коэффициенте трения $\mu = 0{,}05$?*

Проектируя силы, действующие на человека, на направление плоскости горки (рис. 4), для модуля ускорения получаем

$$|\vec{a}| = g \sin\alpha - \mu g \cos\alpha.$$

Конечная скорость человека

$$|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{a}|l} = \sqrt{2|\vec{a}|h/\sin\alpha} =$$
$$= \sqrt{2gh(1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha)} \approx 10 \text{ м/с}.$$

При $\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha$ человек может стоять на горке и, следовательно, может спускаться с нее как угодно медленно.

Разумеется, все сказанное относится не только к человеку, но и к автомашине. Сила трения между шинами и шоссе, препятствуя проскальзыванию, разгоняет автомобиль, когда колеса соединены с двигателем. Эта же сила, также препятствуя проскальзыванию, тормозит движение автомобиля, когда к колесам прижаты тормозные колодки.

***

Рассмотрим теперь роль силы трения при движении по окружности.

Задача 4. *У края диска радиусом R лежит монета (рис. 5). Диск раскручивается так, что его угловая скорость линейно растет со временем: $\omega = \varepsilon t$. В какой момент времени монета слетит с диска, если коэффициент трения между диском и монетой μ? Какой угол с направлением к центру диска образует сила трения в этот момент?*

До тех пор пока монета лежит на диске, ее линейная скорость v равна линейной скорости диска:

$$v = \omega R = \varepsilon R t.$$

Как видно, эта скорость не постоянна, а линейно растет со временем. Следовательно, монета движется с ускорением, проекция которого на направление касательной к окружности равна $a_1 = \varepsilon R$. Кроме того, поскольку монета движется по окружности, у нее есть и центростремительное ускорение (то есть проекция ускорения на направление к центру окружности) $a_2 = v^2/R = \varepsilon^2 R t^2$. Таким образом, ускорение монеты равно по модулю (см. рис. 5)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \varepsilon R \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}.$$

Единственной силой, действующей на монету в плоскости диска, является сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. По второму закону Ньютона она и создает ускорение $\vec{a}$:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тр}} \text{ и } m|\vec{a}| = |\vec{F}_{\text{тр}}|.$$

Подставляя в последнюю формулу выражения для $|\vec{a}|$ и для максимального значения силы трения $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu m g$, получаем, что монета может лежать на плоскости до момента

$$t = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\mu^2 g^2}{\varepsilon^2 R^2} - 1 \right)^{1/4}.$$

При $\varepsilon > \mu g/R$ монета слетит сразу же, так как сила трения будет не в состоянии обеспечить столь большое ускорение монеты.

Направление силы трения совпадает с направлением ускорения, поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\varepsilon R}{\varepsilon^2 R t^2} = \left(\frac{\mu^2 g^2}{\varepsilon^2 R^2} - 1 \right)^{1/4}.$$

***

Многие задачи на силы трения удобно решать, применяя закон сохранения энергии.

Задача 5. *Тело, скользящее со скоростью $\vec{v}$ по гладкой поверхности, влетает на шероховатую поверхность с коэффициентом трения μ (рис. 6). При какой минимальной длине тела l оно остановится так, что часть его еще будет находиться на гладкой поверхности?*

Из закона сохранения энергии следует, что начальная кинетическая энергия тела равна работе, совершаемой против сил трения:

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{тр}}.$$

При нахождении работы необходимо учесть, что сила трения меняется по мере перемещения тела с гладкой поверхности на шероховатую. Если на шероховатой поверхности находится часть тела длиной x,

$$|\vec{F}_{\text{тр}}| = \frac{\mu m g}{l} x,$$

то есть сила трения пропорциональна пройденному пути. Поэтому при

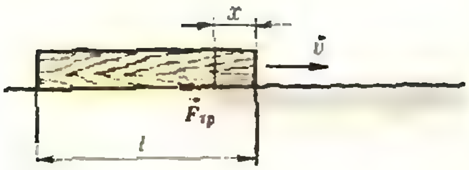
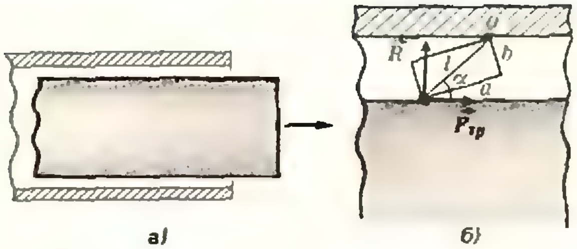


Рис. 6.



а) б)

Рис. 7.

перемещении всего тела работа

$$A_{тр}=\int_0^l |\vec{F}_{тр}|\,dx=\frac{\mu mg}{l}\int_0^l x\,dx=\frac{\mu mgl}{2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение, выражающее закон сохранения энергии, для минимальной длины тела получаем

$$l=|\vec{v}|^2/\mu g.$$

***

В заключение рассмотрим довольно часто встречающееся явление — заклинивание: в некоторых случаях невозможно преодолеть силу трения, даже прикладывая очень большую внешнюю силу.

З а д а ч а 6. *Стержень вытаскивают из трубы, имеющей диаметр, несколько больший диаметра стержня (рис. 7, а). В зазор между стержнем и трубой попадает песчинка, имеющая форму параллелепипеда (отношение $a/b=0,1$). Оцените, при каком значении коэффициента трения между песчинкой и поверхностями стержня и трубы стержень не удастся вытащить из трубы. Считать, что коэффициент трения между трубой и стержнем пренебрежимо мал.*

При движении стержня между ним и песчинкой возникает сила трения $\vec{F}_{тр}$. Эта сила, действуя на песчинку, создает момент, вращающий ее вокруг точки O (рис. 7, б). Если этот момент больше момента силы реакции $\vec{R}$, вращающего песчинку в обратную сторону, вытащить стержень не удастся, так как песчинка будет вдавливаться в стержень. Другими словами, если

$$|\vec{F}_{тр}|\,l\sin\alpha>|\vec{R}|\,l\cos\alpha,$$

стержень заклинит.

Подставляя в это неравенство выражение для максимальной силы трения $|\vec{F}_{тр}|=\mu|\vec{N}|$ и учитывая, что сила реакции равна по модулю силе нормального давления: $|\vec{R}|=|\vec{N}|$, получаем, что при $\mu>\operatorname{ctg}\alpha$ стержень вытащить не удастся. В нашем случае $\operatorname{ctg}\alpha\approx a/b=0,1$, так что при $\mu>0,1$ силу трения не удастся преодолеть даже очень большой внешней силой.

Упражнения

1. На наклонной плоскости лежит тело массой m. Найдите модуль $F_{тр}$ силы трения, действующей на тело, в зависимости от угла наклона α и постройте соответствующий график. Коэффициент трения между телом и плоскостью μ.

2. Человек идет по скользкому льду. Оцените, какого максимального размера L шаги он может делать, чтобы не упасть. Длина ноги человека $l=1$ м, коэффициент трения о лед $\mu=0,05$.

3. На листе бумаги лежит монета массой m. С каким максимальным ускорением можно тянуть лист бумаги, чтобы монета с него не соскользнула, если коэффициент трения монеты о бумагу μ? Как при этом направлена сила трения, действующая на монету?

4. Нажимая на педаль «газ», водитель увеличивает мощность, развиваемую двигателем автомобиля. При какой мощности начнется пробуксовка колес автомобиля, если коэффициент трения между шинами и дорогой $\mu=0,2$, масса автомобиля $m=1000$ кг, скорость $|\vec{v}|=60$ км/ч, КПД двигателя $\eta=40\%$?

5. Водитель автомобиля внезапно увидел перед собой стену, преграждающую дорогу. Что выгоднее ему делать: затормозить или свернуть в сторону?

6. На наклонной плоскости лежит брусок. Как он будет двигаться, если ему сообщить горизонтальный импульс, параллельный ребру наклонной плоскости?

Заочная школа программирования

Урок 11: обработка текстов на ЭВМ

> *Дело состояло только в том, чтобы переменить заглавный титул да переменить кое-где глаголы из первого лица в третье.*
>
> Н. В. Гоголь. «Шинель»

Где применяется обработка текстов?

Текстовая обработка широко распространена сегодня в различных областях применения ЭВМ. Например, большинство задач, возникающих при автоматизированной подготовке к печати книг, журналов, газет и других изданий, связано с обработкой текстов. К обработке текстовой информации можно свести многие задачи из техники, химии, биологии и других дисциплин. В частности, анализ первичной структуры белков в системе «Бельчонок», о которой рассказывалось в «Кванте» № 12 за 1979 год, проводился средствами текстовой обработки.

Любую более или менее длинную последовательность, состоящую из сравнительно небольшого числа различных элементов, можно записать в памяти ЭВМ в виде текста, обозначив каждый элемент отдельной буквой. Поэтому и технологическая цепочка изготовления детали, и первичная структура сложной молекулы, и порядок действий водителя при трогании автомобиля с места — все эти и многие другие последовательности будут с точки зрения ЭВМ текстами. Программу на любом языке машина тоже рассматривает как текст, который необходимо обработать, чтобы перевести на язык машинных команд и исполнить.

Задание 11.1. *Структура поезда дальнего следования записана в виде такого текста:*

'ЛБОПКРМКСКПМРКПКП'—>ПОЕЗД;

Использованы следующие обозначения: Л — *локомотив,* Б — *багажный вагон,* О — *общий,* К — *купированный,* П — *плацкартный,* М — *мягкий,* С — *спальный,* Р — *вагон-ресторан. Перечислите вагоны, через которые нужно пройти, чтобы из вагона* 11 *попасть в вагон* 4. *Нумерация вагонов начинается с головы поезда, багажный вагон и вагоны-рестораны номеров не имеют.*

Задание 11.2. *Для изготовления детали необходимо отштамповать заготовку, обточить и отшлифовать рабочую поверхность, подрезать оба торца, просверлить три отверстия, в одном из них нарезать резьбу и нанести защитное покрытие. Придумайте для технологической инструкции способ кодировки и запишите ее в виде текста.*

Задание 11.3. *Юные биологи придумали такую систему для записи своих наблюдений за поведением животных в естественных условиях: буквой* С *обозначается сон животного,* О — *охота,* К — *кормление,* В — *водопой,* Д — *драка,* И — *игра,* У — *уход за детенышами. Опишите словами поведение животного, представленное таким текстом:*

'ОВОКСВДКИКС'—>ЗВЕРЕК;

Как вы думаете, за каким животным наблюдали ребята: хищное оно или травоядное, молодое или старое?

Простые формы обработки текстов

Одна из простейших форм обработки текстов — подсчет количества определенных букв или сочетаний букв (задачи 4а и 4б Олимпиады по программированию — «Квант», 1980, № 3). При подготовке печатных изданий и документов такая задача встречается сравнительно редко, а вот при решении задач из других областей — очень часто. Например, таким способом можно определить процентное содержание валина в белке, подсчитать количество сверлений при обработке детали или число случаев, когда животное засыпало сразу после еды.

Опишем функцию СЧЕТ1 с двумя параметрами — БУКВА и ТЕКСТ, которая будет подсчитывать, сколько раз заданная буква встречается в тексте:

```
ПРОЦ СЧЕТ1 БУКВА ТЕКСТ = >СЧЕТЧИК:
   0—>СЧЕТЧИК: 1—>НОМЕР:
   ПОКА НОМЕР=<(≠ТЕКСТ)::
      ЕСЛИ ТЕКСТ[НОМЕР] = БУКВА
      ТО СЧЕТЧИК + 1—>СЧЕТЧИК
      ВСЕ:
      НОМЕР+1— >НОМЕР:
   ВСЕ
КНЦ:
```

Проверьте, что значение функции СЧЕТ1('К', ПОЕЗД) будет равно 5.

Задание 11.4. *Описать функцию* СЧЕТ2(ОТРЕЗОК,ТЕКСТ), *подсчитывающую количество заданных отрезков последовательностей букв в тексте. Например, значение функции* СЧЕТ2('КУ','КУКАРЕКУ') *равно 2.*

Часто приходится решать еще и такую задачу: построить сводную таблицу количества повторений каждой буквы, встречающейся в тексте. Такую таблицу удобно представить как множество, состоящее из кортежей вида <БУКВА, ЧИСЛО ПОВТОРЕНИЙ>.

Например, для текста «КУКАРЕКУ» таблица могла бы иметь такой вид: <•<'К',3>, <'У',2>, <'А',1>, <'Р',1>, <'Е',1>•>.

Понятно, что для построения таблицы нужно просмотреть весь текст и для каждой его буквы проверить, найдется ли в составляемой таблице кортеж, первым элементом которого является эта буква. Если такой кортеж есть, то нужно прибавить единицу к его второму элементу, а если нет — нужно добавить к таблице новый кортеж, первый элемент которого — это встретившаяся буква, и второй — единица. Соответствующая процедура может выглядеть так:

```
ПРОЦ ТАБЛИЦА ТЕКСТ=>МНОЖ:
   <**>—>МНОЖ: 1—>НОМЕР:
   ПОКА НОМЕР=<(≠ТЕКСТ)::
      ТЕКСТ[НОМЕР]—>БУКВА:
      0—>КОНТРОЛЬ:
      ДЛЯ КОРТЕЖ ИЗ МНОЖ::
ЕСЛИ КОРТЕЖ[1] = БУКВА ТО
КОРТЕЖ[2] + 1—>КОРТЕЖ[2]:
         1—>КОНТРОЛЬ
         ВСЕ
      ВСЕ;
      ЕСЛИ КОНТРОЛЬ=0 ТО
      МНОЖ+<БУКВА,1>—>МНОЖ
      ВСЕ
   ВСЕ
КНЦ;
```

Обратите внимание на имя КОНТРОЛЬ! Его пришлось ввести для того, чтобы проверить, был ли среди элементов множества МНОЖ нужный кортеж. Отпечатать такую таблицу в удобном виде можно, например, так:

```
ДЛЯ КОРТЕЖ ИЗ МНОЖ::
   ПЕЧАТЬ('БУКВА',КОРТЕЖ[1],
   'ВСТРЕЧАЕТСЯ',КОРТЕЖ[2]'РАЗ')
ВСЕ:
```

Редактирование

Пожалуй, самые интересные текстовые задачи возникают при обработке «настоящих» текстов: печатных изданий, документов, программ на различных языках программирования и т. д. Применение ЭВМ позволяет легко и быстро редактировать такие тексты, вносить в них любые исправления и изменения, печатать в любом формате, а иногда и любым шрифтом (в одной из статей мы расскажем подробнее о подготовке печатных изданий на ЭВМ).

Типичный пример задачи редактирования — задача 4в Олимпиады: «Всюду в тексте с именем ПРИКАЗ заменить слова 'КАПИТАН ИВАНОВ' на 'МАЙОР ИВАНОВ'». Большинство участников Олимпиады неплохо справились с этой задачей, но почти никто не обратил внимания на одну тонкость: отыскивая места, где нужно произвести замену, надо было искать отрезок 'КАПИТАН ИВАНОВ' (с пробелом после фамилии!), а не просто 'КАПИТАН ИВАНОВ', иначе, например, капитан Ивановский, если его фамилия встречается в приказе, тоже окажется майором.

Задача замены слов в тексте с учетом различных грамматических форм (в нашем примере слова «КАПИТАН ИВАНОВ» могли стоять в разных падежах) программируется значительно сложнее. Впрочем, гоголевский Акакий Акакиевич с этой задачей, как известно, тоже не справился. Такого рода редактирование сложных текстов удобно проводить в режиме диалога, когда человек-оператор просматривает текст и отыскивает места, где необходимо выполнить текстовые замены (иногда такой поиск может проходить с «подсказкой» со стороны машины), а сами замены выполняет ЭВМ.

Для работы в таком режиме удобно заранее описать процедуры для выполнения самых распространенных операций (поиск нужного отрезка текста, замена, исключение, вставка, вывод на терминал и т. д.).

а затем использовать эти процедуры в качестве директив в ходе диалога.

Задание 11.5. *Описать процедуру* ЗАМЕНА(ТЕКСТ,СТАР,НОВ), *которая всюду в тексте с именем* ТЕКСТ *заменит определенные сочетания символов заданным отрезком текста. Второй параметр этой процедуры — заменяемый отрезок текста, а третий параметр — заменяющий отрезок.*

Указание. Если длины старого и нового отрезков текста не совпадают, для правильной замены нужно использовать конкатенацию строк. Например, если слово «КРОНДИЛ», расположенное в тексте с именем БАРМАЛЕЙ, начиная со 128-й позиции, необходимо исправить на «КРОКОДИЛ», то это можно выполнить так:

```
БАРМАЛЕЙ[1:130] + 'КО'
+ БАРМАЛЕЙ[132:(≠БАРМАЛЕЙ)]
—>БАРМАЛЕЙ;
```

Если вместо этого попробовать использовать простое присваивание, то исправить ошибку не удастся: после присваивания

```
'КО'—>БАРМАЛЕЙ[131:131];
```

получится «КРОКДИЛ».

Процедура ЗАМЕНА позволяет исправлять ошибки и вносить изменения в текст. Но использовать ее нужно осторожно, чтобы не возникало новых ошибок. Рассмотрим простой пример. Пусть в тексте с именем УЧЕБНИК нужно было напечатать формулу:

SIN (X)+COS (X)=S;

Просматривая этот текст на экране терминала, оператор заметил ошибку. Строка выглядела так:

SIN (S)+COS (X)=S;

Оператор попробовал ее исправить и набрал такую директиву:

```
ЗАМЕНА(УЧЕБНИК,'S','X');
```

Вторично просматривая это же место, он с удивлением обнаружил, что формула приобрела совсем уж странный вид:

XIN (X)+COS (X)=X.

Причина ясна: все буквы «S» в УЧЕБНИКе (и не только в этой строке!) заменились на «X».

Задание 11.6. *Записать правильную директиву* ЗАМЕНА *для исправления первоначального варианта этой строки (возможным воздействием на другие части текста пренебречь).*

Если целая книга или большая программа записана в память в виде одного длинного текста, то редактировать такой текст не так уж удобно. При каждом исправлении нужно обязательно проверять, что заменяемый или выбрасываемый участок текста не повторяется ни в каком другом месте. Конечно, такую проверку можно поручить машине (используя, например, приведенную выше процедуру СЧЕТ2), но обычно бывает удобнее просто указать точное место исправления. Для этого большой текст разбивают на короткие участки по 50—60 символов — *строки*, а из строк составляют кортеж. Каждая строка целиком видна на экране терминала, поэтому подобрать нужное исправление очень легко: не нужно заботиться о сохранности остального текста. В директиве ЗАМЕНА при таком способе представления текста появляется еще один параметр — номер строки, в которой нужно произвести замену.

* Задание 11.7. *Составить программу для проверки правильности расстановки скобок в формуле, представленной текстом с именем* ФОРМ. *Скобки считаются расставленными правильно, если между открывающими и закрывающими скобками можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором каждой открывающей скобке соответствует стоящая после нее закрывающая.* (()(())()) — *пример правильной расстановки скобок. А вот примеры неправильной расстановки:*)(, ())()),)()(, ()()(.

Указание. Для решения этой задачи удобно использовать простой прием, называемый *алгоритмом Рутисхаузера*. Присвоим имени СЧЕТЧИК значение 0 и будем просматривать текст ФОРМ слева направо. Обнаружив закрывающую скобку, будем вычитать единицу из значения имени СЧЕТЧИК, а обнаружив открывающую скобку, прибавлять единицу. Если к окончанию просмотра значение имени СЧЕТЧИК положительно, значит, закрывающих скобок не хватает. Если во время просмотра значение этого имени хотя бы один раз стало отрицательным, значит, скобки расставлены неправильно. Если во время просмотра имя не становилось отрицательным и к окончанию равно нулю, значит, все в порядке (докажите!).

Г. Звенигородский

XIV Всесоюзная олимпиада школьников

В. Вавилов, А. Земляков,
И. Клумова

Олимпиада по математике

С 16 по 23 апреля в Саратове состоялся заключительный этап XIV Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В нем приняло участие 158 школьников: 39 восьмиклассников, 60 девятиклассников и 59 десятиклассников. Все эти ребята — победители республиканских олимпиад, а также школьники, получившие дипломы I и II степени на заключительном этапе XIII Всесоюзной олимпиады. Среди участников олимпиады были также команда хозяев олимпиады — школьники Саратова (3 человека) и команда учащихся ПТУ (3 человека) — победитель олимпиады профессионально-технических училищ Ленинграда, выступившая вне конкурса.

В этом году олимпиада была посвящена 110-й годовщине со дня рождения В. И. Ленина. 16 апреля в актовом зале Саратовского дворца пионеров и школьников в торжественной обстановке происходило открытие заключительного этапа олимпиады. Председатель оргкомитета олимпиады, заместитель председателя Саратовского облисполкома И. Ф. Ялынычева поздравила участников заключительного этапа олимпиады с началом соревнований.

Юные математики возложили цветы к памятникам В. И. Ленину и борцам социалистической революции 1917 года и приняли участие во Всесоюзном ленинском коммунистическом субботнике.

Заключительный этап олимпиады происходил, как обычно, в два тура, которые состоялись 18 и 20 апреля.

При отборе задач методическая комиссия руководствовалась следующими принципами: 1) задачи должны охватить большинство разделов школьной программы, пройденных учащимися; 2) задания должны отвечать «различным вкусам», то есть содержать задачи по планиметрии и стереометрии, задачи по алгебре и началам анализа, задачи аналитического типа и задачи «олимпиадного» характера; 3) задания в целом должны быть умеренной сложности так, чтобы каждый участник заключительного этапа решил хотя бы одну задачу и не менее половины участников справились с половиной всего задания.

В каждый из дней школьникам было предложено по четыре задачи, на решение которых отводилось по 5 часов. Ниже мы приводим условия всех задач.

В этом году жюри заранее оценило каждую задачу в баллах. Максимальная сумма баллов в каждом туре равнялась 30. (Число баллов за задачу указано в скобках после условия.) Участникам олимпиады эти априорные оценки заранее не сообщались.

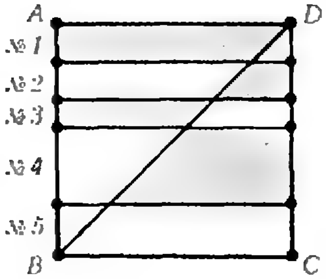
Задачи

Первый день

8 класс

1. Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получающееся число 192021...7980 на 1980? (6)

2. Сторона AB квадрата $ABCD$ разделена на n отрезков так, что сумма длин от-



резков с четными номерами равна сумме длин отрезков с нечетными номерами (см. рисунок). Через точки деления проведены отрезки, параллельные стороне AD, и затем каждая из получившихся n полосок диагональю BD разбита на две части — левую и правую. Докажите, что сумма площадей левых частей с нечетными номерами равна сумме площадей правых частей с четными номерами (на рисунке эти части закрашены). (6)

3. Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию «Салют». Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза — ровно 18 тонн. Имеются семь транспортных кораблей «Прогресс», каждый из которых может доставить на орбиту 3 тонны груза. Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Докажите, что они смогут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз. (9)

4. Точки M и P — середины сторон BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $|AM|+|AP|=a$. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ меньше, чем $a^2/2$. (9)

9 класс

1. Имеет ли уравнение $x^2+y^3=z^4$ решения в простых числах x, y, z? (6)

2. На диаметре AC некоторой окружности дана точка E. Проведите через нее хорду BD так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была наибольшей. (8)

3. См. задачу № 3 для 8-го класса. (8)

4. На берегу круглого озера расположено несколько пунктов. Между некоторыми из них установлено теплоходное сообщение. Известно, что два пункта A и B связаны рейсом тогда и только тогда, когда следующие за ними справа по берегу два пункта A' и B' рейсом не связаны. Докажите, что из любого пункта в любой другой пункт можно добраться теплоходом, причем не более чем с двумя пересадками. (8)

10 класс

1. Шестизначное число, записанное шестью отличными от нуля различными цифрами, делится на 37. Докажите, что перестановками цифр этого числа можно получить еще по крайней мере 23 различных числа, делящихся на 37. (6)

2. См. задачу № 2 для 9-го класса. (8)

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x+2\sin(x+y+z)=0, \\ \sin y+3\sin(x+y+z)=0, \\ \sin z+4\sin(x+y+z)=0. \end{cases} \qquad (8)$$

4. См. задачу № 4 для 9-го класса. (8)

Второй день

8 класс

5. На плоскости дано 1980 векторов, причем среди них есть неколлинеарные. Известно, что сумма любых 1979 из этих векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 1980 данных векторов равна нулевому вектору. (6)

6. Обозначим через $S(n)$ сумму всех цифр натурального числа n.

а) Существует ли натуральное n такое, что $n+S(n)=1980$?

б) Докажите, что хотя бы одно из двух последовательных натуральных чисел представимо в виде $n+S(n)$ для некоторого третьего натурального числа n. (7)

7. Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги окрашены в красный цвет, остальные — в синий, причем так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером 2×3 клетки содержит в точности две красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник из 99 клеток размером 9×11 клеток? (7)

8. Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболевали, навещая своих больных друзей, на следующий день после посещения. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно один день, причем после этого у него один или несколько дней есть иммунитет, то есть он здоров и заболеть в такой день не может (число дней иммунитета у каждого коротышки может быть свое). Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их.

Докажите, что

а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго;

б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится. (10)

9 класс

5. См. задачу № 7 для 8-го класса. (8)

6. Обозначим через $P(n)$ произведение всех цифр натурального числа n. Может ли последовательность (n_k), заданная рекуррентной формулой $n_{k+1}=n_k+P(n_k)$ и своим первым членом $n_1\in\mathbb{N}$, оказаться неограниченной? (8)

7. Дан правильный треугольник ABC. Некоторая прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D — центр правильного треугольника PMB, точка E — середина отрезка AP. Определите углы треугольника DEC. (7)

8. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны x, y и z сантиметров, причем $x<y<z$. Через $p=4(x+y+z)$, $S=2(xy+yz+zx)$ и $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ обозначены, соответственно, периметр, площадь поверхности и длина диагонали параллелепипеда. Дока-

жите неравенства:

$$x < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right),$$

$$z > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right). \qquad (7)$$

10 класс

5. Множество M состоит из целых чисел. Его наименьший элемент равен 1, а наибольший элемент равен 100. Каждое число из множества M, кроме 1, равно сумме двух (возможно, одинаковых) чисел, принадлежащих M. Среди всех таких множеств укажите множество с минимальным числом элементов. (6)

6. Докажите, что существует бесконечно много чисел a, для которых уравнение

$$[x^{\frac{3}{2}}] + [y^{\frac{1}{2}}] = a$$

имеет по крайней мере 1980 решений в натуральных числах x, y. (Через $[z]$ обозначена целая часть числа z.) (6)

7. В тетраэдре $ABCD$ $(AC) \perp (BC)$ и $(DA) \perp (BD)$. Докажите, что косинус угла между прямыми AC и BD меньше, чем $|CD|/|AB|$. (8)

8. Число $x \in]0;\ 1[$ записано в виде бесконечной десятичной дроби. Переставив ее первые 5 цифр после запятой в произвольном порядке, получим новую бесконечную десятичную дробь, отвечающую некоторому числу x_1. Переставив в десятичной записи числа x_1 цифры со 2-й по 6-ю после запятой, получим десятичную запись числа x_2. Вообще, десятичная запись числа x_{k+1} получается перестановкой в записи числа x_k цифр с $(k+1)$-й по $(k+5)$-ю после запятой.

а) Докажите, что, как бы ни переставлять цифры на каждом шаге, получающаяся последовательность чисел x_k всегда имеет некоторый предел.

Обозначим этот предел через y.

б) Выясните, можно ли с помощью такого процесса из какого-нибудь рационального числа x получить иррациональное число y.

в) Придумайте такую дробь x, для которой описанный процесс всегда приводил бы к иррациональным числам y, каковы бы ни были перестановки цифр на каждом шаге.

(Считайте, что числа, в десятичной записи которых есть цифра 9, в этой задаче не рассматриваются.) (10)

Как участники соревнования справились с этими задачами, видно из таблицы 1. С каждой задачей (кроме задачи № 3 для 10-го класса) справилось не менее 20% школьников, а с одиннадцатью задачами (задачи №№ 1, 2, 5, 7 для 8-го класса, №№ 1, 4, 5, 7, 8 — для 9-го класса и №№ 4, 5 — для 10-го класса) справилось более 50% участников.

Таблица 1

Номера задач / Класс	Первый день				Второй день			
	1	2	3	4	5	6	7	8
8 класс								
Справились	29	26	9	13	30	17	25	16
Не справились	4	8	25	16	8	0	8	6
9 класс								
Справились	50	15	18	30	42	21	33	46
Не справились	2	15	35	21	2	27	15	13
10 класс								
Справились	27	29	5	35	38	22	20	19
Не справились	12	22	52	19	9	37	35	16

Несколько слов о составе и работе жюри. Возглавлял работу жюри академик А. Н. Колмогоров, ему помогали три заместителя: профессор Саратовского университета А. А. Привалов, профессор Московского физико-технического института Г. Н. Яковлев и старший научный сотрудник Московского государственного университета В. В. Вавилов. В каждом классе было по два куратора (один — из Москвы, другой — из Саратова). Члены жюри провели разбор задач как для руководителей команд, так и для школьников. Перед разбором задач и руководители, и школьники получали решения всех задач, подготовленные методической комиссией. После завершения проверки работ, до заключительного заседания жюри, посвященного распределению дипломов, школьникам были объявлены их результаты в символической форме «+», «±», «∓», «—», а также суммарное количество баллов, набранное каждым участником. Затем желающим были показаны их работы; параллельно шел прием и разбор апелляций специально созданной для этого комиссией.

Саратовцы отнеслись к юным математикам с большой теплотой. В программе олимпиады — встречи с учеными и студентами механико-математического факультета Саратовского университета, посещение Музея-квартиры семьи Ульяновых, экскурсии по городу и многое-многое другое.

В день закрытия олимпиады жюри организовало «математический бой» между командами ФМШ Москвы и Ленинграда. По четырем предыдущим встречам счет был ничейным; на этот раз победила команда ФМШ при МГУ. Интересно, что две из предложенных задач не решила ни одна из команд (на с. 7 мы приводим условия всех задач математического боя).

Торжественное закрытие олимпиады состоялось 22 апреля в актовом зале Дворца пионеров и школьников.

Участники олимпиады, набравшие не менее 30 баллов, получили дипломы: первой степени — при 57—60 баллах, второй степени — при 40—56 баллах и третьей степени — при 30—39 баллах. Распределение призеров по классам дано в таблице 2. Их имена вы можете найти на с. 59. Кроме 83 призеров еще 40 участников получили похвальные грамоты. Остальные получили дипломы участников олимпиады.

Таблица 2

Награждены	Дипломы первой степени	Дипломы второй степени	Дипломы третьей степени	Всего	в %
8 класс (из 39)	2	9	12	23	59%
9 класс (из 60)	3	14	14	31	52%
10 класс (из 59)	2	12	15	29	46%
В целом (из 158)	7	35	41	83	51%

Только одному участнику олимпиады удалось безукоризненно выполнить все требования и получить 60 баллов. Таким оказался ученик девятого класса школы № 103 Ташкента *Моисей Гайсинский*. 59 баллов набрали трое: *Наталья Гринберг* из ФМШ № 145 Киева, *Дмитрий Бураго* из ФМШ № 45 при Ленинградском университете и *Владимир Титенко* из села Пуховичи Минской области. Наталья Гринберг, как сильнейшая из девушек, получила специальный приз — большую красивую куклу.

Многие участники олимпиады этого года — не новички в олимпиадных состязаниях. Набравший на этот раз 58 баллов ученик московской школы № 2 *Александр Разборов* получил диплом первой степени Всесоюзной олимпиады уже третий раз, а в 1979 году с успехом выступал на XXI Международной математической олимпиаде (I премия). Третий раз дипломами победителей были награждены десятиклассники *А. Боричев* из ФМШ № 45 при ЛГУ, *В. Радченко* и *Ю. Ткаченко* из ФМШ № 145 Киева, *А. Попелюхин* из школы № 2 Киева, *А. Балинский* из школы № 11 Львова, *И. Артюшкин* из школы № 16 Пензы, *Я. Канепс* из ФМШ № 1 Риги, *С. Лацис* из школы № 2 Стучки, *Л. Лернер* из школы № 8 Вильнюса.

Редакция журнала «Квант» наградила В. Титенко специальным призом — подшивкой журнала «Квант» за 1979 год с автографами академиков И. К. Кикоина и А. Н. Колмогорова. За успехи на олимпиаде подпиской на журнал «Квант» на 1981 год были награждены восьмиклассники *Владимир Вишняков* (Балаково), *Вячеслав Фрегер* (Вольск), *Роза Куватбекова* (Фрунзе), *Виктория Рудик* (Уральск), *Ирина Шишкевич* (Чарджоу), *Хамдам Яхшимов* (район Шоват Хорезмской обл. Узбекской ССР).

Команда Саратова на XIV Всесоюзной олимпиаде подтвердила пословицу «Дома и стены помогают»: из трех ее участников двое получили дипломы — *Сергей Волосивец* и *Сергей Курчатов*, оба из школы № 13.

22 участника олимпиады были награждены различными спецпризами, учрежденными организациями и предприятиями Саратова.

В заключение саратовцы передали эстафету проведения олимпиады Казахстану. Представитель Министерства просвещения Казах. ССР отметил авторитетность жюри XIV Всесоюзной олимпиады и заверил собравшихся в том, что Алма-Ата постарается развить и продолжить сложившиеся традиции.

Ниже мы приводим решения девяти задач заключительного этапа

Всесоюзной олимпиады школьников по математике, не вошедших в Задачник «Кванта».

8 класс

Задача 4

Разбивая четырехугольник $ABCD$ диагональю AC, убеждаемся, что

$$S_{ABCD}=2S_{AMCP},$$

поэтому достаточно доказать неравенство

$$S_{AMCP}<a^2/4.$$

Пусть K — точка пересечения отрезков AM и BD (рис. 1). Треугольники MCP и MKP имеют общее основание MP и равные высоты (MP — средняя линия треугольника BCD), поэтому их площади равны. Далее, в силу выпуклости четырехугольника $ABCD$, точка K лежит между A и M, поэтому площадь треугольника MKP меньше площади треугольникв AMP.

Итак,

$$S_{AMCP}=S_{AMP}+S_{MCP}=$$
$$=S_{AMP}+S_{MKP}<2S_{AMP}.$$

Обозначив $|AM|$ через x, получим $|AP|=a-x$,

$$2S_{AMP}=x(a-x)\cdot\sin\widehat{MAP}.$$

Остается заметить, что $\sin\widehat{MAP}<1$ и $x(a-x)=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2<\frac{a^2}{4}$.

Задача 5

Обозначим через $\vec{a}$ сумму всех 1980 данных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{1980}$. Тогда сумма всех векторов, кроме $\vec{a}_i$, записывается как $\vec{a}-\vec{a}_i$ и, если $\vec{a}_i\neq\vec{0}$, из условия следует, что $\vec{a}-\vec{a}_i=k_i\vec{a}_i$, то есть $\vec{a}=(1+k_i)\vec{a}_i$ для некоторого числа k_i. Если $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $1+k_i\neq0$, поэтому вектор $\vec{a}_i=\frac{1}{1+k_i}\vec{a}$ коллинеарен $\vec{a}$. Очевидно, это противоречит условию, что среди данных векторов есть неколлинеарные. Следовательно, $\vec{a}=\vec{0}$.

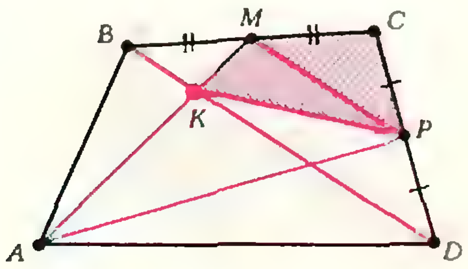


Рис. 1.

9 класс

Задача 1

Данное уравнение решений в простых числах не имеет. Один из способов доказать это состоит в следующем. Допустим противное. Во-первых, хотя бы одно из чисел x, y, z должно быть четным, то есть равняться 2. Во-вторых, рассматривая равенство

$$(3a\pm1)^2+(3b\pm1)^3=(3c\pm1)^4,$$

убеждаемся, что оно невозможно и поэтому хотя бы одно из чисел x, y, z должно делиться на 3, то есть равняться 3. Остается подстановкой убедиться, что тогда третье число не может быть даже целым (рассмотреть 6 случаев).

Другое решение этой задачи может быть основано на разложении исходного уравнения:

$$y^3=z^4-x^2=(z^2-x)(z^2+x),$$

откуда, в случае простого y, получаем две возможности:

$$\begin{cases} z^2-x=1, \\ z^2+x=y^3; \end{cases} \qquad \begin{cases} z^2-x=y, \\ z^2+x=y^2. \end{cases}$$

Одно уравнение в каждой из этих систем снова разлагается, после чего мы быстро приходим к противоречию с простотой чисел x, y, z.

Задача 4

Занумеруем все пункты в порядке их следования по берегу озера: 1, 2, 3, ..., n (за пунктом n следует пункт 1). Из условия вытекает, что из любых двух «соседних пар соседей» $k-1$ и k, k и $k+1$ ровно одна пара связана рейсом, а поэтому связанные рейсами соседние пары пунктов чередуются с несвязанными. Пусть, например, рейсами связаны пункты 1 и 2, 3 и 4, ..., $2k-1$ и $2k$, ... (рис. 2). Очевидно, осталось доказать существование рейса между любыми двумя парами пунктов $2k-1$ и $2k$, $2l-1$ и $2l$, а это сразу следует из условия: либо пункты $2k-1$ и $2l-1$, либо пункты $2k$ и $2l$ соединены рейсом. Утверждение задачи доказано.

Отметим, что наше рассуждение дает ограничение (необходимое условие!) на возможное число пунктов: n четно и $n\geqslant4$.

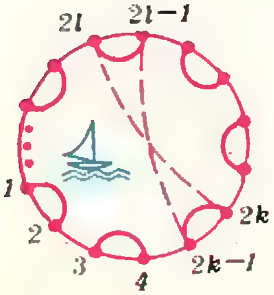


Рис. 2.

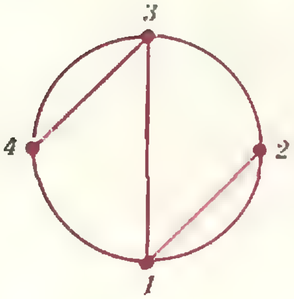


Рис. 3

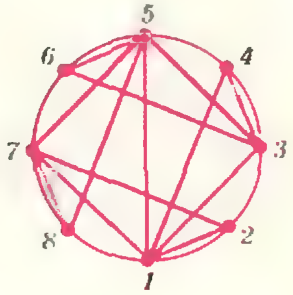


Рис. 4.

Интересно, что нужная система рейсов при $n=6$ не существует; с другой стороны, на рисунках 3, 4 показаны такие системы для $n=4$ и 8. Выяснить, при каких n возможна система рейсов с указанными в задаче свойствами — хорошая тема для исследования. (Ответ: $n=4k$. Конечно, от участников олимпиады этого не требовалось.)

Задача 6

Докажем, что последовательность (n_k) всегда является ограниченной. В самом деле, $n_k \leqslant n_{k+1} \leqslant n_k + 9^{c(n_k)}$ при всех k, где через $c(n_k)$ обозначено число цифр числа n_k. Допустим, что при каком-то выборе n_1 последовательность (n_k) не ограничена. Выберем натуральное число N так, чтобы выполнялись два условия: $10^N > n_1$ и $9^N < 10^{N-1}$ (так как 10^N неограниченно возрастает, и $(9/10)^N$ стремится к 0 при $N \to \infty$, такой выбор возможен). Из неограниченности (n_k) следует, что, начиная с некоторого номера k, $n_k > 10^N$, поэтому среди чисел $n_k < 10^N$ существует наибольшее — пусть это будет n_p. Но тогда

$$10^N \leqslant n_{p+1} \leqslant n_p + 9^{c(n_p)} < 10^N + 9^N < 10^N + 10^{N-1},$$

а это означает, что n_{p+1} начинается с цифр 10 и $P(n_{p+1}) = 0$. Следовательно, $n_{p+2} = n_{p+1}$, $n_{p+3} = n_{p+1}$ и вообще $n_k = n_{p+1}$ при всех $k \geqslant p+1$, что противоречит предположению о неограниченности последовательности (n_k).

Заметим, что из приведенных рассуждений следует, что на самом деле при любом выборе n_1 последовательность (n_k) стабилизируется, то есть, начиная с некоторого номера k, n_k не меняется.

Задача 8

Подставив выражения для p, d, S в доказываемые неравенства, после элементарных преобразований получим неравенства $(x-y)(x-z) > 0$ и $(z-x)(z-y) > 0$, которые, очевидно, выполняются, ибо $x < y < z$.

Другой способ решения этой задачи может быть основан на исследовании квадратного трехчлена с корнями

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p \pm \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right).$$

10 класс

Задача 1

Так как число 999 делится на 37, шестизначное число

$$\overline{a_1b_1c_1a_2b_2c_2} = \overline{a_1b_1c_1} \cdot (999+1) + \overline{a_2b_2c_2}$$

делится на 37 тогда и только тогда, когда на 37 делится число

$$\overline{a_1b_1c_1} + \overline{a_2b_2c_2} = (a_1+a_2)100 + (b_1+b_2)10 + (c_1+c_2).$$

Так как цифры a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2 входят в последнее выражение симметричным образом, перестановки цифр внутри этих пар позволяют из данного числа получить еще семь чисел, делящихся на 37.

Далее заметим, что

$$10(100a+10b+c) = 999a + (100b+10c+a),$$

поэтому наряду с $\overline{a_1b_1c_1a_2b_2c_2}$ на 37 делятся также и числа

$$\overline{b_1c_1a_1b_2c_2a_2}, \quad \overline{c_1a_1b_1c_2a_2b_2}.$$

Предыдущие перестановки позволяют из этих чисел получить еще по семь чисел, делящихся на 37. Итого получится $2+3 \cdot 7 = 23$ числа.

Заметим, что для некоторых делящихся на 37 шестизначных чисел перестановками их цифр можно получить более 23 других таких чисел: например, из числа 123 876 можно получить 47 чисел!

Задача 3

Очевидно, $(x;\ y;\ z) = (\pi k;\ \pi l;\ \pi m)$ — решение данной системы при любых целых k, l, m. Докажем, что других решений нет.

Вычитая из суммы первых двух уравнений третье и применяя известные формулы, получим

$$\sin x + \sin y + \sin(x+y+z) - \sin z = 0,$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\left(\frac{x+y}{2}+z\right) = 0,$$

$$4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{y+z}{2} = 0.$$

Следовательно, справедливо хотя бы одно из трех соотношений:

1) $\frac{x+y}{2} = \pi n$, 2) $\frac{x+z}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$,

3) $\frac{y+h}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$,

где n — произвольное целое число.

В первом случае $y = -x + 2\pi n$, $x+y+z = z + 2\pi n$ и после подстановки в первое и последнее уравнения исходной системы получаем

$$\sin x + 2\sin z = 0, \quad \sin z + 4\sin z = 0,$$

откуда

$$\sin z = 0 \text{ и } \sin x = 0;$$

соответствующие решения $(x;\ y;\ z)$ принадлежат к числу указанных.

Второй и третий случай разбираются аналогично.

Задача [illegible]

Предположим противное. Из того, что при любом n данное уравнение имеет конечное число решений, вытекает, что для некоторого числа M при любом n данное уравнение имеет не более чем M решений в натуральных числах. Теперь возьмем произвольное натуральное число N и для каждой из N^2 пар $(x;\ y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $1 \leqslant x \leqslant N$, $1 \leqslant y \leqslant N$, вычислим значение выражения $[x^{3/2}] + [y^{3/2}]$. Согласно предположению, каждое значение при этом получится не более чем M раз, поэтому в результате получится не менее чем N^2/M различных натуральных чисел. Среди них найдется число, не меньшее, чем N^2/M; для некоторой пары $(x_0;\ y_0)$ будет выполнено неравенство

$$[x_0^{3/2}] + [y_0^{3/2}] \geqslant \frac{N^2}{M}.$$

С другой стороны, так как $x_0, y_0 \leqslant N$,

$$[x_0^{3/2}] + [y_0^{3/2}] < 2N^{3/2}.$$

Таким образом, при любом натуральном N должно быть выполнено неравенство

$$\frac{N^2}{M} < 2N^{3/2},$$

то есть $N \leqslant (2M)^2$, что, очевидно, не так. Требуемое доказано.

Заметим, что это доказательство проходит для любого уравнения вида $[x^\alpha] + [y^\alpha] = n$, где $0 < \alpha < 2$. Для значения $\alpha = 3/2$ несколько участников олимпиады дали конструктивное решение этой задачи, указав для бесконечного числа значений n серию из 1980 решений данного уравнения.

Т. Петрова, Л. Чернова

Олимпиада по физике

Проходившая в этом году XIV Всесоюзная олимпиада школьников была посвящена 110-летию со дня рождения В. И. Ленина.

С 17 по 22 апреля в Риге проходил заключительный этап олимпиады по физике. В нем приняли участие 147 школьников: 41 восьмиклассник, 49 девятиклассников и 57 десятиклассников. Все они — победители республиканских олимпиад этого года или призеры предыдущей Всесоюзной олимпиады.

Торжественное открытие заключительного этапа олимпиады состоялось 17 апреля в помещении Дворца пионеров. Министр просвещения ЛатвССР М. Я. Карклинь пожелала школьникам больших успехов в предстоящей олимпийской борьбе и выразила надежду, что активная творческая работа, настойчивость в достижении цели и целеустремленность, с которой ребята готовятся к олимпиадам, помогут им в их дальнейшей жизни.

С приветственным словом к участникам олимпиады обратился ветеран партии, член КПСС с 1917 года, участник Октябрьской революции Г. А. Ясинкевич. Он поделился с ребятами воспоминаниями о встречах с В. И. Лениным, рассказал, какое незабываемое впечатление произвела на него речь Владимира Ильича, обращенная к участникам III Всероссийского съезда комсомола. Г. А. Ясинкевич выразил уверен-

Участники олимпиады по физике, получившие дипломы I степени.
В первом ряду (слева направо) П. Позняков, С. Чичкань, В. Горбунов, Я. Калда, Ю. Лийв, Р. Юшкайтис; в верхнем ряду — А. Пакалнс, П. Родин, Д. Григорьев, Ф. Ратников, М. Семенченко.

ность, что наша молодежь всегда будет достойным продолжателем дел первых комсомольцев, будет стремиться овладевать знаниями, чтобы приносить пользу своей Родине.

Честной увлекательной борьбы и больших успехов пожелал школьникам ректор Латвийского государственного университета им. Петра Стучки профессор В. О. Миллер.

18 апреля состоялся первый тур заключительного этапа олимпиады — теоретический. Восьмиклассникам были предложены 4 задачи (на их решение отводилось 4 часа), а девятиклассникам и десятиклассникам — 5 задач (на их решение давалось 5 часов). Вот условия этих задач (почти все задачи вошли в Задачник «Кванта» — см. № 7 и 8 за этот год):

Теоретический тур

8 класс

1. Шарнирная конструкция состоит из трех ромбов, стороны которых относятся как 3:2:1 (рис. 1). Вершина A_3 перемещается в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{v}_0$. Определите скорости вершин A_1, A_2 и B_1 в тот момент, когда все углы конструкции прямые.

2. Небольшая дождевая капля покидает облако в безветренную погоду на большой высоте. В момент, когда ускорение капли стало равным 5 м/с², ее скорость составляла 7,5 м/с. Вблизи земли капля падает с постоянной скоростью. Попадая на боковое стекло движущегося автомобиля, капля оставляет на ней след под углом 45° к вертикали. Оштрафует ли инспектор ГАИ водителя за превышение скорости, если разрешенная скорость движения автомобиля 60 км/ч? Силу сопротивления воздуха считать прямо пропорциональной скорости капли.

3. В ведре находится смесь воды со льдом. Масса смеси 10 кг. Ведро внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившийся график зависимости $T(t)$ изображен на рисунке 2. Известны удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К) и удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг. Определите, сколько льда было в ведре, когда его внесли в комнату. Теплоемкостью ведра пренебречь.

4. Электрическая цепь, состоящая из резисторов R_1, R_2 и R_3, подключена к двум источникам постоянного напряжения U_1 и U_2, как показано на рисунке 3. При каких условиях сила тока через резистор R_1 будет равна нулю?

9 класс

1. Шарнирная конструкция состоит из трех ромбов, стороны которых относятся как 1:2:3 (рис. 4). Вершина A_3 перемещается в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{v}_0$. Определите скорости вершин A_1, B_2 и A_2 в тот момент, когда все углы конструкции прямые.

2. Небольшая дождевая капля покидает облако в безветренную погоду на большой высоте. В момент, когда ускорение капли стало равным 7,5 м/с², ее скорость составляла 20 м/с. Вблизи земли капля падает с постоянной скоростью и, попадая на боковое стекло автомобиля, оставляет на нем след под углом 30° к вертикали. Оштрафует ли инспектор

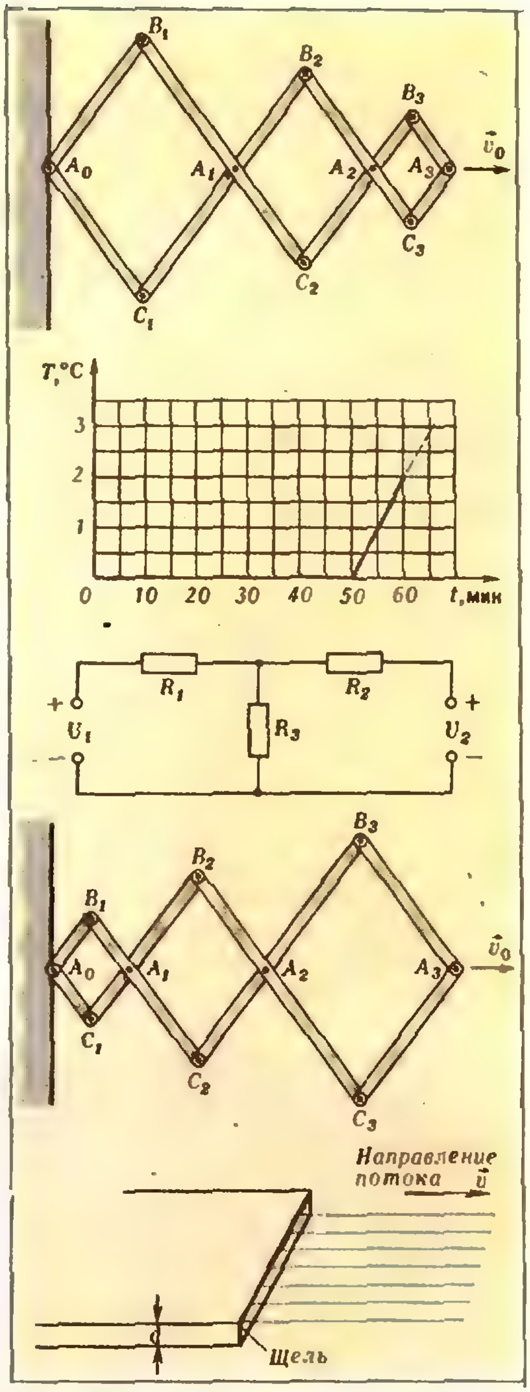


Рис. 1, 2, 3, 4, 5.

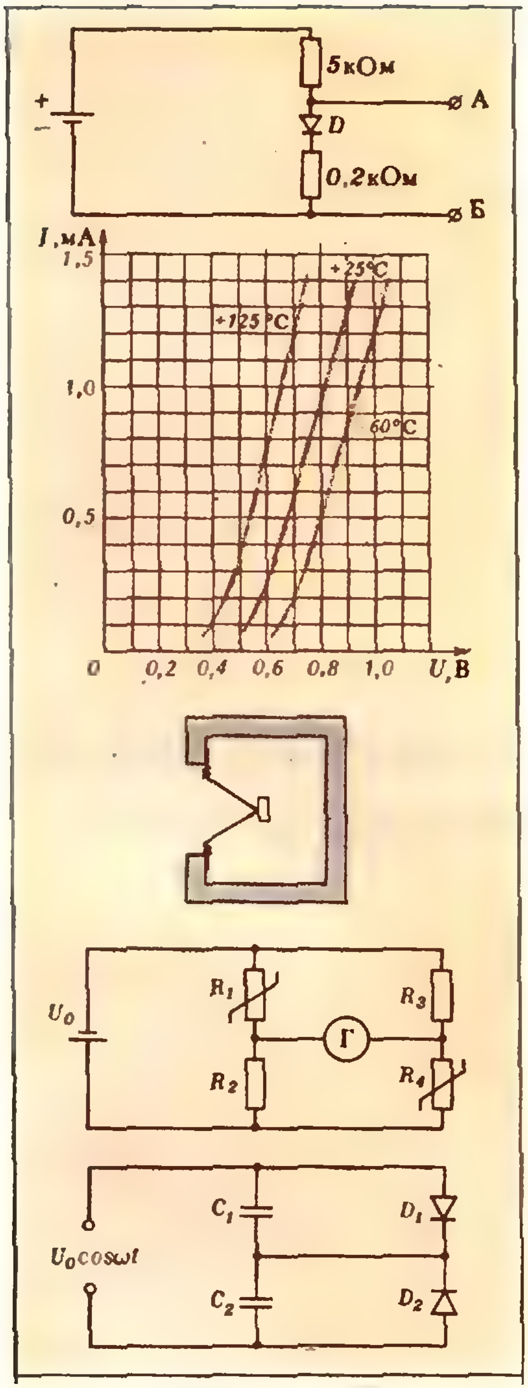


Рис. 6, 7, 8, 9, 10.

ГАИ водителя за превышение скорости, если разрешенная скорость движения автомобиля 60 км/ч? Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной квадрату скорости капли.

3. В научно-фантастической повести описывается аварийная ситуация, в которой астронавт массой $M=100$ кг оказался на расстоянии $l=100$ м от корабля со стаканом замерзшей воды. Обеспечивая сублимацию (испарение) льда, астронавт возвращается на корабль. Реален ли такой способ возвращения? Оцените, за какое время астронавт возвратится на корабль. Считайте, что сублимация льда происходит при постоянной температуре $T=272$ К. Давление насыщающих паров при этой температуре $p_н=550$ Па. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К). Размеры стакана и массу льда задайте самостоятельно.

4. Направленный поток электронов вылетает из тонкой широкой щели (рис. 5) со скоростью $\vec{v}\,(|\vec{v}|=10^6$ м/с). Концентрация электронов в потоке $n=10^{10}$ м$^{-3}$. На каком расстоянии от щели толщина пучка увеличится в 2 раза? Масса электрона $m=9\cdot10^{-31}$ кг, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, диэлектрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

5. Для получения напряжения, величина которого мало зависит от температуры, собрана схема по рисунку 6. Вольтамперные характеристики диода D при трех различных температурах окружающей среды: $t_1=125$°C, $t_2=25$°C и $t_3=-60$°C приведены на рисунке 7. Напряжение источника при температуре 25°C равно $U=6$ В и с увеличением температуры возрастает на $25\cdot10^{-3}$ В/К. Найдите напряжение между зажимами А и Б при $t=25$°C и зависимость этого напряжения от температуры.

10 класс

1. С южного и северного полюсов Земли одновременно стартуют две ракеты с одинаковыми начальными скоростями, направленными горизонтально. Через время $\tau=3$ ч 20 мин ракеты оказались на максимальном удалении друг от друга. Определите максимальное расстояние между ракетами. Ускорение свободного падения на Земле считать известным. Радиус Земли $R_З=6400$ км.

2. Громкоговоритель имеет диффузор с площадью поперечного сечения $S=300$ см^2 и массой $m=5$ г. Резонансная частота диффузора $\nu_0=50$ Гц. Какой окажется его резонансная частота, если поместить громкоговоритель на стенке закрытого ящика объемом $V=40$ л, как показано на рисунке 8? Расчет провести в предположении, что температура воздуха внутри ящика не изменяется при колебаниях диффузора.

3. Схема, изображенная на рисунке 9, состоит из двух одинаковых резисторов $R_2=R_3=R$ и двух одинаковых нелинейных резисторов $R_1=R_4$, вольтамперная характеристика которых имеет вид $U=\alpha I^2$, где α — некоторый известный постоянный коэффициент. При каком напряжении источника питания U_0 сила тока через гальванометр Г равна нулю?

4. Цепь, состоящая из двух конденсаторов емкостью C_1 и C_2 ($C_2>C_1$) и двух идеальных диодов D_1 и D_2, подключена к источнику переменного напряжения $u=U_0\cos\omega t$ (рис. 10). Определите зависимость напряжения на конденсаторах от времени в установившемся режиме. Изобразите полученные зависимости на графике. Сопротивление идеального диода в прямом направлении равно нулю, в обратном — бесконечно велико.

5. Правдоподобен ли рассказ о том, что греческие воины по совету Архимеда сожгли деревянный корабль римлян, направив на него солнечные лучи, отраженные от плоских щитов? Принять диаметр щита $D=1$ м, число воинов $n=100$, расстояние до корабля $l=20$ м. Известно, что в солнечную погоду удается зажечь кусок сухого дерева при помощи линзы с фокусным расстоянием $F=0{,}1$ м и диаметром $d=3$ см. Угловой размер Солнца принять равным $\alpha=0{,}01$ рад.

По результатам проверки стало ясно, какие задачи вызвали наибольшие затруднения у школьников и какие оказались самыми легкими. Эти сведения приведены в следующей таблице:

	Сложная задача				Легкая задача		
	8 кл.	9 кл.	10 кл.		8 кл.	9 кл.	10 кл.
	№ 1	№ 4	№ 1	№ 4	№ 3	№ 2	№ 3
Число работ с полным решением	9	22	19	20	35	44	46
Число учащихся, не решивших задачу	18	23	31	31	3	2	5

19 апреля состоялся экспериментальный тур олимпиады. Каждому участнику предлагались две экспериментальные задачи. В этом номере журнала помещена статья Т. Романовского с подробным разбором задач экспериментального тура.

Торжественное закрытие XIV Всесоюзной олимпиады школьников по физике состоялось 22 апреля. На нем были объявлены итоги олимпиады. Председатель жюри профессор Латвийского государственного университета И. К. Витолс и заместитель председателя жюри профессор Московского физико-технического института С. М. Козел вручили победителям награды. Имена призеров, получивших дипломы I, II и III степени, приведены на странице 60. Многие участники олимпиады были награждены различными грамотами и призами.

Специальный приз, учрежденный редколлегией и редакцией журнала «Квант», был вручен восьмикласснику *Айнису Мусиню* (Цесис). Подпиской на журнал «Квант» на 1981 год награждены *Вадим Ивлев* (Железногорск), *Андрей Красов* (Узловая), *Юрий Синюков* (ст. Селезни Тамбовской обл.), *Юрий Тани* (Славгород Алтайского кр.) и *Павел Цыгвинцев* (Анадырь).

XIV Всесоюзная олимпиада закончилась. Ее участники надолго запомнят эту встречу в гостеприимной столице Латвийской ССР. Хозяева олимпиады — ученые Латвии, Министерство просвещения, Центральный Комитет комсомола республики — сделали очень многое, чтобы обеспечить успешное проведение олимпиады и сделать ее настоящим праздником юных физиков.

Т. Романовский

Экспериментальный тур олимпиды по физике

Задачи экспериментального тура заключительного этапа Всесоюзной олимпиады были разработаны на кафедрах экспериментальной и технической физики Латвийского государственного университета им. Петра Стучки. В этой нелегкой работе активное участие приняли постоянные организаторы республиканских физических олимпиад доценты Я. Гальвиньш, Я. Круминьш, Т. Романовский, В. Флеров и дипломник университета Г. Кокс.

При составлении задач учитывались традиции Всесоюзных олимпиад и республиканских олимпиад Латвийской ССР. Кстати, заметим, что республиканская олимпиада этого года была юбилейной — тридцатой по счету.

Решение задач экспериментального тура проходило в трех вузах: восьмиклассники работали в Рижском политехническом институте, девятиклассники — в Рижском институте инженеров гражданской авиации им. Ленинского комсомола и десятиклассники — в Латвийском государственном университете.

Приведем условия этих задач и разберем их решения.

8 класс

1. Определение КПД наклонной плоскости

Задание 1. Предложите метод измерения КПД наклонной плоскости с помощью динамометра и линейки.

Задание 2. Экспериментально изучите зависимость КПД наклонной плоскости от ее высоты и постройте график этой зависимости.

Задание 3. Сравните полученную вами экспериментальную зависимость КПД наклонной плоскости от ее высоты с теоретической.

Дано: наклонная плоскость, брусок, динамометр, измерительная линейка, миллиметровая бумага.

В данной задаче коэффициент полезного действия η определяется по формуле

$$\eta = \frac{mgh}{|\vec{F}|l}.$$

Динамометром измеряют модуль силы $\vec{F}$, с которой надо равномерно тянуть брусок массой m по наклонной плоскости длиной l при различных высотах плоскости h.

Для определения теоретической зависимости КПД от высоты рассмотрим рисунок 1. Для $|\vec{F}|$ и η получаем соответственно

$$|\vec{F}| = mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha),$$

$$\eta = \frac{1}{\mu \operatorname{ctg} \alpha + 1} = \frac{1}{\mu\sqrt{l^2/h^2 - 1} + 1}.$$

Коэффициент трения μ можно найти, измерив $|\vec{F}|$ при $h = 0$: $\mu = |\vec{F}|/mg$. На рисунке 2 приведена характерная зависимость коэффициента полезного действия наклонной плоскости от ее высоты ($l = 0{,}5$ м, $\mu = 0{,}3$).

2. Определение плотности жидкости

Определите плотность данной жидкости.

Дано: сосуд с неизвестной жидкостью, сосуд с водой, измерительная линейка, два металлических бруска, рычаг.

Примечание. Плотность воды принять равной $\varrho_в = 10^3$ кг/м^3.

Надо провести три измерения по установлению равновесия рычага, когда один брусок находится попеременно в воздухе, в воде, в неизвестной жидкости, а другой брусок — все время в воздухе. При этом разумно длину плеча рычага с первым грузом оставлять неизменной, а длину плеча рычага со вторым грузом соответственно изменять. Запишем уравнения моментов сил для трех случаев равновесия рычага (рис. 3):

$$m_1gl = m_2gl_1,$$
$$(m_1g - \varrho_в Vg)l = m_2gl_2,$$
$$(m_1g - \varrho Vg)l = m_2gl_3.$$

Исключая из этих уравнений m_1, m_2, V и g, получаем формулу для определения плотности ϱ неизвестной

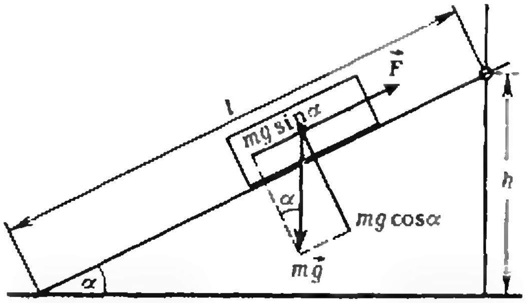


Рис. 1.

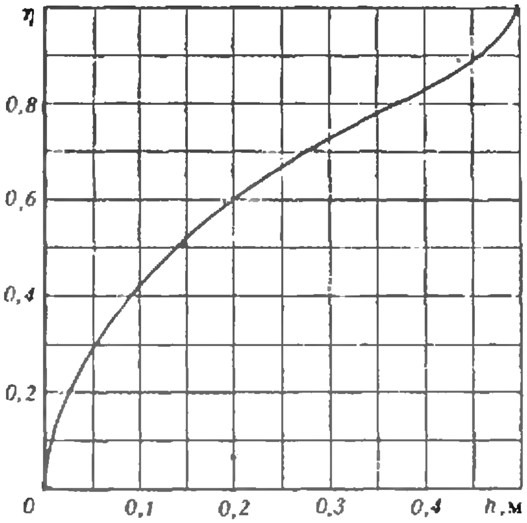


Рис. 2.

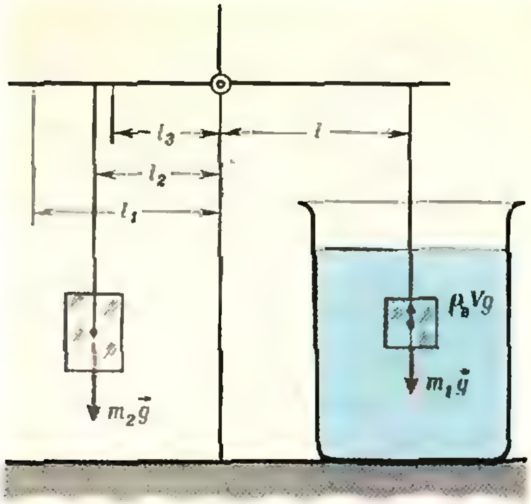


Рис. 3.

жидкости (раствора медного купороса):

$$\varrho = \varrho_в \frac{l_1 - l_3}{l_1 - l_2}.$$

9 класс

1. Определение коэффициента поверхностного натяжения жидкости

Определите коэффициент поверхностного натяжения данной жидкости, используя жидкость, коэффициент поверхностного натяжения которой известен.

Дано: капилляр, измерительная линейка, рычаг, мензурка, металлический груз, сосуд с жидкостью, коэффициент поверхностного натяжения которой известен, сосуд с жидкостью, коэффициент поверхностного натяжения которой надо определить.

Применяя формулу $h = \frac{2\sigma}{\varrho g r}$ для высоты подъема жидкости в капилляре для двух различных жидкостей, получаем выражение для определения коэффициента поверхностного натяжения σ неизвестной жидкости (раствора медного купороса и поваренной соли) через коэффициент поверхностного натяжения $\sigma_н$ известной жидкости (воды):

$$\sigma = \frac{h\varrho}{h_н \varrho_н} \sigma_н.$$

Здесь h и $h_н$ — высоты подъема неизвестной и известной жидкостей в капилляре. Отношение плотностей можно определить по методу, описанному в задаче 2 для 8-го класса.

2. Исследование «черного ящика»

Задание 1. Исследуйте с помощью источника постоянного тока и двух лампочек накаливания принцип работы «черного ящика».

Задание 2. На основании результатов, полученных в задании 1, нарисуйте качественную вольтамперную характеристику «черного ящика».

Дано: «черный ящик» (из эстетических соображений он покрашен в белый цвет), две лампочки накаливания (6,3 В; 0,3 А), источник постоянного тока (максимальное напряжение 12 В), реостат и провода.

Примечания. 1. Для регулирования напряжения в широких пределах подсоедините реостат потенциометрически к источнику постоянного тока. 2. Во избежание преждевременного «выхода из игры»: а) не подключайте «черный ящик» непосредственно к клеммам регулируемого напряжения; б) не забывайте, что максимальное напряжение источника постоянного тока 12 В, а лампочки, имеющиеся в вашем распоряжении, рассчитаны на номинальное напряжение 6,3 В.

Для решения данной задачи можно составить различные схемы. Одна из наиболее рациональных показана на рисунке 4.

Оказалось, что при различных подключениях «черного ящика» к клеммам *1* и *2* лампочки $Л_1$ и $Л_2$ ведут себя по-разному. При одном включении по мере увеличения тока в цепи накал обеих лампочек сначала

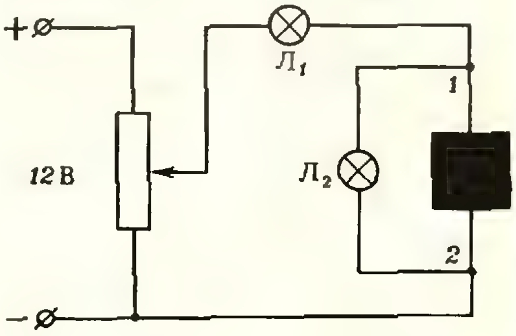


Рис. 4.

увеличивается одинаково: начиная с некоторого положения движка реостата, дальнейшее увеличение тока в цепи увеличивает накал лампочки $Л_1$, а накал лампочки $Л_2$ не меняет. Последнее означает, что при увеличении тока в цепи напряжение на лампочке $Л_2$, а значит и на «черном ящике», не меняется.

При противоположном включении «черного ящика» ток через лампочку $Л_2$ не течет (вернее, почти не течет) даже при очень большом токе в цепи (что можно заметить по яркому свечению лампочки $Л_1$). Следовательно, напряжение между точками *1* и *2* очень мало́.

Таким образом, можно сделать вывод, что «черный ящик» стабилизирует напряжение между клеммами *1* и *2*. В первом случае напряжение не превышает некоторого определенного значения (порядка 5,6 В), а во втором случае оно предельно мало́. И действительно, в «черный ящик» был помещен стабилитрон (Д815А).

Многие учащиеся, заметив, что «черный ящик» хорошо проводит ток в одном направлении и плохо в другом, быстро сделали вывод о том, что в «черном ящике» находится диод, и не пытались изучить реакцию «черного ящика» при максимально возможном токе.

10 класс

Учебная программа предусматривает знакомство учащихся с генератором звуковой частоты, осциллографом и другими современными физическими приборами. Поэтому для десятиклассников одна задача была составлена с учетом применения таких приборов. Так как конкретный тип осциллографа или генератора звука мог быть и не знаком участникам, они могли получить любую консультацию по приборам.

Опыт последних лет показал, что примерно треть участников олимпиад пользуются личными микрокалькуляторами. Это дает им некоторое преимущество. Чтобы все участники заключительного тура были в равных условиях, на каждом рабочем столе был микрокалькулятор «Электроника» (как это уже четыре года подряд делается на республиканских физических олимпиадах). Каждый мог получить необходимую консультацию, но практически этого не потребовалось. Применение микрокалькулятора на олимпиаде позволяет ставить наряду с качественными интересные количественные задачи.

1. Исследование затухающих колебаний

Задание 1. Изучите работу преобразователя сигнала и установите, как изменяется синусоидальный сигнал, подаваемый на его вход с выхода генератора звуковой частоты.

Задание 2. Определите индуктивность катушки L_x, наблюдая на экране осциллографа затухающие колебания в параллельном колебательном контуре L_xC (рис. 5).

Задание 3. Включите вместо колебательного контура динамический громкоговоритель и получите на экране осциллографа осциллограмму, подобную той, какая получалась в задании 2. Объясните полученный результат.

Дано: генератор звуковой частоты Г, преобразователь сигнала ПС, электронный осциллограф ЭО, параллельный колебательный контур L_xC, динамический громкоговоритель ДГ, микрокалькулятор, провода.

С помощью осциллографа легко было понять, что преобразователь сигнала преобразовывает синусоидальный сигнал в импульсный (рис. 6, *а*). Этими короткими импульсами можно возбуждать свободные колебания в контуре, которые являются затухающими (рис. 6, *б*).

Количество максимумов между задающими импульсами позволяет определить частоту свободных колебаний контура. Тогда по формуле Томсона, зная номинальную емкость конденсатора, можно посчитать индуктивность катушки.

Если вместо колебательного контура включить громкоговоритель, на экране осциллографа опять можно получить картину затухающих колебаний. Правда, для этого надо изменить частоту задающих импульсов, поскольку колебания громкоговори-

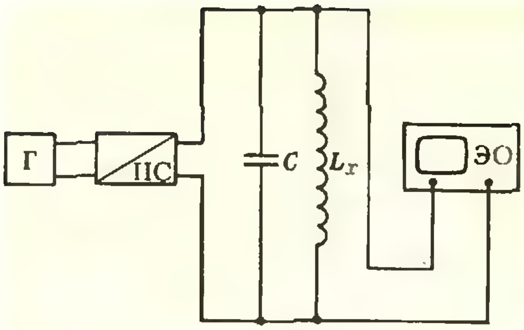


Рис. 5.

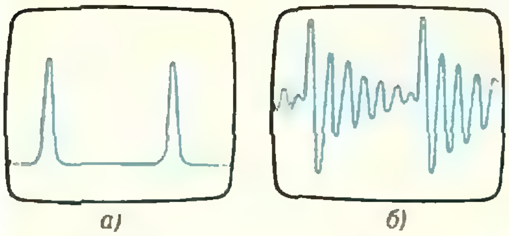


Рис. 6.

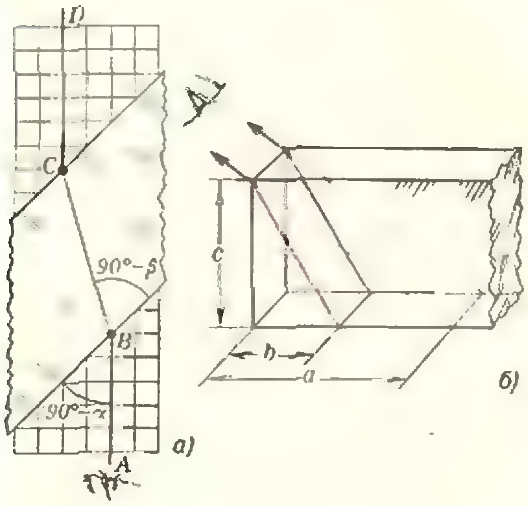


Рис. 7.

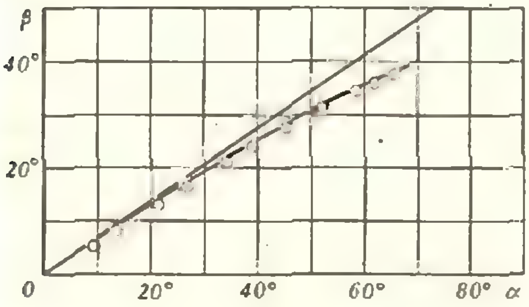


Рис. 8.

теля находятся в другом частотном диапазоне. Заметим, что наблюдаемая картина по своей природе отличается от предыдущей. Диффузор громкоговорителя, колеблясь, индуцирует в катушке громкоговорителя ЭДС, и на экране осциллографа появляется картина затухающих механических колебаний (а не электромагнитных). Многие ошибочно предполагали, что катушка с диффузором образуют колебательный контур.

2. Исследование хода лучей в прозрачной прямоугольной пластинке

Задание 1. Предложите метод (методы) построения хода лучей в прозрачной прямоугольной пластинке и измерения углов преломления β при различных углах падения α, пользуясь только миллиметровой бумагой.

Задание 2. Экспериментально исследуйте и постройте зависимость угла преломления β от угла падения α.

Задание 3. Используя результаты, полученные в задании 2, определите: а) коэффициент преломления материала, из которого изготовлена прозрачная прямоугольная пластинка; б) угол преломления β_0 при угле падения $\alpha_0 = 90°$.

Дано: прозрачная прямоугольная пластинка размером $20 \times 32 \times 100$ мм (плоскости 32×100 мм — матовые), микрокалькулятор, миллиметровая бумага.

Если положить пластинку матовой поверхностью на миллиметровую бумагу, то можно заметить, что продолжением линии *AB* является линия *CD* (рис. 7, *а*). Отмечая точки *B* и *C* и проекции граней пластинки, строим ход лучей. Этим методом можно добиться высокой точности определения углов падения и преломления. Более экономичным может оказаться метод, когда пластинка положена на миллиметровую бумагу прозрачной гранью. В этом случае углы определяются по формулам (рис. 7, *б*)

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{c} \text{ и } \beta = \operatorname{arctg} \frac{b}{c}.$$

Правильную зависимость между углами падения и преломления, которая является нелинейной (рис. 8), можно получить только в том случае, если измерения проводить в достаточно широком интервале значений углов.

Для точного определения коэффициента преломления надо провести несколько измерений при одном угле падения или по экспериментальным данным построить график $\sin\beta = f(\sin\alpha)$. Согласно теории, эта зависимость должны быть линейной: $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$. Применение графического метода равноценно усреднению. Использование микрокалькулятора позволило обойтись без угломера и провести расчеты за короткое время.

Учитывая, что участникам олимпиады после возвращения домой было бы интересно воспроизвести задачи экспериментального тура в своей школе, организаторы подарили им комплект оборудования (преобразователь сигнала, динамический громкоговоритель, колебательный контур и прозрачную прямоугольную пластинку).

Призеры XIV Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Матюшов С. (Вологда, с. ш. № 29),
Титенко В. (Пуховичи);
по 9 классам —
Бураго Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Гайсинский М. (Ташкент, с. ш. № 103),
Гринберг Н. (Киев, ФМШ № 145);

по 10 классам —
Зайцев Ю. (Видное, с. ш. № 6),
Разборов А. (Москва, с. ш. № 2).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Бриталс Я. (Рига, ФМШ № 1),
Кошевец И. (Новороссийск, с. ш. № 40),
Матвеев К. (Новосибирск, с. ш. № 74),
Перельман Г. (Ленинград, с. ш. № 301),
Савкин Я. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Тупайло С. (Киев, ФМШ № 145),
Фрегер В. (Вольск, с. ш. № 12),
Фульман И. (Гомель, с. ш. № 2),
Шевчишин В. (Львов, с. ш. № 11);

по 9 классам —
Алания Л. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Алексеев В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Гогоберидзе Т. (Поти, с. ш. № 4),
Гринчук М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Дерягин Д. (Москва, с. ш. № 2),
Зильберберг А. (Кременчуг, с. ш. № 19),
Крижановский О. (Харьков, с. ш. № 27),
Матвеев А. (Ульяновск, с. ш. № 5),
Минарский А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Орел М. (Ленинград, с. ш. № 239),
Рабинович Б. (Тула, с. ш. № 36),
Фомин Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Чанышев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Чеканов Ю. (Москва, с. ш. № 91);

по 10 классам —
Артюшкин И. (Пенза, с. ш. № 18),
Балинский А. (Львов, с. ш. № 11),
Боричев Л. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ижболдин О. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Канель А. (Москва, с. ш. № 2),
Каплан Л. (Сумгаит, с. ш. № 11),
Кониевич М. (Москва, с. ш. № 91),
Кузьмин Ю. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Курчатов С. (Саратов, с. ш. № 13),
Мегрецкий А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Стадниченко С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Ткаченко Ю. (Киев, ФМШ № 145).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Буриченко В. (Новокузнецк, с. ш. № 49),
Гринив О. (Киев, ФМШ № 145),
Дьячков А. (Москва, с. ш. № 19),
Кордзая К. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Крупник И. (Кишинев, с. ш. № 40),

Левкин М. (Душанбе, с. ш. № 8),
Николаевский Ю. (Харьков, с. ш. № 131),
Самборский С. (Истра, с. ш. № 1),
Спивак А. (Стерлитамак, с. ш. № 10),
Ходоровский В. (Нововоронежский, с. ш. № 1),
Шарапов С. (Ташкент, с. ш. № 110),
Янгель А. (Ныо);

по 9 классам —

Аралкин А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Барздиньш Г. (Рига, ФМШ № 1),
Белоцерковский Ю. (Минск, с. ш. № 64),
Волосивец С. (Саратов, с. ш. № 13),
Грасманис М. (Рига, ФМШ № 1),
Драмбян Р. (Ереван, ФМШ № 1),
Кагарманов А. (Белорецк, с. ш. № 14),
Маланюк Т. (Киев, ФМШ № 145),
Мелгалвис А. (Рига, ФМШ № 1),
Могилевский Р. (Фрунзе, с. ш. № 61),
Овчинников П. (Вязники, с. ш. № 11),
Рублев Б. (Киев, ФМШ № 145),
Шварцман В. (Белгород, с. ш. № 9),
Эпиктетов М. (Алма-Ата, РФМШ);

по 10 классам —

Беспамятных С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Дубровский К. (Славянск, с. ш. № 5),
Канепс Я. (Рига, ФМШ № 1),
Келарев А. (Свердловск, с. ш. № 141),
Колдоркин А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Лацис С. (Стучка, с. ш. № 2),
Лернер Л. (Вильнюс, с. ш. № 8),
Ломазкий Н. (Киев, ФМШ № 145),
Магадеев Б. (Уфа, с. ш. № 114),
Набоков Р. Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Павлющик С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Попелюхин А. (Киев, с. ш. № 2),
Радченко В. (Киев, ФМШ № 145),
Сивацкий А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Файнгауз Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Калда Я. (Таллин, с. ш. № 1),
Позняков П. (Петрозаводск, с. ш. № 17),
Чичкань С. (Киев, с. ш. № 125);

по 9 классам —

Григорьев Д. (Москва, с. ш. № 57),
Лийв Ю. (Таллин, с. ш. № 1),
Родин П. (Ленинград, с. ш. № 239),
Семенченко М. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 10 классам —

Горбунов В. (Коммунарск, с. ш. № 22),
Пакалнс А. (Тукумс, с. ш. № 1),
Ратников Ф. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Юшкайтис Р. (Вильнюс, с. ш. № 9),

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Алексеев А. (Ленинград, с. ш. № 202),
Бергельсон А. (Москва, с. ш. № 2),
Ким С. (Алмалык, с. ш. № 15),
Коваленко А. (Черкассы, с. ш. № 1),
Николаев В. (Харьков, с. ш. № 5),
Панасюк А. (Одесса, с. ш. № 116),
Сюньков С. (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —

Байков П. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Ланев А. (Петрозаводск, с. ш. № 17);

по 10 классам —

Голобоков А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Калугин П. (Москва, с. ш. № 444),
Китаев А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Коваленко А. (Львов, с. ш. № 69),
Одинцов А. (Москва, с. ш. № 2),
Пивоваров В. (Красноярск, с. ш. № 10).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Бекметьев Р. (Алма-Ата, РФМШ),
Галаевский В. (Горки Могилевской обл., с. ш. № 4),
Ивлев В. (Железногорск-Илимский, с. ш. № 4),
Мусинь А. (Цесис, с. ш. № 1),
Пироженко А. (Мытищи, с. ш. № 25),
Пронин Д. (Горький, с. ш. № 36),
Цыгвинцев П. (Анадырь, с. ш. № 1);

по 9 классам —

Гершанов Ю. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Деревянко В. (Киев, ФМШ при КГУ),
Дмитрук И. (Киев, с. ш. № 145),
Каспаров М. (Баку, с. ш. № 70),
Силаев П. (Москва, с. ш. № 2),
Соловьев В. (Рыбное, с. ш. № 102),
Федюкович В. (Киев, ФМШ при КГУ);

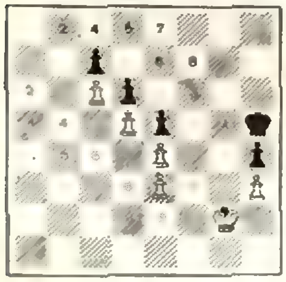
по 10 классам —

Авруцкий И. (Киев, ФМШ при КГУ),
Андрианов А. (Москва, с. ш. № 2),
Власенко С. (Бобруйск, с. ш. № 12),
Геогджаев В. (Долгопрудный, с. ш. № 5),
Козловский В. (Новолукомль, с. ш. № 1),
Кунингас О. (Таллин, с. ш. № 1),
Овсянников Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Скок А. (Талгар, с. ш. № 1).

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Поля соответствия

В прошлом номере мы ознакомились с понятием «оппозиция», играющим важную роль в теории пешечных окончаний. Оппозиция по существу представляет собой частный случай понятия «полей соответствия», возникающего при анализе позиций с блокированной пешечной структурой. При их исследовании применяются различные методы: «критические расстояния Бианкетти», «координатная система Эберса» и др. Теория таких окончаний называется «теорией соответственных полей», потому что в ней при каждом положении одного короля находится «соответственное поле» для другого короля. Это соответствие полей иногда бывает очень сложным, так что анализ каждой конкретной позиции можно рассматривать как решение тонкой математической задачи. Разберем следующую несложную позицию.



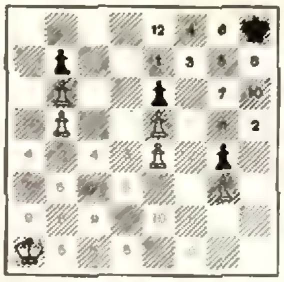
Положение черных нелегкое — белый король грозит прорваться в их лагерь либо через f3, либо через b7. Черные должны стараться предотвратить это вторжение. Рассмотрим различные положения белого короля и определим соответственные поля для черного. Начнем с критических полей вторжения — f3 и a6. Если белый король стоит на f3, то черный должен держать поле g4 и, значит, стоять на g5 (при короле на h5 он не успевает на ферзевый фланг). Итак, поля f3 и g5 — соответственные, записываем на них число 1, красным цветом для белого короля, черным — для черного. Если белый король пришел на a6, то черный должен встретить его на b8 (2). Пусть теперь белый король стоит на e2. Поскольку он грозит занять за один ход поле 1 и за четыре хода поле 2, черный король должен расположиться на f6 (на e2 и f6 ставим 3).

Белый король может пойти с a5 и b5 на a6, и, значит, этим полям соответствует c8 (4). На поля с числом 4 белый король может попасть с b4 и c4, и им соответствует поле d8 (5). С d3 король может пойти на поля 3 и 5, то есть ему соответствует поле e7 (6). Аналогично с c3 король может занять поля 5, 6, и ему соответствует e8 (7). С d2 у короля есть ходы на поля 3, 6, 7, и ему соответствует f7 (8). Остальные поля роли не играют и мы не обращаем на них внимания.

Итак, соответствие полей здесь не взаимно однозначное — двум парам белых полей соответствует по одному черному, это и решает дело:

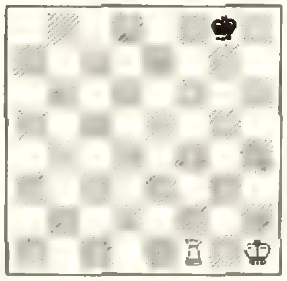
1. Крf3 Крg5 2. Крe2 Крf6 3. Крd3 (3. Крd2 Крf7) **3...Крe7 4. Крc4** (4. Крc3 Крe8) **4...Крd8.** До сих пор у черных находился нужный ответ, но после **5. Крb4!** белый король остался на поле с числом 5, черные теряют соответствие и проигрывают: на 5...Крe7 (e8) следует 6. Крb5, а на 5...Крc8 — 6. Крc3, и на одном из участков доски белый король прорывается к черным пешкам.

В данном примере у черных очень мало возможностей для маневра, и поэтому белые могли даже позволить себе неточность. Например, если бы они пошли 5. Крb5 (вместо Крb4), то после 5...Крc8 исправили бы ошибку — 6. Крa5! и т. д. Однако очень часто в подобных позициях один неточный ход приводит к непоправимым последствиям.



В этой позиции решает только **1. Крa2!**, и черные теряют поля соответствия. В данном примере в лагере обеих сторон довольно много полей для маневров, и анализ значительно усложняется (см. «Квант», 1971, № 12).

Закончим наш краткий рассказ следующей задачей.



Белые начинают и выигрывают

Читателя может смутить задание, ведь у белых на доске лишняя ладья. Однако здесь имеется одно дополнительное условие — ладье разрешается ходить только в том случае, если она... объявляет мат!

После **1. Крg2!** белые занимают оппозицию (королей разделяет нечетное число полей — пять). Если теперь черный король движется по линии «g», то оппозиция сохраняется — **1...Крg7 2. Крg3!** три поля) **2...Крh6 3. Крg4!** (одно поле). Итак, черные вынуждены отступить от вертикали «g» — **3...Крh6 4. Крf5!** До сих пор белый король не мог встать перед ладьей, так как его черный оппонент сразу вырывался на свободу через линию «f». Теперь же такая возможность появилась, и белые осуществляют обходный маневр. **4...Крg7** (4...Крh6 5. Лh1×) **5. Крg5!** (вновь оппозиция завоевана) **5...Крh7 6. Крf6! Крg8 7. Крg6! Крh8 8. Лf8×.**

МГД-генератор

1. Масса ионов во много раз больше массы электронов, поэтому ионы движутся много медленнее электронов и заметного тока не создают.

2. Горячие газы можно использовать, например, для теплофикации. Подогревать топливо и воздух имеет смысл, так как в этом случае меньшая доля теплотворной способности топлива тратится на нагрев продуктов сгорания.

3. Да, имеет, но при этом внутреннее сопротивление генератора возрастает, так как газ охлаждается от электродов и степень ионизации присадки уменьшается.

4. Для уменьшения потребления мощности электромагнитом надо уменьшить сопротивление его обмоток, охладив их. Радикальное решение этой проблемы — использовать сверхпроводящий магнит.

5. Недостаток — потери в теплообменнике между продуктами сгорания и контуром с аргоном. Достоинство — турбина не контактирует с активными газами или присадками.

Физический фейерверк

1. Палочка с зарубками совершает и горизонтальные, и вертикальные колебания, поэтому конец палочки и прикрепленный к нему гвоздик движутся по эллипсу. В зависимости от того, каким пальцем вы прижимаете палочку с зарубками и по какой ее стороне проводите другой палочкой, конец палочки и гвоздик движутся либо по часовой стрелке, либо против. Трение же между гвоздиком и пропеллером заставляет пропеллер вращаться в соответствующем направлении.

2. Сначала вода заполняет первый виток шланга, затем часть ее переливается во второй. Вскоре второй виток заполняется, а в верхней части первого образуется воздушная полость и течение воды прекращается. При большем уровне воды в трубке с воронкой то же самое может произойти во втором витке, в третьем и т. д. Если высота столба воды ограничена, а число витков велико, в конце концов напора воды окажется недостаточно, чтобы проталкивать воздушные полости дальше и дальше, и ток воды прекратится.

3. Картонку удерживают силы атмосферного давления и поверхностного натяжения. Когда вы переворачиваете стакан, столб воды в нем немного опускается и давление воздуха в верхней части стакана становится ниже атмосферного. Разность между атмосферным давлением и давлением над жидкостью и создает силу, которая не дает воде вылиться из стакана. Вторая сила, сила поверхностного натяжения, обусловлена молекулярным притяжением между водой и картонкой, водой и стенками стакана.

4. Поскольку рассматриваемая система неустойчива, всякое небольшое возмущение поверхности воды (небольшая волна) быстро нарастает, равновесие нарушается и вода из стакана начинает вытекать.

5. Температура и соленость воды с глубиной уменьшаются. Холодная малосоленая вода, поднимаясь со дна, согревается и становится легче, чем соленая вода на поверхности. Вот почему поток воды со дна не прекращается. Более того, он может продолжаться даже без трубки.

6. Это явление аналогично рассмотренному в предыдущей задаче. Движение возникает из-за малых возмущений (небольших волн) на поверхности раздела слоев воды. Окрашенная соленая вода, опускаясь, отдает тепло пресной неокрашенной, становится плотнее ее и поэтому продолжает опускаться вниз. Неокрашенная вода, поднявшись вверх вследствие случайной небольшой волны, согреется и окажется легче окружающей окрашенной воды, в результате чего ее движение вверх будет продолжаться.

7. На поверхности раздела соленой и пресной воды наблюдается неустойчивость того же типа, что и в задачах 4 и 6.

8. По-видимому, никаких публикаций по этому поводу, кроме описаний самого опыта, не было. Попробуйте поэкспериментировать сами. Подумайте, каково давление над яйцом и под ним. Играет ли какую-либо роль турбулентность струи? Будет ли яйцо двигаться навстречу потоку, если оно окажется в узкой горизонтальной струе?

9. Так как плотность холодного молока больше, чем горячего кофе, струйка молока движется вниз. Прилегающие слои вращающегося кофе захватываются потоком молока и вытягиваются вниз. В результате угловая скорость вращения этих слоев увеличивается и может стать достаточной для образования на поверхности кофе воронки. Когда в кофе наливают горячее молоко, оно либо совсем не опускается, либо опускается гораздо медленнее, чем холодное.

10. Поведение всех тонущих или всплывающих предметов определяется характером изменений, которые они вносят в поток обтекающей их жидкости. Однако до сих пор не существует теоретического или хотя бы качественного объяснения наблюдаемых при этом явлений.

Морской бой

1. а) 7 стратегий (рис. 1, *а*) — *ж*)); напомним, что стратегии, совпадающие при поворотах и отражениях доски, мы не различаем. б) Сдвигая квадрат 4×4 с каждой из семи указанных стратегий вверх и вправо на 4 поля, мы получаем множество стратегий на доске 10×10. Однако только две стратегии из этого множества являются наилучшими (они содержат по 24 выстрела) — рис. 2, *а*), *б*); сравните с рисунками 1, *а*), *б*). Убедитесь сами, что любая наилучшая стратегия на доске $n\times n$ ($n>4$) получается сдвигами на 4 поля некоторой наилучшей стратегии на доске 4×4.

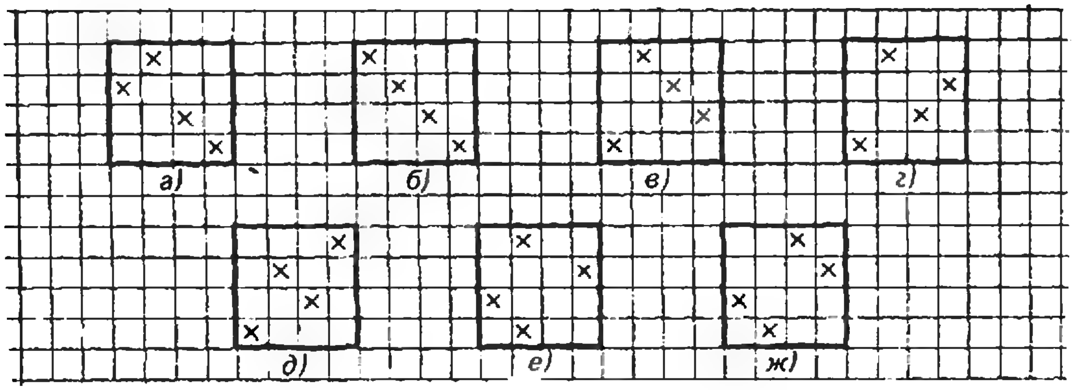


Рис. 1.

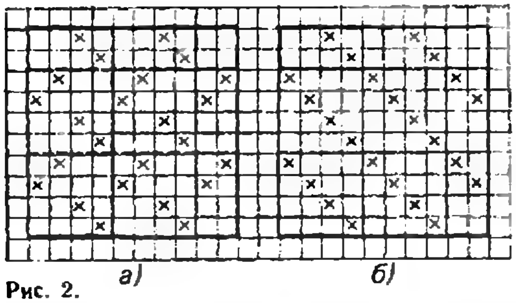


Рис. 2.

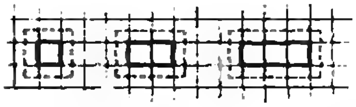


Рис. 3.

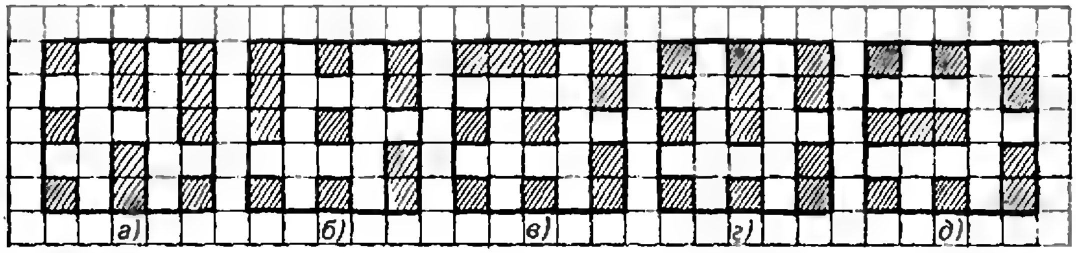


Рис. 4.

2. По правилам игры любая пара кораблей должна отстоять друг от друга не меньше чем на одно поле. Окружим каждый корабль каймой шириной в половину поля (рис. 3); полученный прямоугольник назовем *расширенным кораблем*. Найдем площадь семи расширенных кораблей, которые нам надо потопить. Площадь расширенного катера — 4 клетки (2×2), эсминца — 6 клеток (3×2), крейсера — 8 клеток (4×2). Общая площадь составляет 36 клеток. Площадь расширенной доски также равна 36 клеткам, то есть расширенные корабли полностью покрывают ее. Из этого следует, что угловые поля доски 5×5 обязательно заняты кораблями (иначе угловая площадь расширенной доски «пропадает»). Теперь легко перебрать все возможные расположения кораблей. Их всего пять (рис. 4, *а) — д)*; повороты и отражения доски мы не учитываем).

Проведенный анализ позволяет эффектно завершить игру. Первые четыре выстрела произведем по углам нашей доски 5×5. Как мы знаем, все они достигают цели. Если при этом три катера будут потоплены (рис. 4, *а)*), то расположение остальных кораблей определяется однозначно. Пусть потоплен только один катер. Сориентировав доску так, чтобы этот катер стоял на поле а1, пятый и шестой выстрелы произведите по полям а3 и в1. От результатов этих двух выстрелов зависит, какой из случаев — «б» или «в» — имеет место. Если выстрелы по углам приводят к потоплению двух катеров, то, сориентировав доску так, чтобы эти катера стояли на вертикали а, пятый и шестой выстрелы произведите снова по полям а3 и в1. По результатам этих выстрелов вы поймете, какой из случаев — *г)* или *д)* — избран противником.

Таким образом, после шести ходов мы имеем полную информацию о расположении неприятельских кораблей и следующими пятью ударами победно завершаем этот напряженный бой. Рассмотренный пример показывает, что в критических ситуациях от играющих в морской бой требуются немалое искусство и выдержка.

Сколько вариантов

1. 9^4. **2.** $19 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2^4 = 41\,040$. **3.** $33^3 \cdot 10^4 = 359\,370\,000$. **4.** 88^6. **5а.** $9 \cdot 10^2 = 900$. **5б.** $9 \cdot 9 \cdot 10^3 = 81\,000$. **5в.** $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 5\,880$. Цифры выбираем в следующем порядке: вторая, четвертая, первая, третья, пятая. **5г.** $2 \cdot 5 \cdot 6^3 = 2\,160$. Сначала выбираем пятую цифру (2 или 6), затем четвертую (любую нечетную), третью, вторую, первую. **6.** Правое неравенство следует из того, что первое звено ломаной можно выбрать четырьмя способами, а каждое следующее — не более чем тремя. Для доказательства левого неравенства рассмотрите ломаные, в которых каждое звено направлено на «север» или на «запад». **7.** 7! **8.** 8! **9.** 9! Замените цифры 6 и 9 одной «цифрой» 96. **10.** 4! $(10!)^4$. **11.** 12 · 8! Сначала поставим цифры 2 и 3, а затем оставшиеся восемь цифр на восьми свободных местах. **12.** 2^9. Выберите множество монет, попадающих в левый карман.

Силы трения и движение

1. При $\alpha < \operatorname{arctg}\mu$ $|\vec{F}_{\text{тр}}| < mg\sin\alpha$; при $\alpha > \operatorname{arctg}\mu$ $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu mg\cos\alpha$ рис. 1

2. $L = \dfrac{2l\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \approx 2l\mu = 0{,}1$ м.

3. $|\vec{a}_{\max}| = \mu g$; сила направлена в ту же сторону, что и ускорение.

4. $N = \mu m|\vec{v}|/\eta \approx 84$ кВт.

5. Выгоднее затормозить.

6. Брусок будет соскальзывать вниз.

Магические восьмиугольники

(см. 4-ю с. обложки)

Квадрат по диагонали:

21	17	13	9	5
14	10	1	22	18
2	23	19	15	6
20	11	7	3	24
8	4	25	16	12

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. 156 × 7606 = 1 186 536.

2. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника ABC; c — длина гипотенузы. Тогда (рис. 5) $|ED| = a+b-c$. Но $a = r+x$, $b = r+y$, $c = x+y$, где r — радиус вписанной окружности (рис. 6).
Значит, $|ED| = r+x+ry-x-y = 2r$.

3. О т в е т. Верно.
Посмотрим на последние две цифры степеней тройки. Получим такой набор чисел:
03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49,
47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01, 03,...
Мы видим, что среди первых двадцати степеней тройки действительно нет таких, у которых цифра десятков была бы нечетной. Но, начиная с двадцать первого, числа в нашем наборе будут повторяться. Поэтому так будет для всех степеней тройки.

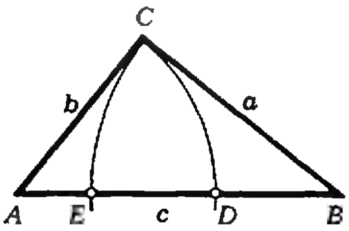


Рис. 5.

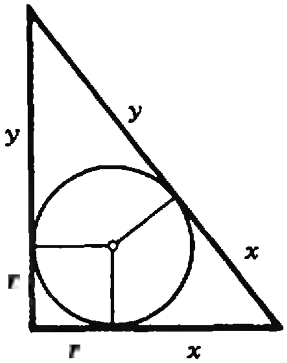


Рис. 6.

4. О т в е т. Верно.
Составим такую таблицу:

	Голубоглазые	Неголубоглазые
Блондины	a	c
Неблондины	b	d

Тогда $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a+c}{b+d}$. Отсюда $ad > bc$, то есть $\dfrac{a}{c} > \dfrac{a+b}{c+d}$.

5. Нетрудно сообразить, что $a = 2$. Поэтому $(2\overline{bc})^2 = \overline{bc1bc}$ или $(200+\overline{bc})^2 = 1001\overline{bc}+100$, откуда $\overline{bc}^2 - 601\overline{bc} + 39900 = 0$ и $\overline{bc} = 76$. Таким образом, $\overline{abc} = 276$.

Номер готовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Г. Красников, Н. Кузьмина, Э. Назаров,
М. Сидоров, И. Смирнова, Л. Черниевская

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

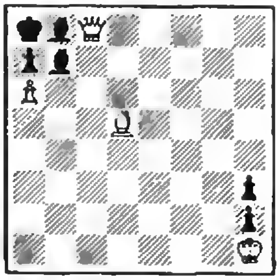
113035 Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 12.9.80
Подписано в печать 20.10.80.
Печать офсетная
Бумага 70 × 108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,60 Т-17665
Цена 30 коп. Заказ 2277
Тираж 260 460 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Загадочные маневры

Когда мы говорили об оппозиции или о полях соответствия, то прежде всего имели в виду маневры королей. Однако в шахматах оппозиция иногда понимается более широко. Пусть в некоторой позиции большинство фигур прикованы к своим местам, а по одной или по две с каждой стороны могут перемещаться по доске, причем между полями, занимаемыми ими, существует определенная зависимость, соответствие. Тогда мы вновь можем говорить о соответственных полях и, в частности, об оппозиции. Расскажем об одном случае, имеющем отношение к данной теме.

Дело происходило 15 лет назад в одной студенческой компании сильных математиков (но не очень сильных шахматистов!). Ведущий странички, тогда еще сам студент, в качестве развлечения предложил своим коллегам следующую задачу на так называемый «обратный мат»:

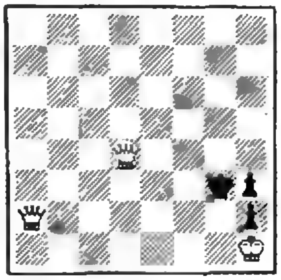


Белые начинают и заставляют черных дать мат их королю, хотя черные этого не хотят.

Поскольку задание было непривычным, я решил сначала... показать собравшимся, как ставится мат, и взял себе белые фигуры: **1. Сg2 Сd5 2. Фd8 Сb7 3. Сe4 Сc6 4. Фc8 Сb7 5. Сd5 Сc6. 6. Фh8 Сb7 7. Сc6,** и черные вынуждены сыграть 7...С:c6×.

Студенты сказали, что им все ясно, и тогда я сел играть за черных. Однако после **1. Сg2 Сe4 2. Фd8 Сd5 3. Фe8 Сc6 4. Фf8 Сb7 5. Фh8 Сf3 6. Фd8 Сd5 7. Сe4 Сb7 8. Фc8 Сc6 9. Сd5 Сb7** они с огорчением заметили, что вновь возникла исходная позиция. Так повторилось несколько раз — я, играя белыми, добивался цели, а партнеры тем же цветом никак не могли заставить черных поставить мат. В конце концов было заключено пари, и моим соперникам предстояло самостоятельно раскрыть секрет загадочных маневров ферзей и слонов. Ю. Ильяшенко и Н. Петри (ныне — кандидаты физико-математических наук) начали составлять таблицы соответствия полей между белыми фигурами и черным слоном, и вскоре (ведь они были сильные математики!) точный закон был установлен! Оказывается, как бы белый ферзь ни перемещался по восьмой горизонтали, никакая сила не заставит черных, выбирающих соответственные поля для слона, поставить мат белому королю! Черные должны лишь соблюдать следующее правило. При ферзе на c8 им надо держать между слонами расстояние одно поле по диагонали (как в исходной позиции), при ферзе на d8 — расстояние два поля, при ферзе на e8 — три поля, при ферзе на f8 — четыре поля, наконец, при ферзе на h8 черный слон должен стоять вплотную к белому. Итак, мы по существу имеем пять замечательных оппозиций! Вот примерный ход событий: **1. Сg2 Сe4!** (при ферзе на c8 — дистанция одно поле) **2. Сf3 Сd5 3. Фe8 Сb7!** (ферзь на e8 — три поля) **4. Фd8 Сd5!** (два поля) **5. Сe4 Сb7 6. Сg2** (нельзя 6. Фf8 С:e4+, и это не мат, так как есть ход 7. Фf3) **6...Сe4 7. Фf8 Сb7!** (четыре поля) **8. Фd8** (слон вновь не может двигаться из-за взятия) **8...Сc6 9. Фh8 Сf3!** (слон вплотную) **10. Фc8 Сe4 11. Фd8 Сd5** и т. д.

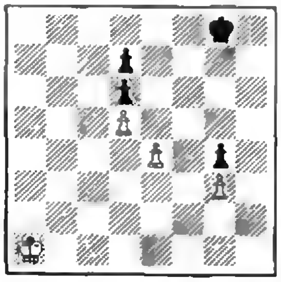
Итак, «доказав», что задача не решается, мои коллеги почти выиграли пари. Почти — потому что у белых есть другой план, связанный с отступлением черного ферзя с последней горизонтали. После **1. Фc1!! Сc6 2. Фa1 Сb7 3. Сc6** черные вынуждены сделать ход слоном b8. После этого белые забирают сначала одного слона — **4. С:b7+**, а потом и второго, а также пешку a7, затем они своего слона отдают, а пешку проводят в ферзи. Далее при помощи двух ферзей они сооружают такую позицию:



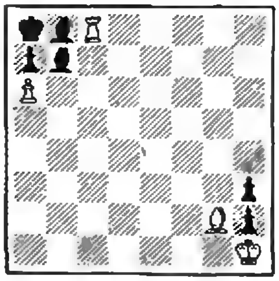
Теперь следует **Фa2—g2+**, и черные вынуждены объявить мат **h3:g2×**!

Этот пример иллюстрирует одно из основных различий (в типе мышления) между математикой и шахматами: решение математической задачи требует точного и глубокого исследования, сосредоточенного на узком участке (которое студенты-математики успешно проделали), а в шахматной игре число вариантов необозримо велико, все их учесть невозможно, и решения (ходы) ищутся лишь приблизительно. Самый глубокий и доскональный анализ, как мы видели, может быть совершенно неожиданно опровергнут!

Конкурсные задания:

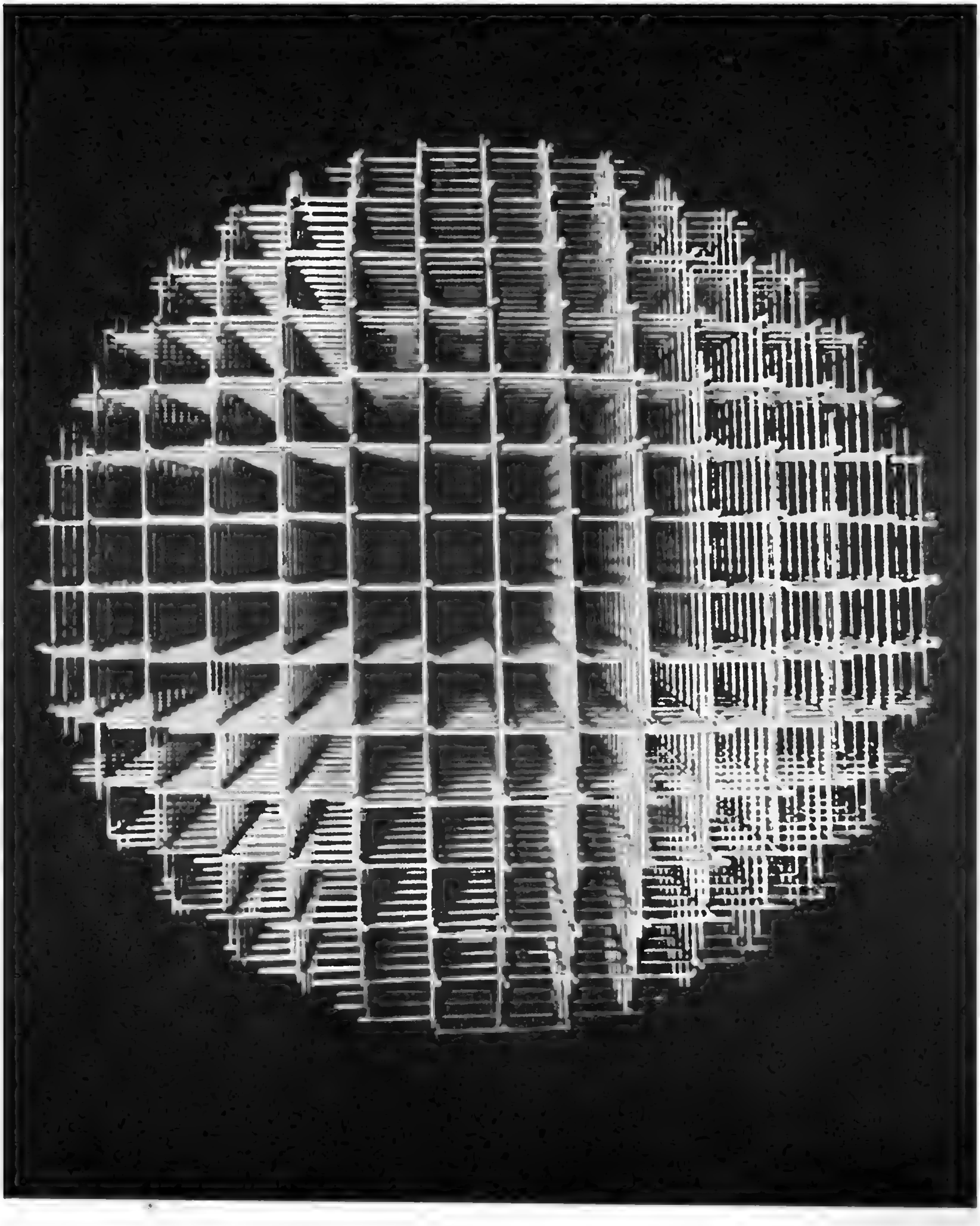


1. Оцените позицию при ходе белых и при ходе черных.



2. Обратный мат в 9 ходов.

Срок отправки решений — 31 декабря 1980 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс № 11—80»).



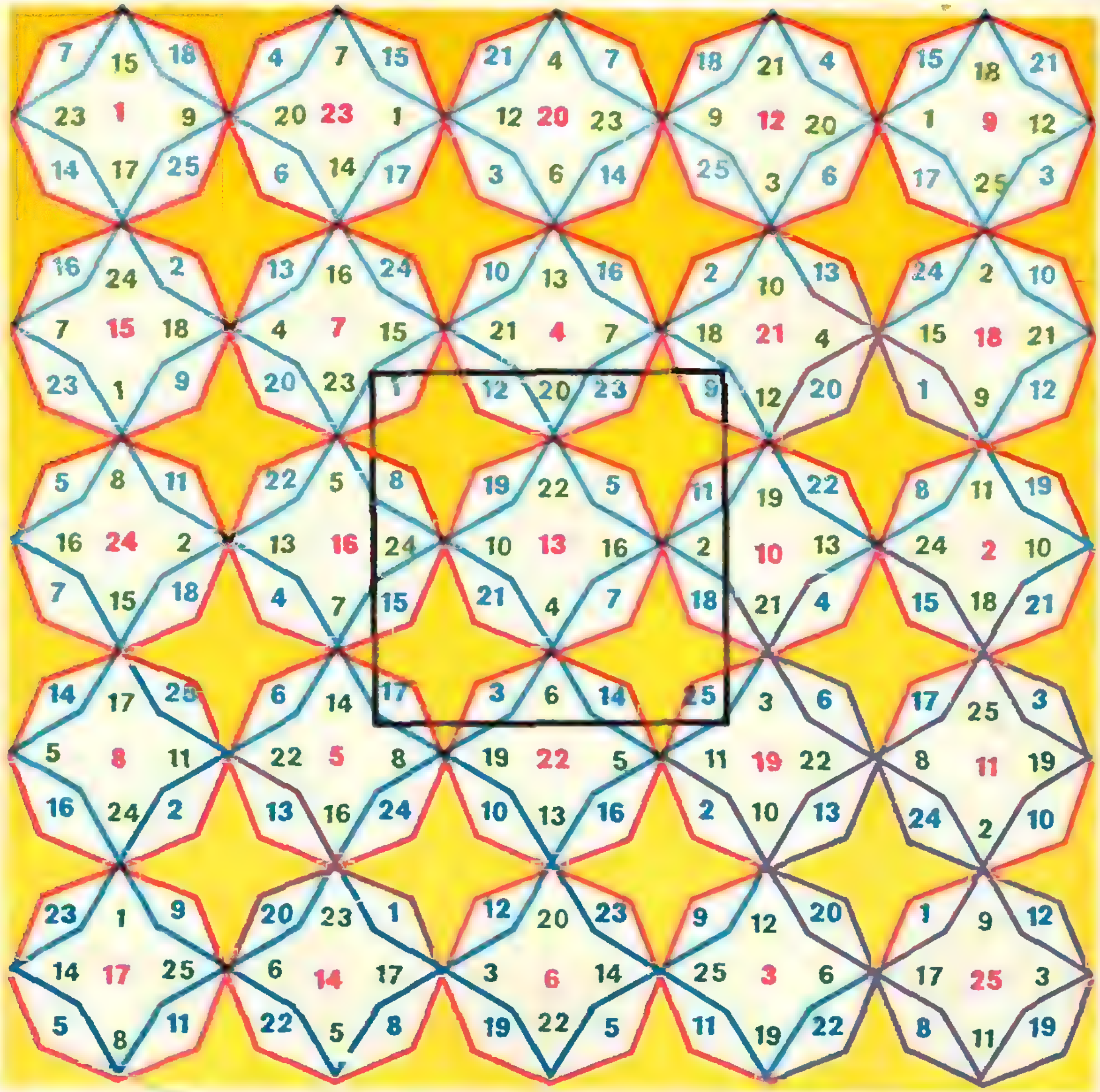
На фотографии изображена декоративная структура, созданная французским дизайнером Франсуа Мореллэ в 1962 г. Пространство сферы, диаметра около двух метров, заполнена кубической решеткой из алюминиевых трубок. При вращении сферы или ее обходе зрителем, наблюдаются своеобразные превращения пространственных образов, связанных с симметриями кубической структуры.

В. Колейчук

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Магические восьмиугольники

(См. текст на с. 37)



7	15	18	4	7	15	21	4	7	18	21	4	15	18	21
23	1	9	20	23	1	12	20	23	9	12	20	1	9	12
14	17	25	6	14	17	3	6	14	25	3	6	17	25	3
16	24	2	13	16	24	10	13	16	2	10	13	24	2	10
7	15	18	4	7	15	21	4	7	18	21	4	15	18	21
23	1	9	20	23	1	12	20	23	9	12	20	1	9	12
5	8	11	22	5	8	19	22	5	11	19	22	8	11	19
16	24	2	13	16	24	10	13	16	2	10	13	24	2	10
7	15	18	4	7	15	21	4	7	18	21	4	15	18	21
14	17	25	6	14	17	3	6	14	25	3	6	17	25	3
5	8	11	22	5	8	19	22	5	11	19	22	8	11	19
16	24	2	13	16	24	10	13	16	2	10	13	24	2	10
23	1	9	20	23	1	12	20	23	9	12	20	1	9	12
14	17	25	6	14	17	3	6	14	25	3	6	17	25	3
5	8	11	22	5	8	19	22	5	11	19	22	8	11	19

НОМЕР
12

Основан в 1970 году

Квант

12
1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *Н. Шефер.* Цезиевый эталон частоты (времени)
9 *А. Шкляр.* О транзитивных многогранниках

Лаборатория «Кванта»

15 *Дж. Уокер.* Физический фейерверк

Математический кружок

17 *В. Залгаллер, С. Залгаллер.* Венгерский шарнирный кубик

Задачник «Кванта»

22 Задачи М656—М660; Ф668—Ф672
24 Решения задач М609, М610; Ф613—Ф617

«Квант» для младших школьников

31 Задачи
32 *М. Зельманзон, Л. Хлабыстова.* Самосовмещения квадрата и тайнопись

По страницам школьных учебников

36 *Ю. Иванов.* Сколько вариантов?

Практикум абитуриента

40 *В. Чехлов.* Эти «коварные» векторы
45 *С. Кротов.* Задачи на столкновения тел

Искусство программирования

50 *Г. Звенигородский, Ю. Первин, А. Сосинский.* V Всесоюзная летняя школа юных программистов
55 Призеры Олимпиады по программированию

Рецензии, библиография

56 *А. Егоров, М. Смолянский.* Новые книги
57 **Шахматная страничка**
58 **Ответы, указания, решения**
62 Напечатано в 1980 году
Шахматный конкурс *(3-я с. обложки)*
Смесь *(14, 29, 30, 34, 35, 44, 55)*

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1980

Н. Шефер

Цезиевый эталон частоты (времени)

> *Наука начинается... с тех пор, как начинают измерять.*
>
> Д. И. Менделеев

Любые научные исследования — и в области микромира, и в космосе,— все производственные процессы — от изготовления скрепок до постройки атомного ледокола — опираются в конечном счете на измерения. Развитие техники и расширение научных исследований требуют все более совершенных методов измерений. Например, с появлением сверхзвуковой авиации диспетчерским службам аэропортов приходится иметь дело с миллионными долями секунды. Изучение атомных и ядерных процессов требует измерения промежутков времени в тысячи раз меньших миллиардной доли секунды.

Измерение физических величин по существу сводится к их сравнению с соответствующими эталонами. Поэтому от точности, с которой устанавливаются основные единицы измерения, зависит точность физического эксперимента.

Первый эталон времени

В отличие от измерений длины и массы, которые можно производить неоднократно, измерение прошедшего промежутка времени нельзя повторить и время невозможно измерить путем непосредственного сравнения с эталоном. О времени можно судить по изменениям в окружающем нас мире, например, по перемещениям, совершаемым телом, движущимся прямолинейно и равномерно. В основу измерения времени может быть положен также периодический процесс, например, равномерное вращение, колебания маятника.

Из-за того что движение тел происходит не в пустом пространстве и на них всегда действуют силы, в природе не существует абсолютно равномерных движений и идеально строгих периодических процессов. Отсюда и неизбежные неточности в любом способе измерения времени.

В качестве образцовых «часов», с которыми сверяются все часы на земном шаре, была принята система Земля — Солнце. За опорные точки отсчета промежутков времени приняты моменты времени, когда Солнце находится в определенном положении относительно земного наблюдателя. Первым эталоном времени было выбрано суточное вращение Земли. Промежуток времени между двумя последовательными верхними положениями центра солнечного диска (кульминациями) называют истинными солнечными сутками. Однако продолжительность этих суток в течение года меняется (движение Земли вокруг Солнца происходит неравномерно). Поэтому для отсчета времени было решено пользоваться средними солнечными сутками, длительность которых условились считать равной средней длительности истинных солнечных суток за год. За единицу времени — секунду — принималась 1/86400 часть средних солнечных суток. Для хранения времени в промежутках между астрономическими наблюдениями и воспроизведения единицы времени — секунды — применялись маятниковые часы. В лучших экземплярах особо точных часов изменение хода в течение суток составляло ~0,001 секунды, что соответствовало относительной погрешности $\frac{\Delta t}{t} \approx 10^{-8}$.

Кварцевые часы

Развитие радиоэлектроники позволило создать более точные хранители времени — кварцевые часы, в которых вместо колебаний маятника используются упругие колебания кварца.

У кварцевой пластинки, вырезанной определенным образом из кристалла, при деформации на противоположных гранях возникают разноименные заряды. Величина и знак заряда грани зависят, соответственно, от величины и направления деформации (рисунок 1). Это явление, называемое прямым пьезоэффектом, обратимо: если к пьезокварцевой пластинке приложить разность потенциалов, то пластика, в зависимости от полярности напряжения, либо сожмется, либо расширится. Такая пластинка, подключенная к источнику переменного напряжения, совершает вынужденные колебания с частотой, равной частоте электрических колебаний. При совпадении частоты ν электрических колебаний с собственной частотой ν_0 колебаний пластинки амплитуда A ее упругих колебаний будет наибольшей (рисунок 2). Частота собственных колебаний пластинки, определяемая ее размерами и формой, слабо зависит от температуры и внешних воздействий.

С точки зрения радиотехники пьезокварцевая пластинка эквивалентна обычному резонансному контуру, содержащему индуктивность и емкость, но отличается от него очень острым резонансом. Это свойство пьезокварца давно используется в радиотехнике для стабилизации частоты генераторов в радиопередатчиках. Это же свойство пьезокварца — высокое постоянство собственной частоты колебаний — было использовано для создания астрономических кварцевых часов. Основой таких часов является генератор электромагнитных колебаний, стабилизированный пьезокварцем. Схема генератора показана на рисунке 3.

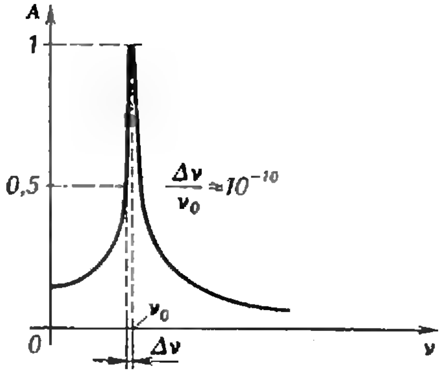
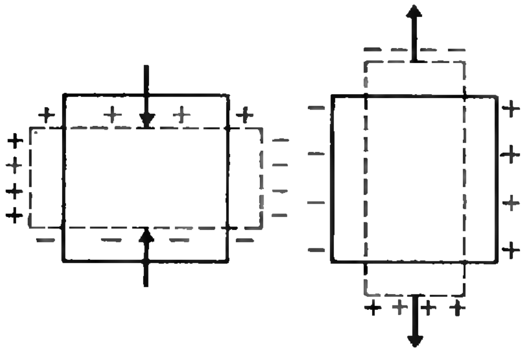


Рис. 2.

Кварцевая пластинка через нанесенные на противоположные грани электроды включается между сеткой и катодом радиолампы. После замыкания переключателя K ток в анодной цепи начинает заряжать конденсатор C. При разряде конденсатора через катушку индуктивности L в анодном контуре $L — C$ возникают затухающие электромагнитные колебания с частотой $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Для получения незатухающих колебаний нужно, чтобы колебания анодного тока совершались согласованно с колебаниями в анодном контуре и компенсировали потери энергии в нем. Это осуществляется посредством обратной связи. По цепи обратной связи «емкость $C_{а-с}$ — анод — сетка лампы» колебания в анодном контуре создают на кварцевой пластинке переменное напряжение той же частоты. Изменением емкости конденсатора C производится



Сжатие Растяжение

Рис. 1.

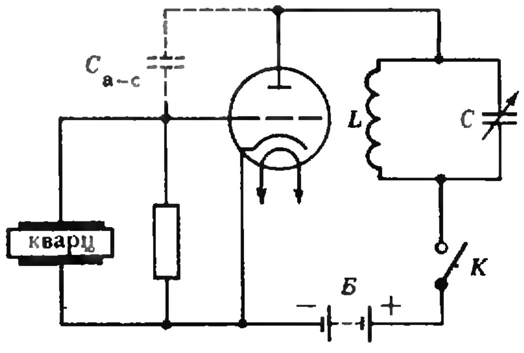


Рис. 3.

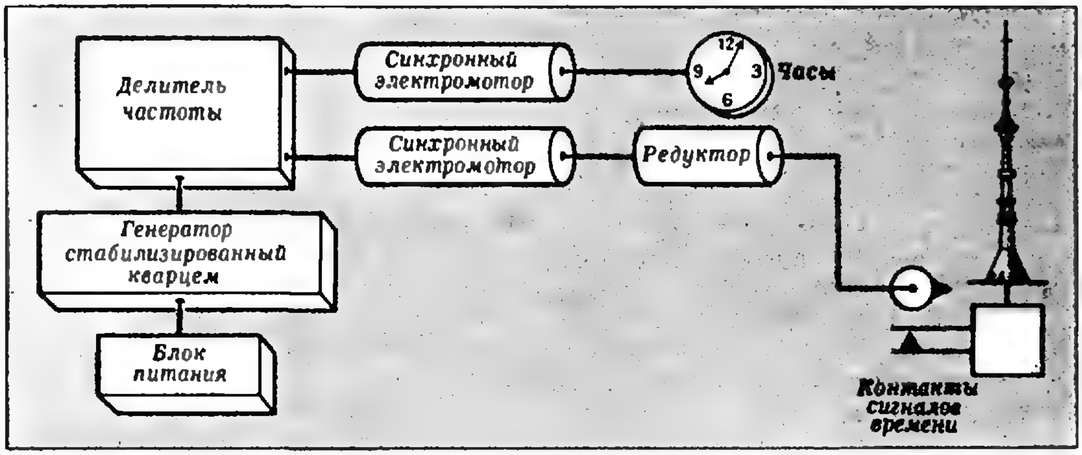


Рис. 4.

настройка анодного контура в резонанс с собственными колебаниями пластинки, сопровождаемыми синхронными изменениями величины зарядов на ее электродах. А это вызывает колебания потенциала сетки, управляющей анодным током. Пульсации анодного тока поддерживают (за счет энергии батареи *Б*) незатухающие колебания в анодном контуре и в пластинке.

Поскольку пьезокварц обладает острым резонансом (см. рисунок 2), то даже при небольшом различии в частотах анодного контура и пластинки амплитуда колебаний пластинки резко уменьшается и изменение зарядов на электродах становится недостаточным для управления анодным током. Вот почему генератор работает только на строго определенной частоте, равной частоте ν_0 собственных колебаний пластинки.

Частоты колебаний, вырабатываемые кварцевыми генераторами, обычно порядка 10^4—10^6 Гц. Для получения более редких отметок времени необходим электронный делитель частоты, уменьшающий частоту колебаний в строго известное число раз *). Синхронные электромоторы, работающие на переменном токе этой пониженной частоты, вращают стрелки часов и замыкают контакты реле, подающего сигнала точного времени. Упрощенная схема кварцевых часов показана на рисунке 4.

Относительная погрешность лучших кварцевых часов $\frac{\Delta t}{t} \approx 10^{-9}$—$10^{-10}$. За сутки они отстают или уходят вперед на 10^{-5} с.

Сомнительный эталон

Наблюдения за группой маятниковых часов и первых кварцевых часов еще в 1937 году показали, что длительность суток скачкообразно меняется в среднем за год на 0,002 с и одновременно плавно возрастает на 0,0016 с за 100 лет *). Значит, предельная точность определения секунды по часам «вращающаяся вокруг своей оси Земля» не превышает $\frac{2 \cdot 10^{-3}\text{ с}}{86400\text{ с}} \approx 0{,}2 \cdot 10^{-7}$.

Поэтому Международное бюро мер и весов в 1956 году решило перейти к более стабильному эталону времени — вращению Земли вокруг Солнца. В качестве эталона использовалась длительность тропического года — промежутка времени между двумя последовательными прохождениями центра Солнца через точку весеннего равноденствия. Поскольку продолжительность тропического года не является строго постоянной из-за возмущений, оказываемых планетами на движение Земли, то был выбран один из них — 1900 год.

---

*) Радиолюбителям известно, что деление частоты возможно с помощью триггерных схем.

*) Неравномерность вращения Земли, в основном, вызвана тем, что при приливах и отливах часть энергии вращательного движения расходуется на преодоление сил упругой деформации основной твердой части Земли и сил внутреннего трения при перемещениях больших масс воды в океанах и воздуха в атмосфере.

Точность определения секунды как 1/31556925,9747 части тропического года ограничивалась точностью астрономических наблюдений и достигала 10^{-10}.

Но все возрастающий уровень физического эксперимента и развитие техники требовали дальнейшего повышения точности установления основных единиц измерения. Например, успехи в исследовании космоса не были бы так значительны без возможности измерять время с точностью до 10^{-12} с. Это стало возможным после перехода к новым методам стандартизации частоты, основанным на атомных процессах.

Почему атомные часы точнее «земных» и кварцевых?

В отличие от макромира, где нет даже двух совершенно одинаковых тел, в микромире все частицы одного сорта, например электроны, принципиально неразличимы. Совершенно одинаковы и атомы, состоящие из одинакового числа элементарных частиц. Молекулы, представляющие собой одинаковые комбинации одного и того же числа одних и тех же атомов, также оказываются совершенно неразличимыми.

Одинаковые атомы или молекулы обладают одинаковыми и исключительно постоянными наборами собственных частот колебаний; они могут излучать или поглощать электромагнитные волны одинаковых и строго определенных длин, зависящих только от строения данного сорта частиц. Важно, что эти генераторы электромагнитных колебаний не подвержены износу и старению.

Вот почему так заманчиво было использовать атомные системы для стандартизации частоты (времени) и длины. Поскольку поведение микрочастиц определяется законами квантовой механики, эталоны, созданные на основе атомных систем, назвали квантовыми.

Первым квантовым эталоном стал эталон длины. Оказалось, что международный эталон длины — метр — содержит 1650763,73 длин волн излучения, возникающего при переходе между двумя определенными состояниями атома криптона (^{86}Кг).

Казалось бы, стандартизацию частоты и установление единицы времени следовало бы произвести по той же оранжевой линии криптона-86, которая используется для установления единицы длины. Однако удобнее использовать радиоизлучение, так как это дает возможность объединить эталон частоты с радиосхемой, контролирующей ход кварцевых часов или позволяющей сравнивать неизвестные частоты с эталонной. Учитывая эти обстоятельства, Международная конференция мер и весов в 1967 году решила отказаться от природного эталона времени «вращающаяся вокруг Солнца Земля» и перейти к искусственно созданному и не связанному с астрономическими наблюдениями квантовому эталону, в котором используется одна из длин волн электромагнитного излучения атомов цезия, лежащая в радиодиапазоне ($\lambda \approx 3{,}27 \cdot 10^{-2}$ м). Для того чтобы понять принцип действия квантовых часов, нам придется рассмотреть, как ведут себя атомы в магнитном поле.

Атом и магнитная стрелка

Электроны и ядра атомов помимо электрического поля создают в окружающем пространстве магнитные поля. Вектор индукции магнитного поля атома является геометрической суммой векторов магнитной индукции полей составляющих его частиц. У части атомов результирующий вектор индукции равен нулю, но многие атомы, в том числе и атомы цезия, обладают магнитным полем. Такие атомы в грубом приближении подобны магнитным стрелкам.

При отсутствии внешнего магнитного поля векторы индукции магнитных полей атомов цезия, как и у достаточно удаленных друг от друга магнитных стрелок, ориентированы хаотично. На языке квантовой механики это означает, что на одном энергетическом уровне находятся атомы с различным направлением магнитных полей (рисунок 5).

Известно, что стрелка компаса устанавливается в направлении сило-

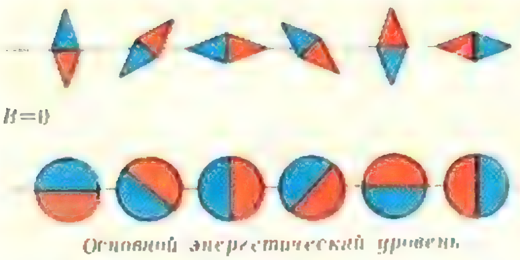


Рис. 5.

вых линий магнитного поля. Если, совершив работу против сил взаимодействия стрелки и магнитного поля, отклонить стрелку на некоторый угол и отпустить, то под действием этих сил она после нескольких колебаний вернется в первоначальное положение. Это положение равновесия устойчиво, потому что ему соответствует минимальное значение потенциальной энергии стрелки — в любом другом положении ее потенциальная энергия больше на величину работы, затраченной на изменение первоначальной ориентации.

Согласно квантовым представлениям, у атомов, помещенных во внешнее магнитное поле, возможны лишь две ориентации их собственных магнитных полей: либо «по полю» (как у магнитных стрелок в магнитном поле Земли), либо «против поля». Если ориентации «по полю» соответствует энергия атома E_1, то ориентации «против поля» будет соответствовать несколько большее значение энергии атома E_2 (подобно тому как энергия магнитной стрелки, принудительно расположенной «против поля», больше энергии магнитной стрелки, самопроизвольно ориентированной «по полю», на величину работы, затраченной на эту переориентацию). Иначе говоря, помещение атома цезия во внешнее магнитное поле вызывает расщепление основного энергетического уровня на два подуровня с энергиями E_1 и E_2, причем $E_2 > E_1$ (рисунок 6).

Переходы атомов $E_2 \rightarrow E_1$ (с подуровня E_2 на подуровень E_1) сопровождаются излучением, а переходы $E_1 \rightarrow E_2$ — поглощением волн с частотой $\nu_0 = \frac{E_2-E_1}{h} = \frac{\Delta E}{h}$. Разность энергий E_2-E_1 не велика, и частота ν_0 лежит в диапазоне радиоволн.

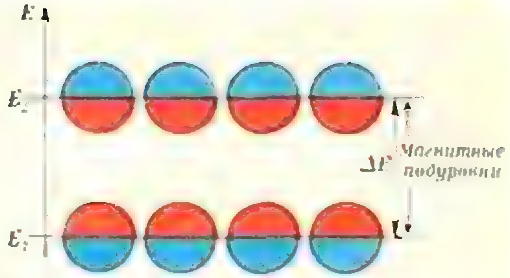


Рис. 6.

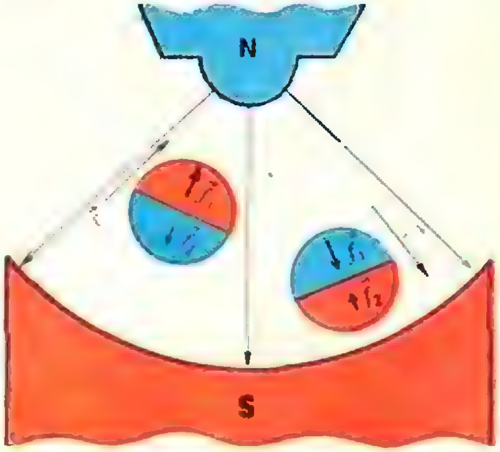


Рис. 7.

Величина ΔE очень слабо зависит от внешних воздействий. Поэтому излучение с частотой $\nu_0 = \frac{\Delta E}{h}$ можно использовать как эталонное. Но чтобы осуществить это на практике, необходимо пространственно «рассортировать» атомы по энергиям.

В силу того, что электрическое поле не оказывает действия на нейтральные атомы, а однородное магнитное поле способно вызывать только ориентацию магнитных полей атомов, «сортировка» атомов по энергиям производится с помощью неоднородного магнитного поля. Например, такого, как на рисунке 7. Как видно из рисунка, атомы, ориентированные «по полю», втягиваются в область большей его индукции, а атомы, ориентированные «против поля», смещаются в сторону меньшей индукции. Смещение вызвано неравенством сил, действующих на «северную» и «южную» части атома ($|\vec{f}_1| > |\vec{f}_2|$).

Цезиевый эталон

Схема устройства цезиевого эталона частоты показана на рисунке 8.

Через узкую щель нагревателя (*1*), в котором происходит испарение металлического цезия, атомы цезия вылетают в виде плоского пучка и попадают в область неоднородного магнитного поля $\tilde{B}_1$, создаваемого магнитом (*2*) специальной формы. Для простоты на рисунке изображены только траектории атомов по краям этого пучка. Движение атомов происходит внутри вакуумной трубки, не показанной на рисунке.

В неоднородном магнитном поле $\tilde{B}_1$ атомы цезия ориентируются «по полю» и «против поля», принимая, соответственно, значения энергии E_1 и E_2. Но кроме ориентации происходит разделение атомов по энергиям. Часть атомов верхнего края пучка, ориентированных «по полю» и имеющих энергию E_1, втягивается в область большей индукции и в работе прибора не участвует. Другая часть атомов верхнего края пучка, ориентированных «против поля» и обладающих энергией E_2, выталкивается из области с большей индукцией, и их траектории искривляются вниз. В нижней части пучка атомы с энергией E_2 (ориентация «против поля») отклоняются в сторону меньшей индукции и выходят из игры, а к оси прибора отклоняются атомы, ориентированные «по полю» (с энергией E_1).

Рассортированные по энергиям E_1 и E_2 атомы цезия попадают в резонатор (*3*), где создается однородное магнитное поле B (магнит (*4*)), в котором атомы движутся прямолинейно и сохраняют расщепление по энергиям. В области резонатора создается также электромагнитное поле, частота которого может плавно изменяться. Если эта частота в точности равна частоте $\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h}$, то часть атомов с энергией E_1, поглотив квант энергии $h\nu_0 = E_2 - E_1$, перейдет в состояние E_2 и примет ориентацию «против поля», а часть атомов с энергией E_2 другого пучка под действием кванта $h\nu_0$ в результате вынужденного излучения перейдет в состояние E_1, изменив ориентацию «против поля» на ориентацию «по полю»*). За резонатором находится область неоднородного магнитного поля $\tilde{B}_2$ (магнит (*5*)), подобного полю $\tilde{B}_1$. В этом поле происходит рассортировка атомов по энергиям, в результате которой появившиеся вследствие взаимодействия с электромагнитным полем атомы с энергиями E_2 и E_1 отклоняются к оси пучка и попадают на приемник. Атомы с энергией E_1, не поглотившие квант электромагнитного поля $h\nu_0$, и атомы с энергией E_2, не испытавшие вынужденного излучения, отклоняются неоднородным магнитным полем B_2 в сторону от оси прибора и не попадают на приемник. Таким образом, если частота электромагнитного поля не равна частоте $\nu_0 = \frac{\Delta E}{h}$, то взаимодействия электромагнитного поля с атомами цезия нет. В этом случае в приемник атомы не попадают.

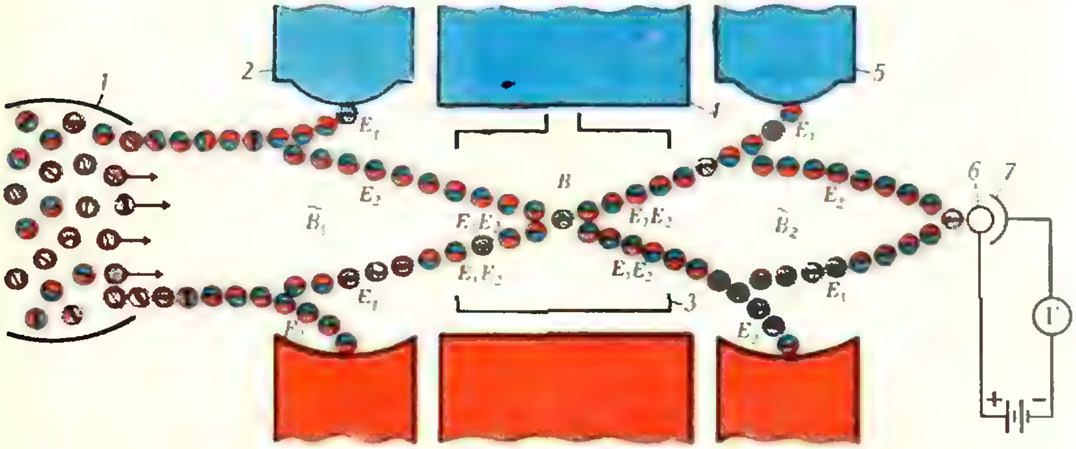


Рис. 8.

---

*) В. А. Фабрикант. «Что происходит в гелий-неоновом лазере». («Квант», 1978, № 6.)

Приемник представляет собой нагретую вольфрамовую проволоку (*6*), расположенную вдоль оси электрода полуцилиндрической формы (*7*). Атомы цезия, соприкоснувшись с раскаленным вольфрамом, отдают ему валентные электроны, становятся положительными ионами и притягиваются к отрицательно заряженному электроду — коллектору (*7*). Очевидно, что ток через гальванометр *Г* пропорционален числу атомов цезия, изменивших свою энергию путем поглощения или испускания в области резонатора кванта радиоизлучения $h\nu_0$. Кривая зависимости тока через гальванометр от частоты электромагнитного поля в резонаторе по форме аналогична кривой на рисунке 2, но обладает еще более узким максимумом: $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \approx 10^{-13}$.

Частоту $\nu_0 = (E_2 - E_1)/h = 9192631770{,}0$ Гц, при которой ток достигает максимального значения и происходят квантовые переходы $E_1 \rightleftarrows E_2$ атомов изотопа цезия-133 (^{123}Cz), Международная конференция мер и весов приняла за эталонную. Единица времени — атомная секунда — это 9 192 631 770, 0 периодов таких электромагнитных колебаний.

Цезиевая трубка и высокочастотный генератор связаны с электронным устройством — дискриминатором, автоматически подстраивающим частоту генератора к эталонной частоте ν_0, на которую реагируют атомы цезия. Высокая степень стабилизации частоты обусловлена тем, что даже самая незначительная расстройка генератора резко влияет на величину сигнала с цезиевой трубки.

Поскольку период колебаний, соответствующий эталонной частоте ν_0, на много порядков отличается от единицы времени — секунды, то возникает задача получения низкочастотного сигнала, управляющего ходом стрелочных часов и устройством для выработки сигналов точного времени. Для этого генератор связан с резонатором не непосредственно, а через цепи умножения. Поэтому его частота в известное число раз меньше эталонной. Этот генератор контролирует ход кварцевых часов, управляющих стрелочными часами и устройством для выработки сигналов точного времени.

Первый квантовый цезиевый стандарт частоты был создан в 1955 году английским физиком Л. Эссеном. За создание и применение этого прибора он был удостоен Золотой медали имени А. С. Попова.

Один из четырех самых лучших в мире цезиевых эталонов, являющийся основой Государственного первичного эталона частоты и времени, находится в Главном метрологическом центре нашей страны в подмосковном поселке Менделеево. Он воспроизводит атомную секунду с относительной точностью до $3 \cdot 10^{-13}$, что соответствует ошибке в одну секунду за 100 000 лет. Для хранения времени, то есть непрерывного счета секунд, минут и часов, подачи сигналов точного времени и поверок служат вторичные цезиевые эталоны частоты и времени и целая группа аммиачных, водородных, рубидиевых и других квантовых генераторов — лазеров, ширина спектральных линий которых очень узка ($\sim 10^{-7}$ Å). Для измерения частоты излучения лазера, отличающейся от эталонной на несколько порядков, сближают эти частоты путем многократного увеличения меньшей из них в строго известное число раз. Сравнение двух близких по величине частот производится путем измерения их частоты биений с помощью осциллографа и другими методами*).

В последние годы выяснилось, что параметры часов, основанных на водородном квантовом генераторе, лучше, чем у цезиевых. Их нестабильность в течение суток порядка 10^{-14}, то есть в 10 раз меньше, чем у цезиевого эталона. Предполагается, что ее можно уменьшить до 10^{-16}. Поэтому обсуждается вопрос о замене цезиевого стандарта частоты другим, еще более точным и стабильным эталоном.

В наши дни точность измерения времени в десятки тысяч раз превышает точность измерения других физических величин.

---

*) Об этом можно прочитать в статье А. В. Елецкого «Скорость света и ее измерение» («Квант», 1975, № 2).

А. Шкляр

О транзитивных многогранниках

В прошлом году киевский школьник А. Шкляр прислал в редакцию нашего журнала статью «Геометрический способ нахождения всех конечных групп положительных перемещений пространства», в основу которой были положены его собственные результаты, доложенные им на заседаниях математического кружка Киевского НОУ.

Публиковать статью на столь нешкольную тему мы бы не стали, но теорема, доказанная А. Шкляром, допускает переформулировку, связанную со школьной темой «Многогранники».

Ниже публикуется статья А. Шкляра, переработанная членом редколлегии «Кванта» профессором В. Г. Болтянским.

В п. 3 дается простое геометрическое описание «устройства» граней положительно транзитивных многогранников. В п. 4 все они перечисляются.

1. Перемещения, имеющие неподвижную точку

Прежде чем формулировать задачу, о которой пойдет речь в этой заметке, напомним (см. статью А. Сосинского «Перемещения пространства» в «Кванте» № 8) некоторые факты, связанные с перемещениями пространства. Будем предполагать, что в пространстве фиксирована точка O, и рассмотрим лишь такие перемещения пространства, при которых точка O остается неподвижной, то есть переходит в себя. Примером такого перемещения может служить поворот f на некоторый угол вокруг прямой l, проходящей через точку O. При перемещении f каждая точка прямой l переходит в себя, а других неподвижных точек нет (если только угол поворота не кратен 2π).

Заметим, что поворот представляет собой перемещение, сохраняющее ориентацию. (Это можно пояснить следующим образом: правый винт переходит при повороте снова в правый винт.) В статье Сосинского было доказано, что *среди перемещений, оставляющих неподвижной точку O, повороты вокруг прямых, проходящих через O, и только они, сохраняют ориентацию.* Поскольку композиция двух перемещений, сохраняющих ориентацию, также сохраняет ориентацию, мы заключаем, что *композиция двух поворотов вокруг прямых, проходящих через точку O, также представляет собой поворот вокруг некоторой прямой, проходящей через O.*

2. Положительно транзитивные многогранники

Некоторое (непустое) множество перемещений G называется *группой перемещений*, если оно обладает следующими свойствами:

1) $f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G$;
2) $f_1 \in G$ и $f_2 \in G \Rightarrow f_2 \circ f_1 \in G$.

Из сказанного в предыдущем пункте ясно, что множество поворотов (на всевозможные углы) вокруг прямых, проходящих через O, представляет собой группу перемещений.

Пусть теперь M — некоторая фигура в пространстве. Множество всех самосовмещений фигуры M обозначим $\Gamma(M)$ см. («Квант», 1980, № 7, стр. 4), и через $\Gamma_+(M)$ обозначим множество самосовмещений фигуры M, сохраняющих ориентацию. Очевидно, каждое из множеств $\Gamma(M)$, $\Gamma_+(M)$ представляет собой группу перемещений.

Множество M называется *транзитивным*, если для любых точек A, B этого множества в группе $\Gamma(M)$ имеется перемещение, переводящее A в B. Аналогично, множество M назовем *положительно транзитивным*, если для любых $A, B \in M$ найдется такое самосовмещение $f \in \Gamma_+(M)$, что $f(A) = B$.

Назовем многогранник *положительно транзитивным*, если множество всех его вершин является положительно транзитивным. Если многогранник M положительно транзитивен, то он, конечно, транзитивен, и потому (см. «Квант», 1980, № 7, с. 5, теорема 2) вокруг него можно описать сферу. Каждое самосовмещение многогранника M переводит центр O этой сферы в себя. Поэтому каждое сохраняющее ориентацию самосовмещение многогранника M представляет собой поворот вокруг некоторой прямой, проходящей через точку O. Теперь определение положительно транзитивного многогранника можно сформулировать следующим образом: многогранник M называется *положительно транзитивным*, если вокруг него можно описать сферу и при этом для любых двух его вершин A, B имеется поворот (вокруг некоторой прямой, проходящей через центр описанной сферы), который переводит этот многогранник в себя, а вершину A переводит в B.

Целью нашей статьи является описание всех положительно транзитивных многогранников.

3. Какие бывают грани

Пусть M — положительно транзитивный многогранник. Фиксируем его грань γ. Одно из двух: либо существует поворот $f \in \Gamma_+(M)$, отличный от тождественного, который переводит грань γ в себя, либо такого поворота не существует.

Пусть сначала такой поворот f существует и l — ось этого поворота. Прямая l проходит через центр O описанной сферы и пересекает грань γ в некоторой точке P.

Точка P не может, очевидно, быть вершиной многогранника M.

Точка P не может также быть и внутренней точкой некоторого ребра AB, принадлежащего грани γ. Допустим противное. Поскольку $f(P)=P$, ребро AB тоже должно перейти в себя (поскольку других ребер, проходящих через точку P, нет). Следовательно, $f(A)=B$, $f(B)=A$. Отсюда вытекает, что ребро AB перпендикулярно прямой l и делится точкой P пополам, а f представляет собой поворот на угол π вокруг прямой l. Однако в этом случае, очевидно, $f(\gamma)\neq\gamma$.

Значит, точка P является внутренней точкой грани γ. Поскольку $f(\gamma)=\gamma$, прямая l перпендикулярна плоскости грани γ. Пусть $g \in \Gamma_+(M)$ — поворот на наименьший (по величине) угол, переводящий грань γ в себя, и α — величина этого угла. Тогда поворот на каждый из углов 2α, 3α,... также переводит грань γ в себя. Отсюда можно заключить, что $\alpha=\frac{2\pi}{k}$, где k — некоторое натуральное число. В самом деле, если k — такое число, что $(k-1)\alpha<2\pi$, но уже $k\alpha\geqslant 2\pi$, то при $k\alpha>2\pi$ получилось бы, что поворот на угол $k\alpha-2\pi$ переводит грань γ в себя, чего, однако, не может быть, поскольку $k\alpha-2\pi<\alpha$. Следовательно, $k\alpha=2\pi$, то есть g есть поворот на угол $\frac{2\pi}{k}$. Возьмем произвольную вершину A_0 грани γ и положим $A_1=g(A_0)$, $A_2=g(A_1)$,..., $A_{k-1}=g(A_{k-2})$ (тогда $g(A_{k-1})=A_0$). Вершины многоугольника γ между A_0 и A_1 обозначим через B_1, B_2, ..., B_{m-1}. Ломаная $p_0=A_0B_1B_2...B_{m-1}A_1$ (состоящая из m звеньев) переходит при повороте g в аналогичную ломаную $p_1=g(p_0)$ (идущую от точки A_1 до A_2) и т. д.; наконец, ломаная $p_{k-1}=g(p_{k-2})$ соединяет точки A_{k-1} и A_0. Из этого видно, что многоугольник γ имеет km вершин, причем m вершин A_0, B_1, B_2,..., B_{m-1} «различны» в том смысле, что никакие две из них не могут быть совмещены каким-либо поворотом из $\Gamma_+(M)$, переводящим грань γ в себя. Остальные же вершины «одинаковы» с какой-либо из вершин A_0, B_1, B_2,..., B_{m-1}. Число k будем называть *числом периодов* грани γ.

Если $m=1$, то есть поворот g переводит вершину A_0 в соседнюю вершину грани γ, то существует и поворот, переводящий A_0 в любую другую вершину этой грани. Такая грань называется *транзитивной*. Легко видеть, что транзитивная грань является правильным многоугольником, а все вершины, принадлежащие этой грани, устроены одинаково.

Если же не существует поворота $f \in \Gamma_+(M)$, отличного от тождественного, который переводит грань γ в себя, то есть все вершины грани γ «различны», положим $k=1$ и через m обозначим число ее вершин.

Теперь числа k и m определены для любой грани любого положительно транзитивного многогранника.

Лемма 1. *Для любой грани γ числа k и m могут принимать только следующие значения:* 1) $k=1$, $m=3$; 2) $k\geqslant 2$, $m=2$; 3) $k>2$, $m=1$.

Доказательство. Поскольку M — положительно транзитивный многогранник, существует поворот $h_i\in\Gamma_+(M)$, переводящий B_i в A_0 ($i=1,2,\ldots,m-1$). Грань $h_i(\gamma)$ конгруэнтна γ, но не совпадает с ней, поскольку вершины A_0 и B_i «различны». Более того, все грани γ, $h_1(\gamma),\ldots,h_{m-1}(\gamma)$ попарно различны (если $h_1(\gamma)=h_2(\gamma)$, то $h_2^{-1}h_1(B_1)=h_2^{-1}(A_0)=B_2$), и все они примыкают к вершине A_0. Поэтому сумма величин углов многоугольников γ, $h_1(\gamma),\ldots,h_{m-1}(\gamma)$ при вершине A_0 меньше 2π. Это означает, что сумма величин углов многоугольника γ при вершинах A_0, $B_1,\ldots,B_{m-1}$ меньше 2π. Но сумма величин всех углов многоугольника γ равна $(km-2)\pi$, а потому сумма величин его углов при вершинах A_0, $B_1,\ldots,B_{m-1}$ равна $\sigma=\frac{1}{k}(km-2)\pi$. Следовательно, $\frac{1}{k}(km-2)\pi<2\pi$, то есть $m-2<\frac{2}{k}$. Кроме того, $km\geqslant 3$. Из полученных неравенств $m-2<\frac{2}{k}$, $km\geqslant 3$ вытекает, что для k и m возможны только указанные значения. (Убедитесь в этом.)

Лемма 2. *Если к вершине A_0 примыкает нетранзитивная грань γ, то все остальные нетранзитивные грани при вершине A_0 конгруэнтны ей; а количество примыкающих к A_0 нетранзитивных граней равно m.*

Доказательство. При доказательстве леммы 1 мы видели, что сумма величин углов грани γ при «различных» вершинах A_0, $B_1,\ldots,B_{m-1}$ равна $\sigma=\frac{\pi}{k}(km-2)$. При $m=3$, $k=1$ (первая возможность в лемме 1) имеем $\sigma=\pi$; при $m=2$, $k\geqslant 2$ (вторая возможность) имеем $\sigma=\frac{k-1}{k}\cdot 2\pi\geqslant\pi$. Таким образом, при $m>1$ (то есть для нетранзитивной грани) $\sigma\geqslant\pi$. Применив к γ повороты h_1, $h_2,\ldots,h_{m-1}$ из доказательства леммы 1, получаем при вершине A_0 m конгруэнтных нетранзитивных граней γ, $h_1(\gamma),\ldots,h_{m-1}(\gamma)$ и заключаем, что второго «комплекта» нетранзитивных граней в точке A_0 примыкать не может (сумма плоских углов при вершине A_0 была бы больше или равна 2π).

При формулировке следующей леммы условимся о термине *смежные грани:* так будем называть две грани, имеющие общую сторону (то есть две грани, имеющие лишь общую вершину, смежными считать не будем).

Лемма 3. *Любые две грани, смежные с некоторой транзитивной гранью γ, могут быть совмещены некоторым поворотом из $\Gamma_+(M)$, переводящим γ в себя.*

Доказательство этой простой и важной леммы мы предоставляем читателю.

4. Описание всех положительно транзитивных многогранников

Чтобы перечислить все положительно транзитивные многогранники, рассмотрим четыре возможности.

А) *Многогранник M содержит нетранзитивную грань γ, отличную от треугольника, причем для этой грани число периодов* (то есть k) *больше* 2. Следовательно, по лемме 1, $m=2$.

Пусть A_0 — какая-либо вершина грани γ. Тогда, по лемме 2, к вершине A_0 примыкают две конгруэнтные нетранзитивные грани γ, γ_1, а остальные примыкающие к A_0 грани транзитивны. Ясно, что хотя бы одна транзитивная грань имеется (так как в каждой вершине сходятся не менее трех граней). При доказательстве леммы 1 мы видели, что сумма величин углов грани γ при «различных» вершинах (или, что то же самое, сумма величин углов граней γ, γ_1 при вершине A_0) равна $\sigma=\frac{\pi}{k}(km-2)=\frac{\pi}{k}(2k-2)=2\pi-\frac{2\pi}{k}$. Так как $k>2$, $\sigma\geqslant 2\pi-\frac{2\pi}{3}$

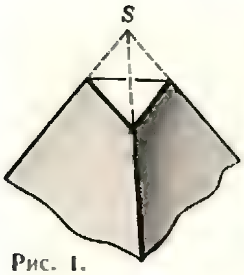


Рис. 1.

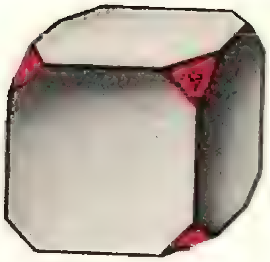


Рис. 2.

Так как сумма всех углов, сходящихся в вершине A_0, меньше 2π, на сумму углов транзитивных граней при вершине A_0 приходится меньше $\frac{2\pi}{3}$, откуда видно, что к A_0 может примыкать только одна транзитивная грань γ. Если эта грань является правильным l-угольником, то есть имеет угол $\alpha=\pi-\frac{2\pi}{l}$, то, согласно сказанному, $\sigma+\alpha<2\pi$, то есть $\left(2\pi-\frac{2\pi}{k}\right)+\left(\pi-\frac{2\pi}{l}\right)<2\pi$. Иначе говоря, $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}>\frac{1}{2}$. Учитывая, что $k>2$, $l>2$, находим отсюда следующие пять возможностей:

1) $m=2,\ k=3,\ l=3;$
2) $m=2,\ k=3,\ l=4;$
3) $m=2,\ k=3,\ l=5;$
4) $m=2,\ k=4,\ l=3;$
5) $m=2,\ k=5,\ l=3.$

Положительно транзитивные многогранники, соответствующие этим случаям, легко построить: для этого нужно «срезать» вершины у пяти правильных многогранников (о правильных многогранниках см. «Геометрия 9—10», § 54 или «Квант», 1980, № 7, с. 6).

Чтобы срезать вершину, нужно отложить на всех ребрах, выходящих из нее, отрезки равной длины, меньшей половины длины ребра, и провести плоскость через полученные точки (рис. 1). Например, на рисунке 2 изображен многогранник, соответствующий случаю 4: он получается срезанием вершин куба. Легко видеть, что все самосовмещения куба переводят в себя этот многогранник и наоборот. Поэтому группа самосовмещений многогранника совпадает с группой самосовмещений куба. То же относится к остальным из перечисленных пяти случаев.

Таким образом, положительно транзитивные многогранники, соответствующие случаю А,— это *правильные многогранники со срезанными вершинами*.

Б) *Многогранник M содержит нетранзитивную грань γ, отличную от треугольника, причем для этой грани* $k=2$. Здесь также $m=2$, то есть грань γ является параллелограммом ($m=2$, $k=2$), причем $\sigma=\frac{\pi}{k}(km-2)=\pi$. Следовательно, к вершине A_0 примыкают не более двух транзитивных граней.

Рассмотрим сначала подслучай, когда к вершине A_0 примыкают 2 транзитивные грани. Эти грани не являются смежными (иначе по лемме 3 все грани были бы конгруэнтны одной из них и были бы транзитивными, что невозможно, так как имеется нетранзитивная грань γ). Положим, что эти грани являются правильным l_1-угольником и правильным l_2-угольником, тогда $\sigma+\left(\pi-\frac{2\pi}{l_1}\right)+\left(\pi-\frac{2\pi}{l_2}\right)<2\pi$, то есть $\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}>\frac{1}{2}$. Это дает еще три возможности (мы можем считать, что $l_1\leqslant l_2$):

6) $m=2,\ k=2,\ l_1=3,\ l_2=3;$
7) $m=2,\ k=2,\ l_1=3,\ l_2=4;$
8) $m=2,\ k=2,\ l_1=3,\ l_2=5.$

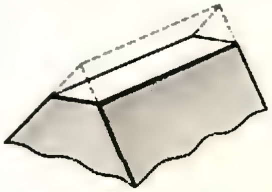


Рис. 3.

Соответствующие положительно транзитивные многогранники можно получить «срезанием» вершин и ребер у правильных многогранников (на рисунке 1 показана процедура срезания вершин, на рисунке 3 — процедура срезания ребра).

На второй странице обложки изображены многогранники, полученные таким способом из пяти правильных многогранников. Многогранники 1 и 2 с точки зрения нашей классификации «одинаковы» — к каждой вершине примыкают одинаковые наборы граней (на языке «высшей» алгебры: группы самосовмещений этих многогранников *изоморфны* — «Квант», 1976, № 10, с. 10; «одинаковы» в том же смысле многогранники 3 и 4).

Итак, в этом подслучае получаем три типа положительно транзитивных многогранников — *правильные многогранники со срезанными вершинами и ребрами.*

Если же к вершине A_0 примыкает лишь одна транзитивная грань (l-угольник), то $\sigma + \left(\pi - \frac{2\pi}{l}\right) < 2\pi$, то есть $-\frac{2\pi}{l} < 0$. Иначе говоря, в этом случае никаких ограничений на l не накладывается. Мы получаем

9) $m=2$, $k=2$, $l \geqslant 3$ — любое.

Соответствующий многогранник является *правильной l-угольной призмой* (рис. 4).

В) *Многогранник M содержит нетранзитивную грань γ, являющуюся треугольником* ($k=1$, $m=3$). В этом случае $\sigma=\pi$, и потому к вершине $A_0 \in \gamma$ примыкают три треугольника γ, γ_1, γ_2 и еще могут примыкать две, одна или ни одной транзитивных граней.

Если к вершине A_0 примыкают две транзитивные грани (правильный l_1-угольник и правильный l_2-угольник, причем $l_1 \leqslant l_2$), то имеются три возможности (на рисунке 5 схематически показано, как примыкают друг к другу грани в вершине A_0):

10) $m=3$, $k=1$, $l_1=3$, $l_2=3$;
11) $m=3$, $k=1$, $l_1=3$, $l_2=4$;
12) $m=3$, $k=1$, $l_1=3$, $l_2=5$.

Схемы вершин многогранников 10), 11), 12) показаны на рисунках 6—8. Многогранник 10) — «неправильный икосаэдр».

Если к вершине A_0 примыкает одна транзитивная грань — правильный l-угольник, то соотношение $\sigma + \left(\pi - \frac{2\pi}{l}\right) < 2\pi$ не дает никаких ограничений на l. Получаем еще один случай:

13) $m=3$, $k=1$, $l \geqslant 3$.

На рисунке 9 изображен соответствующий многогранник (*антипризма*)

Если же у многогранника вообще нет транзитивных граней, то к каж-

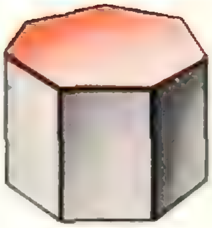


Рис. 4.

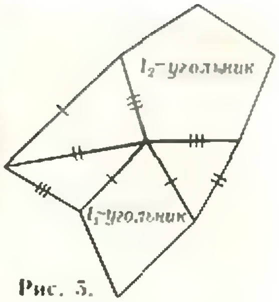


Рис. 5.

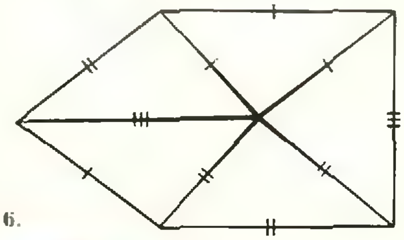


Рис. 6.

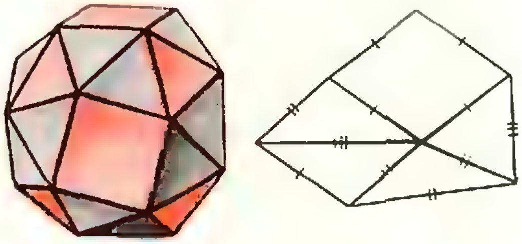


Рис. 7.

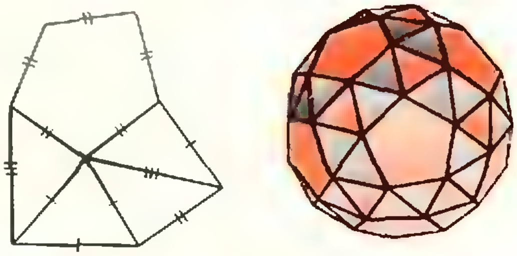


Рис. 8.

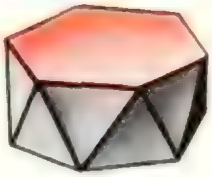


Рис. 9.

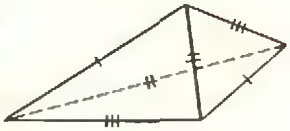


Рис. 10.

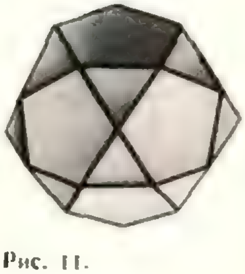


Рис. 11.

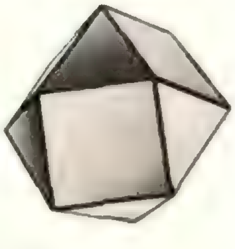


Рис. 12.

дой вершине примыкают различными углами три конгруэнтных остроугольных треугольника, и многогранник оказывается *тетраэдром* (убедитесь в этом), изображенным на рисунке 10. Разверткой этого тетраэдра*) служит произвольный остроугольный треугольник с проведенными средними линиями. Таким образом, получен еще один тип положительно транзитивных многогранников:

14) $m=3$, $k=1$.

Г) *Многогранник M не содержит нетранзитивных граней.*

Согласно лемме 3, либо все грани конгруэнтны — это дает *пять правильных многогранников* (случаи 15—19), либо же имеются два вида граней: правильные l_1-угольники и правильные l_2-угольники, причем смежными с l_1-угольниками являются только l_2-угольники и наоборот (здесь $l_1 < l_2$). В этом последнем случае в каждой вершине сходятся l_1-угольник, затем l_2-угольник, затем снова l_1-угольник и т. д. Отсюда легко заключить, что в вершине сходятся по два l_1-угольника и l_2-угольника. Следовательно, $2\left(\pi - \frac{2\pi}{l_1}\right) + 2\left(\pi - \frac{2\pi}{l_2}\right) < 2\pi$, откуда $\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_1} > \frac{1}{2}$, что дает 2 возможности:

20) $l_1=3$, $l_2=4$;
21) $l_1=3$, $l_2=5$.

Соответствующие многогранники получаются *отсечением вершин правильных многогранников, причем так, что отсекающие плоскости проходят через середины ребер.* Эти многогранники изображены на рисунках 11 и 12.

Итак, все положительно транзитивные многогранники описываются случаями 1—21.

В заключение заметим, что приведенными рассуждениями дается также перечисление всех конечных групп положительных перемещений пространства: все они либо совпадают с группами положительных самосовмещений правильных многогранников, призм и антипризм, либо же являются подгруппами этих групп.

---

*) Иногда такие тетраэдры называют *полуправильными.*

Задачи наших читателей

1. Известно, что

$$F\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2F\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x.$$

Найдите $F(x)$.

Н. Адигезалов

2. Пусть дано равенство $x^{2m} + y^{2m} = z^{2m}$, где x, y, z, $m > 1$ — натуральные числа. Докажите, что x, y, z не могут образовывать прогрессию — ни арифметическую, ни геометрическую.

М. Ибрагимов

3. Обозначим через $S(A)$ сумму цифр числа A. Докажите, что последовательность $\left(\frac{S(n^2)}{S(n)}\right)$, $n \in \mathbf{N}$ не ограниченна.

Верно ли аналогичное утверждение для последовательности $\left(\frac{S(n)}{S(n^2)}\right)$?

Э. Туркевич

Когда под рукой нет ЭВМ

Очевидное тождество

$$a^2 = (a-d)(a+d) + d^2$$

может оказаться полезным при возведении чисел в квадрат:

$$43^2 = (43-3)(43+3) + 3^2 = 40 \cdot 46 + 9 = 1849,$$

$$43^2 = (43+7)(43-7) + 7^2 = 50 \cdot 36 + 49 = 1849,$$

$$257^2 = (257+43)(257-43) + 43^2 = 300 \cdot 214 + 43^2 = 64200 - 1849 = 66049.$$

А. Криц

Дж. Уокер

Физический фейерверк

Задачи-вопросы, публикуемые ниже, взяты из книги Дж. Уокера «Физический фейерверк», выпущенной недавно издательством «Мир».

1. С карандашом в ванне

Если, купаясь в ванне, вы захотите немного развлечься, захватите с собой карандаш и понаблюдайте за его тенью на дне ванны. Погрузив карандаш в воду наполовину, вы увидите, что его тень не имеет с ним ничего общего — она скорее похожа на два стержня с закругленными концами, которые разделены светлым промежутком (рис. 1). Откуда возник этот светлый промежуток и чем определяется его ширина?

2. Изображение монеты в воде

Положите монету на дно прозрачной широкой банки, наполненной водой, и посмотрите на монету сквозь воду под разными углами зрения. При некотором угле вы увидите изображение монеты на поверхности воды (рис. 2). Теперь приложите к банке с обратной стороны руку. Скорее всего, это не повлияет на изображение монеты, однако, если рука будет мокрой, изображение исчезнет. Почему?

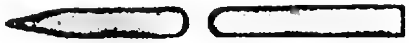


Рис. 1.

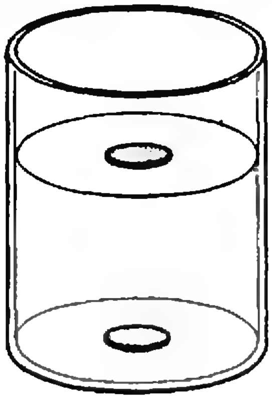


Рис. 2.

3. «Призраки» в окнах с двойными рамами

Почему отдаленные предметы кажутся раздвоенными, если смотреть на них через окно с двойной рамой? В некоторых случаях, например при наблюдении через окно диспетчерской аэропорта, подобное раздвоение изображения не просто неприятно — оно может привести к весьма опасным ситуациям. Попытайтесь, хотя бы ориентировочно, оценить угловое расстояние между истинным предметом и его «призраком». Как оно зависит от времени суток и погодных условий?

4. Светящийся дождь

Возможно вам приходилось когда-нибудь видеть дождь, идущий вдалеке? Когда эта далекая стена дождя освещена прямым солнечным светом, можно заметить, что выше некоторой отчетливой горизонтальной линии дождь кажется гораздо более светлым, чем внизу. Как это можно объяснить?

5. Солнечные очки и искажение видимого движения

Закрыв темным фильтром, например стеклом от солнечных очков, один глаз, посмотрите на качание простого маятника. Хотя вы точно знаете, что маятник качается в одной плоскости, у вас создастся впечатление, что он описывает эллипс (рис. 3). Непосвященному это наблюдение может показаться удивительным, даже загадочным.

Если вам как-нибудь придется сидеть за рулем автомобиля в солнечных очках с одним стеклом, вы обна-

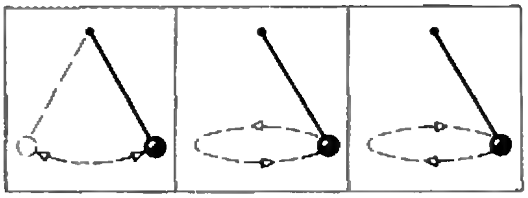


Рис. 3.

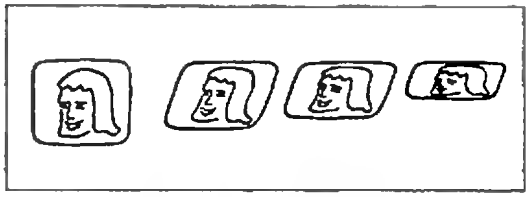


Рис. 4.

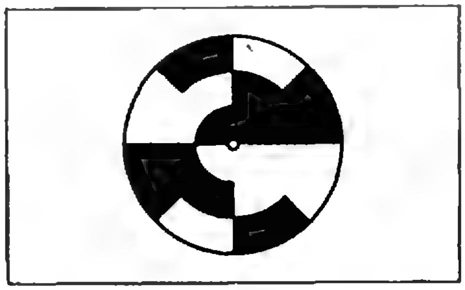


Рис. 5.

ружите, что скорость автомобиля, идущего слева от вас, заметно отличается от скорости автомобиля, идущего справа, хотя на самом деле они движутся с одинаковыми скоростями. Скорости обоих автомобилей вы оцениваете неверно.

Более того, в рассмотренном случае вы неправильно оцените расстояния до окружающих предметов. Ошибка в оценке зависит даже от того, справа или слева от вас находится предмет.

Чем объясняется кажущееся трехмерное движение маятника? Какую роль играет световой фильтр или стекло очков в оценке этого движения, скорости автомобиля и расстояния до предметов?

6. Вращающийся волчок перед экраном телевизора

Если в темной комнате перед экраном телевизора, изображение на котором сохраняется неизменным, запустить плоский волчок с узором на верхней поверхности, то на волчке возникнут умопомрачительные картинки. Нет сомнения в том, что они обусловлены узором на поверхности волчка, но причем тут свет телевизионного экрана?

7. «Плавающие» телевизионные изображения

Глядя в темной комнате на экран телевизора, быстро переведите глаза сначала на полметра влево от экрана, а потом тут же на полметра вправо. Вы увидите детальное призрачное изображение телевизионного кадра, «висящее» в воздухе справа от экрана (рис. 4). Иногда даже возникают три-четыре изображения, каждое в виде наклоненного вправо параллелограмма. Почему появляются эти изображения и почему они наклонены? Сохранится ли их наклон, если вы переведете глаза в другую сторону? Возникнут ли аналогичные призрачные изображения, если перевести глаза вверх или вниз?

8. Цвета черно-белого диска

Можно ли различить какие-либо цвета на черно-белой поверхности? Как правило, нет. Однако сделайте диск с чередующимися черными и белыми секторами и, вращая его с относительно небольшой скоростью, пристально смотрите на него, стараясь не замечать отдельных секторов. Через несколько минут передние по отношению к направлению вращения края белых секторов станут красными, задние — синими. (При разных уровнях освещенности оттенки будут различными.) При вращении с большей скоростью белые секторы становятся красными, а черные частично окрашиваются в зеленовато-голубой цвет. При дальнейшем увеличении скорости вращения цвета уже не удается различить, но по диску начинают прыгать искорки фиолетово-розового и зеленовато-серого цветов. На диске, изображенном на рисунке 5, можно наблюдать все три эффекта одновременно. Почему мы видим эти цвета? Почему, чтобы диск «окрасился», нужно прежде в течение нескольких минут посмотреть на него?

В. Залгаллер,
С. Залгаллер

Венгерский шарнирный кубик

В Венгерской Народной Республике распространена занятная математическая головоломка, созданная в 1975 г. венгерским архитектором, профессором Эрнё Рубиком. Ее внешний вид показан на четвертой странице обложки: это пластмассовый куб, разбитый на 27 конгруэнтных кубиков. Внутренний кубик удален, а 26 наружных кубиков с помощью специальных выступов сцеплены так, что любая плитка из 9 кубиков, прилегающих к одной грани куба, может быть повернута в любую сторону на 90°. (Начало двух таких поворотов изображено на рисунке 1.) После поворота на 90° вся система сохраняет прежнюю свободу вращений: снова любую плитку в любую сторону можно повернуть в ее плоскости на 90°.

Об устройстве шарнирного скрепления этих кубиков можно написать отдельную статью — сейчас же мы будем обсуждать другой вопрос.

Первоначально каждая из граней большого куба была окрашена в свой цвет (красный, оранжевый, желтый, зеленый, синий, белый). После ряда случайно выбранных вращений окраска граней куба становится пестрой: на грани присутствуют клетки разных цветов. Головоломка состоит в том, чтобы, получив в руки такой пестрый куб, добиться с помощью вращений *правильной* расстановки кубиков, то есть такой расстановки, при которой каждая грань куба снова будет одного цвета.

Задача эта совсем не проста. Не вооруженному теорией человеку, даже способному, редко удается сразу собрать более одной грани. Число расстановок кубиков, которые можно получить (подсчитано, что их $N = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$), делает ее недоступной для перебора даже на ЭВМ. Заметим, впрочем, что не любая расстановка может быть получена вращениями плиток куба: если разрешить разборку куба на составляющие его 26 кубиков, то можно составить $12 \cdot N = 529\,024\,039\,393\,878\,272\,000$ разных расстановок (см. задачу 8 из Добавления).

В настоящей заметке мы предлагаем читателю правила (они не являются самыми экономными по числу вращений), позволяющие от любой из N возможных расстановок кубиков вернуться к их правильной расстановке.

Описание вращений

Чтобы изложить предлагаемые правила, условимся сначала о терминологии.

Будем называть *центральными* кубики, стоящие в центрах граней куба. Каждый центральный кубик всегда (при любых вращениях) остается центральным и смотрит наружу одной клетки определенного цвета.

Поскольку нас интересуют не изменения положения всего куба в пространстве, а лишь изменения взаимного расположения его частей, мы будем считать его положение в пространстве фиксированным. Это озна-

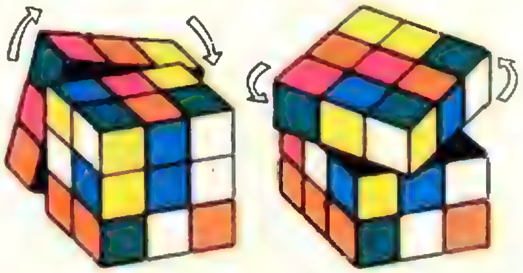


Рис. 1.

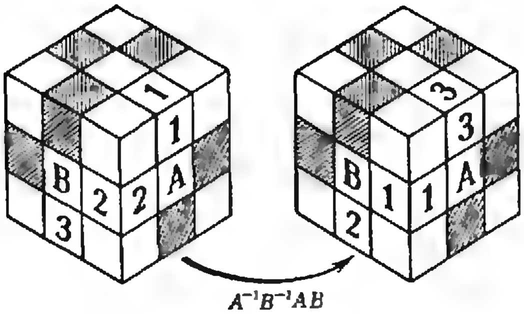


Рис. 2.

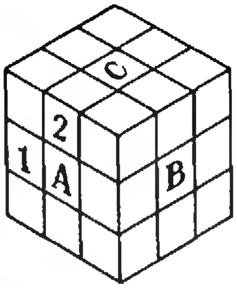


Рис. 3.

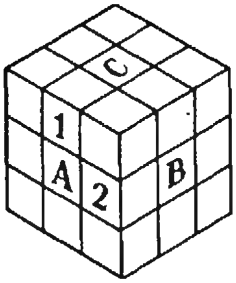


Рис. 4.

чает, что положение всех центральных кубиков в пространстве остается неизменным. Это означает также, что из девяти плоскостей куба мы будем поворачивать только шесть.

Если на рисунке некоторая центральная клетка отмечена буквой A, то поворот (не «средней») плитки, содержащей эту клетку, на 90° по часовой стрелке мы будем обозначать через A, а поворот этой же плитки на 90° против часовой стрелки будем обозначать через A^{-1}. Очевидно, $A^{-1}A^{-1}A^{-1}=A$ и $A^2=A^{-2}$, где $A^2=A\ \ A$ и $A^{-2}=A^{-1}\ \ A^{-1}$.

Кубики, содержащие среднюю часть ребра большого куба, будем называть *средними*. Средний кубик всегда остается средним и смотрит наружу двумя клетками определенного цвета. Для каждой пары цветов (кроме тех пар цветов, которыми первоначально были раскрашены противоположные грани куба) имеется единственный средний кубик с клетками этих цветов.

Угловыми назовем кубики, занимающие в составе куба угловые места. Каждый угловой кубик всегда остается угловым и смотрит наружу тремя клетками, окрашенными в разные цвета. Сочетание этих трех цветов у каждого из угловых кубиков свое.

Основные этапы

Заманчивый, на первый взгляд, путь: постепенно увеличивая пятно одноцветных клеток, получить одноцветную грань, а потом взяться за другую — видимо, приводит лишь к непреодолимым трудностям. Не справившись с головоломкой, ее нередко портят — от злости или из любопытства к устройству шарнира. Мы надеемся, что предлагаемый ниже способ решения сделает головоломку доступной, но и он требует определенных усилий при реализации.

Предлагаемые действия разобьем на четыре больших этапа. Мы уже договорились, что в ходе решения головоломки центральные кубики не меняют своего положения в пространстве. Что касается средних кубиков, то каждый из них должен в процессе решения занять вполне определенное место: оказаться на ребре между двумя «своими» гранями куба, то есть теми гранями, чьи центральные клетки такого же цвета, как две клетки данного среднего кубика. Кроме того, он должен быть правильно повернут: его цветные клетки должны прилегать к центральным клеткам того же цвета. Совершенно аналогично обстоит дело с угловыми кубиками: у каждого из них есть свое место (на стыке трех граней с центральными клетками его цветов) и единственный правильный разворот. В соответствии с этим порядок наших действий будет следующим:

Этап 1: *поставить на нужные места все средние кубики.*

Этап 2: *правильно повернуть на своих местах все средние кубики.*

Этап 3: *поставить на нужные места все угловые кубики.*

Этап 4: *правильно повернуть все угловые кубики.*

Каждый из этапов мы будем выполнять только после того, как предыдущий этап полностью закончен. При этом очередной этап будем выполнять так, чтобы после его завершения оказались не нарушенными достижения предшествующих этапов.

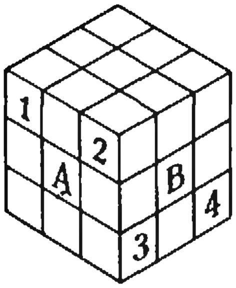


Рис. 5.

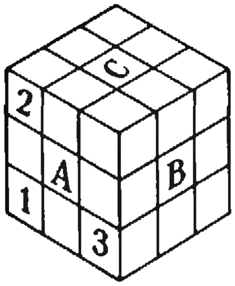


Рис. 6.

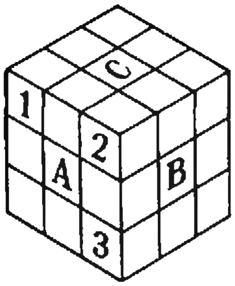


Рис. 7.

После выполнения второго этапа на каждой из граней куба образуется крест из пяти клеток одного цвета. После выполнения четвертого этапа задача окажется решенной — каждая грань куба станет одноцветной.

Невозможные положения

Достаточность предлагаемых ниже «комбинаций» для выполнения перечисленных этапов опирается на три свойства рассматриваемого шарнирного куба. В рамках этой статьи мы будем считать эти свойства экспериментальными фактами. Их можно, однако, доказать, решив задачи, придуманные В. Дубровским (см. Приложение).

Если кубики выведены из правильного положения только допустимыми вращениями (а не разборкой и новой сборкой всего устройства или перекраской граней), то не может возникнуть положение, при котором:

I. *все средние кубики стоят на своих местах и только один из них повернут неправильно;*

II. *все средние кубики и стоят, и повернуты правильно, а все угловые кубики, кроме двух, стоят (в любых положениях) на своих местах;*

III. *все средние кубики и стоят, и повернуты правильно, и все угловые кубики стоят на своих местах и только один из них повернут неправильно.*

Предварительные комбинации

Чтобы привыкнуть к тому, как записываются повороты, мы сначала рассмотрим несколько важных для дальнейшего стандартных комбинаций.

Первая комбинация $A^{-1}BA$ (в отличие от школьного учебника, это будет означать, что сначала совершается поворот A^{-1}, затем B, затем A) называется *сопряжением* элемента B с помощью элемента A. На рисунке 2 показано, как эта комбинация позволила собрать белую грань целиком, поставив белую клетку 1 на место желтой 2.

Вторая комбинация $A^{-1}B^{-1}AB$ называется *коммутатором* элементов A, B. Проверьте, что в положении куба, изображенном на рисунке 2, серые клетки остаются на месте, а средние кубики 1, 2, 3 *циклически переставляются*, то есть переходят по схеме 1 → 3 → 2 → 1. Проследите еще, как переставляют средние кубики комбинации $ABA^{-1}B^{-1}$, $AB^{-1}A^{-1}B$, $A^2B^2A^2B^2$, $A^2BA^2B^{-1}$, $A^2B^{-1}A^2B$, $AB^2A^{-1}B^2$, $A^{-1}B^2AB^2$ — коммутаторы других поворотов (каких?).

Этап I: средние кубики — на место

Комбинация из семи поворотов

$$K_1 = A^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}BAC$$

взаимно переставляет местами средние кубики 1, 2 (рис. 3) и сохраняет местоположение остальных средних кубиков (проверьте!*).

Комбинация K_1 фактически позволяет менять местами любые два средних кубика. Если они не прилегали к одной грани куба или не были на ней соседними, то всегда можно вспомогательными поворотами (запомнив эти повороты по цвету центра поворачиваемой плитки) привести желаемые кубики в положение 1, 2 (рис. 3), переставить их комбинацией K_1, а затем, в обратной очередности и обратных направлениях повторить сделанные вспомогательные повороты.

---

*) Если у вас нет экземпляра игрушки, советуем нарисовать развертку куба (чернилами на хорошем листе бумаги) и, пользуясь карандашом и ластиком, следить за передвижением клеток на развертке.

Очевидно, попарные перестановки средних кубиков позволяют осуществить этап 1: поставить на свои места все средние кубики.

Этап 2: повернем средние кубики

Комбинация из двенадцати поворотов

$$K_2=(AB^{-1}A^{-1}B)(BC^{-1}B^{-1}C)(CA^{-1}C^{-1}A)$$

одновременно поворачивает в своих гнездах кубики 1, 2 (рис. 4) и не меняет ни местоположений, ни поворотов остальных средних кубиков (проверьте!).

Комбинация K_2 позволяет повернуть на своих местах любые два средних кубика. Действительно, если они не прилегали к одной грани куба или не были на ней соседними, то всегда можно вспомогательными поворотами (запомнив эти повороты по цвету центра поворачиваемой плитки) привести желаемые два кубика в положение 1, 2 (рис. 4), повернуть их комбинацией K_2, и затем, в обратной очередности и в обратных направлениях повторить вспомогательные повороты.

Попарные совместные повороты средних кубиков позволяют осуществить этап 2, поскольку (ввиду свойства I) не может случиться, чтобы требовал поворота только один средний кубик.

Этап 3: угловые кубики — на место

Комбинация из двенадцати поворотов

$$K_3=(ABA^{-1}B^{-1})^3$$

осуществляет одновременно перестановки кубиков 1, 2 и кубиков 3, 4 (рис. 5), сохраняет все достижения этапов 1, 2 и не изменяет местоположения угловых кубиков, отличных от 1, 2, 3, 4 (проверьте!)

Комбинация из двадцати четырех поворотов

$$K_4=(ACA^{-1}C^{-1})^3(B^{-1}A^{-1}BA)^3$$

осуществляет перестановку кубиков 1, 2, 3 (рис. 6) по схеме 1→2→3→1, сохраняет все достижения этапов 1, 2 и не изменяет местоположения угловых кубиков, отличных от 1, 2, 3.

Поясним, как, пользуясь комбинациями K_3 и K_4, осуществлять этап 3.

Допустим, что после завершения этапа 2 часть угловых кубиков не стоит на своих местах. Ввиду свойства II таких кубиков будет не менее, чем три. Выберем один из них и отметим его номером 1. Кубик, занимающий то место, куда должен встать кубик 1, отметим номером 2.

Если кубик 2 сам должен перейти на место кубика 1, то номером 3 отметим любой, отличный от первых двух и стоящий не на своем месте угловой кубик, а номером 4 — кубик, стоящий там, куда должен перейти кубик 3. Затем, с помощью вспомогательных поворотов (запоминая их) поставим кубики 1, 2 и 3, 4 в положение пар 1, 2, и 3, 4, изображенных на рисунке 5. С помощью комбинации K_3 осуществим перестановку $1\rightleftarrows 2$, $3\rightleftarrows 4$, после чего в обратной очередности и обратных направлениях повторим вспомогательные повороты. В итоге, кроме ранее стоявших на своих местах угловых кубиков, заведомо попадут на свои места кубики 1, 2, 3.

Если же кубик 2 не должен был перейти на место кубика 1, то отметим номером 3 кубик, стоящий там, куда должен перейти кубик 2. Если кубик 3 не должен перейти на место кубика 1, то отметим номером 4 кубик, который стоит там, куда должен перейти кубик 3. После этого, как и выше, то есть с помощью вспомогательных поворотов и комбинации K_3, осуществляем перестановку $1\rightleftarrows 2$, $3\rightleftarrows 4$, которая ставит на свои места кубики 1 и 3.

Остается случай, когда требуется перестановка кубиков 1→2→3→1. В этом случае, с помощью вспомогательных поворотов (запоминая их) ставим кубики 1, 2, 3 в каком-то порядке на места 1, 2, 3 (рис. 6). Одна из двух комбинаций K_4, K_4^{-1}, которые осуществляют перестановки мест 1→2→3→1, 1→3→2→1, будет осуществлять перестановку кубиков 1→2→3→1 (находящихся сейчас на местах 1, 2, 3). Выполним именно эту комбинацию. После этого в обратной очередности и обратных направлениях повторим вспомогательные повороты. В итоге кубики 1, 2, 3 станут на место.

Повторяя указанный процесс, мы выполним этап 3 — поставим на свои места все угловые кубики.

Этап 4: повернем угловые кубики

Нам потребуются следующие две комбинации:

$$K_5=[(A^{-1}CAC^{-1})(C^{-1}BCB^{-1})(B^{-1}ABA^{-1})]^2,$$
$$K_5^{-1}=[(AB^{-1}A^{-1}B)(BC^{-1}B^{-1}B)(BA^{-1}B^{-1}A)]^2.$$

Комбинация K_5 поворачивает одновременно каждый из кубиков 1, 2, 3 (рис. 7) вокруг оси, идущей от его центра к центру куба, на 120° по часовой стрелке. Комбинация K_5^{-1} поворачивает те же кубики против часовой стрелки. Местоположение и поворот любого из остальных кубиков при этом не меняются.

Знание комбинаций K_5 и K_5^{-1} позволяет совместно повернуть в желаемом направлении (но в одну и ту же сторону) любые три угловых кубика. Достаточно собрать их с помощью вспомогательных поворотов в одну грань, совместно повернуть с помощью комбинации K_5 или K_5^{-1} (в зависимости от нужного направления поворота), а затем вернуть на свои места поворотами, обратными вспомогательным.

Поясним теперь, как, пользуясь комбинациями K_5 и K_5^{-1}, осуществить этап 4.

Если после завершения этапа 3 имеются неправильно повернутые угловые кубики, то, ввиду свойства III, таких кубиков не менее двух.

Допустим, что их больше двух. Возьмем любые три из них. Хотя бы два из этих трех кубиков требуют поворота в одну и ту же сторону. Повернув в эту сторону все три кубика, мы уменьшим число неверно повернутых кубиков. Так мы придем к положению, когда неверно повернутых кубиков либо нет, либо ровно два.

Если неверно повернутых кубиков только два, они не могут оба требовать поворота в одну и ту же сторону. Иначе мы бы совместно повернули их и еще один кубик — появилось бы положение с одним неверно повернутым кубиком, что невозможно в силу III.

Итак, два неверно повернутых кубика требуют поворота в разные стороны. Повернем в нужную сторону один их этих кубиков и два кубика, ранее стоявших правильно. А затем — в другую сторону — эти два новых кубика и второй из ранее повернутых неправильно. В результате все кубики займут правильное положение!

Приложение*)

Обозначим через S_0 *правильное состояние* куба. Занумеруем числами $i=1, 2, \ldots, 8$ его вершины (угловые кубики) и числами $j=1, 2, \ldots, 12$ его ребра (средние кубики). На ребрах выберем (и запомним) любую ориентацию (и нарисуем соответствующие стрелки на средних кубиках) так, чтобы параллельные ребра были сонаправлены.

Предположим, что в некотором *законном состоянии***) S куба j-й средний кубик попал на ребро j'; сравним ориентацию ребра j' (которую мы запомнили) со стрелкой, нарисованной на j-м кубике. Обозначим через $n_j(S)$ величину, равную 0, если указанные ориентации совпадают, и равную 1 в противном случае. Если сумма

$$n_1(S)+n_2(S)+\ldots+n_{12}(S)$$

четна, мы полагаем $n(S)=0$, иначе $n(S)=1$; можно сказать, что $n(S)$ — это «четность суммарного поворота средних кубиков». Докажите, что

1. *Величина n является инвариантом, то есть одинакова при всех законных состояниях куба:* $n(S)=n(S_0)=0$. (Указание. Достаточно показать, что $n(S)$ не меняется при любом повороте одной плитки).

2. *В законном состоянии куба не может быть повернут ровно один средний кубик* (свойство I, с. 19). (Указание. В таком состоянии $n(S)=1$).

Вспомним, что положение центральных клеток куба в пространстве не меняется при поворотах; для определенности предположим, что нижний центральный кубик — зеленый, верхний — синий; эти два цвета будем считать *выделенными*. Возьмем i-й угловой кубик нашего куба, находящегося в состоянии S. Ровно одна клетка углового кубика выделена (почему?). Если эта клетка горизонтальна, положим (по определению) $N_i(S)=0$; если эта клетка становится горизонтальной при повороте кубика на 120° (по часовой стрелке) вокруг диагонали большого куба, положим $N_i(S)=1$; если же горизонтальность получается поворотом на 240°, то $N_i(S)=-1$. Если сумма

$$N_1(S)+N_2(S)+\ldots+N_8(S)$$

при делении на 3 дает в остатке 0, 1, 2, мы полагаем величину $N(S)$ равной $0, 1, -1$ соответственно. Можно сказать, что величина N — это «направление суммарного поворота угловых кубиков». Докажите, что

3. *Величина N является инвариантом, то есть одинакова при всех законных состояниях куба:* $N(S)=N(S_0)=0$.

4. *В законном состоянии у куба не может быть повернут неправильно ровно один угловой кубик* (свойство III, с. 19).

Предположим теперь, что в состоянии S средние кубики с номерами 1, 2, ..., 12 занимают места с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_{12}$ соответственно, а угловые кубики 1, 2, ..., 8 — места $i_1, i_2, \ldots, i_8$. Наборы $I(S)=(i_1, i_2, \ldots, i_8)$ и $J(S)=(j_1, j_2, \ldots, j_{12})$ — это просто номера кубиков, записанные в другом порядке; математики такие наборы называют *перестановками*. Перестановку называют *четной*, если в ней имеется четное число *беспорядков*, то есть четное число пар цифр, стоящих не в порядке возрастания, и *нечетной* в противном случае. Например, перестановка (12453687) нечетна, так как она содержит 3 беспорядка: (4, 3), (5, 3), (8, 7). Обозначим через $\varepsilon(S)$ число, равное 0, если $I(S)$ и $J(S)$ имеют одинаковую четность, и равное 1 в противном случае. Можно сказать, что ε — это «четность расстановки всех кубиков». Докажите, что

5. *Величина ε является инвариантом, притом $\varepsilon(S)=\varepsilon(S_0)=0$ для любого законного состояния S.* (Указание. Покажите, что при любом повороте плитки меняется четность I и четность J).

6. *Ровно два угловых кубика не могут поменяться местами* (свойство II, с. 19).

7*. *Состояние S куба законно тогда и только тогда, когда*

$$n(S)=N(S)=\varepsilon(S)=0.$$

8*. *Все состояния (в том числе полученные разборкой и сборкой куба разбиваются на 12 классов; при этом два состояния S, S' переводятся друг в друга поворотами плит тогда и только тогда, когда $n(S)=n(S')$, $N(S)=N(S')$, $\varepsilon(S)=\varepsilon(S')$.*

---

*) Автор Приложения — В. Дубровский.

**) То есть в состоянии, полученном из правильного поворотами плиток (без перекрашивания клеток или разборки кубика).

задачник кванта

Задачи

М656—660; Ф668—Ф672

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 февраля 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М656, М657» или «Ф668». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М656. В пространстве имеются 30 ненулевых векторов. Докажите, что среди них найдутся два, угол между которыми меньше 45°.

А. Толпыго

М657. В таблице $n \times n$, заполненной числами, все строки различны. Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице все строки также будут различны.

А. Анджан

М658. В квадрате со стороной 1 проведено конечное число отрезков (рис. 1), параллельных его сторонам. Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин проведенных отрезков равна 18. Докажите, что среди частей, на которые квадрат разбивается этими отрезками, найдется такая, площадь которой не меньше 0,01.

А. Анджан

М659. Докажите следующие свойства последовательности Фибоначчи $f_1=1$, $f_2=2$, ..., $f_{k+1}=f_k+f_{k-1}$:

а) Каждое натуральное число $n \geqslant 3$ представляется в виде суммы различных чисел Фибоначчи.
б)* Обозначим количество таких представлений числа n в виде суммы четного числа слагаемых через K_n, в виде суммы нечетного числа слагаемых — через H_n; тогда $|K_n - H_n| \leqslant 1$ при всех n.
в)* Если перемножить несколько подряд стоящих двучленов из последовательности

$$1-x,\ 1-x^2,\ 1-x^3,\ 1-x^5,\ \ldots,\ 1-x^{f_k},\ \ldots$$

(в показателях стоят числа Фибоначчи), то в полученном многочлене все коэффициенты будут равны 0, —1 или +1.
Известное нам доказательство утверждений б) и в) опирается на такое свойство:
г) Для любого $n \geqslant 3$ существует единственное представление n в виде суммы различных чисел Фибоначчи, которое вместе с каждым слагаемым

$f_k (k \geqslant 3)$ содержит хотя бы одно из двух предыдущих чисел Фибоначчи f_{k-1} или f_{k-2}.

А. Одесский, ученик 9 класса, Д. Фукс

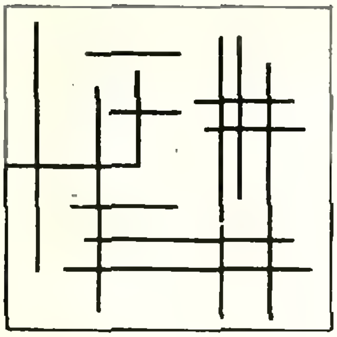


Рис. 1.

М660. На окружности расставляются синие и красные точки (рис. 2а). Разрешается добавить новую красную точку и одновременно поменять цвет у каждой из двух соседних с ней точек (рис. 2б), либо убрать красную точку и поменять цвет у каждой из соседних точек (рис. 2в). Пусть первоначально было всего две красные точки (меньше двух точек оставлять не разрешается). Можно ли несколькими такими операциями получить на окружности

а) две точки — синюю и красную;

б) 8 красных точек;

в) одну красную и 6 синих точек;

г) * две синих точки?

К. Казарновский

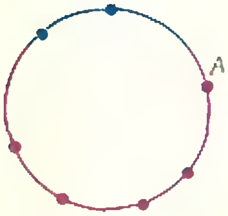


Рис. 2а.

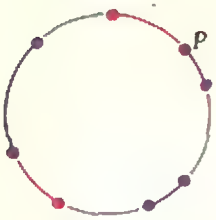


Рис. 2б.

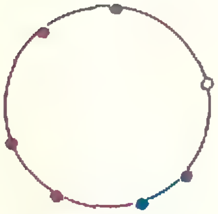


Рис. 2в.

Ф668. Через неподвижный блок перекинута невесомая нить. К одному концу нити прикреплен груз массы m_1. К другому концу на пружине с жесткостью k подвешен груз массы m_2. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна l_0. Найти амплитуду колебаний, которые будет совершать груз m_2, когда систему предоставят самой себе. Качаний поперек нити нет.

Г. Коткин

Ф669. Перевернутый тонкостенный стакан с пробковым дном толщины d плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями ϱ_1 и ϱ_2. Верхняя часть стакана находится на высоте H над границей раздела (рис. 3). Сечение стакана S. На какое расстояние поднимется стакан, если в дне стакана появится дырка?

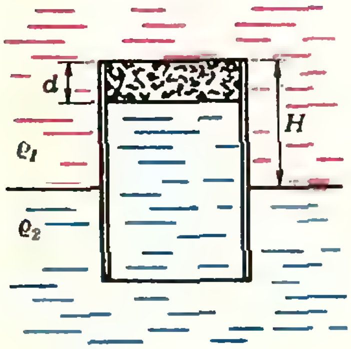


Рис. 3.

Ф670. Покажите, что максимальная скорость, которую при столкновении может сообщить протону α-частица, составляет 1,6 начальной скорости α-частицы.

Ф671. Имеется 1 л горячей воды с температурой T_1 и 1 л холодной воды с температурой T_2. При помощи горячей воды нагревают холодную. Можно ли сделать так, чтобы окончательная температура воды, бывшей сначала холодной, стала выше температуры воды, которая была сначала горячей?

А. Кравчатый, ученик 9 кл.

Ф672. Ко вторичной обмотке включенного в сеть понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $K=220/127$ подключена нагрузка с сопротивлением $R_н=10$ Ом. Напряжение в сети $U=220$ В, сопротивление первичной обмотки трансформатора $R_1=3{,}6$ Ом, сопротивление вторичной обмотки $R_2=1{,}2$ Ом. Определите напряжение на нагрузке.

В. Скороваров

Решения задач

М609, М610; Ф613—Ф617

М609. *а) Длины проекций выпуклого многоугольника площади S на две взаимно перпендикулярные прямые равны l_1 и l_2. Докажите, что $S \leqslant l_1 l_2$.*
б) Длины проекций выпуклого многогранника объема V на три взаимно перпендикулярные прямые равны l_1, l_2 и l_3. Докажите, что $V \leqslant l_1 l_2 l_3$.
в) Площади проекций выпуклого многогранника объема V на три взаимно перпендикулярные плоскости равны S_1, S_2 и S_3. Докажите, что $V \leqslant \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

Утверждения пунктов а) и б) непосредственно следуют из того, что в случае а) многоугольник содержится в прямоугольнике со сторонами l_1 и l_2, а в случае б) многогранник содержится в прямоугольном параллелепипеде с ребрами l_1, l_2, l_3.

в) Пусть π_1, π_2, π_3 — взаимно перпендикулярные плоскости, S_1, S_2, S_3 — площади проекций многогранника M на эти плоскости, а l_1, l_2, l_3 — длины проекций многогранника M на прямые $\pi_2 \cap \pi_3$, $\pi_1 \cap \pi_3$, $\pi_1 \cap \pi_2$ соответственно. $V = V(M)$ — его объем. Плоскости, параллельные π_1, будем в дальнейшем называть *горизонтальными*.

Первое решение. Справедливость неравенства

$$V \leqslant \sqrt{S_1 S_2 S_3} \qquad (1)$$

для прямой призмы с горизонтальными основаниями легко следует из а): для такой призмы $S_1 \leqslant l_2 l_3$, $S_2 = l_1 l_3$, $S_3 = l_1 l_2$ и $V^2 = (S_1 l_1)^2 = S_1 \cdot S_1 l_1^2 \leqslant S_1 \cdot l_1 l_2 \cdot l_1 l_3 = S_1 S_2 S_3$.

Чтобы доказать (1) для произвольного многогранника, нам понадобится

Лемма. *Пусть многогранник M разрезан горизонтальными плоскостями на n многогранников $M_1, \ldots, M_n$. Если для каждого из них выполнено неравенство (1), то оно выполнено и для M.*

Докажем лемму сначала для $n=2$. Пусть площади проекций многогранников M_1 и M_2 на плоскость π_2 равны a_1^2 и a_2^2, на плоскость π_3 — b_1^2 и b_2^2 соответственно ($a_i>0$, $b_i<0$). Площадь проекций M_1 и M_2 на π_1 не превосходит S_1. Поэтому

$$V(M) = V(M_1) + V(M_2) \leqslant \sqrt{S_1}\,(a_1 b_1 + a_2 b_2) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{S_1}\,\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{S_1 S_2 S_3}.$$

Неравенство

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2), \qquad (2)$$

которым мы воспользовались, эквивалентно очевидному $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geqslant 0$.

Доказательство леммы для любого n можно провести либо индукцией по n, либо аналогично случаю $n=2$ с использованием вместо (2) *неравенства Коши* («Квант», 1972, № 1)

$$(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2). \qquad (3)$$

Теперь доказательство неравенства (1) завершается так. Разрежем многогранник M на горизонтальные слои. При малой толщине слоев объемы многогранника M и объединения некоторых поставленных друг на друга призм (а также площади их соответствующих проекций) отличаются сколь угодно мало. Именно:

Пусть h — малое положительное число. Проведем достаточно густо горизонтальные плоскости (в том числе — через все вершины многогранника M) так, чтобы M оказался разрезанным на n слоев толщиной $h_i \leqslant h$ $(l_1 = h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$. Заключим i-й слой в прямую призму высотой h_i и с горизонтальным основанием, совпадающим с проекцией этого слоя на i-ю секущую плоскость.

Пусть M' — объединение построенных призм. Проекция M' на π_1 совпадает с проекцией многогранника M на π_1: $S_1' = S_1$, а площади S_2' и S_3' проекций M' на плоскости π_2 и π_3 не меньше площадей S_2 и S_3 соответственно и отличаются от них на сумму площадей прямоугольных треугольников, заштрихованных на рисунке 1. Эта сумма не больше $c l_1 h$, где c — наибольший из тангенсов острых углов, образуемых проекциями ребер многогранника M на плоскости π_2 и π_3 с вертикалью. Поэтому

$$V(M) \leqslant V(M') \leqslant \sqrt{S_1' S_2' S_3'} \leqslant \sqrt{S_1 (S_2 + c l_1 h)(S_3 + c l_1 h)}.$$

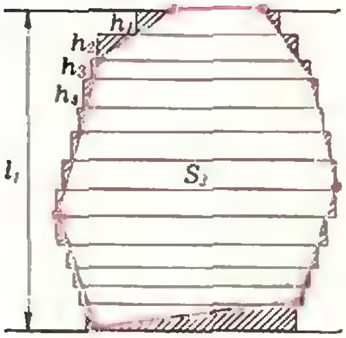


Рис. 1.

Поскольку это неравенство верно при любом h, $V \leqslant \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

Второе решение. Введем в пространстве прямоугольную систему координат, приняв $\pi_1 \cap \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_3$, $\pi_2 \cap \pi_3$ за оси Ox, Oy и Oz соответственно. Пусть $[a; b]$ — отрезок оси Oz, на который проектируется многогранник M. Через каждую точку $z \in [a; b]$ проведем горизонтальную плоскость. Пусть $S(z)$ — площадь сечения многогранника этой плоскостью, а $l_2(z)$ и $l_3(z)$ — длины проекций этого сечения на плоскости π_2 и π_3 соответственно. Можно доказать, что

$$V = \int_a^b S(z)\,dz. \qquad (4)$$

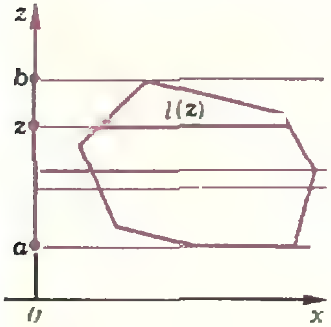


Рис. 2.

В учебнике «Геометрия 9—10» (§ 58 и § 66) эта формула выведена для пирамиды и для тел вращения; для произвольных многогранников доказательство аналогичное. Мы еще воспользуемся формулой (докажите ее самостоятельно!)

$$S = \int_a^b l(z)\,dz, \qquad (5)$$

где S — площадь выпуклого многоугольника, лежащего в плоскости xOz, а $l(z)$ — длина отрезка, по которому пересекается с многоугольником прямая, параллельная оси Ox и проходящей через точку $z \in [a; b]$ (рис. 2). Кроме того, нам понадобится *интегральное неравенство Буняковского*, являющееся аналогом неравенства (3):

$$\left|\int_a^b f(z)g(z)\,dz\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(z)\,dz} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(z)\,dz}.$$

Мы докажем его для непрерывных функций f и g.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbf{R}$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = \int_a^b (f(z) - \lambda g(z))^2\,dz =$$

$$= \lambda^2 \int_a^b g^2(z)\,dz - 2\lambda \int_a^b f(z)g(z)\,dz + \int_a^b f^2(z)\,dz = A\lambda^2 - 2B\lambda + C$$

$$\left(A = \int_a^b g^2(z)\,dz,\ \ B = \int_a^b f(z)g(z)\,dz,\ \ C = \int_a^b f^2(z)\,dz\right).$$

Функция φ — квадратный трехчлен, принимающий при любых λ неотрицательные значения. Поэтому $\frac{D}{4} = B^2 - AC \leqslant 0$ или $B \leqslant \sqrt{A} \cdot \sqrt{C}$, а это и есть требуемое неравенство. (Докажите аналогично неравенство (3).)

Теперь завершим второе решение задачи.

$$V = \int_a^b S(z)\,dz = \int_a^b \sqrt{S(z)} \cdot \sqrt{S(z)}\,dz$$

Так как $S(z) \leqslant S_1$ при любом $z \in [a; b]$, получаем

$$V \leqslant \sqrt{S_1} \cdot \int_a^b \sqrt{S(z)}\,dz$$

В силу пункта а) $S(z) \leqslant l_2(z)l_3(z)$. Поэтому

$$V \leqslant \sqrt{S_1} \cdot \int_a^b \sqrt{l_2(z)} \cdot \sqrt{l_3(z)}\,dz.$$

Применяя интегральное неравенство Буняковского и формулу (5), получаем

$$\int_a^b \sqrt{l_2(z)}\cdot\sqrt{l_3(z)}\,dz \leqslant \sqrt{\int_a^b l_2(z)\,dz}\cdot\sqrt{\int_a^b l_3(z)\,dz} = \sqrt{S_2}\cdot\sqrt{S_3},$$

так что $V \leqslant \sqrt{S_1S_2S_3}$.

Н. Васильев,
А. Егоров

◆

M610. *Фиксируем $k \in \mathbf{N}$. а) Рассмотрим множество всех наборов целых чисел $a_1, \ldots, a_k$ таких, что $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant k$; обозначим число таких наборов через N. Рассмотрим среди них те, для которых $a_k = k$; пусть их число равно M. Докажите, что $N = 2M$.*

б) Наложим на рассматриваемые наборы дополнительное ограничение: сумма $a_1 + \ldots + a_k$ делится на k. Пусть соответствующие числа равны N' и M'. Докажите, что $N' = 2M'$ (Из рисунка 1 видно, что при $k = 3$ эти числа равны $M = 10$, $N = 20$; $M' = 4$, $N' = 8$.)

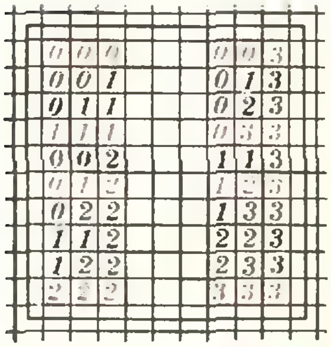


Рис. 1.

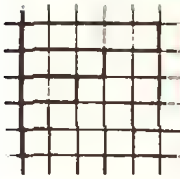


Рис. 2.

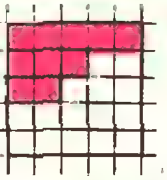


Рис. 3.

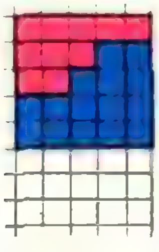


Рис. 4.

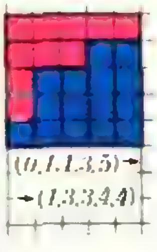


Рис. 5.

Как известно, если два множества имеют одинаковое число элементов, между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Собственно говоря, это и есть определение того, что в множествах элементов поровну, но этот факт иногда забывается. А между тем довольно часто равенство двух чисел устанавливается именно через взаимно однозначное соответствие подходящих множеств.

Нам нужно доказать, что наборов, в которых $a_k = k$, ровно половина. Поэтому попробуем установить взаимно однозначное соответствие между этими наборами и оставшимися теми, у которых $a_k < k$.

Сопоставить набору $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ набор $(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1)$ нельзя, так как новый набор — невозрастающий. Можно попробовать сопоставить набору $(a_1, \ldots, a_k)$ набор $(k-a_k, k-a_{k-1}, \ldots, k-a_1)$: он уже — неубывающий, но... $k-a_1$ не обязано быть меньше k. Поэтому это соответствие не решает задачу. (Вопрос: какую задачу решает это соответствие?)

Значит, необходимо более сложное соответствие. Для его построения нам понадобится понятие *диаграммы Юнга* данного набора.

Что это такое, проще всего объяснить на примере: набору (0, 0, 2, 3, 5) соответствует диаграмма, изображенная на рисунке 2 — в каждой строке столько квадратиков, каково соответствующее число.

Дополним диаграмму Юнга до квадрата (рис. 3). Тогда становится ясно, что наша первоначальная идея заключалась в том, чтобы отсчитывать диаграмму не из красных, а из белых квадратиков (и, соответственно, не слева-снизу, а справа-сверху).

Попытаемся теперь дополнить рисунок 3 вертикальной диаграммой — как на рисунке 4. Отсчитывая эту диаграмму снизу-слева, получим набор (2, 2, 3, 4, 4). Назовем этот набор *дополнительным* к набору (0, 0, 2, 3, 5).

Еще один пример изображен на рисунке 5.

Ясно, что если исходный набор $(a_1, \ldots, a_k)$, а дополнительный — $(b_1, \ldots, b_k)$, то $a_k = k$ тогда и только тогда, когда $b_k < k$. В самом деле, $a_k = k$, если верхняя правая клетка входит в основную диаграмму Юнга, и $a_k < k$, если она входит в дополнительную.

Установленное нами соответствие между наборами, у которых $a_k = k$, и наборами, у которых $a_k < k$, очевидно, взаимно однозначно. Тем самым мы решили а). Кроме того, сумма чисел исходного и дополнительного наборов равна k^2 (в наших примерах — 25). Поэтому сумма чисел дополнительного набора делится на k тогда и только тогда, когда делится на k сумма чисел исходного набора. Это решает б).

Замечание. Задача а) имеет и другое решение: можно непосредственно посчитать числа N и M. Именно:

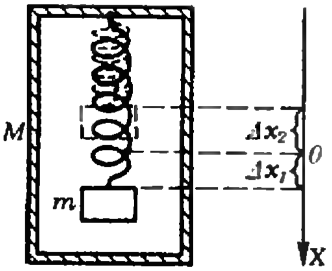
Лемма. *Число наборов целых чисел $a_1, \ldots, a_m$ таких, что $0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_m \leqslant k$, равно C^m_{k+m}.*

Доказательство. Рассмотрим набор $(b_1, \ldots, b_m)$, где $b_i = a_i + i$: $b_1 = a_1 + 1$, $b_2 = a_2 + 2$ и т. д. Тогда, очевидно, $1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_m \leqslant k+m$, то есть $(b_1, \ldots, b_m)$ — произвольный возрастающий набор m целых чисел их первых $k+m$ чисел. Число таких наборов равно C^m_{k-m}.

Поэтому число наборов, в которых $a_k \leqslant k$, по лемме равно C^k_{2k}. Если же $a_k = k$, то нам остается выбрать числа $a_1, \ldots, a_{k-1}$ так, что $0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{k-1} \leqslant k$; их число равно C^{k-1}_{2k-1}. Остается посчитать, что $2C^{k-1}_{2k-1}$ равно C^k_{2k}.

А. Толпыго

Ф613. *Коробка массы M стоит на горизонтальном столе. В коробке на пружине с жесткостью k подвешен груз массы m. При какой амплитуде колебаний груза коробка начнет подпрыгивать на столе?*



Так как к пружине подвешен груз массы m, в состоянии равновесия пружина растянута на величину Δx_1 (см. рисунок) такую, что $k \cdot \Delta x_1 = mg$, то есть

$$\Delta x_1 = mg/k.$$

На коробку действуют сила тяжести $\overrightarrow{Mg}$ и сила $\vec{T}$ реакции со стороны пружины. Сила $\vec{T}$ равна по абсолютной величине силе упругости — $T = kx$ — и направлена вниз, когда пружина растянута, и вверх — когда пружина сжата. Коробка начнет подпрыгивать, когда сила T станет превышать силу Mg: $T > Mg$. В тот момент, когда $T = Mg$, сжатие Δx_2 пружины равно

$$\Delta x_2 = Mg/k.$$

Следовательно, коробка начнет подпрыгивать, когда амплитуда колебаний пружины равна

$$A = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (M+m)\ \frac{g}{k}.$$

Л. Баканина

◆

Ф614. *В замкнутом сосуде находился газообразный азот при комнатной температуре $t_0 = 20°C$ и давлении $p_0 = 10^5$ Па. В сосуд впрыснули некоторое количество жидкого азота с температурой $t_1 = -196°C$ (температурой кипения азота при нормальном атмосферном давлении). Жидкий азот быстро испарился, после чего температура в сосуде оказалась равной $t_2 = -140°C$. После того как сосуд прогрелся до комнатной температуры, в нем установилось давление $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па. Определить молярную теплоту испарения жидкого азота. Теплоемкость газообразного азота при постоянном объеме $C_V = 20{,}8$ Дж/(моль · К).*

Так как испарение жидкого азота, согласно условиям задачи, произошло быстро, темплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Испарение впрыснутой массы азота Δm и нагрев ее от температуры t_1 до температуры t_2 происходили за счет тепла, отнятого у первоначальной массы азота m. Запишем уравнение теплового баланса:

$$C_V \frac{m}{M}(t_0 - t_2) = \frac{\Delta m}{M}[\lambda + C_V(t_2 - t_1)].$$

Отсюда находим молярную теплоту испарения жидкого азота λ:

$$\lambda = \left[\frac{t_0 - t_2}{\Delta m/m} - (t_2 - t_1)\right] C_V. \qquad (*)$$

Согласно условию задачи, окончательное давление в сосуде оказалось в 1,5 раза больше начального давления P_0 при той же комнатной температуре t_0. Это означает, что масса азота в сосуде возросла в 1,5 раза, то есть $(m + \Delta m)/m = 1{,}5$, и $\Delta m/m = 0{,}5$. Подставляя эту величину и известные из условия значения t_0, t_1, t_2 и C_V в выражение (*), находим

$$\lambda = 5500 \text{ Дж/моль}.$$

В. Белонучкин

◆

Ф615. *В случае несамостоятельного газового разряда зависимость тока I через газоразрядную трубку от напряжения U между электродами трубки имеет вид, показанный на рисунке 1. Трубка с последовательно соединенным балластным сопротивлением $R = 3 \cdot 10^9$ Ом подключена к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E} = 6$ кВ. Найдите, какой ток установится через трубку и чему будет равно при этом напряжение на трубке. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.*

Схема включения газоразрядной трубки показана на рисунке 2.

Найдем минимальное значение ЭДС источника, при котором ток через трубку будет достигать насыщения. Для этого запишем закон Ома для цепи:

$$\mathcal{E}_{\min} = U_\text{н} + I_\text{н} R,$$

где $U_\text{н} = 10^3$ В, $I_\text{н} = 10^{-6}$ А (см. рис. 1). Подставляя численные значения, находим $\mathcal{E}_{\min} = 4$ кВ.

В нашем случае ЭДС источника $\mathcal{E} > \mathcal{E}_{\min}$. Следовательно, ток через трубку равен току насыщения. Напряжение U на трубке при этом определяется условием $\mathcal{E} = U + I_\text{н} R$, откуда

$$U = \mathcal{E} - I_\text{н} R = 3 \text{ кВ}.$$

Величину тока через трубку можно определить другим способом. Предположим, что ток I в цепи меньше тока насыщения. Запишем закон Ома для этого случая:

$$\mathcal{E} = I(R_\text{тр} + R),$$

где $R_\text{тр}$ — внутреннее сопротивление трубки. Значение $R_\text{тр}$ находится по наклону линейного участка вольтамперной характеристики трубки (см. рис. 1):

$$R_{тр} = \frac{U_н}{I_н} = 10^8 \text{ Ом}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{тр}+R} = 15 \text{ мкА}.$$

Найденное значение тока больше $I_н$. Следовательно, наше предположение о том, что $I<I_н$, неверно. Ток через трубку равен току насыщения.

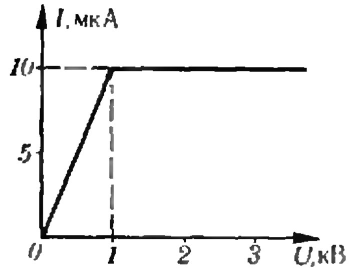


Рис. 1.

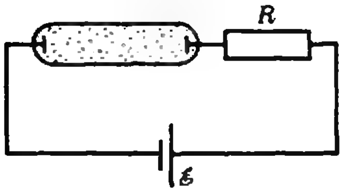


Рис. 2.

В. Можаев

◆

Ф616. *Длина нити накаливания электрической лампочки равна l, а диаметр — d. Каковы длина l_1 и диаметр d_1 другой лампочки, рассчитанной на то же напряжение сети, но с вдвое большим световым потоком, если КПД обеих лампочек один и тот же?*

Пусть W и W_1 — мощности, потребляемые от сети первой и второй лампами. Тогда энергии, излучаемые лампами в виде света (световые потоки), равны, соответственно, $E=\eta W$ и $E_1=\eta W_1$, где η — КПД ламп.

В состоянии равновесия мощность W (W_1), получаемая лампочкой от сети, должна быть равна мощности P (P_1), излучаемой лампочкой в виде света и тепла. Мощность P (P_1), очевидно, пропорциональна площади S (S_1) поверхности нити и некоторой функции температуры $f(T)$ ($f(T_1)$). Следовательно,

$$P=W=k_1Sf(T), \qquad W_1=k_1S_1f(T_1),$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности. Световой поток, излучаемый лампочкой, также пропорционален площади поверхности нити и некоторой (уже другой) функции температуры:

$$E=k_2S\varphi(T), \qquad E_1=k_2S_1\varphi(T_1).$$

И так как $E=\eta W$, то

$$k_2\varphi(T)=\eta k_1f(T), \qquad k_2\varphi(T_1)=\eta k_1f(T_1).$$

Из этих равенств видно, что КПД лампочки определяется температурой нити. Следовательно, при одинаковых КПД двух лампочек температуры их нитей накала одинаковы, то есть $T_1=T$. Это означает, что

$$\frac{E_1}{E}=\frac{k_2S_1\varphi(T)}{k_2S\varphi(T)}=\frac{S_1}{S}=\frac{d_1l_1}{dl}.$$

По условию задачи $E_1:E=2$, то есть

$$\frac{d_1l_1}{dl}=2. \qquad (1)$$

При напряжении в сети U

$$E=\eta W=\eta\frac{U^2}{R}, \qquad E_1=\eta W_1=\eta\frac{U^2}{R_1},$$

где $R=\varrho\frac{4l}{\pi d^2}$, $R_1=\varrho\frac{4l_1}{\pi d_1^2}$ — сопротивления нитей ламп (ϱ — удельное сопротивление материала нитей при температуре работы ламп). Следовательно, $\frac{E_1}{E}=\frac{ld_1^2}{l_1d^2}$, и согласно условию,

$$\frac{l\,d_1^2}{l_1d^2}=2. \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$l_1 = l\sqrt[4]{2}, \quad d_1 = d\sqrt[4]{4}.$$

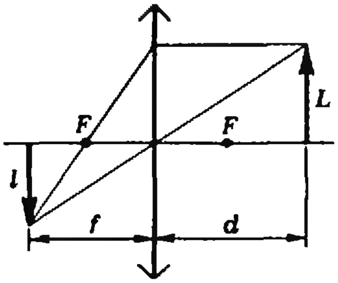
И. Слободецкий

◆

Ф617. *Газетный текст фотографируется аппаратом «Зенит» с объективом, имеющим фокусное расстояние 50 мм, дважды:*

1) с наименьшего допустимого для этого объектива расстояния $a = 0{,}5$ м;

2) после присоединения объектива к камере через удлинительное кольцо высотой $h = 25$ мм (также с минимально возможного расстояния). Найдите отношение размеров изображений, полученных на фотопленке в этих двух случаях.



Для решения задачи воспользуемся формулой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d — расстояние от фотографируемого предмета до объектива, f — расстояние от объектива до изображения, F — фокусное расстояние объектива (см. рисунок).

При фотографировании текста в первом случае (без удлинительного кольца) $d_1 = a$, и резкое изображение получается на расстоянии

$$f_1 = \frac{aF}{a-F}.$$

Линейный размер изображения в этом случае равен (см. рисунок)

$$l_1 = L\frac{f_1}{a} = L\frac{F}{a-F}.$$

При присоединении объектива к камере через удлинительное кольцо высотой h резкое изображение текста получается на расстоянии

$$f_2 = f_1 + h = \frac{aF}{a-F} + h$$

от объектива. Минимально возможное расстояние от объектива, на котором может находиться при фотографировании текст, в этом случае равно

$$d_2 = \frac{f_2F}{f_2-F} = \frac{(aF + h(a-F))F}{F^2 + h(a-F)}.$$

Размер изображения в этом случае

$$l_2 = L\frac{f_2}{d_2} = L\left(\frac{F}{a-F} + \frac{h}{F}\right).$$

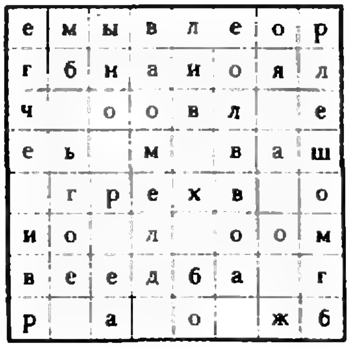
Таким образом, отношение размеров изображений, полученных на фотопленке в двух случаях, равно

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{h(a-F)}{F^2} + 1 = 5{,}5.$$

В. Дерябкин

Неоконченная криптограмма

Перед вами криптограмма, которую можно прочесть с помощью некоторой решетки (что это такое, вы узнаете, прочтав статью «Самосовмещения квадрата и тайнопись» на с. 31), накладывая ее последовательно 4 раза (каждый раз — с поворотом на 90°). В зашифрованном в ней сообщении букв меньше, чем клеток квадрата, так что некоторые его клетки оказываются «лишними». Здесь все «лишние» клетки оставлены пустыми.



е	м	ы	в	л	е	о	р
г	б	н	а	и	о	я	л
ч		о	о	в	л		е
е	ь		м		в	а	ш
	г	р	е	х	в		о
и	о		л		о	о	м
в	е	е	д	б	а		г
р		а		о		ж	б

Расшифруйте зашифрованное сообщение.

Э. Рекстин

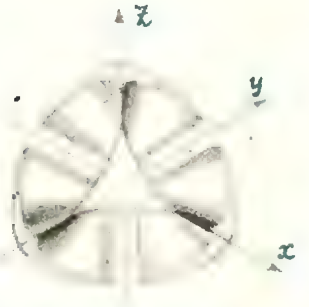
Видоизменение поверхности Штейнера

На обложке первого номера «Кванта» за этот год был напечатан чертеж *поверхности Штейнера*, выполненный ЭВМ. В заметке по этому поводу читателям было предложено нарисовать и описать поверхности, получающиеся из поверхности Штейнера заменой нуля в правой части ее уравнения на ±0,001, то есть поверхности

$$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+xyz=$$
$$=\pm 0{,}001.$$

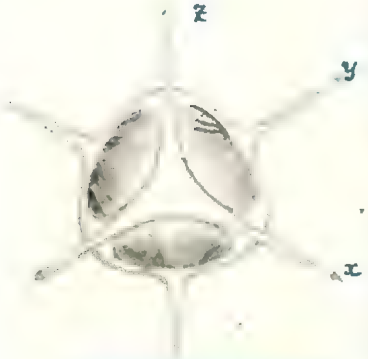
Десятиклассник Олег Моровов из Челябинска прислал нам свои чертежи (см. рисунки 1 и 2) и такое описание поверхностей: *Поверхность $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+xyz=0{,}001$ — двусторонняя, незамкнутая, так как имеет около координатных осей «выросты», уходящие в бесконечность. Сечения поверхности координатными плоскостями представляют из себя гиперболы (всего 12 ветвей). «Впадины» на поверхности не соприкасаются друг с другом и с координатными осями (...).*

Поверхность $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+xyz=-0{,}001$ состоит из четырех конгруэнтных замкнутых непересекающихся частей, которые также не пересекаются ни с одной координатной плоскостью. «Впадины» на ней как бы пересекают друг друга и в местах пересечения исчезают.



$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+xyz=-0{,}001.$

Рис. 1.



$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+xyz=0{,}001.$

Рис. 2.

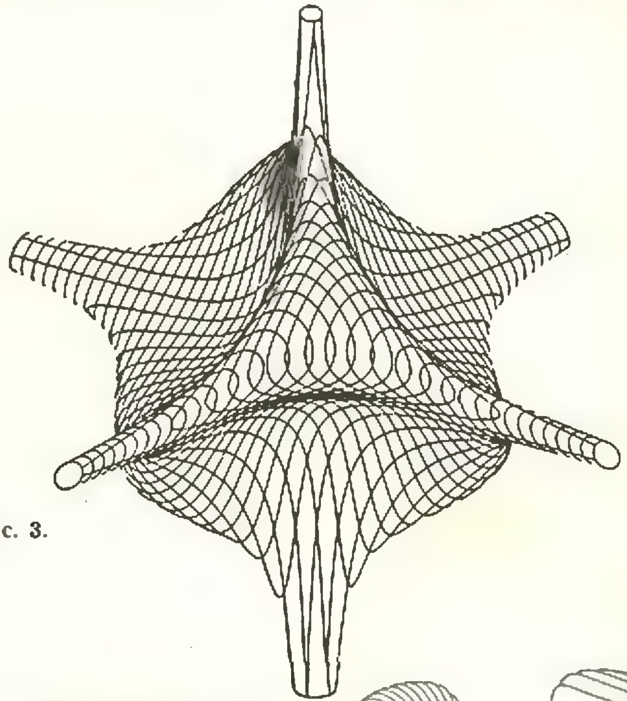


Рис. 3.

Редакция обратилась к автору заметки Ю. Котову с просьбой прокомментировать это письмо. Юрий Владимирович в свою очередь обратился к своему коллеге, компьютеру ЕС-1022, с просьбой нарисовать нужные поверхности. В результате компьютер представил два чертежа (рисунки 3 и 4), а автор заметки ответил нашему читателю так:

Дорогой Олег. Вы, в основном, правильно представляете себе поверхности, о которых идет речь, и достаточно убедительно их изобразили, подметив их основные геометрические свойства. По нашему мнению, если рассматривать изменяющуюся во времени поверхность $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+xyz=T$, где T — параметр, момент перехода «через нуль», в который и появляется поверхность Штейнера, любопытен. В этот момент «исчезают» бесконечные «выросты» и поверхность распадается на четыре полости.

Но надо внести некоторое уточнение: четыре части, на которые распадается поверхность при $T<0$,— гладкие, у них нет ребер, изображенных на Вашем рисунке. Нет и ребер, отделяющих «впадины» от остальной поверхности для $T>0$. Поперечные сечения «выростов» при достаточном удалении от начала координат приближаются не к четырем окружностям, а к четырем эллипсам.

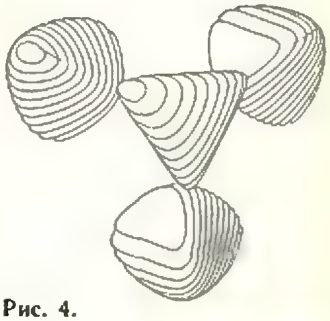
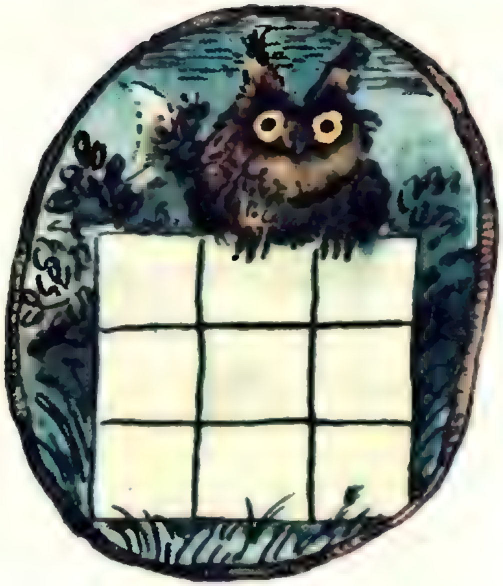


Рис. 4.

На рисунках 3 и 4 представлены машинные изображения поверхности данного вида при $T>0$ и $T<0$, но в немного измененном ракурсе по сравнению с рисунками 1 и 2.

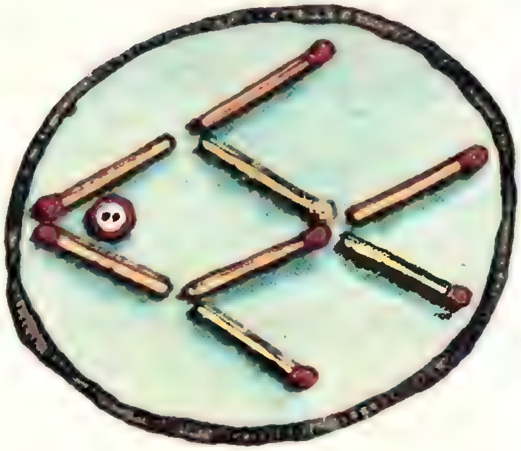
Ю. Котов



Задачи

1. Заполните клетки нарисованного квадрата натуральными числами так, чтобы суммы чисел по каждой строке, каждому столбцу и диагоналям квадрата были одинаковыми (такие квадраты называются *магическими*) и равнялись 1980.

2. Что это за цифра, приписав которую в конце произвольного натурального числа, мы получим то же число, сложенное с этой цифрой и произведением данного числа на эту цифру?



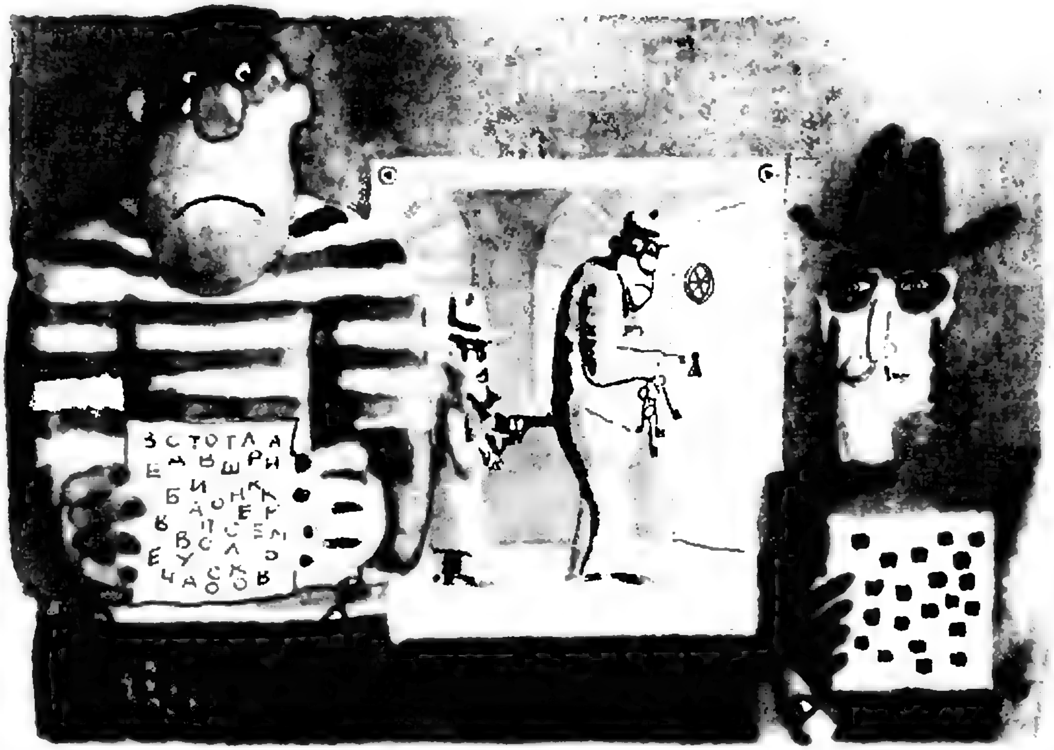
3. Возьмите восемь спичек и пуговицу и сложите из них рыбку, как показано на рисунке. А теперь переложите три спички и пуговицу так, чтобы рыбка выглядела точно так же, но плыла в противоположном направлении.

4. По кругу записано больше трех натуральных чисел, сумма которых равна 37. Известно, что суммы любых трех последовательных чисел равны между собой. Какие числа записаны по кругу?

5. В будильнике, кроме часовой и минутной стрелок, есть еще стрелка звонка. Один часовщик устроил механизм, с помощью которого эта стрелка начала равномерно двигаться так, что все время делила пополам угол между часовой и минутной стрелками.

Сколько оборотов сделает такая стрелка за сутки?

Эти задачи нам предложили *А. Бабоян, Ф. Бартенев, С. Белый, А. Кабризон, А. Савин*



М. Зельманзон,
Л. Хлабыстова

Самосовмещения квадрата и тайнопись

— Сегодня мы будем решать необычную задачу,— сказал учитель, прикрепляя к доске таинственный квадрат (рис. 1).— Попробуйте прочитать записку, зашифрованную в этом квадрате.

— Наверное, надо читать буквы через одну,— сказал с задней парты Володя.

— Нет, так ничего не получится,— возразил Витя.

— Может быть, надо читать буквы по столбцам? — неуверенно предложила Катя.

Ребята загудели, каждый предлагал свой способ, но ни одно из предложений не помогло прочесть записку.

Учитель улыбался, стоя у доски. Наконец, он сказал:

— Тайну способа написания этой записки, то есть шифр, которым пользовался ее автор, нам поможет разгадать вот эта решетка — квадрат с вырезанными «окошками» (рис. 2).

Учитель совместил решетку с таинственным квадратом.

— «Мы овладели способ» — прочитали шестиклассники.

— А что же дальше? Это же не все,— раздалось сразу несколько голосов.

Учитель повернул решетку вокруг центра квадрата на 90° по часовой стрелке. Ребята продолжали читать записку. Затем он снова повернул решетку на 90°, и потом еще раз.

Рис. 1.

о	м	о	ы	я	м	о	в
а	и	т	р	в	с	ь	а
л	з	а	и	с	р	д	б
а	я	у	е	б	е	д	о
ю	л	т	р	е	н	к	а
с	м	з	н	п	п	у	о
м	т	о	л	н	а	с	й
н	ь	о	о	з	!	о	б

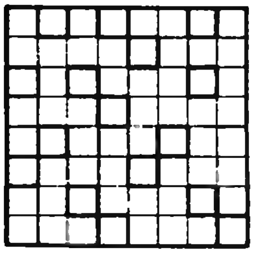


Рис. 2.

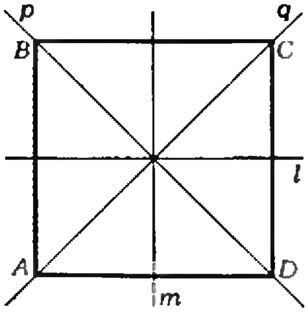


Рис. 3.

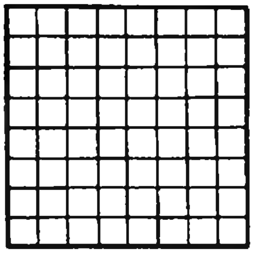


Рис. 4.

— «Мы овладели способом разработки тайнописи. Будем пользоваться ею разумно!» — прочитали ребята.

— Ура!

— Как все просто! — зашумели они.

Улыбка сошла с лица учителя.

— Нет, это еще не решение проблемы,— сказал он.— Вы же еще не овладели способом разработки тайнописи! Если я не дам вам этой решетки, то вы больше ни разу не сможете ни прочесть, ни написать записку, зашифрованную подобным способом.

Зазвенел звонок.

— Те, кто в самом деле хотят разобраться в тайнописи, пусть приходят на занятие математического кружка.

Класс явился на занятие в полном составе.

— Вспомните задачу, которую мы решали недавно,— начал учитель. *Сколько существует самосовмещений квадрата ABCD* (то есть таких перемещений плоскости, при которых квадрат переходит в себя)? Поскольку при самосовмещениях квадрата его вершины должны переходить в вершины, таких самосовмещений восемь: вершина A переходит в одну из четырех вершин, в каждом из четырех случаев для B есть две возможности (рис. 3); например, если A переходит в A, то B переходит в B или в D; если же A переходит в B, то B переходит в C или в A; и т. д. Получается восемь самосовмещений — тождественное отображение, три поворота вокруг центра квадрата: R^{90°, R^{180° (центральная симметрия), R^{270° — и четыре осевые симметрии (рис. 3): S_l, S_m и S_q.

Как производится шифровка?

Возьмем «пустой» квадрат 8×8 (рис. 4) и такого же размера *решетку* — квадрат, в котором некоторые клетки вырезаны (пример решетки — на рисунке 2). Наложим решетку на квадрат. В клетки, находящиеся под «окошечками», впишем начало сообщения, которое мы хотим зашифровать. Затем применим к квадрату-решетке некоторое самосовмещение. Если решетка изготовлена «хорошо», клетки квадрата, находившиеся под «окошечками» в первый раз, закроются и под «окошечками» окажутся новые клетки. Впишем в них продолжение шифруемого сообщения. Затем поставим решетку в первоначальное положение и применим к ней другое самосовмещение. И так далее.

При «дешифровке» мы накладываем решетку на «заполненный» квадрат (пример — на рисунке 1) и, применяя последовательно те же самосовмещения, которые применялись при шифровании, читаем «по кускам» зашифрованное сообщение.

Каждая конкретная решетка изготавливается для некоторого конкретного набора (упорядоченного!) самосовмещений. Например, решетка на рисунке 2, которую мы применяли на уроке, изготовлена для набора $R^{270^\circ}=R^{-90^\circ}$ (ведь мы поворачивали решетку по часовой стрелке), $R^{180^\circ}=R^{-180^\circ}$, $R^{90^\circ}=R^{-270^\circ}$.

Чтобы — при шифровании или при дешифровке — решетку применить, надо, конечно, знать «ее» набор самосовмещений.

Любые ли решетки годятся для шифрования?

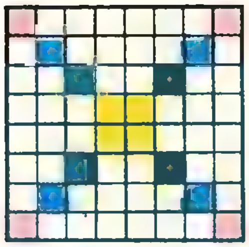


Рис. 5.

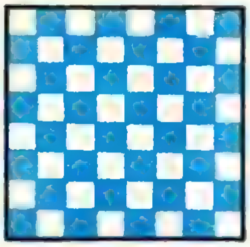
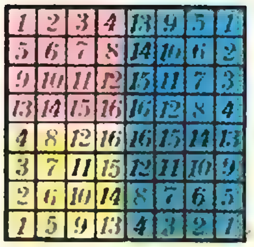


Рис. 6.



1	2	3	4	13	9	5	1
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	6	5
1	5	9	13	4	3	2	1

Рис. 7.

К шифровальным решеткам естественно предъявить следующее требование: если решетка наложена на квадрат всеми «ее» способами, то *каждая клетка квадрата оказывается в какой-то момент под «окошечком», причем — по одному разу*. Будем рассматривать только такие решетки. А тогда мы сможем сразу сделать два вывода.

При каждом из восьми самосовмещений квадрата клетки, закрашенные на рисунке 5 одинаковым цветом, переходят в себя. Поэтому в каждой решетке на двух диагоналях вместе должны быть вырезаны ровно 4 клетки — по одной клетке каждого цвета на рисунке 5.

Кроме того, в набор самосовмещений, соответствующий любой решетке, не может входить больше трех самосовмещений, отличных от тождественного. Можно, конечно, изготовить решетку для одного самосовмещения (тождественное самосовмещение мы каждый раз подразумеваем); тогда в решетке должно быть 32 вырезанные клетки (например, для каждого из самосовмещений R^{90°, R^{270°, S_l и S_m годится «шахматная» решетка — см. рисунок 6). А для двух самосовмещений — нельзя, потому что 64 не делится на 3. При максимальном числе — при трех самосовмещениях — вырезанных клеток должно быть $\frac{64}{4}=16$ (см. например, рис. 2).

Для набора R^{270°, R^{180°, R^{90° существует 16^4 решеток! Попробуйте сообразить, почему. (Указание. См. рис. 7.)

Задачи

1. Постройте решетку для набора

а) R^{180°, S_l, S_m;

б) R^{180°, R^{270°, S_l.

2. Докажите, что нельзя построить решетку для набора, включающего

а) R^{180°, S_p;

б) R^{180°, S_q;

в) S_p, S_q.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач M601—M615 и Ф603—Ф617 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Почти все читатели, приславшие решения задач M601—M615, успешно справились с задачами M601—M603, M606, M611, M612. Остальные задачи правильно решили: *Н. Абдрафикова* (Белорецк) **13, 14**; *Э. Абдуллаев* (Масаллы) **13, 14**; *А. Акопян* (Ереван) **07**; *В. Алексеева* (Москва) **07, 13**; *М. Алексеев* (Москва) **14**; *И. Альтерготт* (Алма-Ата) **07**; *Д. Андриенко* (Коростень) **14**; *М. Арасланов* (*Запорожье*) **10, 13**; *А. Ашпатров* (Ангарск) **13**; *Я. Базалия* (Донецк) **14**; *А. Балинский* (Львов) **05, 10**; *А. Барг* (Николаев) **07, 13—15**; *Б. Бегун* (Москва) **05**; *А. Белозеров* (Одесса) **07, 13**; *Ю. Белоцерковский* (Минск) **13, 14**; *В. Бережной* (Киев) **10, 13, 14**; *Ю. Беспалов* (Шостка) **13**; *В. Бобов* (Ленинград) **13**; *А. Болдырихин* (Могилев-Подольский) **13, 14**; *А. Брудный* (Ярославль) **13, 14**; *Э. Вайслеб* (Киев) **14**; *С. Волков* (Алма-Ата) **07, 13**; *С. Волосивец* (Саратов) **13**; *С. Вулекова* (Алма-Ата) **14**; *М. Габриелян* (Ереван) **07**; *М. Гайсинский* (Ташкент) **04, 13**; *М. Гапонова* (Горький) **13**; *В. Гешкенбейн* (Москва) **13**; *З. Гиунашвили* (Тбилиси) **13**; *М. Гликман* (Кишинев) **13, 14**; *С. Горшков* (Москва) **13, 14**; *Е. Горшкова* (Пермь) **13, 14**; *Д. Гоцко* (Львов) **14**; *А. Григорьян* (Ленинград) **14**; *С. Гульчук* (Киев) **14**; *И. Гусейнов* (Саатлы) **14**; *В. Денисов* (Москва) **13**; *С. Дипчик* (Ташкент) **13**; *А. Дмитриева* (Ленинград) **13**; *О. Дранко* (Киев) **13, 14**;

А. Ермолин (Петрозаводск) **04, 05**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **04, 07**; *И. Жуков* (Ленинград) **14**; *Б. Зальцман* (Хабаровск) **14**; *М. Заплетин* (Алма-Ата) **07**; *М. Захаров* (Щелково) **14**; *А. Зеге* (Минск) **13, 14**; *А. Зильберберг* (Кременчуг) **14**; *А. Золотых* (Курск) **14**; *П. Зусманович* (Алма-Ата) **14**; *И. Зябрев* (Кролевец) **14**; *З. Ибрагимов* (Масаллы) **13—15**; *Т. Иванов* (Плевен, НРБ) **04**; *В. Ивлев* (Донецк) **14**; *Ю. Ильясов* (Сназань) **14**; *А. Искандеров* (с. Нюснюс АзССР) **14**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **07**; *А. Калашников* (Артемовск Донецкой обл.) **13, 14**; *Д. Камунтавичус* (Вильнюс) **13, 14**; *А. Каплан* (Сумгаит) **04, 10, 13**; *Е. Карзова* (Ленинград) **13**; *А. Карпович* (Киев) **14**; *Н. Качан* (д. Якимовка Минской обл.) **13, 14**; *С. Ким* (бектемир) **13, 14**; *Л. Киричук* (с. Мошурово Черкасской обл.) **14**; *З. Коза* (Еленя-Гура, ПНР) **13**; *И. Колпаков* (Сочи) **13**; *И. Компанейцев* (Алма-Ата) **13**; *О. Кондратьева* (Ташкент) **14**; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **14**; *Д. Короткин* (Ленинград) **0,4, 0,8, 13, 14**; *А. Коротков* (Горький) **13, 14**; *А. Кратиди* (Рустави) **13**; *О. Крижановский* (Харьков) **10**; *Е. Кузнецов* (Ижевск) **07, 08**; *П. Курасов* (Ленинград) **13, 15**; *О. Кушнир* (Киев) **13**; *А. Левин* (Ленинград) **05, 07, 08, 10**; *А. Лейцин* (Чернигов) **13, 14**; *В. Лихачев* (Львов) **13**; *О. Лысенко* (Миусинск) **14**; *О. Любель* (Орша) **14**; *О. Малов* (Казань) **13**; *А. Мамедов* (Саатлы) **13, 14**; *С. Мамедов* (Баку) **13**; *В. Мангазеев* (Кемерово) **13, 14**; *С. Матюшов* (Вологда) **13**; *Е. Мельничук* (с. Черноводы Хмельницкой обл.) **13, 14**; *Л. Меркявичус* (Лентварис) **04, 05, 13, 14**; *А. Мильман* (Одесса) **13, 14**; *Э. Мирзоян* (Ереван) **07**; *С. Морейно* (Москва) **04, 07, 09, 13, 14**; *Ю. Назаренко* (Киев) **07, 10, 13—15**; *А. Наурызбаев* (Алма-Ата) **07**; *А. Николаевский* (Харьков) **14**; *А. Никонов* (Кировоград) **13—15**; *Л. Новик* (Гродно) **14**; *П. Овчинников*, (Вязники) **13, 14**; *А. Одесский* (Ташкент) **04, 13**; *М. Окроян* (Ереван) **08, 13, 14**; *А. Ошемков* (Фрязино) **13**; *Н. Пендюрин* (Пенза) **13**; *Г. Перельман* (Ленинград) **08, 13, 14**; *В. Подстригач* (Львов) **04**; *И. Пиковский* (Киев) **10**; *А. Поезд* (Москва) **10, 13, 14**; *Е. Поляков* (Калининград) **13, 14**; *Ю. Прохоров* (Москва) **13, 14**; *В. Радченко* (Киев) **04, 10, 14**; *О. Райчев* (Киев) **13**; *П. Ремидько* (Ангарск) **07, 10, 14**; *В. Романюк* (с. Куснище Волынской обл.) **13**; *Б. Рублев* (Киев) **07, 08, 10**; *Н. Сайгина* (Саратов) **13, 14**; *Э. Салимов* (Кировабад) **13**; *М. Салтанов* (Москва) **07**; *М. Свердликов* (Новосибирск) **07, 13**; *В. Светлицкий* (Запорожье) **10**; *И. Скрыпник* (Ивано-Франковск) **14**; *М. Слинкин* (Москва) **13**; *А. Смирнов* (Курган) **13, 14**; *А. Соловьев* (Ленинград) **07, 08, 13, 14**; *А. Спивак* (Стерлитамак) **07, 13, 14**; *С. Спичак* (Припять) **07, 13—15**; *А. Сромин* (Ленинград) **13, 14**; *Э. Степанян* (Баку) **07, 13**; *А. Сыкса* (Киев) **13, 14**; *Ю. Талденко* (Сумы) **13, 14**; *Д. Талис* (Свердловск) **13**; *С. Тимофеев* (с. Саханка Донецкой обл.) **13, 14**; *С. Ткаченко* (Могилев-Подольский) **13, 14**; *К. Томилин* (Москва) **14**; *Ю. Торхов* (Ижевск) **14**; *Ю. Трофимчук* (Калиновка Винницкой обл.) **14**; *Р. Угриновский* (Хмельник) **13**; *В. Ушаков* (Харьков) **13, 14**; *Н. Федин* (Омск) **13, 14**; *Я. Фельдман* (Киев) **07, 13**; *О. Фонарев* (Сумгаит) **07, 13, 14**; *С. Фурсаев* (Таллин) **14**; *А. Харитонский* (Киев) **04, 13, 14**; *В. Харченко* (Новосибирск) **13**; *А. Хилков* (Новомосковск Тульской обл.) **13, 14**; *С. Хомич* (Ангарск) **07, 13**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **14**; *А. Хохлов* (Москва) **14**; *И. Хускутдинов* (Термез) **07, 13**; *В. Цекановский* (Донецк) **10**; *И. Цимох* (Кировоград) **14**; *В. Цолов* (Панагюрище, НРБ) **13, 14**; *О. Чалых* (Витебск) **13, 14**; *А. Чернышов* (Москва) **08**; *А. Чистоклетов* (п. Мулловка Ульяновской обл.) **14**; *С. Шарапов* (Ташкент) **13, 14**; *Н. Шаромет* (Москва) **08, 10**; *В. Шах* (с. Замшаны Волынской обл.) **13, 14**; *И. Швецов* (Петропавловск) **13, 14**; *З. Шибзухов* (Нальчик) **04**; *Ю. Шинкарь* (Киев) **13**; *А. Шиханян* (Джермук) **14**; *А. Шухат* (Одесса) **14**; *А. Элькун* (Ташкент) **13, 14**; *А. Эпремидзе* (Тбилиси) **13**; *М. Эскеров* (Хасавюрт) **14**; *Ф. Эфендиев* (Баку) **13, 14**; *В. Юдаков* (п. Армянск) **04, 05, 08, 10, 13, 14**; *И. Ядешко* (Гродно) **14**; *В. Яковлев* (Пермь) **14**; *Г. Ямурзин* (Уфа) **13**; *К. Янакиев* (Ямбол, НРБ) **13**; *А. Яшпатров* (Ангарск) **07**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф603—Ф617**, справились с задачами **Ф603, Ф605, Ф613—Ф615**. Остальные задачи правильно решили: *А. Авакьянц* (Донецк) **6, 7, 9, 11, 12**; *В. Аветисов* (Баку) **6—9, 11, 12**; *М. Агапова* (Мурманск) **17**; *И. Аглиуллин* (Москва) **16**; *В. Аксенов* (Великие Луки) **7**; *З. Али-Заде* (Баку) **11**; *И. Аполонский* (Жуковский) **7**; *Л. Арушанов* (Баку) **11**; *А. Бабаев* (Баку) **7, 11**; *Р. Бабаев* (Баку) **7—9, 11**; *О. Бабий* (Киев) **16, 17**; *П. Байков* (Балашиха) **17**; *О. Барабаш* (Киев) **9, 11, 12**; *Л. Белявский* (Светловодск) **17**; *В. Бережной* (Киев) **4, 6—9, 11, 12, 17**; *А. Бессарабский* (п. Запрудня Московской обл.) **4, 6—9, 11, 12**; *И. Бессонов* (Реутов) **4, 6, 7, 9, 11**; *А. Божко* (Алма-Ата) **16, 17**; *А. Бойко* (Киев) **8, 9, 17**; *С. Боханов* (Новополоцк) **7, 11, 12**; *Л. Брагинский* (Киев) **4, 9, 11, 12**; *Е. Буторин* (Казань) **12**; *С. Вагнер* (Джезказган) **11, 12**; *В. Васильев* (Великие Луки) **4, 6; 8—12, 17**; *И. Вакшин* (Иваново) **16**; *В. Вачев* (Ямбол, НРБ) **8, 9, 16**; *Б. Вейцман* (Одесса) **4, 6, 11, 12**; *Ю. Вовкогон* (п. Любеч Черниговской обл.) **17**; *С. Вовнюк* (Харьков) **17**; *Е. Войтенко* (Киев) **9, 11, 17**; *В. Ворона* (Славянск) **11, 12, 17**; *Р. Вырбанов* (Тервел, НРБ) **16, 17**; *Е. Выродов* (Подольск Московской обл.) **4, 6—9, 11, 12**; *А. Габриелян* (п. Мартуни АзССР) **16, 17**; *Г. Гаев* (Саратов) **7, 9, 11, 12**; *И. Галич* (Москва) **4, 7, 9, 11, 12, 16, 17**; *Е. Гасинова* (п. Ярдымлы АзССР) **12**; *С. Голощапов* (Запорожье) **6, 9, 11, 12, 17**; *В. Горбунов* (Коммунарск) **4, 7—9, 12**; *А. Градинер* (Баку) **11, 12**; *А. Григоренко* (Макеевка Донецкой обл.) **7—9, 11, 12, 16, 17**; *Д. Григорьев* (Москва) **4, 6—10, 12, 16, 17**; *И. Губин* (Ереван) **4, 8, 11**; *Г. Гунромский* (Минск) **16, 17**; *А. Гусев* (Киев) **9, 11, 12**; *И. Даниловский* (Горький) **4, 6—9, 12**; *В. Дворцевой* (Липецк) **7, 9, 11, 16, 17**; *В. Дегтярь* (Донецк) **17**; *И. Деребас* (Магнитогорск) **17**; *А. Долинин* (Владимир) **16, 17**;

(Продолжение см. на с. 44)

Ю. Иванов

Сколько вариантов?

Здесь продолжается изучение комбинаторных задач по программе факультатива для IX класса, начатое в предыдущем номере.

Во всех разобранных в предыдущей статье задачах (и предложенных вам для решения упражнениях) для получения ответа требовалось лишь одно арифметическое действие — умножение. Покажем, в каких случаях для подсчета числа вариантов применяются другие арифметические действия.

Вычитание и сложение

Задача 1. *Сколько имеется четырехзначных чисел, в десятичной записи которых встречаются одинаковые цифры?*

Решение. Действуя по той же схеме, что и в предыдущей статье, разобьем построение четырехзначного числа на четыре шага: выбор первой, второй, третьей, четвертой цифр. На первом шаге у нас 9 возможностей, на втором и третьем шагах — по 10 возможностей. Но число вариантов осуществления четвертого шага зависит от результата первых трех шагов: если среди первых трех цифр были равные, то на четвертом шаге у нас 10 возможностей, если же первые три цифры были различными, то в качестве четвертой цифры мы обязаны взять одну из этих цифр, и, следовательно, у нас будет на этом шаге лишь три возможности. Таким образом, правило произведения здесь не применимо. Не поможет и перестановка шагов: мы все равно встретимся с такой же трудностью. Однако вспомним, что в начале предыдущей статьи мы решили задачу, противоположную разбираемой,— нашли число четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр. Вычитая это число (оно равно $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$) из числа всех четырехзначных чисел (оно равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$) мы получим, что число четырехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно $9000 - 4536 = 4464$.

Упражнения

1. Сколько имеется шестизначных чисел, в записи которых хотя бы одна цифра четна?

2. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2,..., 9, в которых хотя бы одна из первых трех цифр делится на 3?

Задача 2. *Сколько имеется натуральных чисел, меньших 10^5, в десятичной записи которых соседние цифры различны?*

Решение. Если разбить построение такого числа на шаги, на каждом из которых выбирается одна цифра, то для разных чисел число шагов будет разным. Вместе с тем с помощью правила произведения нетрудно найти по отдельности число однозначных, двузначных, трехзначных, четырехзначных и пятизначных чисел, удовлетворяющих условию задачи: 9, 9^2, 9^3, 9^4, 9^5. Значит, всего есть $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 = 66429$ натуральных чисел, меньших 10^5, с различными соседними цифрами.

Упражнения

3. Алфавит состоит из 10 букв. Назовем *цепочкой* любую последовательность букв этого алфавита, в которой никакая буква не встречается три раза подряд. Сколько имеется цепочек, состоящих не более чем из четырех букв?

4. Сколько имеется шестизначных чисел, в которых четные и нечетные цифры чередуются?

В задаче 2 и упражнениях 3, 4 не удается непосредственно применить правило произведения. В каждой из этих задач множество пере-

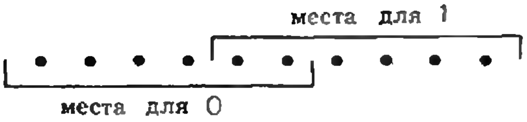


Рис. 1.

считываемых предметов удается разбить на несколько частей таким образом, что для подсчета числа элементов в каждой из этих частей уже можно применить правило произведения. Сложив получившиеся числа, мы находим решения этих задач.

Задача 3. *Сколько имеется перестановок из цифр 0, 1, 2,..., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых шести мест, а цифра 1 — одно из шести последних мест (рис. 1)?*

Решение. Если мы сначала выберем место для нуля, затем — место для единицы, а после этого расставим на оставшихся восьми местах остальные восемь цифр, то на втором шаге число возможностей будет зависеть от решения, принятого на первом шаге; именно, если на первом шаге мы поставим цифру 0 на одно из первых четырех мест, то место для единицы мы сможем выбрать шестью способами; если же цифра 0 займет пятое или шестое место, то для единицы будет лишь пять возможных мест. Поэтому с самого начала разобьем множество всех перестановок, удовлетворяющих условию задачи, на два подмножества: перестановки, в которых цифра 0 занимает одно из первых четырех мест, и перестановки, в которых эта цифра занимает пятое или шестое место. Число элементов в каждом из этих подмножеств легко подсчитывается с помощью правила произведения: $4 \cdot 6 \cdot 8! = 24 \cdot 8!$ и $2 \cdot 5 \cdot 8!$ Ответ: $24 \cdot 8! + 10 \cdot 8! = 34 \cdot 8!$.

Упражнения

5. Сколько имеется четных шестизначных чисел, в десятичной записи которых все цифры различны?

6. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2,..., 9, удовлетворяющих условию
а) цифры 0 и 1 стоят рядом, а цифры 1 и 2 не стоят рядом;
б) между цифрами 0 и 1 стоят три другие цифры, а между цифрами 1 и 2 — две другие цифры?

7. Сколько имеется функций f, удовлетворяющих следующим условиям: область определения функции f — множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, каждое значение функции f принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$, число $f(5)$ делится без остатка на $f(3)$?

Деление

Четвертое арифметическое действие тоже бывает полезным при решении комбинаторных задач.

Задача 4. *Сколькими способами можно рассадить 12 человек за круглым столом, если за столом 12 стульев?*

Решение. Число различных расположений 12 человек на 12 местах, то есть число перестановок этих двенадцати человек, равно 12!, независимо от того, где эти стулья находятся,— за столом, или у стены, или где-нибудь еще. Зачем в таком случае в задаче отмечается, что стулья стоят именно за круглым столом? В задаче 4 — ни за чем. Но круглый стол позволяет дать естественные «варианты» задачи.

А. Если для каждого человека важно не место, которое он занимает за столом, а лишь то, *кто является его соседом справа и кто является его соседом слева*, то два расположения следует отождествить, если при переходе от одного из этих расположений к другому у каждого из сидящих за столом не меняется ни сосед справа, ни сосед слева.

Б. Если для каждого человека важно лишь то, *кто является его соседями* (и не важно, кто из этих соседей сидит справа, а кто — слева), то два расположения следует отождествить, если каждый из сидящих за столом имеет в обоих случаях одних и тех же соседей.

В. Если для каждого человека важно лишь то, *кто сидит напротив него*, то два расположения нужно отождествить, если любые два человека, занимающие диаметрально противоположные места при одном расположении, занимают также диаметрально противоположные места при другом расположении.

Перейдем к варианту А. Разобьем все 12! расположений на группы, относя к одной группе те и только те расположения, которые нужно отождествить. Число получаемых таким образом групп и есть ответ задачи. Чтобы его найти, выясним сначала, сколько расположений окажется в одной группе. Выберем произвольную такую группу и рассмотрим расположения, которые в нее попали. У каждого человека во всех этих расположениях фиксирован сосед справа и сосед слева. Поэтому, чтобы построить произвольное расположение из данной группы, достаточно указать человека, который займет стул № 1 (и в этом варианте задачи, и в вариантах Б и В будем считать, что стулья занумерованы по кругу числами от 1 до 12), после чего места остальных людей определятся уже однозначно. Так как на место № 1 можно посадить любого из 12 человек, каждая группа составлена из 12 расположений. Чтобы найти теперь число групп, остается разделить общее число расположений на число расположений в одной группе: $\frac{12!}{12}=11!$

Разберем теперь вариант Б. И здесь мы разобьем все 12! расположений на группы так, чтобы два расположения попали в одну группу в том и только в том случае, когда их нужно отождествить. Выберем какую-нибудь группу и подсчитаем, сколько в ней расположений. Так как у каждого человека в этих расположениях постоянные соседи, произвольное расположение из данной группы можно построить в два шага: сначала выберем человека, который займет стул № 1 (12 возможностей), затем решим, кто из двух его соседей займет место № 2 (2 возможности), после чего места остальных десяти человек определятся «по цепочке» однозначно. В соответствии с правилом произведения каждая группа состоит из 24 расположений и, следовательно, число групп равно $\frac{12!}{24}=\frac{11!}{2}$.

И, наконец, в варианте В, как и в предыдущих вариантах, подсчитаем, сколько расположений оказалось в одной группе этого варианта. Пусть во всех расположениях из этой группы A должен сидеть напротив A', B — напротив B', C — напротив C', $Д$ — напротив $Д'$, E — напротив E', и, наконец, F — напротив F'. Эти шесть пар человек нужно рассадить на шесть пар стульев: (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 10), (5, 11) и (6, 12) — по одной паре стульев на каждую пару человек. Построение произвольного расположения из данной группы можно поэтому разбить на семь шагов: сначала распределить 6 пар мест между шестью парами человек (6! возможностей), на втором шаге распределить A и A' на отведенных для них двух местах, на третьем шаге распределить B и B' на отведенных для них местах, и т. д., на седьмом шаге — распределить места между F и F'. Так как на каждом из шести последних шагов у нас есть по две возможности, в силу правила произведения в данной группе (как и в любой другой) будет $6!\cdot 2^6$ расположений. Искомое число групп равно, следовательно,

$$\frac{12!}{6!\cdot 2^6}=3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11=10395.$$

Задача 5. *Каждую из сторон $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ и диагональ $[AC]$ квадрата $ABCD$ требуется окрасить в один из данных пяти цветов, причем все цвета должны быть использованы. Две раскраски считаются одинаковыми, если одну из другой можно получить некоторым перемещением. Сколько имеется различных раскрасок?*

Решение. Если не обращать внимания на перемещения, то речь идет о распределении пяти цветов по пяти отрезкам. Таких распределений, очевидно, 5!. Условие задачи разбивает эти 5! распределений на группы, каждая из которых состоит из всех распределений цветов, определяющих неразличимые раскраски. Число этих групп и служит ответом задачи. Найдем, как и преж-

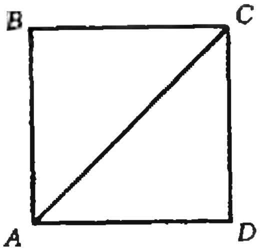


Рис. 2.

де, число элементов в одной группе. Это число равно, очевидно, числу различных перемещений, которые переводят фигуру, изображенную на рисунке 2, в себя. Так как при каждом таком перемещении диагональ $[AC]$ должна переходить в себя, вершины A и C либо останутся на месте, либо поменяются местами. Для вершин B и D поэтому остаются тоже две возможности: остаться на месте или поменяться местами. Комбинируя каждый из двух вариантов перемещения вершин A и C с каждым из двух вариантов перемещения вершин B и D, мы получим четыре различных перемещения: тождественное (A и C остались на месте, B и D остались на месте), симметрию относительно прямой BD (A и C поменялись местами, а B и D остались на месте), симметрию относительно прямой AC (A и C остались на месте, B и D поменялись местами) и композицию этих двух симметрий — симметрию относительно центра квадрата (при этом поменяются местами как A с C, так и B с D). Таким образом, каждая группа состоит из четырех элементов и ответом задачи является число $\frac{5!}{4}=30$.

Упражнения

8. Сколько попарно неконгруэнтных фигур можно построить из данного правильного n-угольника и n кругов попарно различных радиусов, если каждая сторона n-угольника должна касаться в своей середине одного и только одного из данных кругов?

9. Для банкета на 100 человек приготовлено девять круглых столов: три восьмиместных, четыре десятиместных и два восемнадцатиместных. Два варианта расположения людей за столами считаются одинаковыми, если у каждого человека в обоих вариантах один и тот же сосед справа и один и тот же сосед слева. Сколько имеется различных вариантов расположения ста человек за этими столами?

Задача 6. *Сколько имеется шестизначных чисел, в записи которых цифры 1 и 2 встречаются по два раза, а цифры 3 и 4 — по одному разу?*

Решение. Шестизначное число, все цифры которого заданы,— это, по существу, перестановка этих шести цифр. Но мы знаем формулу для числа перестановок различных предметов, в то время как среди цифр рассматриваемых шестизначных чисел есть одинаковые. Чтобы все-таки использовать формулу для числа перестановок, будем считать, что у нас есть две разных единицы: 1 и 1 и две разных двойки: 2 и 2, так что речь идет о 6! перестановках шести цифр: 1, 1, 2, 2, 3, 4. Однако искомое число шестизначных чисел не равно числу таких перестановок, так как некоторые перестановки, например 3 1 2 1 4 2 и 3 1 2 1 4 2, приводят к одному и тому же числу. Две перестановки будут определять одно и то же шестизначное число, если одну из другой можно получить, лишь меняя местами 1 и 1 или 2 и 2. Мы приходим к знакомой ситуации: все 6! перестановок разбиваются на группы, число которых и есть искомое число шестизначных чисел. Так как в каждой группе четыре перестановки, ответ: $\frac{6!}{4}=30$.

Упражнения

10. Сколько разных семибуквенных слов можно получить, переставляя буквы слова «колокол»? (В математике *словом* называют любую конечную последовательность букв некоторого алфавита.)

11. Сколько имеется семизначных чисел, в записи которых цифра 1 встречается трижды, а цифра 0 — дважды?

12. Сколько имеется пятизначных чисел, делящихся на 25, в записи которых не встречаются цифры 0 и 2?

13. В некотором алфавите — 5 букв. Сколько имеется в этом алфавите шестибуквенных слов, в каждом из которых встречаются только две разные буквы, причем одна из них — пять раз?

14. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2,..., 9, в которых цифры 0, 1, 2, 3 стоят подряд

а) в порядке возрастания;

б) в произвольном порядке?

15. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 9, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что

а) в каждом числе каждая цифра встречается не более одного раза;

б) в каждом числе каждая цифра встречается не более двух раз?

16. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2,..., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых восьми мест, цифра 1 — одно из первых пяти мест и между цифрами 0 и 1 расположено две другие цифры?

17. Сколько $(m+n)$-буквенных слов можно составить из m букв A и n букв $Б$?

В. Чехлов

Эти «коварные» векторы

Эта заметка посвящена некоторым особенностям применения векторов к решению геометрических задач.

Применение векторов основано на том, что различные утверждения о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей могут быть сформулированы на «векторном языке», в частности с помощью понятий коллинеарности и компланарности. Это позволяет свести геометрическую задачу к векторному равенству. В свою очередь векторное равенство можно свести (в частности, на основе теоремы единственности разложения) к алгебраическому равенству или к системе алгебраических равенств.

Задача 1. *Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB, SC и SD пирамиды соответственно в точках M, N, P и Q так, что* $|SM|:|SA| = a$, $|SN|:|SB| = b$, $|SP|:|SC| = c$, $|SQ|:|SD| = d$. *Доказать, что* $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

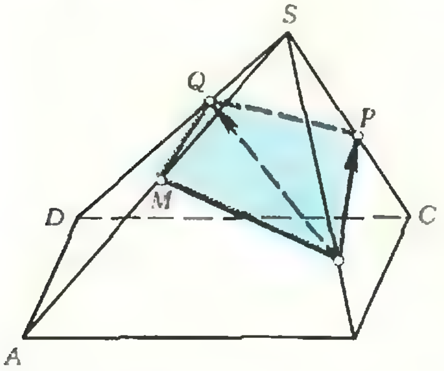


Рис. 1.

Решение. Отрезки NM, NP и NQ (рис. 1) лежат в одной плоскости. Согласно определению компланарных векторов, векторы $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{NQ}$ компланарны. Векторы $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{NP}$, очевидно, не коллинеарны, поэтому по теореме о разложении компланарных векторов существуют числа x и y такие, что

$$\overrightarrow{NQ} = x\overrightarrow{NM} + y\overrightarrow{NP}. \qquad (1)$$

Разложим эти векторы по трем некомпланарным векторам $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$. Имеем $\overrightarrow{SM} = a\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SN} = b\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SP} = c\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SQ} = d\overrightarrow{SD}$, откуда

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SN} = a\overrightarrow{SA} - b\overrightarrow{SB}, \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{SP} - \overrightarrow{SN} = c\overrightarrow{SC} - b\overrightarrow{SB}, \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{SN} = d\overrightarrow{SD} - b\overrightarrow{SB}. \qquad (4)$$

Поскольку $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD}$, а $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$, из (4) следует, что

$$\overrightarrow{NQ} = d\overrightarrow{SA} - (d+b)\overrightarrow{SB} + d\overrightarrow{SC}. \qquad (5)$$

Подставляя (2), (3), (5) в (1), получаем

$$\overrightarrow{NQ} = d\overrightarrow{SA} - (d+b)\overrightarrow{SB} + d\overrightarrow{SC} = ax\overrightarrow{SA} - b(x+y)\overrightarrow{SB} + cy\overrightarrow{SC}. \qquad (6)$$

В силу единственности разложения векторное равенство (6) равносильно системе

$$\left\{ \begin{aligned} d &= ax, \\ d+b &= b(x+y), \\ d &= cy. \end{aligned} \right. \qquad (7)$$

Отсюда $x+y = \frac{d}{a} + \frac{d}{c} = \frac{d+b}{b}$, или $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

В рассмотренном примере векторное равенство (6) было сведено к системе (7). Следует помнить, что равенство для векторов в пространстве равносильно именно *системе* трех алгебраических равенств. Поэтому если хотя бы одно из равенств этой системы неверно при любых значениях переменных, то и векторное равенство неверно, а исходная геометрическая задача решений не имеет. Следующий простой пример подтверждает это.

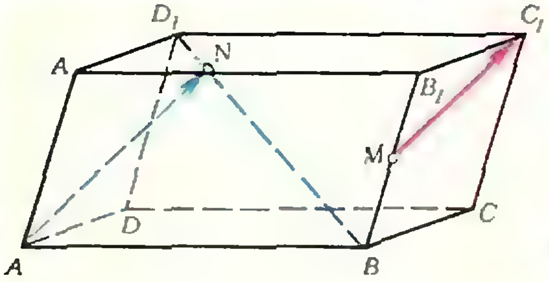


Рис. 2.

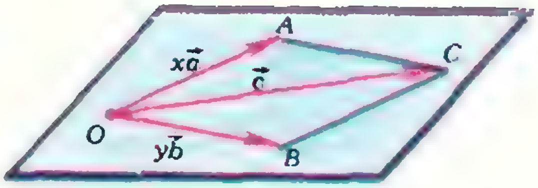


Рис. 3.

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — *параллелепипед, точка M — середина ребра BB_1, точка N принадлежит прямой BD_1. При каком отношении $|BN|:|BD_1|$ прямые AN и C_1M параллельны?*

Решение. Векторы $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{BD_1}$ (рис. 2) коллинеарны, поэтому при некотором λ

$$\overrightarrow{BN}=\lambda\overrightarrow{BD_1}. \qquad (8)$$

Положим $\overrightarrow{BA}=\vec a$, $\overrightarrow{BC}=\vec b$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec c$; все остальные векторы будем раскладывать по этим трем некомпланарным векторам. Поскольку $\overrightarrow{BD_1}=\vec a+\vec b+\vec c$, $\overrightarrow{BN}=\lambda(\vec a+\vec b+\vec c)$. Далее, $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\vec a+\lambda(\vec a+\vec b+\vec c)=(\lambda-1)\vec a+\lambda\vec b+\lambda\vec c$. Кроме того, $\overrightarrow{MC_1}=\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\frac{1}{2}\vec c+\vec b$. Если прямые AN и MC_1 параллельны, то векторы $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{MC_1}$ коллинеарны и, значит, при некотором x верно равенство $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{MC_1}$, откуда

$$(\lambda-1)\vec a+\lambda\vec b+\lambda\vec c=x\vec b+\frac{x}{2}\vec c. \qquad (9)$$

Из (9) сразу следует, что $\lambda-1=0$, $\lambda=1$. Теперь из (8) получаем $|BN|:|BD_1|=1$.

Казалось бы, задача решена. Но не тут-то было. Действительно, равенство (9) равносильно системе

$$\begin{cases} \lambda-1=0, \\ \lambda=x, \\ \lambda=\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Легко видеть, что эта система относительно λ и x решений не имеет. Из первых двух уравнений следует, что $x=\lambda=1$, а подстановка в третье уравнение приводит к неверному равенству $1=\frac{1}{2}$. Таким образом, ни при каком положении точки N прямые AN и MC_1 не параллельны.

Этот результат для данной задачи, конечно, очевиден. Достаточно, вместо того чтобы записывать соотношения между векторами, немного подумать. В самом деле, прямая MC_1 пересекает плоскость AD_1C_1B и, следовательно, не может быть параллельна прямой AN, лежащей в этой плоскости.

Выше уже использовалась теорема о разложении компланарных векторов: *если векторы $\vec a$ и $\vec b$ не коллинеарны, то любой вектор $\vec c$, компланарный с векторами $\vec a$ и $\vec b$, можно представить единственным образом в виде*

$$\vec c=x\vec a+y\vec b \qquad (10)$$

(см. «Геометрия 9—10», § 21). В ряде случаев векторное решение геометрических задач приводит к такому вопросу: компланарны ли векторы $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, если имеет место (10)? Соответствующей теоремы в школьном учебнике нет, но легко понять, что ответ на этот вопрос — утвердительный:

(*) *если при некоторых x и y верно (10), то векторы $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ компланарны.*

Докажем это для случая, когда векторы $\vec a$ и $\vec b$ не коллинеарны и $x\neq 0$, $y\neq 0$. От некоторой точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}=x\vec a$ и $\overrightarrow{OB}=y\vec b$ (рис. 3). Их суммой является вектор $\overrightarrow{OC}$, где OC — диагональ параллелограмма $OACB$. Таким образом, лучи, задающие направления векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, параллельны соответственно прямым OA, OB, OC, ле-

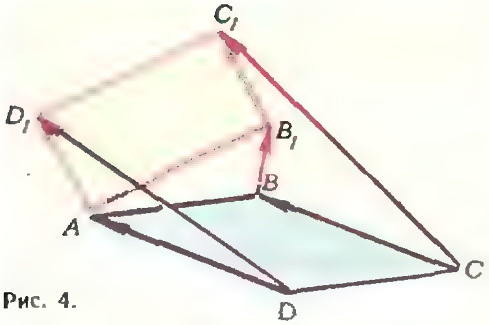


Рис. 4.

жащим в плоскости OAB. Значит, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. В исключенных выше случаях доказательство еще проще, и мы оставляем его читателю.

Задача 3 («Геометрия 9—10», № 247). *Точка A — общая вершина параллелограммов $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. Докажите компланарность векторов $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$.*

Решение. Имеем $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$ (рис. 4) и, так как $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AD_1}$, получаем $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BB_1}+(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD_1})$. Но $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{DD_1}$, поэтому $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{DD_1}$. Отсюда следует по (*), что векторы $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ компланарны.

Задача 4. *Даны три единичных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $(\vec{a},\widehat{\ }\,\vec{c})=(\vec{b},\widehat{\ }\,\vec{c})=\frac{\pi}{3}$, $(\vec{a},\widehat{\ }\,\vec{b})=\frac{\pi}{2}$. Компланарны ли эти векторы?*

Предлагаем сначала найти ошибку в следующем рассуждении:

«Докажем, что $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Будем искать числа x и y, для которых

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}. \qquad (11)$$

Для этого умножим обе части (11) скалярно на вектор $\vec{a}$. Получим $\vec{c}\cdot\vec{a}=x\vec{a}\cdot\vec{a}+y\vec{b}\cdot\vec{a}$, откуда $x=\frac{1}{2}$. Умножив обе части (11) на $\vec{b}$, получим $\vec{c}\cdot\vec{b}=x\vec{a}\cdot\vec{b}+y\vec{b}\cdot\vec{b}$, откуда $y=\frac{1}{2}$. Значит,

$$\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}, \qquad (12)$$

то есть по (*) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны».

То, что это рассуждение ошибочно, установить легко. Достаточно попытаться отложить в одной плоскости от некоторой точки векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ с заданными углами между ними. Сразу станет ясно, что это невозможно. Значит, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны.

Для того чтобы понять, где была допущена ошибка, вернемся к началу рассуждения. Там было высказано намерение найти такие числа x и y, при которых равенство (11) верно. Но это намерение не было осуществлено. Действительно, последующие выкладки доказывают только то, что из (11) следует (12), и не более. Ни существование чисел x и y, для которых верно (11), ни справедливость равенства (12) не доказаны. И значит, вывод «по (*) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны» не обоснован.

Ошибка здесь состоит в том, что из проведенных рассуждений делается вывод, не соответствующий доказанному утверждению.

Приведем теперь векторное решение задачи 4.

Докажем от противного, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны. Предположим, что *существуют* такие числа x и y, что равенство (11) верно. Тогда, как и ранее, получим, что верно и (12). Умножив (12) скалярно на $\vec{c}$, получим, что верно равенство $1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, то есть $1=\frac{1}{2}$. Это противоречие показывает, что (11) неверно ни при каких x и y, то есть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны.

Рассмотрим еще пример того, как неполный перевод условия геометрической задачи на «векторный язык» может привести к ошибке.

Задача 5. *При какой длине ребра AD в тетраэдре $ABCD$ выполнены соотношения*

$$\widehat{ABC}=\frac{\pi}{2},\ \widehat{BCD}=(\widehat{AB,\ CD})=\arccos\frac{5}{7},$$

$$|AB|=|BC|=|CD|=a? \qquad (13)$$

«Решение». Поскольку $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, мы получаем $\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$. Здесь $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{CD}^2 = a^2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD} = a^2 \cos(\pi - \widehat{BCD}) = -\frac{5}{7}a^2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = a^2 \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$, а так как возможны два случая: $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ } \overrightarrow{CD}) = \arccos\frac{5}{7}$ или $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ } \overrightarrow{CD}) = \pi - \arccos\frac{5}{7}$, получаем либо $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \frac{5}{7}a^2$, либо $\overrightarrow{AB}, \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{5}{7}a^2$. Отсюда следует, что либо $\overrightarrow{AD}^2 = 3a^2$, либо $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{a^2}{7}$. Значит, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3}\,a$, или $|\overrightarrow{AD}| = \frac{a}{\sqrt{7}}$.

На первый взгляд в этом решении не было возможности ошибиться. Тем не менее ошибка в нем есть. Дело в том, что поставленная геометрическая задача равносильна задаче о решении векторной *системы*:

$$\left\{\begin{array}{ll} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = a, & \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, & \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \pm\frac{5}{7}a^2, & (14) \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{5}{7}a^2, & \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}. & \end{array}\right.$$

Это система с четырьмя *неизвестными векторами* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}$, и геометрическая формулировка задачи 5 может быть теперь заменена на алгебраическую (векторную) формулировку: *чему равна длина вектора* $\overrightarrow{AD}$, *если векторы* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ *и* $\overrightarrow{AD}$ *удовлетворяют системе* (14)?

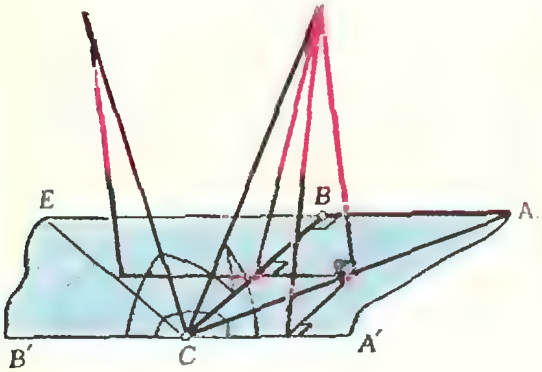


Рис. 5.

Теперь ясно, что указанная постановка вопроса требует либо нахождения решений системы (14), либо доказательства их существования.

В проведенном «решении» было взято последнее уравнение и после возведения в квадрат преобразовано с помощью других уравнений.

Сама же система решена не была. Иначе говоря, было доказано, что если система (14) имеет решение, то $|AD| = a\sqrt{3}$, или $|AD| = \frac{a}{\sqrt{7}}$.

Читатель без труда поймет, что здесь допущена по существу та же ошибка, что и в «решении» задачи 4: сделанный вывод не соответствует тому, что в действительности было доказано.

Мы докажем, что система (14) не имеет решений. Приведем сначала геометрическое доказательство.

Построим прямоугольный треугольник ABC (рис. 5): $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$, $|AB| = |BC| = a$. Через точку C проведем прямую $(A'B') \parallel (AB)$. Пусть прямая CD образует с прямыми BC и $A'B'$ (или, что то же, с AB) равные углы величины α. Тогда легко заключить, что ортогональная проекция прямой CD на плоскость ABC лежит либо на биссектрисе CA угла BCA', либо на биссектрисе CE угла BCB'. Отсюда следует, что в первом случае $\widehat{BCD} > \widehat{BCA}$, а во втором случае $\widehat{BCD} > \widehat{BCE}$. Так как $\widehat{BCA} = \widehat{BCE} = \frac{\pi}{4}$, получаем $\alpha > \frac{\pi}{4}$. Величина $\alpha = \arccos\frac{5}{7}$ этому условию не удовлетворяет, и, значит, *ни при какой длине ребра AD требуемые соотношения не выполняются.* Это и есть ответ к задаче 5.

Векторное исследование системы (14) можно провести, например, так. Пусть вектор $\vec{h}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ и $|\vec{h}| = a$ (такой вектор в пространстве существует). Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\vec{h}$ не компланарны, поэтому при некоторых x, y, z

$$\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}+z\vec{h}. \qquad (15)$$

Умножив обе части (15) скалярно на $\overrightarrow{AB}$, получим, что $x=\pm\frac{5}{7}$, а умножив (15) на $\overrightarrow{BC}$, найдем $y=-\frac{5}{7}$. Тогда

$$|\overrightarrow{CD}|^2=(x^2+y^2+z^2)a^2=\left(\frac{50}{49}+z^2\right)a^2>a^2,$$

а это противоречит условию $|\overrightarrow{CD}|=a$.

Значит, система (14) решений не имеет, и мы получаем тот же ответ, что и ранее.

Приложенные к этой заметке задачи можно решать и с помощью векторов и чисто геометрически.

Упражнения

1. Даны точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, и точки D и O, $O\neq D$. Доказать, что для того, чтобы точка D принадлежала плоскости ABC, необходимо и достаточно, чтобы $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$, где $x+y+z=1$.

2. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. На ребрах AB, AS и SC расположены соответственно точки M, N и P так, что $|BM|:|AB|=|AN|:|AS|=|SP|:|SC|=2:3$. Через середину Q ребра BC проведена прямая, параллельная плоскости MNP и пересекающая прямую SD в точке R. Найти отношение $|DR|:|DS|$.

3. Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Прямая, перпендикулярная плоскости BA_1C_1, пересекает прямые BC_1 и AB_1 соответственно в точках M и N. Найти $|MN|$.

4. Даны три прямые, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через данную точку и составляющих с данными прямыми равные углы[2].

5. В тетраэдре $ABCD$ $|AB|=|BC|=|CD|$, $\widehat{ABC}=\alpha$, $\widehat{BCD}=(\widehat{AB,CD})=\beta$. Найти угол между прямыми AD и BC. При каких α и β задача а) не имеет решений; б) имеет одно решение; в) имеет два решения?

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 34)

С. Доронин (Днепропетровск) 17; *А. Дремин* (п. Черноголовка Московской обл.) 12; *А. Дурбак* (Рогатин) 16; *С. Дымшаков* (Шадринск) 16, 17; *Ю. Елисеев* (Великие Луки) 4; *И. Елишевич* (Чернигов) 4, 6, 7; *И. Ельканович* (Баку) 17; *Т. Енчев* (Ямбол, НРБ) 9, 12; *В. Жордочкин* (Орск) 4, 6—8; *В. Заварзин* (Чимкент) 16; *А. Заневский* (Ленинград) 4, 6—9, 11, 16, 17; *М. Зейфман* (Вологда) 4, 6, 7, 9, 11, 12, 16; *И. Зильберберг* (Алма-Ата) 6; *В. Золотаревский* (п/о Березовское Харьковской обл.) 7; *И. Зыбцев* (Ужур) 9, 11, 12, 17; *Т. Иванов* (Плевен, НРБ) 16, 17; *А. Иванов* (Воронеж) 8, 12; *В. Ивахненко* (Киев) 11; *В. Изергин* (Новосибирск) 7, 9, 11, 12, 16, 17; *В. Израилит* (Днепропетровск) 9, 16, 17; *В. Кагаловский* (Харьков) 11, 12; *С. Калмыков* (Копейск) 6, 12; *А. Каплан* (Сумгаит) 8, 17; *Д. Каплан* (Зеленоград) 7; *А. Карасев* (Белгород) 7, 17; *М. Кичкачишвили* (Рустави) 12; *Э. Кашапов* (Уфа) 4; *А. Кечеджян* (Ереван) 6, 7, 9, 11, 12, 16; *М. Кибирев* (Тула) 8, 9, 12; *Ю. Кирпач* (Киев) 4, 6, 7, 11, 17; *Ю. Коверник* (Запорожье) 6; *Е. Коган* (Днепропетровск) 8, 9, 11, 12; *А. Кожевников* (Днепропетровск) 8, 9, 12; *В. Козловский* (Новолукомль) 8—12; *Т. Кожоридзе* (Телави) 12; *Д. Коломойцев* (Сумгаит) 4, 6—9, 11; *В. Комов* (Александров) 4, 6—12, 16, 17; *Т. Кондрацкая* (Киев) 4, 6—8; *С. Копкин* (Арзамас) 4, 9, 11, 12; *В. Коробов* (Кировоград) 16; *К. Корчагин* (Ереван) 16; *М. Костин* (Саратов) 12; *И. Костюкевич* (Ленинград) 4, 6, 9, 12, 17; *Д. Котельников* (Магнитогорск) 4, 6, 7, 16, 17; *М. Кравцов* (Коммунарск) 16; *К. Крапивной* (Запорожье) 6, 7; *И. Красиков* (Киев) 8, 9, 11, 12; *А. Крейнес* (Кольчугино) 17; *Л. Креминская* (Ровно) 8; *Е. Кренцель* (Москва) 17; *Р. Крис* (Киев) 4, 7, 8, 11, 12; *И. Кроливец* (Краматорск) 11, 12; *Е. Кузнецов* (Кишинев) 6, 8, 11, 12; *П. Кузнецов* (Киев) 4, 6, 8—12; *А. Кузьмин* (Алма-Ата) 6, 7, 11; *Д. Куксенков* (Ленинград) 16, 17; *С. Курчатов* (Саратов) 4, 7; *Б. Лапидус* (Москва) 11, 12, 17; *М. Левенков* (Верещагино) 17; *Б. Лейтес* (Москва) 4, 6, 7; *И. Леонов* (Воронеж) 6, 11, 12; *Д. Лещинский* (Магнитогорск) 16; *Ф. Ломая* (Симферополь) 9, 12; *И. Лукьянчук* (Киев) 4, 6, 17; *Е. Любовицкий* (Кострома) 16; *А. Ляпин* (Гомель) 4, 6, 16, 17; *А. Мазуркевич* (Лыткарино) 6, 9, 11, 12; *З. Максимов* (Ташкент) 16, 17; *А. Малыгин* (Горький) 16; *В. Мальцев* (Уфа) 17; *О. Мануйленко* (Киев) 17; *С. Масленников* (п. Мешон Тюменской обл.) 4; *С. Махортых* (Лисичанск) 9; *А. Микула* (Жидачов) 4, 6, 12, 17; *С. Милованов* (Запорожье) 17; *С. Михайловский* (Виноградовский р-н Архангельской обл.) 7, 11, 12, 16; *Г. Молчанов* (Саратов) 7—9, 11, 12; *Д. Мякишев* (Ангарск) 11; *Р. Набоков* (Москва) 4, 7; *С. Надточий* (Москва) 4, 6—9, 11, 12; *А. Назаренко* (Киев) 6—9, 11; *М. Найговзен* (Баку) 16; *Д. Нишнианидзе* (Кутаиси) 8; *Д. Ноздрин* (Саратов) 4, 6; *С. Обогуев* (Ленинград) 6, 7; *Д. Овсянников* (Ленинград) 4, 6—9, 12; *С. Одинцова* (Киев) 4, 6, 7, 11; *А. Орлов*

(Окончание см. на с. 55)

С. Кротов

Задачи на столкновения тел

Довольно часто на вступительных экзаменах абитуриентам предлагаются задачи, в которых рассматривается столкновение тел (иногда столкновение называют ударом, или соударением, или рассеиванием). Обычно речь идет о соударении двух тел; если же соударяющихся тел больше, их взаимодействие можно представить как совокупность попарных соударений.

Прежде чем решать любую задачу по физике, и в частности задачу на соударение, нужно понять, какие явления, рассматриваемые в задаче, играют главную роль, а какими явлениями можно пренебречь. В соответствии с этим нужно выбрать идеализированную картину и установить для нее применимость соответствующих физических законов.

Процесс столкновения тел можно разделить на три стадии: первая стадия — тела налетают друг на друга с постоянными скоростями и в какой-то момент соприкасаются друг с другом; вторая стадия (собственно соударение) — появляются силы взаимодействия между телами, которые действуют в течение некоторого промежутка времени; третья стадия — тела разлетаются с новыми неизмениыми во времени скоростями. Обычно формулировка задачи на соударение предполагает по заданным начальным скоростям тел определить их конечные скорости (или наоборот). При этом стадия собственно соударения фактически не рассматривается, а обсуждается лишь ее характер: удар упругий или неупругий, центральный или нецентральный и т. д.

В качестве примера рассмотрим *упругий* удар. Пусть небольшое тело произвольной формы налетает на другое тело. Придя в соприкосновение, тела начинают деформироваться. Возникающие упругие деформации передаются от одних частей тел к другим со скоростью распространения звука (то есть достаточно быстро), причем различные части тел получают различные скорости. Наконец, импульсы деформации достигают противоположных границ тел, отражаются от них, и тела отскакивают друг от друга подобно сжатым пружинам. Что же при этом происходит с первоначальным запасом механической энергии тел?

Из-за неодинаковости скоростей движения различных частей тел возникают колебания, они отбирают определенную энергию, которая при затухании колебаний превращается в тепло. Кроме того, всякое колеблющееся тело становится источником звуковых волн, которые тоже уносят часть энергии. Если удар нецентральный, то есть если относительная скорость соударяющихся тел не проходит по линии центров тел, тела начнут вращаться. Энергия, необходимая для этого, черпается тоже из кинетической энергии поступательного движения тел. Вращение могут вызвать также силы трения. Однако, если отношение потерь к первоначальному запасу механической энергии мало, всеми необратимыми превращениями механической энергии в другие виды энергии пренебрегают и удар считают абсолютно упругим. Идеализированная картина такого удара состоит в следующем: кинетическая энергия поступательного движения налетающих тел частично переходит в потенциальную энергию упругих деформаций; потенциальная энергия растет до тех пор, пока не сравняются скорости движения обоих тел, а затем она переходит в кинетическую энергию разлетающихся тел. Таким образом, при *абсолютно* *упругом* ударе общая механическая энергия тел сохраняется.

Заметим, что при *неупругом* ударе в телах возникают неупругие деформации, которые частично сохраняются и после соударения тел. При этом внутренняя энергия тел изменяется, и значит, их полная механическая энергия не сохраняется.

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных задач. Решая их, мы не будем каждый раз детально обсуждать все происходящее. Надеемся, что читатель сумеет самостоятельно сделать подробный анализ и обосновать выбранную модель явления.

Задача 1. *Два шара одинаковых радиусов движутся по гладкой, горизонтальной поверхности (рис. 1). Массы шаров m_1 и m_2, их скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ направлены по линии центров шаров. Определите скорости шаров после их абсолютно упругого удара.*

Поскольку удар абсолютно упругий и горизонтальная поверхность гладкая, импульс и кинетическая энергия системы сохраняются. До удара оба шара двигались по линии, соединяющей их центры; следовательно, удар центральный и после него шары тоже движутся вдоль линии центров. Направим ось координат по этой линии, спроектируем на нее все скорости и запишем законы сохранения импульса и кинетической энергии:

$$\begin{cases} m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2' \\ \dfrac{m_1v_1^2}{2}+\dfrac{m_2v_2^2}{2}=\dfrac{m_1v_1'^2}{2}+\dfrac{m_2v_2'^2}{2}. \end{cases}$$

Здесь v_1' и v_2' — проекции новых скоростей первого и второго шаров соответственно.

Для решения полученной системы в каждом уравнении в левой части соберем слагаемые, содержащие m_1, а в правой — слагаемые, содержащие m_2:

$$\begin{cases} m_1v_1-m_1v_1'=m_2v_2'-m_2v_2 \\ \dfrac{m_1v_1^2}{2}-\dfrac{m_1v_1'^2}{2}=\dfrac{m_2v_2'^2}{2}-\dfrac{m_2v_2^2}{2}. \end{cases}$$

Поделив почленно второе уравнение на первое, получим

$$v_1+v_1'=v_2'+v_2.$$

Объединим это уравнение с первым уравнением предыдущей системы в новую систему:

$$\begin{cases} v_1+v_1'=v_2'+v_2 \\ m_1v_1-m_1v_1'=m_2v_2'-m_2v_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$v_1'=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2},$$

$$v_2'=\frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2}.$$

Анализируя выражения для v_1' и v_2', можно сделать следующие выводы:

1) При столкновениях тел одинаковых масс $(m_1=m_2)$

$$v_1'=v_2 \text{ и } v_2'=v_1$$

— тела обмениваются скоростями.

2) При соударении легкого и тяжелого тел $(m_1/m_2\to 0)$

$$v_1'=-v_1+2v_2 \text{ и } v_2'=v_2$$

— тяжелое тело не изменяет своей скорости.

3) Если в исходной системе уравнений сделать замену $v_1\to -v_1'$ и $v_2\to -v_2'$, то новые скорости тел будут такими: $v_1''=-v_1$ и $v_2''=-v_2$. Физически это означает обратимость механического движения: если тела налетают друг на друга со скоростями, обратными тем, с которыми они двигались после удара в задаче 1, то разлетаться после удара тела будут со скоростями, обратными тем, с которыми они двигались до удара в задаче 1.

4) $v_2'-v_1'=-(v_2-v_1)$

— при ударе модуль относительной скорости тел не изменяется, а направление этой скорости меняется на противоположное.

Задача 2. *Небольшой шарик лежит на дне ящика, касаясь его правой стенки. В результате толчка извне ящик начинает двигаться впра-*

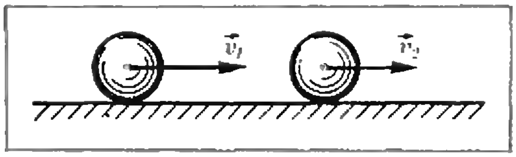


Рис. 1.

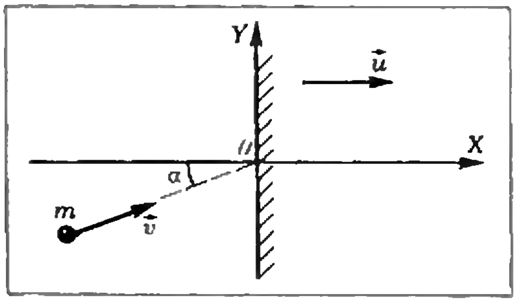


Рис. 2.

во по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $\vec{v}$. Через какое время τ шарик займет первоначальное относительно ящика положение, если его соударения с ящиком абсолютно упругие, дно ящика гладкое, а расстояние между его стенками равно L?

Шарик будет попадать в первоначальное относительно ящика положение перед каждым четным соударением с ящиком. Поскольку модуль скорости шарика относительно ящика при ударе не меняется и все время равен $|\vec{v}|$, время τ найдем по формуле

$$\tau = \frac{2L}{|\vec{v}|}n, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Задача 3. *Гладкая вертикальная стенка движется в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{u}$ (рис. 2). В стенку попадает шарик массой m, летящий со скоростью $\vec{v}$, которая составляет угол α с перпендикуляром к стенке. Считая удар абсолютно упругим, определите модуль v′ скорости шарика после удара и угол β, под которым шарик отлетит от стенки.*

Введем систему координат XOY, как показано на рисунке 2. Обозначим через M массу стенки, через v и u — модули скоростей шарика и стенки до соударения, через u′ — модуль скорости стенки после соударения, а через v'_x и v'_y — соответствующие проекции скорости шарика после удара. Запишем законы сохранения импульса и кинетической энергии:

$$\begin{cases} mv\sin\alpha = mv'_y \\ mv\cos\alpha + Mu = mv'_x + Mu' \\ \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{Mu^2}{2} = \dfrac{mv_x'^2}{2} + \dfrac{mv_y'^2}{2} + \dfrac{Mu'^2}{2}. \end{cases}$$

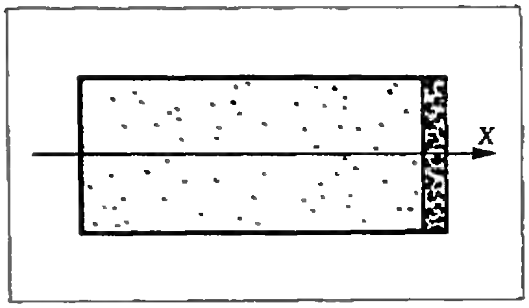


Рис. 3.

Из этой системы найдем

$$v'_y = v\sin\alpha,$$

$$v'_x = \frac{(m-M)v\cos\alpha + 2Mu}{m+M},$$

$$u' = \frac{(M-m)u + 2mv\cos\alpha}{m+M}.$$

Очевидно, что масса шарика мала по сравнению с массой стенки, то есть $m/M \to 0$. С учетом этого получим

$$v'_y = v\sin\alpha,$$

$$v'_x = -v\cos\alpha + 2u,$$

$$u' = u$$

(сравните последние два выражения с выводом 2 из задачи 1). Отсюда

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{v^2 - 4uv\cos\alpha + 4u^2}$$

и

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{v'_y}{-v'_x} = \frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha - 2u}.$$

Задача 4. *Пробирка массой M содержит моль идеального газа массой m при температуре T. Пробирку открывают, вынимая из нее пробку пренебрежимо малой массы. Оцените скорость пробирки после того, как весь газ выйдет из нее. Влияние окружающего воздуха можно не учитывать.*

Направим ось X вдоль оси пробирки (рис. 3). Половина общего числа молекул газа имеют проекцию скорости $v_x > 0$. Эти молекулы уйдут из пробирки, не передав ей никакого импульса. Другая половина молекул передаст задней стенке пробирки свой двойной импульс, а затем также покинет пробирку. Следовательно, пробирка получит импульс (в проекции на ось X)

$$MV = 2m_0\bar{v}_x N_A/2,$$

где V — проекция скорости пробирки, m_0 — масса молекулы газа, $\bar{v}_x$ — средняя квадратическая проекция ее скорости и N_A — число Авогадро.

Учитывая, что $\overline{v_x^2}=1/3\overline{v^2}$, то есть средний квадрат проекции скорости равен 1/3 среднего квадрата самой скорости, и что $\overline{v^2}=3kT/m_0$ (k — постоянная Больцмана), получим

$$MV=m_0N_A\sqrt{kT/m_0}.$$

Отсюда

$$V=\frac{m_0N_A}{M}\sqrt{\frac{kT}{m_0}}=$$

$$=\frac{1}{M}\sqrt{(m_0N_A)(kN_A)T}=\frac{1}{M}\sqrt{mRT},$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Задача 5. *Гладкий неупругий шарик (из мягкого свинца) налетает на такой же шарик, находящийся в покое (рис. 4). Скорость первого шарика направлена под углом α к линии центров. Под каким углом β разлетаются шарики после удара?*

В отличие от предыдущих задач, в этой задаче рассматривается неупругое соударение. Поскольку удар неупругий, кинетическая энергия системы не сохраняется (часть ее превращается во внутреннюю). Для решения задачи воспользуемся законом сохранения импульса.

Вследствие гладкости шариков силы их взаимодействия направлены по линии центров (по оси X) и не имеют проекций на перпендикулярное направление, то есть на ось Y. Следовательно,

$$mv\sin\alpha=mv'_{1y},$$

где m — масса каждого шарика, v — модуль скорости первого шарика до удара, а v'_{1y} — проекция на ось Y скорости этого шарика после удара ($v'_{2y}=0$).

Действие же сил взаимодействия между шариками при их неупругом соударении приводит к выравниванию проекций скоростей шариков на ось X. Тогда

$$mv\cos\alpha=(m+m)v'_x,$$

где $v'_x=v'_{1x}=v'_{2x}$ — соответствующая проекция скоростей обоих шариков после соударения.

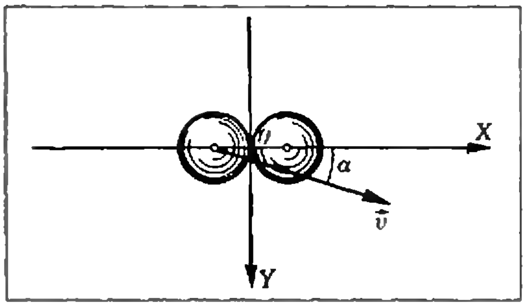


Рис. 4.

Из полученных уравнений можно найти v'_{1y} и v'_x, а значит и tg β:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{v'_{1y}}{v'_x}=\frac{v\sin\alpha}{1/2v\cos\alpha}=2\operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда

$$\beta=\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha).$$

Задача 6. *Ядро массой m, летящее со скоростью $\vec{v}$, распадается на два одинаковых осколка. Внутренняя энергия ядра E_1, внутренняя энергия каждого из осколков E_2 ($E_1>2E_2$). Определите максимально возможный угол между векторами скоростей осколков.*

Процесс распада ядра на два осколка представляет собой как бы обращенный во времени процесс неупругого столкновения. Сначала оба осколка летят вместе, образуя единую систему (первая стадия). В результате действия внутренних сил система распадается на две части (вторая стадия). Осколки, образованные в результате разрыва ядра, разлетаются в разные стороны с постоянными скоростями (третья стадия).

Обозначим через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ скорости осколков ядра и запишем законы сохранения импульса и полной энергии системы:

$$m\vec{v}=\frac{m}{2}\vec{v}_1+\frac{m}{2}\vec{v}_2,$$

$$\frac{mv^2}{2}+E_1=\frac{m}{2}\frac{v_1^2}{2}+\frac{m}{2}\frac{v_2^2}{2}+2E_2.$$

Изобразим графически скорости ядра и его осколков (рис. 5). В параллелограмме $ACB'D$ $\overrightarrow{AC}=\vec{v}_1$ — вектор скорости первого осколка, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}_2$ — вектор скорости второго осколка и $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ — вектор скорости ядра до разрыва ($|\overrightarrow{AB}|=1/2|\overrightarrow{AB'}|$). Введем дополнительные векторы $\overrightarrow{BC}$

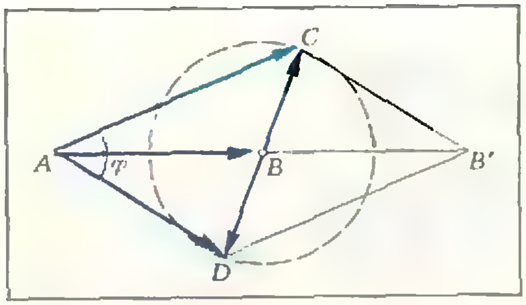


Рис. 5.

и $\overrightarrow{BD}$ ($\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BD}$) и обозначим $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BD}|=v_0$. Закон сохранения полной энергии и теорема о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, приводят к соотношениям

$$v_1^2+v_2^2=2v^2+\frac{4}{m}(E_1-2E_2)$$

и

$$v_1^2+v_2^2=2v^2+2v_0^2,$$

откуда

$$v_0=\sqrt{\frac{2}{m}(E_1-2E_2)}.$$

Очевидно, возможны два случая: а) $v\geqslant v_0$; б) $v<v_0$. Рассмотрим сначала случай а), которому как раз и соответствует рисунок 5, и найдем максимально возможный угол φ. Для этого воспользуемся теоремой косинусов для треугольников ACD, ABD и ACB и получим

$$\cos\varphi=\frac{v_1^2+v_2^2-(2v_0)^2}{2v_1v_2}=$$

$$=\frac{v^2-v_0^2}{\sqrt{(v^2+v_0^2)^2-(2vv_0\cos\alpha)^2}}.$$

Отсюда

$$\cos\varphi\geqslant\frac{v^2-v_0^2}{v^2+v_0^2}$$

и

$$\varphi_{\max}=\arccos\frac{v^2-v_0^2}{v^2+v_0^2},$$

где $v_0^2=\frac{2}{m}(E_1-2E_2)$.

При этом $v_1=v_2=\sqrt{v^2+v_0^2}$.

Случай б) рассмотрите самостоятельно и убедитесь в том, что $\varphi_{\max}=\pi$.

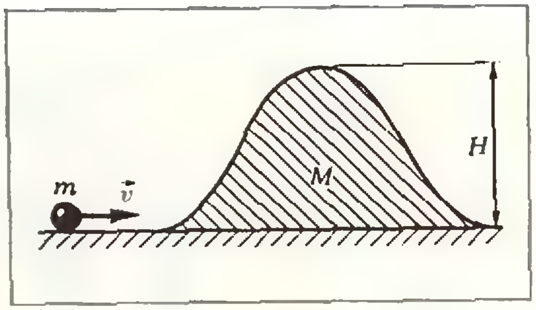


Рис. 6.

Упражнения

1. На пути тела массой m, скользящего по гладкому столу со скоростью $\vec{v}$, находится неподвижная незакрепленная горка массой M и высотой H (профиль горки изображен на рисунке 6). Определите скорости тела и горки после того, как тело покинет горку. Тело движется, не отрываясь от горки, трение между телом и горкой отсутствует.

2. Под каким углом β разлетаются два одинаковых гладких шарика после абсолютно упругого удара? До удара один из шариков покоился, а другой двигался со скоростью $\vec{v}$, направленной под углом α к линии центров шариков.

3. По гладкой поверхности стола могут двигаться кольцо радиусом R и находящийся внутри кольца маленький шарик. В некоторый момент шарик упруго соударяется с кольцом. До удара кольцо покоится, а шарик движется со скоростью $\vec{v}$, которая составляет угол α с радиусом, проведенным в точку удара. Найдите время до следующего удара.

4. Два гладких одинаковых шара массой M каждый покоятся на гладкой горизонтальной поверхности, касаясь друг друга. Третий шар такого же радиуса, но массой m движется по поверхности со скоростью $\vec{v}$, проходящей через точку касания неподвижных шаров. Определите скорости шаров после абсолютно упругого удара.

Поправка

В формулировке задачи М649 («Квант» № 10) допущена опечатка: пропущен множитель $\frac{1}{2}$ перед выражением $c^2{}_n$. Срок присылки решения этой задачи продлевается до 1 февраля 1981 года.

Г. Звенигородский,
Ю. Первин,
А. Сосинский

V Всесоюзная летняя школа юных программистов

С 25 июля по 10 августа 1980 года в Новосибирском академгородке состоялась V Всесоюзная летняя школа юных программистов, организованная Сибирским отделением Академии наук СССР, редакцией журнала «Квант», Новосибирским государственным университетом и Министерством просвещения СССР. Впервые отбор участников производился через Заочную школу программирования, материалы которой публикуются на страницах нашего журнала. Лучшие учащиеся ЗШП, а также победители Олимпиады по программированию («Квант», 1979, № 3), были приглашены на Летнюю школу. Таким образом были отобраны все 145 участников Летней школы. Они приехали со всего Союза: от Калининграда до Сахалина, от Норильска до Ташкента; были ребята из крупных городов и из сельской местности. В основном, это были школьники 6—9 классов, но было немало и учащихся 4—5 классов. С том, как проходила эта необычная школа, и рассказано в этой статье.

Знакомство

Вычислительный центр СО АН СССР. Одна из терминальных комнат. Мерцают экраны трех дисплеев, в сосредоточенной тишине слышится гудение вентилятора и тихое постукивание клавишей терминалов. За первым терминалом черноволосая смуглая девочка «разговаривает» с ЭВМ БЭСМ-6:

```
ПРОГРАММА РЕГИСТРАТОР
НАЧИНАЕТ РАБОТУ
ВАШЕ ИМЯ?
```

высвечивается на экране. Девочка неуверенно набирает на клавиатуре ответ:

```
— АБДРАХМАНОВА ГУЛЯ
ВАШ АДРЕС?
— КАЗАХСТАН, АКТЮБИНСКАЯ
ОБЛАСТЬ, ПОС. КУРАЙЛИ
КАКИЕ ЯЗЫКИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ
ВЫ ЗНАЕТЕ?
```

Разговор теперь идет увереннее, быстрее, и не только у Гули: бойко стучат клавиши на двух других терминалах. За их работой следит консультант, опытный программист Сергей Гавриленко; он отвечает на вопросы и исправляет ошибки.

Для Гули — это первая очная встреча с компьютером; с программированием она познакомилась на страницах журнала «Квант» год назад и была приглашена на Летнюю школу как одна из лучших участниц Заочной школы программирования из Казахстана. Она — ученица девятого класса.

В том, что Гуля оказалась здесь, наверное, нет ничего удивительного. Но вот ее «собеседник», система РЕГИСТРАТОР, разработана... пятиклассницей Аней Вайнштейн (Новосибирск), а «опытный программист» Сережа Гавриленко недавно окончил...четвертый класс!

...Так в первое же рабочее утро Школы ребята знакомились с вычислительной техникой. Перед этим было торжественное официальное знакомство на открытии Школы, где выступали директор ВЦ СО АН, чл.-корр. АН СССР А. С. Алексеев и научный руководитель Летней школы, чл.-корр. АН СССР А. П. Ершов. А вечером было более непринужденное знакомство: в лесу, у костра состоялся конкурс рассказов о родном крае, и многие ребята впервые услышали песни нового жанра — программистско-лирические, звучавшие в исполнении новосибирцев и харьковчан.

Ну, погоди!

Наиболее волнующей и напряженной формой занятий была терминальная практика — диалог с ЭВМ через терминалы. В ходе первых разговоров с машиной ребята запускали и отлаживали программы машинной графики. Выход на графопостроитель осуществлялся посредством системы НУ ПОГОДИ. Об этой системе (ее название расшифровывается так: «система **Н**епосредственного **УП**равления **О**рганизацией **Г**рафической **О**тладки в **ДИ**алоге») рассказал ее разработчик, новосибирский школьник Виталий Цикоза.

Для выполнения зачетных заданий ребята объединялись в бригады по 3-4 человека; 4 бригады составляли «регион», к которому прикреплялись два консультанта из числа наиболее опытных школьников-программистов Новосибирской ШЮП. Особо хочется отметить высокую квалификацию и старательность этих ребят.

Последующие зачетные задания (на языках СЕТЛ и АЛГОЛ) были уже сложнее. О наиболее интересных из них — в сущности, о небольших самостоятельных исследованиях на ЭВМ — ребята рассказали на итоговой конференции Летней школы.

За партой на каникулах

В амфитеатре Большой математической аудитории Новосибирского университета непривычная для летних каникулярных дней деловая обстановка: сто сорок пять школьников слушают лекции по программированию. Учебная программа напряженная: Летняя школа коротка, а за это время надо изучить языки СЕТЛ и АЛГОЛ, познакомиться с операционной системой ДИСПАК/ДИАПАК, узнать правила работы на терминалах, научиться перфорировать и снимать запрограммированные мультфильмы. В обязательную лекционную программу для школьников включены также рассказы о моделировании на ЭВМ дискретных и непрерывных процессов, о программировании геометрических задач.

Кроме того, для желающих предусмотрены факультативные занятия. Два факультатива, проведенные новосибирскими старшеклассниками В. Цикозой и А. Салиховой, предназначались для тех, кому необходимо было вспомнить трудные вопросы из материалов Заочной школы. Два лектора Летней школы: доц. А. Б. Сосинский (Москва) и доц. Н. Н. Непейвода (Ижевск) — дали своим факультативам такие названия, что участникам пришлось думать, как разорваться на две половинки: один назывался «Взгляд математика на программирование», другой — «Взгляд программиста на математику».

Конечно, непросто было такую учебную программу вложить в тесные рамки двух недель. Но ведь недаром на Школу собрались лучшие учащиеся Заочной школы и победители Олимпиады по программированию.*)

---

*) Список победителей см. на с. 54

Поэтому о новых языках и системах программирования оказалось возможным рассказывать очень кратко: достаточно было отметить отличия от уже известных по «Кванту» Рапиры и Шпаги.

Где-то посередине между напряженной учебой и интересным отдыхом нашлось место для проблемных лекций. Так назывались встречи участников Школы с учеными Сибирского отделения АН СССР. Научный сотрудник новосибирского филиала Института точной механики и вычислительной техники АН СССР к.ф.-м.н. В. А. Евстигнеев интересно рассказал, как прикладную науку — программирование — обогащает такая чисто математическая дисциплина, как теория графов. Заведующий научно-исследовательской группой ВЦ СО АН СССР А. А. Берс выступил с лекцией о перспективах применения ЭВМ в полиграфии. Зав. лабораторией математического обеспечения вычислительных центров коллективного пользования к.т.н. Л. Б. Эфрос перечислил главные направления работы системных программистов ВЦ СО АН СССР.

Не остались в стороне от учебного процесса Летней школы и взрослые — воспитатели и руководители делегаций, родители. Предназначенный для них цикл лекций о проблемах школьного программирования вызвал живую дискуссию слушателей. О затеянном директором Летней школы Ю. А. Первиным споре взрослых на тему «Зачем детей учат программированию?» мы напишем подробнее в следующем номере.

Научная конференция школьников

Пожалуй, наиболее интересными событиями Летней школы стали конференции, состоявшиеся 28 июля и 8 августа. На первой юные программисты рассказали о работах, выполнявшихся в течение учебного года, на второй — непосредственно на Летней школе.

Доклады первой конференции были распределены по пяти секциям: системное программирование, моделирование и оптимизация на ЭВМ, применение ЭВМ в учебном процессе и прикладные задачи обработки данных, управление технологическими процесами, игровые и спортивные программы. Заседание каждой секции проводил ученый или специалист, хорошо знакомый со спецификой применения ЭВМ в соответствующей области: проректор Новосибирского государственного университета д.т.н., проф. Н. Г. Загоруйко, с.н.с. НИИ ЭВМ (Минск) М. В. Ходош, с.н.с. ВЦ СО АН В. Э. Малышкин, сотрудник Ленинградского института авиационного приборостроения Н. Н. Бровин, с.н.с. Института кибернетики АН УССР Л. Н. Иваненко.

Слово — системным программистам

По общему мнению наиболее сильной оказалась первая секция (системное программирование): три из пяти докладов на этой секции были удостоены дипломами I степени.

Девятиклассник *Виталий Цикоза* (Новосибирск, диплом I степени) рассказал о разработанной им новой версии графической системы Шпага, получившей название Шпага-5. Учащимся Летней школы очень понравилась включенная им в Шпагу-5 процедура ДУГАТ, позволяющая проводить дугу окружности через три заданные точки: теперь отпала необходимость возиться с определением радиуса и направления дуги. В своем докладе Виталий говорил и о прог-

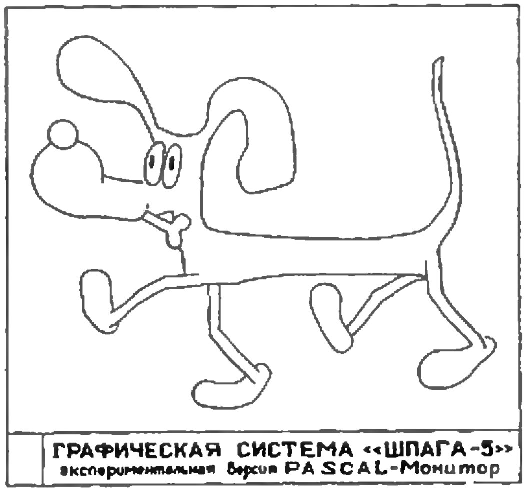

ГРАФИЧЕСКАЯ СИСТЕМА «ШПАГА-5»
экспериментальная версия PASCAL-Монитор

Рис. 1.

раммных особенностях системы НУ ПОГОДИ, с которой все участники перед этим уже работали на терминальной практике (рис. 1).

Десятиклассник *Михаил Эпиктетов* (Алма-Ата, диплом I степени) разработал систему SONAR для отладки программ на ЕС ЭВМ. Для ускорения отладки во многих языках и системах программирования (например, в ОС ЕС, в АЛГОЛЕ — БАРРОУЗ) предусмотрена возможность следить за значением различных имен, обращениями к процедурам и т. п., но в операционной системе ДОС ЕС программист сам должен организовывать отладку. Для этого можно после каждого присваивания в программе ставить оператор печати и следить по распечатке, как исполнялась программа, но объем программы тогда возрастает вдвое, а при выбрасывании дополнительных операторов печати часто в программу «заносятся» новые ошибки. Система SONAR позволяет программисту при помощи одного — двух операторов организовать отладочную печать для всей программы или заданных ее участков и так же просто «выключить» эту печать после окончания отладки.

Девятиклассник *Сергей Котов* (Новосибирск, диплом I степени) по заказу лаборатории экспериментальной информатики ВЦ СО АН разработал комплекс для анализа программ микропроцессора INTEL-8080. Микропроцессоры — крохотные вычислительные машины, построенные на больших интегральных схемах — за последние годы получили широчайшее распространение в самых разных областях. Микропроцессоры управляют исследовательской аппаратурой космических аппаратов и крупнейшими прокатными станами, определяют экспозицию при фотосъемках, регулируют работу автомобильных двигателей и карманных калькуляторов. Разумеется, качество их работы зависит от управляющей ими программы. Часто оказывается нужным разобраться в такой программе, понять лежащий в ее основе алгоритм и, возможно, внести необходимые изменения. Но понять незнакомую программу, составленную в машинных командах, совсем не просто: для этого нужно заменить команды их мнемоническими обозначениями, снабдить комментариями, отделить команды от данных, разбить программу на отдельные блоки и выявить связи между ними и т. д. Всю эту работу и выполняет комплекс, созданный Сергеем.

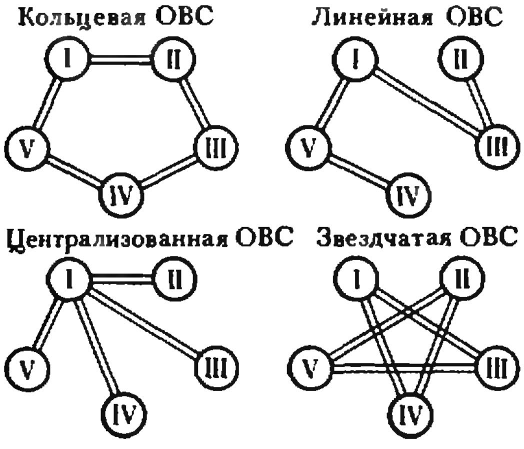


Рис. 2.

Дипломами II степени и III степени были удостоены доклады *Михаила Симбирского* (Харьков, 9 кл.) о работе с числами нестандартной длины и *Светланы Урюпиной* (Новосибирск, 5 кл.) о ее программе для лексического анализа текстов на различных языках программирования.

Программы моделируют и помогают на производстве

На второй секции диплом I степени получила *Ольга Хорошевская* (Новосибирск, 9 кл.), рассказавшая об оптимизации структуры вычислительной сети, связывающей несколько ВЦ. Построив на языке АЛГОЛ-ГДР подробную модель работы сети и удачно применив стохастическую оптимизацию (метод Пейджа), Оля показала, что из нескольких вариантов организации связи между ВЦ самой выгодной является кольцевая структура. По общему мнению Олин доклад был лучшим по исполнению; в нем удачно использовались плакаты и диапозитивы (выполненные ЭВМ на Шпаге — см. рис. 2).

Большой интерес на третьей секции вызвал доклад *Сергея Гавриленко* (Новосибирск, 5 кл.), удостоенный диплома II степени. Сережина программа «Вопрос — ответ» позволяет вносить в машину определенным образом записанные данные из любой предметной области, а затем расспрашивать ЭВМ про эти данные, получая при этом, как выразился докладчик, «ответы на уровне здравого смысла».

Диплом I степени на четвертой секции получили друзья-соавторы *Михаил Дун* и *Андрей Кагал* (Харьков, 9 кл.) за два доклада: «Моделирование технологических процессов изготовления изделий из термореактивных полимеров» и «Автоматизация проектирования и изготовления центрально роликовых кулачковых механизмов». Эти работы уже внедрены на производстве: они были отмечены специальной премией как разработки с наибольшим практическим значением.

Много еще было интересных работ. Мы отметим лишь доклады *Павла Земцова* (Новосибирск, 6 кл.), который на языке «Симула — I» промоделировал работу производственного цеха, *Игоря Мезенцева* (Ангарск, 9 кл.) о системе регистрации «Прогульщик», *Николая Вербы* (Харьков, 6 кл.), нашедшего на ЭВМ все 92 решения «задачи о 8 ферзях» (см. «Квант», 1977, № 12, с. 22), *Виктории Волковой* (Новосибирск, 5 кл.) о применении метода Эйлера к решению уравнения движения самолета и, наконец, знакомой нашим читателям (как разработчицы Шпаги-1) *Асии Салиховой*, рассказавшей про перспективную работу о моделировании случайных блужданий по кристаллической решетке.

Чему мы научились

На первой конференции высоким уровнем выделялись доклады школьников из Новосибирска и Харькова, где издавна работают свои школы юных программистов. И хотя были интересные работы из Эстонии (Ныосская с. ш.), Ангарска, Алма-Аты, Москвы, Туймазы, Куйбышева, большинство участников — учащихся ЗШП — до Летней школы не имели возможностей для подобных совместных работ с компьютером.

Иная картина наблюдалась на итоговой конференции. Здесь все были в равных условиях. Каждой бригаде предоставлялись большие порции терминального времени на запуск и отладку программ на выбранную тему. Разработка и отладка этих программ служила одним из зачетных заданий, а наиболее интересные работы были вынесены на итоговую конференцию.

Руководители делегаций (педагоги и специалисты по применению ЭВМ) были поражены тем, какие интересные и сложные программы сумели составить и отладить за две недели школьники, впервые перед этим вышедшие на машину. Не имея возможности рассказать о всех интересных работах, мы назовем лишь несколько из них.

Диплом I степени получили три бригады за работы «Экзаменатор-консультант по химии» (докладчик — *М. Эпиктетов*), «Школьный журнал» (докладчица — *С. Бродецкая*) и «Задачи по реакциям окисления» (докладчик — *Е. Корнилин*). Из интересных работ, получивших дипломы II степени, отметим следующие три: «Робот-домохозяйка» (*Н. Наварова*), «Дешифратор» (*Е. Забокрицкий*), «Шахматный судья» (*Л. Нехамкин*).

* * *

По общему мнению участников, гостей и руководителей V Летняя школа безусловно удалась. Нам приятно здесь отметить, что, кроме прекрасных условий, организационного опыта и традиционного гостеприимства Академгородка, этому способствовал достаточно ровный и высокий уровень учащихся, достигнутый на занятиях Заочной школы программирования нашего журнала.

Призеры Олимпиады по программированию

Дипломы I степени

Баталов С. (Арзамас, с. ш. № 2, 8 кл.).
Вейцман Б. (Одесса, с. ш. № 53, 8 кл.).
Забокрицкий Е. (Ленинград, с. ш. № 536, 7кл.).
Земцов Н. (Новосибирск, с. ш. № 25, 5 кл.),
Куприков Ю. (Подольск Московской обл., с. ш. № 3, 7 кл.).
Лиепиньш Я. (п. Вангажи Латвийской ССР, с. ш., 8 кл.).
Робсман Д. (Москва, с. ш. № 91, 9 кл.).
Цикоза В. (Новосибирск, с. ш. № 130, 8 кл.).

Дипломы II степени

Антонов В. (Нальчик, с. ш. № 19, 8 кл.).
Бубнова М. (Москва, с. ш. № 254, 4 кл.).
Вайнштейн Т. (Новосибирск, с. ш. 130, 9 кл.).
Гавлик Р. (ЧССР, Горжице, 3 кл. гимназии).
Ганелин П. (Москва, с. ш. № 91, 9 кл.).
Гильман М. (Москва, с. ш. № 57, 9 кл.).
Глаголева Н. (Новосибирск, с. ш. № 166, 8 кл.).
Горелик И. (Москва, с. ш. № 521, 6 кл.).
Крижановский О. (Харьков, с. ш. № 27, 9 кл.).
Кузьминов Т. (Новосибирск, с. ш. № 130, 7 кл.).
Петруничева А. (Москва, с. ш. № 19, 7 кл.).
Пискарев И. (Баку, с. ш. № 153, 8 кл.).
Салихова А. (Новосибирск, с. ш. № 130, 8 кл.).
Чевелев К. (Москва, с. ш. № 7, 9 кл.).
Эпиктетов М. (Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.).

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 44)

(п. Черноголовка Московской обл.) 8—12; *А. Осипов* (Сосновый Бор Ленинградской обл.) 8, 11, 12, 17; *И. Осовяк* (с. В. Дедеркалы Тернопольской обл.) 6; *Ю. Павлов* (Ленинград) 16; *А. Пакалн* (Тукумс) 16, 17; *О. Панащенко* (Киев) 4, 6—12; *А. Пантелеев* (Ростов-на-Дону) 9, 11, 12; *С. Пащенко* (Киев) 16, 17; *В. Пентегов* (Киев) 6, 11, 16, 17; *Г. Перельмин* (Ленинград) 6; *К. Пивницкая* (Москва) 4; *С. Погорелов* (Киев) 11, 12; *А. Полисский* (Киев) 4, 6, 11, 12, 17; *Е. Поляков* (Калининград Московской обл.) 9, 12; *А. Пономаренко* (Киев) 8, 9, 11, 12, 17; *О. Потылицина* (Жуковский) 11, 12; *С. Равняго* (Золочев Львовской обл.) 9; *В. Романчук* (Запорожье) 17; *С. Ромашкин* (Александров) 17; *Б. Рублев* (Киев) 4, 6—9, 11, 12; *Г. Рыбкин* (Смоленск) 4, 6, 7; *С. Рязанцева* (Борисоглебск) 7, 9, 11, 12, 17; *Б. Сафронов* (Донецк) 17; *Ю. Свистунов* (Запорожье) 16, 17; *С. Селифанова* (С. Попелево Калужской обл.) 9—12; *Т. Сергейцев* (Челябинск) 4, 6—12; *А. Середа* (Донецк) 4; *В. Середа* (Львов) 6, 7, 9, 11, 12, 16, 17; *Ф. Серкис* (Оргеев) 11, 12; *А. Сидоренков* (Смоленск) 4; *В. Сидорин* (Реутов) 7; *Н. Сирых* (Ярославль) 6—8; *А. Скок* (Талгар) 4, 6—9, 12, 16, 17; *О. Скопцов* (Ангарск) 4, 8, 12, 16; *А. Смирнов* (Курган) 9, 11, 12; *Н. Смирнов* (Москва) 8, 9, 11, 12, 16; *Р. Смирнов* (Москва) 4, 6; *С. Смирнов* (Ташкент) 7—9, 11, 12; *А. Сокол* (п. Черноголовка Московской обл.) 17; *Г. Солдак* (Минск) 4, 6; *С. Соломко* (Мелеуз) 17; *И. Соловей* (Донецк) 16; *Л. Сорока* (Запорожье) 4, 6—9, 12; *А. Спивак* (Стерлитамак) 7, 12; *И. Ставицкий* (Фрунзе) 6, 8, 9, 17; *П. Страдынь* (Рига) 4, 17; *А. Стрешинский* (Донецк) 6—9, 11, 12; *Д. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 9, 11, 12; *Е. Сыричева* (Вышний Волочек) 16, 17; *Ю. Талденко* (Сумы) 16, 17; *А. Уливанов* (Горький) 11, 12, 16, 17; *В. Троицкий* (Киев) 9, 11, 12; *Л. Уткин* (Вологда) 4, 9, 11, 12; *В. Фарбер* (Баку) 6, 9, 11, 12; *Н. Федин* (Омск) 4, 6—9, 11, 12, 16, 17; *А. Федоров* (с. Спольцы ЯАССР) 17; *В. Федюкович* (Киев) 8, 9, 11, 12, 16, 17; *А. Фетискин* (Рязань) 7; *А. Флеров* (Рига) 4, 6, 7, 9, 17; *И. Фоменко* (Днепропетровск) 4, 7, 9, 10, 12; *О. Фонарев* (Сумгаит) 6; *А. Фролов* (Тула) 8, 9, 11, 12; *А. Харченко* (Киев) 16, 17; *С. Хосид* (Алма-Ата) 4, 6, 7, 17; *Л. Хризман* (Киев) 4, 9, 11, 12; *А. Цеханский* (п. Запрудня Московской обл.) 16; *М. Цолик* (Орск) 6, 7, 9, 12; *Ю. Цыганков* (Дрожжановский р-н ТАССР) 4, 6—10, 12, 17; *А. Чепуров* (ст. Григорополисская Ставропольского кр.) 4; *А. Чулков* (р. п. Мучкапский Тамбовской обл.) 17; *А. Чумадин* (Баку) 6—9, 11, 12; *А. Чумаков* (Куйбышев) 8, 11; *В. Шаблинский* (Киев) 4, 6, 7; *Я. Шапиро* (Ворошиловград) 17; *В. Шаповал* (Винница) 7; *С. Шарый* (Семипалатинск) 8, 12; *А. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) 12, 17; *М. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) 17; *А. Шершнев* (Москва) 4; *С. Шитов* (Пенза) 17; *И. Шкрадюк* (Ногинск) 4, 6—9; *С. Шлаков* (Саратов) 7, 9, 12, 17; *А. Щучкин* (Душанбе) 7—9, 11, 12, 16, 17; *М. Эскеров* (Махачкала) 7; *К. Яковлев* (Киев) 16; *С. Якуш* (Краснодар) 17.

Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. В этом номере мы рассказываем о книгах, вышедших в четвертом квартале 1980 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Понтрягин Л. С. *Анализ бесконечно малых.* Объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 55 к.

Написанная выдающимся советским математиком академиком Л. С. Понтрягиным, эта книга посвящена изложению некоторых вопросов математического анализа в форме, доступной для школьников. Своеобразие книги в одновременном изложении теории функций действительной и комплексной переменной.

2. Фомин С. В. *Системы счисления* (Популярные лекции по математике). Издание 4-е. Объем 2 л., тираж 100 000 экз. цена 10 к.

В брошюре увлекательно рассказывается об истории возникновения, свойствах и применениях разных систем счисления.

В связи с двоичной системой счисления сообщаются некоторые сведения об ЭВМ.

3. Лурье М. В., Александров Б. И. *Задачи на составление уравнений.* Издание 2-е. Объем 5 л., тираж 300 000 экз., цена 15 к.

В книге разбираются методы решения так называемых текстовых задач. Задачи эти классифицированы авторами по нескольким основным типам. Подробно разбирается каждый тип таких задач. Все задачи, разбираемые в этой книге, взяты из вариантов письменных вступительных экзаменов по математике на различные факультеты МГУ в 1967—1978 гг.

В книге приведено большое количество задач для самостоятельного решения с ответами.

Издательство «Мир»

4. Реньи А. *Трилогия о математике.* Пер. с венгерского. Объем 20 л., тираж 15 000 экз., цена 1 р. 40 к.

В книге объединены ранее выходившие на русском языке популярные произведения крупного венгерского математика А. Реньи «Диалоги о математике» (М., «Мир», 1969) и «Письма о вероятности» (М., «Мир», 1970), а также «Дневник (записи по теории информации)», изданный на родине авторами посмертно и публикуемый в СССР впервые.

В книгу включены также несколько научно-популярных статей А. Реньи.

Очень живое и доступное изложение помогает читателю познакомиться с некоторыми фундаментальными идеями современной математики.

Физика

Издательство «Наука»

1. Левантовский В. И. *Механика космического полета в элементарном изложении.* Издание 3-е, исправленное и дополненное. Объем 32 л., тираж 20 000 экз., цена 1 р. 30 к.

В доступной форме, без применения сложного математического аппарата, но логически последовательно в книге излагаются основы теории космического полета. Рассказывается об околоземных полетах, полетах к Луне, внутри Солнечной системы и о вылете за ее пределы. Особо рассмотрены полеты пилотируемых кораблей и орбитальные станции. Дается представление о методах исследования и проектирования космических траекторий, о выведении спутников на орбиты. Третье издание дополнено сведениями о всех новых достижениях космонавтики. Книга удостоена премии общества «Знание».

Издательство «Мир»

2. Либшер Д.-Е. *Теория относительности с циркулем и линейкой.* Перевод с немецкого. Объем 7 л., тираж 50 000 экз., цена 40 к.

В этой небольшой книге дается геометрическая интерпретация основных понятий и соотношений специальной теории относительности. Читатель встретится здесь со многими применениями хорошо известных простых геометрических соотношений, а также с понятиями неевклидовой геометрии.

3. *Узоры симметрии.* Перевод с английского. Объем 12 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 20 к.

В книге, основанной на материале Фестиваля симметрии (Нортгемптон, США), на доступном для широких кругов читателей уровне изложены проблемы симметрии. Основная направленность книги — выявление глубокого смысла симметрии как общего принципа гармонии в молекулах, кристаллах, живой природе, произведениях искусства. Современность непринужденно соединяется с историческим материалом. С большим изяществом выполнены иллюстрации.

4. Беккерт М. *Мир металлов.* Перевод с немецкого. Объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 2 р. 90 к.

Книга ученого из ГДР, профессора Манфреда Беккерта — живо написанная, увлекательно и богато иллюстрированная история металлов и их роли в жизни человека и развитии человеческого общества от древних времен до наших дней. В ней рассказывается также о выдающихся достижениях современной науки в изучении свойств и структуры металлов, о перспективах «космической металлургии» будущего.

5. Гордон Дж. *Конструкции, или Почему не ломаются вещи.* Перевод с английского. Объем 22 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 50 к.

Автор книги — английский ученый, профессор Джордж Гордон — живо и интересно, с привлечением большого иллюстративного материала рассказывает о конструкциях, конструкционных материалах и их аналогах в природе.

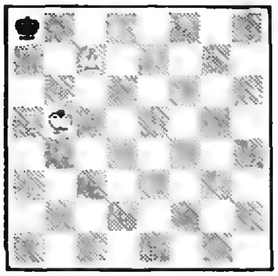
А. Егоров,
М. Смолянский

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.
Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Трио на шахматной доске

Минимальный материал, который позволяет создать серьезное шахматное произведение,— три фигуры на доске (при двух королях просто нечем ставить мат). Приведенная в «Кванте», 1980, № 4 задача далеко не исчерпывает возможности трио на шахматной доске. Рассмотрим еще несколько позиций с рекордным количеством фигур. Напомним сначала упомянутую задачу Томлинсона. **Белые:** Крc6, п. c7; **черные:** Крa7. Мат в 2 хода. **1. c8Л! Крa6 2. Лa8×.**

Задача Х. Мейера совершенствует предыдущую двухходовку.

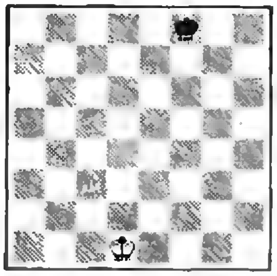


Х. Мейер. Мат в 3 хода

Появление ладьи задерживается на один ход — **1. Крc6! Крa7 2. c8Л! Крa6 3. Лa8×.**

В следующем примере вступление несколько грубовато, но зато дальний маневр новоявленного ферзя на следующем ходу однозначен. Д. Хофман. **Белые:** Крc5, п. c7. **Черные:** Крa5. Мат в 3 хода. **1. c8Ф Крa4 2. Фh3! Крa5 3. Фa3×.**

Встречаются ли среди трио настоящие этюды? Разумеется, речь может идти только о материале «король с пешкой против короля». Обычно позиции такого типа относят к теоретическим, однако некоторые из них принято считать этюдами.

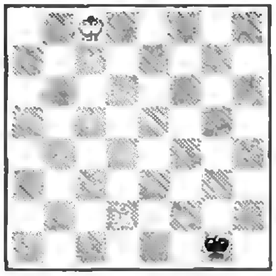


И. Дртина. Выигрыш

1. Крc2! Крe7 2. Крb3! (обходный маневр с целью занять оппозицию, к ничьей ведет 2. Крd3? Крd7 3. Крd4 Крd6!) **2...Крd6 3. Крb4 Крc6 4. Крc4,** и белые выигрывают. При перестановке белой пешки с c3 на b4 решающий маршрут короля удлиняется на один ход: **1. Крc2 Крe7 2. Крb3 Крd6 3. Крa4! Крc6 4. Крa5!** и т. д.

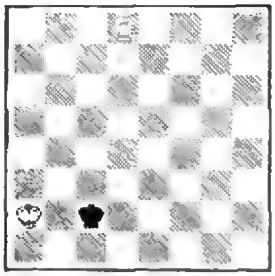
Рассмотрим теперь такой этюд. А. Мандлер. **Белые:** Крa2; **черные:** Крa6, п. g6. Ничья. После переброски королей на другой фланг — **1. Крb2! Крb6 2. Крc2! Крc6 3. Крd2! Крd6 4. Крe2 Крe6 5. Крf2 Крf6 6. Крg2!** черные теряют господство над полями соответствия и вынуждены смириться с ничьей. Конечно, решение совсем простое, хотя пример уникален — белые представлены в этюде одним королем.

Кооперативные трио-задачи, в которых черные помогают белым поставить мат черному королю, могут оказаться увлекательнее позиций с обычным заданием, так как в них точная игра требуется не только от двух белых фигур, но и от черного короля.



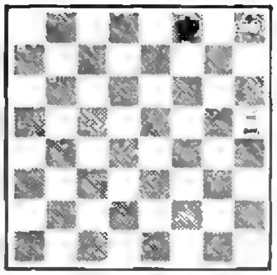
Е. Бон. Ход белых. Кооперативный мат в 7 ходов

Разумеется, пешка должна идти вперед, но она не спешит — **1. d3!** При таком минимaтериале эта популярная идея проигрыша темпа производит сильное впечатление. **1...Крf2 2. d4 Крe3 3. d5 Крd4 4. d6 Крc5 5. d7 Крb6** (при поспешном 1. d4 черный король сейчас не успел бы проскочить через поле b6, контролируемое появляющимся на доске ферзем) **6. d8Ф+ Крa7 7. Фa5×.**



Л. Цаглер. Мат в 12 ходов

Заматовать ладьей голого короля сумеет каждый, но сделать это кратчайшим путем не всегда легко: **1. Крa3! Крc3 2. Крa4 Крc4 3. Лd1! Крc5 4. Крb3 Крb5 5. Лc1 Крa5 6. Крc4 Крb6 7. Крb4 Крa6 8. Крc5 Крb7 9. Крb5 Крa7 10. Крc6 Крa8 11. Крc7 Крa7 12. Лa1×.**



М. Вукович. Ход черных. Кооперативный мат в 3 хода

Если бы в этой позиции черный король «сопротивлялся», то для матования не хватило бы и двенадцати ходов. Его помощь заметно ускоряет развязку: **0...Крe7!** (начинают черные) **1. Крg7 Крe8! 2. Крf6 Крf8 3. Лh8×.**

Коллекцию трио на шахматной доске вы сможете пополнить позициями, рассматриваемыми в сегодняшнем конкурсе.

Физический фейерверк

1. Вследствие капиллярных эффектов вода поднимается по карандашу и ее поверхность вблизи карандаша искривляется. Лучи света преломляются на искривленной поверхности воды так, что на тени карандаша появляется светлый промежуток.

2. Лучи, идущие от монеты, отражаются от задней стенки сосуда и идут вверх. Преломившись на поверхности воды, они попадают в глаз, создавая ощущение того, что монета находится на поверхности воды. Если к задней стенке сосуда приложить мокрую ладонь, отражения от стенки не будет. Сухая рука оказывает гораздо меньшее влияние, так как, вообще говоря, рука соприкасается со стеклом в ограниченном числе точек. Но когда рука мокрая, пустоты между ладонью и стеклом заполняются водой. Поскольку коэффициенты преломления света у воды и стекла примерно одинаковые, такое заполнение пустот водой увеличивает площадь поверхности контакта руки с сосудом практически до 100%. Поэтому бóльшая часть лучей, идущих от монеты и попадающих на этот участок стенки, поглощается (или равномерно рассеивается во все стороны), и изображение монеты исчезает.

3. Лучи, проходящие сквозь первое (наружное) стекло в раме, частично отражаются от внутренней поверхности второго стекла. Обычно это частичное отражение не имеет значения, так как бóльшая часть света проходит сквозь второе стекло и доходит до глаза. Однако, если давление воздуха снаружи отличается от давления воздуха между стеклами, стекла перестают быть параллельными, и часть света, претерпевающая отражение между стеклами, создает едва различимое «призрачное» изображение-двойник.

Рассмотрим луч, который идет от находящегося за окном предмета и падает на первое стекло горизонтально. Бóльшая часть света проходит через стекло в помещение. Если бы в комнату попадал только этот свет, мы видели бы изображение предмета неискаженным. Однако часть света, отражаясь от внутренней поверхности второго стекла, возвращается к первому, снова отражается, идет ко второму и, наконец, проходя сквозь него, попадает в помещение. В результате возникает второе, более слабое, изображение. Если стекла не параллельны, изображение-двойник смещено относительно основного изображения. Подобный же эффект возникает, если толщина стекла не везде одна и та же.

4. Эта горизонтальная линия соответствует высоте, на которой падающий снег превращается в дождь. А снег отражает свет лучше, чем водяные капли.

5. Кажущееся движение маятника по эллипсу объясняется тем, что восприятие маятника глазом, закрытым темным фильтром, на несколько миллисекунд отстает от действительного положения маятника. Предположим, что маятник совершает качание вправо, а фильтром закрыт левый глаз. Правый глаз воспринимает действительное положение маятника, в то время как левый видит его в том положении, в котором маятник был несколько миллисекунд назад. Мысленно вы проводите линии до пересечения лучей, воспринятых каждым глазом, так, как если бы они исходили из одной точки. Получается, что маятник оказывается дальше от вас, чем на самом деле. Когда маятник совершает качание влево, то вследствие той же задержки в восприятии левым глазом маятник кажется теперь ближе, чем на самом деле. В целом создается впечатление, будто маятник движется по эллипсу. Причина задержки восприятия пока еще до конца не выяснена. В основе одной из моделей системы зрительного восприятия лежит последовательность линий задержки, временнóе разрешение которых улучшается при увеличении количества попадающего в глаз света. Уменьшение количества света, попадающего в глаз, приводит к ухудшению его временнóй разрешающей способности.

6. Экран телевизора освещен не постоянно, так как электронный луч последовательно создает на экране строку за строкой. Такой мигающий свет может служить стробоскопическим осветителем для вращающегося волчка. Поэтому вы увидите на волчке либо застывший узор, либо узор, движущийся в ту или другую сторону (в зависимости от отношения частоты телевизионной развертки к частоте вращения волчка).

7. Изображение на телевизионном экране появляется не сразу целиком, а быстро «рисуется» электронным лучом, который движется по экрану строка за строкой и сверху вниз. Развертка осуществляется так быстро, что глаз не успевает ее заметить. Если быстро перевести глаза вправо, каждая горизонтальная строка оставляет на сетчатке изображение, сохраняющееся в течение примерно 75 мс. Так как глаза движутся одновременно с разверткой изображения по вертикали, изображение всякой линии оказывается чуть правее изображения линии, лежащей ниже, так как верхняя линия появилась на экране чуть раньше. Поэтому все изображение, «записанное» на сетчатке, оказывается перекошенным. Кратные (двойные, тройные и т. д.) изображения возникают поэтому, что за время поворота головы электронный луч успевает «зарисовать» на экране несколько изображений, которые вы переносите одно за другим вправо.

8. До недавнего времени считалось, что такое «окрашивание» вращающегося диска связано с тем, что при переходе от темноты к свету нервные клетки воспринимают разные цвета с различной временнóй задержкой. В частности, предполагалось, что восприятие красного цвета «включается» чуть быстрее, чем восприятие синего. Однако теперь установлено, что такой разницы в восприятии разных цветов не существует. Согласно одной из современных гипотез, цветовой эффект, создаваемый вращающимся диском, обусловлен тем, что частота следования белых и черных полос либо сама по себе соответствует частоте кодирования нервных импульсов, передающих цветовое ощущение, либо заставляет фоторецепторы посылать последовательности импульсов, соответствующие закодированной информации о цвете. Другими словами, удачно подобранная частота следования световых импульсов соответствует как бы сигналу «азбуки Морзе», который мозг расшифровывает в виде определенных цветов. Как видно, зрительное восприятие цвета весьма тонкая штука!

«Квант» для младших школьников

(см. с. 31)

1. На рисунке 1 изображен магический квадрат, заполненный первыми девятью натуральными числами. Для него «магическая сумма» равна 15. Умножив каждое число этого квадрата на $\frac{1980}{15}=132$, получим нужный магический квадрат.

2. Обозначив искомую цифру через x, а число — через A, придем к уравнению

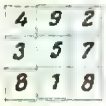
$$\overline{Ax}=A+x+Ax,$$

то есть

$$10A+x=A+x+Ax,$$

откуда $x=9$.

3. См. рисунок 2.



4	9	2
3	5	7
8	1	8

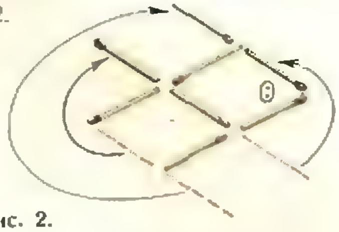


Рис. 1. **Рис. 2.**

4. Пусть по кругу записано n чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Поскольку $a_1+a_2+a_3=a_2+a_3+a_4$, $a_4=a_1=a$. Аналогично, $a_5=a_2=b$, $a_6=a_3=c$, $a_7=a_4=a$ и т. д.

Если $a_n=c$, то $n=3k$ и $k(a+b+c)=37$, что при $k>1$ невозможно.

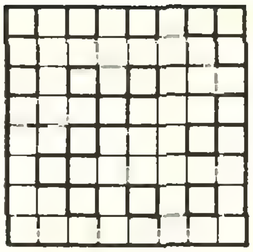
Если $a_n=a$, то и $a_{n-1}=a$ (покажите). Тогда $a_{n-1}=a_n=a_1$, а потому все числа равны, причем каждое из них равно 1.

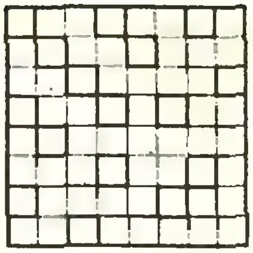
Тот же вывод справедлив в случае $a_n=b$.

5. Минутная стрелка за сутки делает 24 оборота, часовая — 2 оборота. Стрелка, которая все время делит угол между ними пополам, делает «среднее» число оборотов, то есть $(24+2):2=13$ оборотов за сутки.

Самосовмещения квадрата и тайнопись

1. а) См. рис. 3. б) См. рис. 4. 2. Вырезáть в решетке клетки на диагонали BD нельзя, так как соответствующие клетки в квадрате будут «открываться» дважды — при исходном наложении решетки и при симметрии S_p. Нельзя их вырезáть и на диагонали AC, так как образы соответствующих клеток квадрата





стр. 3. **Рис. 4.**

при симметрии S_p и при повороте $R^{180°}$ совпадают и, значит, опять будут «открываться» дважды.

Сколько вариантов

1. $9\cdot10^5-5^6=884\,375$.

2. $10!-6\cdot5\cdot4\cdot7!=7!\cdot600=8!\cdot75$.

3. $10+10^2+(10^3-10)+(10^4-10\cdot9\cdot2-10)=10\,910$. $10\cdot2\cdot9$ — это число четырехбуквенных слов, в которых есть две разные буквы, одна из которых встречается три раза подряд.

4. $5^6+4\cdot5^5=28\,125$. Разбиваем все числа на две группы в зависимости от того, нечетна или четна первая цифра.

5. $1\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5+4\cdot8\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5=68\,880$. Разбиваем все числа на две группы в зависимости от того, равна последняя цифра нулю или нет. Построение числа начинаем с последней цифры, затем строим первую, вторую, третью, четвертую, пятую цифры.

6. а) $2\cdot1\cdot8\cdot7!+8\cdot2\cdot7\cdot7!=16\cdot8!$ Сначала ставим 1, затем — 0, 2 и остальные семь цифр. Разбиваем все перестановки на две группы в зависимости от того, занимает цифра 1 одно из двух крайних мест или нет. б) $2\cdot2\cdot2\cdot7!+2\cdot1\cdot2\cdot7!+6\cdot1\cdot1\cdot7!=18\cdot7!$. Сначала ставим 1, затем 0, 2 и остальные семь цифр. Разбиваем все перестановки на три группы в зависимости от того, занимает ли 1 пятое или шестое место (в этом случае по две возможности для 0 и 2), четвертое или седьмое место (одна возможность для 0 и две для 2), одно из трех первых или трех последних мест (по одной возможности для 0 и 2).

7. $1\cdot4\cdot4^3+1\cdot2\cdot4^3+2\cdot1\cdot4^3=8\cdot4^3=512$. Сначала выбираем $f(3)$ затем $f(5)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$. Рассмотрим три случая: $f(3)=1$ (четыре возможности для $f(5)$), $f(3)=2$ (две возможности для $f(5)$), $f(3)$ равно 3 или 4 (одна возможность для $f(5)$).

8. $\frac{n!\cdot2^n}{2n}=(n-1)!\cdot2^{n-1}$. По существу, нужно «рассадить» n разных кругов за круглым столом, но учесть при этом, что каждый круг может касаться многоугольника как внутренним, так и внешним образом. Отсюда множитель 2^n в числителе.

9. $\frac{100!}{3!\cdot4!\cdot2!\cdot8^3\cdot10^4\cdot18^2}$. Во всех отождествленных между собой расположениях людей все 100 человек разбиты на 9 компаний, каждая из которых занимает один стол. Произвольное расположение из одной группы отождествленных расположений можно построить в следующие 12 шагов: распределить три восьмиместных стола между тремя компаниями из 8 человек (3! возможностей), распределить четыре десятиместных стола между четырьмя компаниями из 10 человек (4! возможностей), распределить два восемнадцатиместных стола между двумя компаниями из 18 человек (две возможности), затем поочередно за каждым из девяти столов выбрать человека на место №1 (8, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 18 и 18 возможностей).

10. $\frac{7!}{2!2!3!}=210$. Сначала считаем, что у нас два разных «к», два разных «л» и три разных «о», и затем производим отождествление.

11. $\frac{6\cdot5\cdot5\cdot4\cdot3\cdot8\cdot7}{2!\cdot3!}=8\,400$. Числитель этой дроби — число семизначных чисел, составленных из двух разных нулей, трех разных единиц и еще двух других цифр (сначала выбираем место для первого нуля, затем — для второго, после этого выбираем последовательно места для каждой из трех единиц и, наконец, выбираем одну из оставшихся восьми цифр на первое из оставшихся мест и одну из семи оставшихся цифр на последнее место). Знаменатель дроби — количество чисел в одной группе после отождествления.

12. $8^3=512$.

13. $5\cdot6\cdot4=120$. Сначала выбираем букву, которая входит в данное слово один раз, затем выбираем место для этой буквы и, наконец, выбираем букву, занимающую остальные пять мест.

14. а) 7!. Заменяем цифры 0, 1, 2, 3 одной «цифрой» 0123. б) $7!\cdot4!$.

15. а) 60. Сумма цифр такого числа равна 18 или 9. Поэтому возможны варианты цифр: 6, 5, 4, 3 (24 числа); 6, 2, 1, 0; 5, 3, 1, 0 и 4, 3, 2, 0 (по 12 чисел). б) Возможны варианты цифр: 6, 6, 5, 1; 6, 6, 4, 2 (по 12 чисел); 6, 6, 3, 3 (6 чисел); 6, 5, 5, 2 (12 чисел); 6, 5, 4, 3, (24 числа); 6, 3, 0, 0 (6 чисел); 6, 2, 1, 0 (18 чисел); 5, 5, 4, 4; 5, 4, 0, 0 (по 6 чисел); 5, 3, 1, 0 (18 чисел); 5, 2, 2, 0 (9 чисел); 5, 2, 1, 1 (12 чисел); 4, 4, 1, 0 (9 чисел); 4, 3, 2, 0 (18 чисел); 4, 3, 1, 1; 4, 2, 2, 1; 3, 3, 2, 1 (по 12 чисел).

16. $2\cdot2\cdot8!+3\cdot1\cdot8!=7\cdot8!$. Сначала ставим 1, затем 0 и остальные восемь цифр. Рассматриваем два случая: 1 занимает четвертое или пятое место (две возможности для 0), 1 занимает одно из первых трех мест (одна возможность для 0).

17. $\frac{(m+n)!}{m!n!}$.

Эти «коварные» векторы

2. 1, 1.

3. $\sqrt{\frac{7}{3}}\,a$.

4. 4.

5. Если $\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi-\alpha}{2}$, то $(AD,\ BC)=$

$$=\arccos\frac{|1-\cos\alpha-\cos\beta|}{\sqrt{3-2\cos\alpha}};\qquad(1)$$

если $\frac{\pi}{2}<\alpha$, $\frac{\pi-\alpha}{2}<\beta<\frac{\alpha}{2}$, то $(AD,\ BC)=$

$$=\arccos\frac{|1-\cos\alpha-\cos\beta|}{\sqrt{3-2\cos\alpha-4\cos\beta}};\qquad(2)$$

если $0<\alpha<\pi$, $\beta>\frac{1}{2}\left|\alpha-\frac{\pi}{2}\right|+\frac{\pi}{4}$, то задача имеет два решения, задаваемые формулами (1) и (2).

Задачи на столкновения тел

1. Возможны два случая: а) тело преодолеет горку; б) тело не преодолеет горку. Из законов сохранения импульса и механической энергии следует, что тело сумеет переехать через горку, если модуль его начальной скорости $v>\sqrt{2gH(m+M)/M}$. Тогда модули искомых скоростей тела и горки будут равны, соответственно,

$$\left.\begin{array}{l}v_1=v\\ v_2=0\end{array}\right.\ \text{при}\ v>\sqrt{2gH(m+M)/M}$$

и

$$\left.\begin{array}{l}v_1=\dfrac{(m-M)v}{m+M}\\[2mm] v_2=\dfrac{2mv}{m+M}\end{array}\right.\quad\text{при}\ v<\sqrt{2gH(m+M)/M}.$$

Заметим, что оба ответа являются решениями одной и той же системы уравнений, описывающей абсолютно упругое центральное соударение. В статье (см. задачу 1) мы ничего не говорили о первом решении, поскольку там оно описывало тривиальную ситуацию — отсутствие соударения.

2. $\beta=\pi/2$.

3. $t=2R\cos\alpha/v$.

4. Первый шар будет двигаться в прежнем направлении, но модуль его скорости изменится и будет равен $v_1=\frac{(2m-3M)v}{2m+3M}$. Второй и третий шары разлетятся под одинаковыми углами $\pi/6$ к направлению движения первого шара с одинаковыми по модулю скоростями $v_2=v_3=\frac{2\sqrt{3}\,mv}{2m+3M}$.

Неоконченная криптограмма

Расшифрованное сообщение выглядит так:
«В голове Архимеда
было больше воображения
чем в голове Гомера»
(слова Вольтера).

Задачи наших читателей
(см. с. 14)

2. Обозначив $\frac{x-2}{x+1}$ через t, получим

$$F\left(\frac{1}{t}\right)+2F(t)=\frac{t+2}{1-t},\qquad(1)$$
$$t\neq0,\ t\neq1.$$

Значит, заменив в (1) t на $\frac{1}{t}$, получим

$$F(t)+2F\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1+2t}{t-1}.\qquad(2)$$

BeatriceGloria_personal library

Из равенств (1) и (2) находим

$$F(t)=\frac{4t+5}{3(1-t)},$$

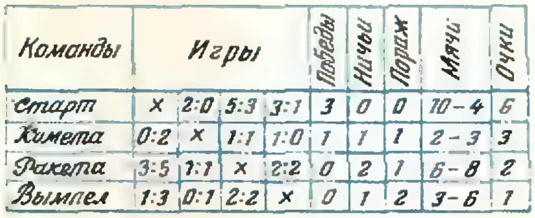
то есть $F(x)=\frac{4x+5}{3(1-x)}$. Это выражение для $F(x)$ мы получили при $x\neq 0$ и $x\neq 1$. При $x=1$ выражение для $F(x)$ теряет смысл. Однако непосредственная проверка показывает, что при $x=0$ найденное выражение для $F(x)$ удовлетворяет данному равенству.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. Данное предложение ложно только в том случае, если есть карточка, на одной стороне которой — гласная буква, а на другой — нечетное число. Поэтому перевернуть надо первую или четвертую карточку. Если на обороте первой карточки окажется нечетное число, то утверждение ложно, если же — четное, то надо перевернуть четвертую карточку. Если на обороте четвертой карточки окажется согласная буква, то утверждение истинно; если гласная, то ложно.

2. Заполненная таблица изображена на рисунке 5.



Команды	Игры				Победы	Ничьи	Поражения	Мячи	Очки
Старт	×	2:0	5:3	3:1	3	0	0	10–4	6
Комета	0:2	×	1:1	1:0	1	1	1	2–3	3
Ракета	3:5	1:1	×	2:2	0	2	1	6–8	2
Вымпел	1:3	0:1	2:2	×	0	1	2	3–6	1

Рис. 5.

3. Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Четное число, возведенное в четную степень, делится на 4 (дает при делении на 4 остаток 0), а нечетное число, возведенное в четную степень, при делении на 4 дает в остатке 1. Поэтому 1980:2×990 членов рассматриваемой суммы делятся на 4, а каждый из остальных 990 членов при делении на 4 дает в остатке 1. Но поскольку 990 при делении на 4 дает в остатке 2, при делении на 4 данная сумма также дает в остатке 2. Однако квадрат натурального числа, как вытекает из сказанного выше, дает при делении на 4 остатки либо 0, либо 1. Поэтому данная сумма не может быть квадратом натурального числа.

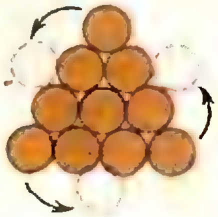


Рис. 6.

4. См. рисунок 6.

Всероссийская олимпиада школьников

(см. «Квант» № 10)

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Максимальное удаление точки от начального положения было равно 5 м в конце 8-й секунды ее движения.

2. См. решение задачи Ф640, которое будет опубликовано позже.

3. $r_2=r_3$; $r_1=r_4$.

4. $\eta=\frac{m(c_л(t_{пл}-t_л+\lambda+c_в(t_в+t_к)/2)}{P\tau}\cdot 100\%\approx$ $\approx 48\%$.

9 класс

1. $v_x=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gL}$; $v_y=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{46}{3}gL}$.

Указание. Пока сила реакции со стороны горизонтальной поверхности не станет равной нулю, шарик будет двигаться по окружности, затем — по параболе.

2. В обоих случаях выделяется одно и то же количество теплоты. Указание. Воспользуйтесь рисунком 1, на котором график процесса а) изображен красной линией, а график процесса б) — синей.

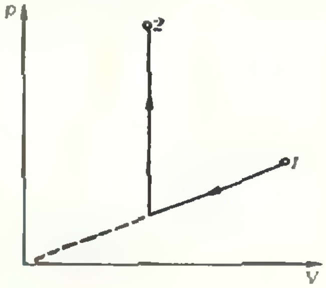


Рис. 7.

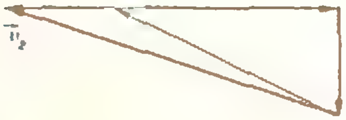


Рис. 8.

3. $|\vec{v}_2|=v\sqrt{10}$; направление скорости $\vec{v}_2$ показано на рисунке 2. Указание. Поскольку суммарный заряд рассматриваемой системы тел равен нулю, однородное внешнее электрическое поле не меняет ее полного импульса.

4. См. решение задачи Ф660, которое будет опубликовано позже.

10 класс

1. Период колебаний уменьшится в $\sqrt{2}$ раз. Указание. Согласно закону сохранения энергии мгновенные скорости точек кольца во втором случае увеличатся в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с соответствующими скоростями в первом случае, а период колебаний соответственно уменьшится.

2. См. решение задачи Ф662, которое будет опубликовано позже.

3. См. решение задачи Ф621, которое будет опубликовано позже.

4. Частота ЭДС индукции равна 2ω.

Напечатано в 1980 году

Великий ученый и мыслитель 4 2
Победа, которая спасла мир 5 2
Праздник молодежи мира 7 2
Иосиф Шаевич Слободецкий (некролог) 9 2
Учиться коммунизму! 10 2

***

Барская М. Ленин и школа 4 6
Вавилов С. Ленин и физика 4 10
Гнеденко Б. Математика в Московском государственном университете 2 2
Кикоин И. Наука — дело молодых 9 4
Колмогоров А. Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики 4 15
Лешковцев В. Физика в Московском государственном университете 1 2
Пирогов И., Тюлина И. Мехмат МГУ в годы Великой Отечественной войны 5 10
Регель В., Ткаченко Б. Размагничивание кораблей в годы Великой Отечественной войны 5 5
Тарзиманова Г. Стихотворение Лобачевского 8 18

Статьи по математике

Ашманов С. Числа и многочлены 2 17
Блехер П. О людях правдивых, лгунах и обманщиках 11 8
Болтянский В. Перемещения плоскости 3 2
Болтянский В. Транзитивные множества и правильные многогранники 7 4
Быстрый И. Площадь сегмента параболы Нейля 6 14
Вертгейм Б. Метод неподвижных точек 6 5
Вышенский В., Перестюк Н., Самойленко А. Поговорим о дифференциальных уравнениях 1 10
Глушанков Е., Певзнер П. Переключательная игра Шеннона 9 14
Керимов З. Как найти целый корень? 2 22
Смолянский М. Умножение ... точек на плоскости 4 19
Сосинский А. Перемещения пространства 8 2
Усманов З., Ходжиев И. Математика в трудах великого медика 9 7
Халмош П. Логика от А до Г 5 18
Шкляр А. О транзитивных многогранниках 12 9

Статьи по физике

Ашкинази Л. МГД-генератор 11 2
Болтянский В. Оптика черных дыр 8 8
Варламов А., Шапиро А. Метод виртуальных перемещений 9 9
Воробьев И. Гора и ветер 1 15
Гиндикин С. История о том, как Галилей открыл законы движения 1 18
Гродко Л. Устойчивость автомобиля 5 26
Гуревич В. Флуктуации физических величин 2 10
Иоффе А. Электрон 10 22
Иоффе В. Мой отец — в моем будущем 10 21
Кикоин И. Абрам Федорович Иоффе 10 4
Кузнецов Е., Рубенчик А. О волнах на море и ряби на лужах 9 22
Михайлов А. Когда день равен ночи? 6 2
Можаев В. Тепловое расширение твердых тел 6 10
Орлов В. Голография 7 10
Смородинский Я., Урнов А. Эффект Доплера 8 12
Фабрикант В. Физика люминесцентных ламп 3 9
Шефер Н. Цезиевый эталон частоты (времени) 12 2

Лаборатория «Кванта»

Варламов А., Шапиро А. Об «ovo» 7 19
Вафин Ф. Еще раз о реакции вытекающей и втекающей струй 9 27
Дозоров А. Физика без приборов 8 20
Майер В. Автоколебания в потоке воздуха 1 26
Майер В. Оптические опыты с глазом 3 18
4 23
Матизен В. О пользе скатывания шариков 5 32
Митрофанов А. Вверх по наклонной плоскости 2 24
Уокер Дж. Физический фейерверк 11 12
12 15

Математический кружок

Александров С. Измельчающиеся узоры 4 26
Вагутен Н. Сопряженные числа 2 26
Вайнтроб А. Лучше — поровну 8 23
Гегелия Г. Принцип сжимающих отображений 9 28
Залгаллер В. Задача о треугольниках с общим основанием 11 15
Залгаллер В., Залгаллер С. Венгерский шарнирный кубик 12 17
Курляндчик Л., Лисицкий А. Как придумать комбинаторное тождество 5 34
Мамикон М. Обобщенная задача о фальшивых монетах 1 27
Михайлов И. О диофантовом анализе 6 16
Михеев Ю. Одной линейкой 10 26
Ольхов В. Как придумать геометрическое неравенство 5 33
Шкапенюк М. Выпуклость функций и доказательство неравенств 3 21

Искусство программирования

Заочная школа программирования

Урок 5 1 52
Урок 6 2 53
Урок 7 3 48
Урок 8 3 51
Урок 9 9 52
Урок 10 10 47
Урок 11 11 42
Олимпиада по программированию 3 54
Призеры Олимпиады по программированию 12 55
Звенигородский Г., Первин Ю., Сосинский А. V Всесоюзная летняя школа юных программистов 12 50
Первин Ю., Салтовский А. Память ЭВМ 4 54
Первин Ю., Салтовский А. Как работает процессор 5 56
Салихова А., Соколова Н. Графическая система Шпага 1 56
Салтовский А. Организация ввода и вывода в ЭВМ 6 48

«Квант» — Олимпиаде

ЭВМ на Олимпиаде 7 31
Лапушонок И. Программное обеспечение фехтовальных турниров 7 36
Первин Ю. Обработка протоколов соревнований по прыжкам в высоту 7 33
Савин А. Олимпийские кольца 7 38

Задачник «Кванта»

Задачи М601—М660; Ф613—Ф672 1—12
Решения задач М520, М532, М546—М577, М579—М603, М605—М610, М625; Ф558—Ф574, Ф576—Ф617 1—12

***

Письмо в редакцию 8 45
Аврамов А. Арифметические прогрессии в треугольнике Паскаля 11 27

***

Фамилии решивших 3, 6, 9, 12
Победители конкурса «Кванта» 3 25
Премии «Кванта» 9 40

«Квант» для младших школьников

Задачи 1—6, 8—12

***

Бартенев Ф. Блуждающие фишки 3 38
Белый С. Разноцветная математика 6 30
Бендукидзе А., Савин А. Производные пропорции 2 44
Гик Е. Морской бой 11 30
Зельманзон М., Хлабыстова Л. Самосовмещения квадрата и тайнопись 12 32
Изаак Д., Уткина Т. Кружочки Степы Мошкина 1 42
Михайлова Н. Плоды «просвещения» 4 38
Никольская И. «Неверно, что...» — как это понимать? 9 42

***

Алексеев Д. Физика в каникулы 8 48
Дозоров А. По страницам старого учебника 5 44
Юфанова И. Волшебная сказка с физическими вопросами 10 38

Наша обложка

Березин В. Конические сечения и задача Аполлония 2 33
Вавилов В. Эволюта 9 61
Котов Ю. Картины на воде 6 15
Котов Ю. Семейство кубических парабол 7 18
Котов Ю. Умножим уравнения 10 62
Кривошеев Е. Магические восьмиугольники 11 37
Усов В., Чубарев А. Закрученные многоугольники 3 47
Шубелева М. Советские вымпелы — на станции «Луна-12» и на Венере 4 43

По страницам школьных учебников

Габович И. Предел функции 10 40
Земляков А. Проверьте себя 9 47
Иванов Ю. Сколько вариантов? 11 33
12 36

Практикум абитуриента

Виленкин Н. Три точки, три точки, три точки... 1 48
Дубровский В. Неожиданный ракурс 2 46
Матизен В. Найдем ошибку 10 43
Мельник И. Где расположено основание высоты? 4 40
Мерг Ю. Три стандартные задачи 9 51
Перевалов Г. Что значит «знать»? 6 33
Приходько В., Пыж В., Уваров О. Поупражняйся и проверь себя 7 41
Розов Н. Читатели советуют 5 46
Чехлов В. Эти «коварные» векторы 12 40

***

Асламазов Л. Электромагнитная индукция 6 36
Асламазов Л. Силы трения и движение 11 38
Кротов С. Задачи на столкновения тел 12 45
Кузнецов Е. Фотоаппарат на вступительных экзаменах 4 44
Можаев В. Закон всемирного тяготения 3 41

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина 5 53
Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса 5 55
Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко 6 43
Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена 6 45
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 6 42
Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе 7 43
Московский архитектурный институт 7 49

Московский инженерно-физический институт 1 51
Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии 7 48
Московский институт инженеров железнодорожного транспорта 7 42
Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. академика И. М. Губкина 7 51
Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской 7 52
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 6 45
Московский институт стали и сплавов 7 47
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 3 44
4 48
6 56
Московский физико-технический институт 2 51
Московский институт электронного машиностроения 7 46
Московский энергетический институт 7 45
Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана 7 49
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола 5 51
Ростовский государственный университет (механико-математический факультет) 6 44

Спрашивайте — отвечаем 3 17
8 46

Рецензии, библиография

Бровиков И. Задачи комбинаторики 8 51
Гик Е. Серии — 14 лет 8 52
Зорич И. Твой первый робот 9 59
Левитан Е. Школьникам об астрономической картине мира 8 51
Розов Н. Прикладная математика: интересно, актуально, перспективно! 3 59
Розов Н., Смолянский М. Полезное начинание 10 50

* * *

Новые книги 3, 7, 9, 12

Информация

Виленкин А. II Всероссийский слет актива НОУ 2 57
Гейдман Б., Давидович Б., Земляков А. XI праздник юных математиков в Батуми 10 56
Каслин В., Стародуб А. Праздник юных физиков 8 53
Комаров В. На пути в большую науку 2 56
Юносов Е. Турнир юных физиков 8 57
Три доклада на Батумском празднике 10 60

* * *

Заочная физико-техническая школа 1 60
Заочная физическая школа 8 60
Вечерняя физическая школа 8 61
Дополнительный прием в заочные математические школы 8 61

Олимпиады

XIV Всесоюзная олимпиада

Олимпиада по математике 11 45
Задачи, предлагавшиеся на математическом бое 11 7
Олимпиада по физике 11 51
Экспериментальный тур олимпиады по физике 11 54
Призеры олимпиады 11 59

* * *

Всероссийская олимпиада 10 52
XVI лингвистическая олимпиада 4 59
Олимпиада ОмПИ + МФТИ 8 58

Шахматная страничка 1—12

Шахматный конкурс «Кванта» 7—12

Смесь

Бабенко Ю. Задача для исследования 11 11
Гайдук Ю. Забытая теорема (софизм-шутка) 5 17
Касаткин В. Дело каждого из нас 7 40
Котов Ю. Видоизменение поверхности Штейнера 12 30
Криц А. Когда под рукой нет ЭВМ 12 14
Михайленко Н. Несколько вопросов по астрономии 5 42
Побожий Ю. О числе π 6 47
Рыжик В. В чем дело? 1 17
Смородинский Я. Повторение опыта Майкельсона и Морли 10 51
Штеренберг М. Замечательные треугольники 5 31
М. В. Ломоносов и Московский университет 2 23
Заполнение плоскости многоугольниками 2 25
Полупустое равно полуполному (письмо в редакцию) 3 40
Советуем купить! 2, 5

Номер готовили:
А. Виленкин, А. Егоров, Н. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Т. Кольченко, Г. Красиков,
С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

113035 Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62

Сдано в набор 16.10.80
Подписано в печать 28.11.80
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,07 Т-17858
Цена 30 коп. Заказ 2548 Тираж 260 463 экз.

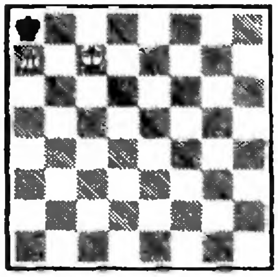
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС „КВАНТА“

Новогодние шутки

Задания предыдущих пяти туров нашего шахматного конкурса были довольно серьезные. Ну, а сейчас, накануне Нового года, можно позволить себе и немного пошутить. Тем более, что трио и даже дуэты на шахматной доске служат неплохим источником шахматного юмора. В сегодняшних примерах и задачах игроки будут брать ходы назад, давать другому игроку фору, бить свои фигуры и т. д. и т. п.

Целая серия забавных сверхминиатюр связана со взятием ходов назад.

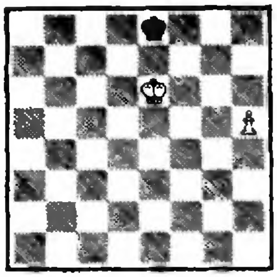


Белые берут назад последний ход и дают мат в 1 ход.
а) позиция на диаграмме;
б) короля с с7 переставить на с8.

В этих задачах-близнецах берется назад взятие пешкой b6:a7, вместо чего следует **1.b6—b7×**, причем в случае а) на а7 мог стоять только черный конь, а в случае б) — только черный слон. Заменяя в б) пешку а7 белым конем, получаем третьего близнеца — вместо Кb5:Са7 решает **1.Кb5—c7×**.

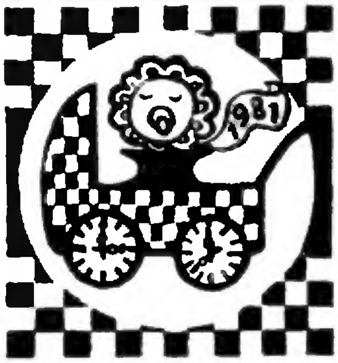
Следующую задачу-шутку можно рассматривать как иллюстрацию к роману в стихах Пушкина «Евгений Онегин». Надеемся, что вы хорошо знаете не только математику, но и литературу, и поэтому помните известную «партию» между Ленским и Ольгой:

Уединясь от всех далеко,
Они над шахматной доской,
На стол облокотясь порой,
Сидят, задумавшись глубоко,
И Ленский пешкою ладью
Берет в рассеяньи свою



Э. Погосянц. Белые берут назад последний ход и дают мат в 1 ход.

Данная позиция как раз возникла после того, как рассеянный Ленский нарушил правила игры и взял пешкой g4 свою ладью на h5. Теперь он умоляет Ольгу простить его, берет назад ход g4:Лh5 и объявляет ошеломленной девушке шах и мат: **1.Лh8×!**

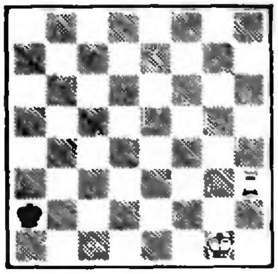


Хотя задача эта и шуточная, но интересно, что она не допускает кривотолков. Например, предположение, что Ленский взял на h5 своего ферзя, а не ладью, приводит к тому, что Ольга тоже играла рассеянно — иначе не объяснить, почему черный король отправился под шах. Однако у Пушкина об этом ничего не сказано!

Поставим теперь на доску всего два короля — белого на h5 и черного на е8. Задание такое: белые и черные берут назад последний ход, затем черные делают ход, и белые дают мат в 1 ход.

Это обычное задание настолько расширяет возможности сторон, что одних королей хватает без всяких шуток! Своим последним ходом белый король взял с g6 черную ладью на h5 (Кpg6:Лh5) которая, в свою очередь, только что побила с h8 белого ферзя на h5 (Лh8:Фh5). В восстановленной позиции черные делают короткую рокировку 0—0! и сразу получают мат — **1.Фh5—h7×** Вот вам и дуэт на шахматной доске!

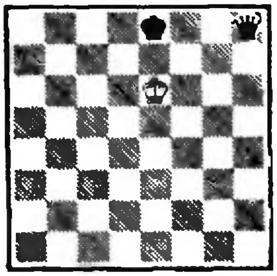
В конкурсной задаче-шутке № 1 нелегко догадаться, что последним ходом белых была... короткая рокировка! Но и с такой подсказкой вам еще предстоит поломать голову (на рисунке ошибок нет!).



1. Белые берут назад последний ход и дают мат в 2 хода.
2. Белый конь на f5, черный король на h2. Белые и черные берут назад последний ход, затем черные делают ход, и белые дают мат в 1 ход.

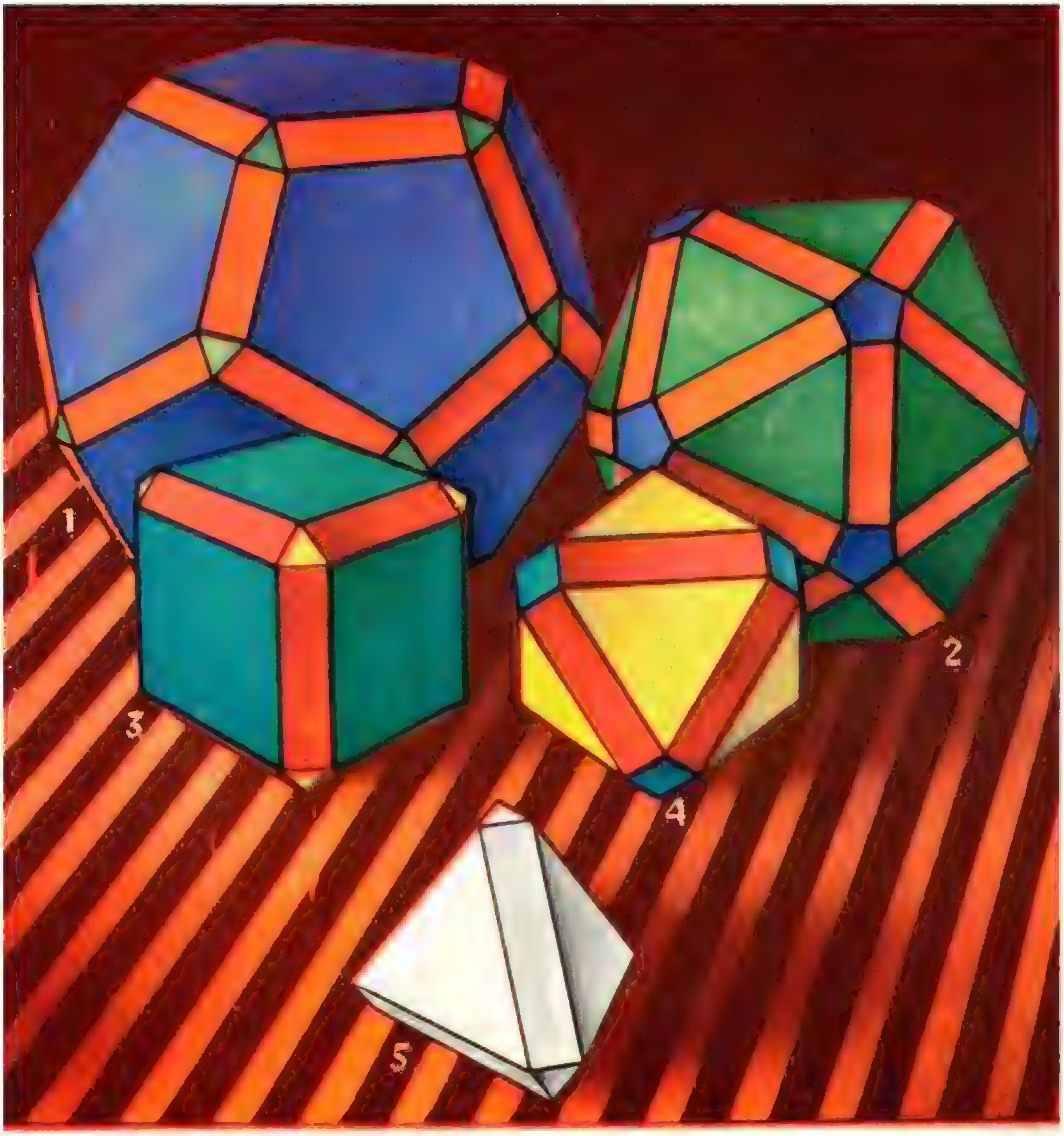
Для решения конкурсных позиций № 3 и № 4 от вас потребуется не только знакомство с дробными числами, но и...чувство юмора (вот вам и подсказка!).

3. На доске два короля — белый на е6 и черный на f8. Белые дают мат в 1/2 хода.



4. Белые дают мат в 2/3 хода.

Срок присылки решений — 31 января 1981 г.



Изображенные здесь многогранники получены из пяти правильных многогранников срезанием их вершин и ребер (подумайте, как это сделано). Эти многогранники обладают замечательным свойством: вершины каждого из них «устроены одинаково». Это означает, что любую вершину такого многогранника при помощи поворота вокруг некоторой оси можно перевести в любую другую его вершину так, что многогранник при этом совместится с самим собой.

Многогранники, устроенные подобным образом, называются положительно транзитивными. О таких многогранниках см. на с. 9

К первой странице обложки

В статье А. Савина «Олимпийские кольца» («Квант», 1980, № 7) ставился вопрос о расположении на плоскости в виде «розетки» нескольких колец, зацепленных так, что никакие два кольца не сцеплены, в то время как все кольца в совокупности — сцеплены.

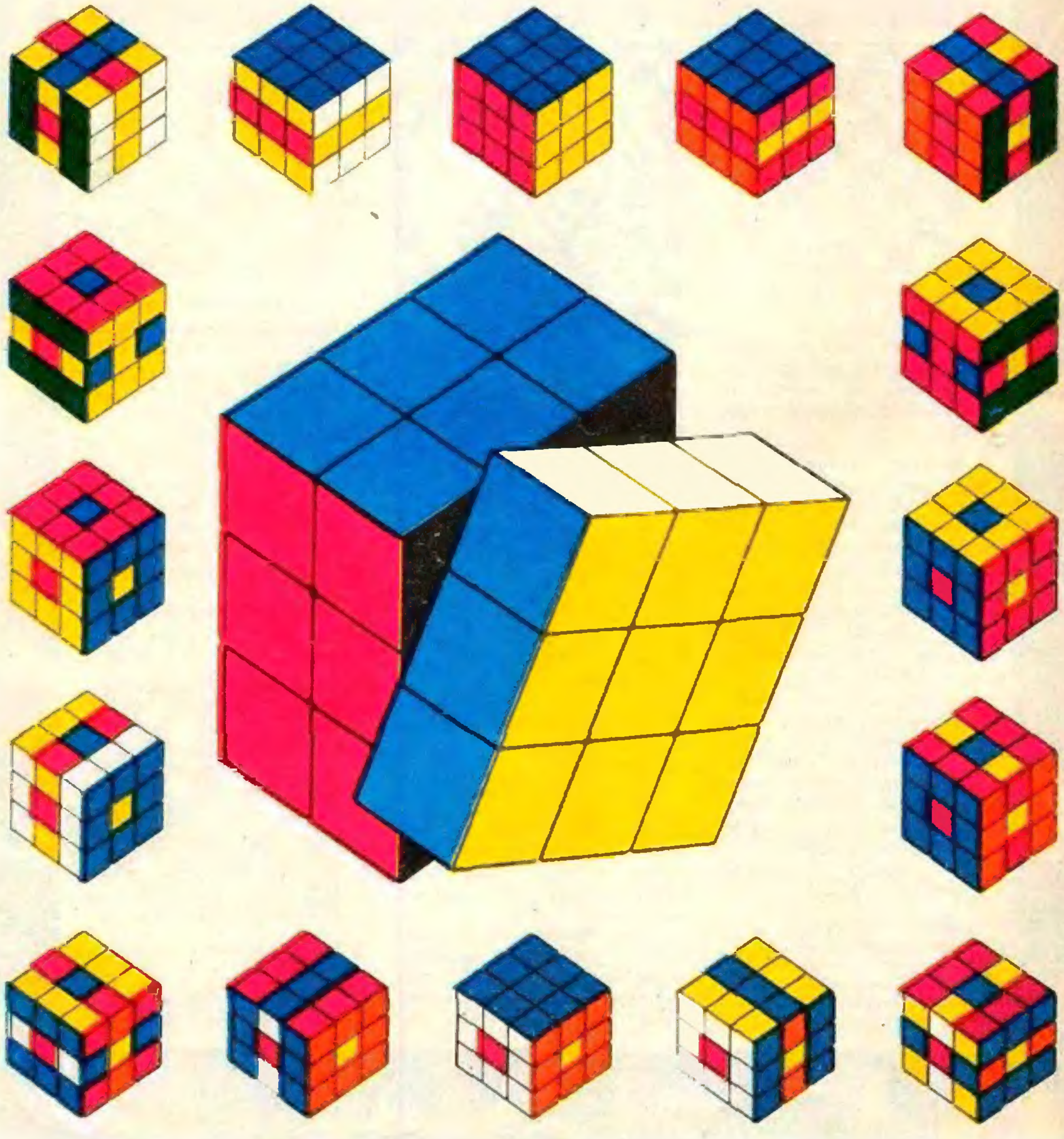
Редакция получила несколько писем, содержащих примеры таких зацеплений. Пример киевлянина М. Корнилова мы публикуем на обложке этого номера журнала, такой же пример прислал нам и А. Азимов из Ташкента.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Наш художник изобразил здесь «жизнеописание» венгерского шарнирного кубика. Внутри этой пластмассовой математической игрушки-головоломки спрятан остроумно устроенный шарнирный механизм, позволяющий поворачивать любую «плитку» из девяти цветных кубиков. В центре крупным планом показано начало поворота (примерно на 60°) «ближней» плитки против часовой стрелки.

Окаймляют большой куб более мелкие изображения превращений куба, полученные подобными поворотами. Вверху в центре показан куб в «начальной позиции» (все грани одноцветные); справа от него изображен куб после поворота двух горизонтальных плиток (верхней и нижней); затем повернули две вертикальные плитки (какие?). Как развивались события дальше — проследите сами. Обратите внимание на симметричные раскраски, получившиеся в середине вертикальных рядов. Проследите, как при повороте двух горизонтальных плиток второго слева куба в верхнем ряду вновь возникает начальная позиция,— закончился своеобразный жизненный цикл шарнирного кубика!

О правилах игры в эту головоломку и о возникающих при этом задачах см. с. 32

В. Дубровский